c, d — некоторые постоянные, зависящие от параметров материала трубы и оболочки. Как и в формуле (14), соответствие между точками z и ζ задается функцией (5). Ядра $R(t)$, $\Pi(t)$ — соответственно ядра релаксации и ползучести вязкоупругого материала трубы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1970.
2. Шерман Д. И. Об одном методе решения некоторых задач теории упругости для двусвязных областей. «Докл. АН СССР», 55, № 8, 1947.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию
3.11 1971 г.

Кафедра
теории упругости

A. A. Shestakov

DEFORMATION OF A THICK-WALLED CYLINDER WEAKENED BY AN ELLIPTIC CAVITY

An approximate solution is obtained for the problem of deformation of a thick-walled cylinder of a linear viscoelastic material with an elliptic cavity.

Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1973

УДК 531.01

В. В. КОЗЛОВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Пусть M — дифференцируемое многообразие и $\xi(x)$ — непрерывное векторное поле на нем. Обозначим через $g^t(x)$ фазовый поток, задаваемый дифференциальным уравнением

$$\dot{x}=\xi(x). \tag{1}$$

Определение. Функции $F_i: M\to R$ $(i=1, 2, ..., k)$ класса C^1 образуют семейство частных интегралов системы уравнений (1), если существуют числа $c_1, c_2, ..., c_k\in R$, такие, что множество $E=\{x: F_i=c_i;\ i=1, 2, ..., k\}$ инвариантно относительно $g^t(x)$. Функция F называется частным интегралом, если она входит в некоторое семейство. Среди частных интегралов могут быть и общие.

Отметим сразу, что свойства инвариантных многообразий, отвечающих общим и по-настоящему частным интегралам уравнений (1), существенно отличаются друг от друга. Например, для частных интегралов несправедлива, вообще говоря, теорема К. Якоби об интегрирующем множителе (соответствующий пример приведен в книге [1], стр. 59—60). Правда, С. А. Чаплыгин дал обобщение теоремы К. Якоби о последнем множителе на некоторые случаи, когда система (1) имеет не общие, а частные интегралы (см. [2]). Вот точная формулировка теоремы Чаплыгина. Предположим, что уравнения (1) имеют последний множитель, и пусть $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_k$ — общие, а $\Phi_{k+1}, ..., \Phi_{n-2}$ — частные интегралы (типа $\dot\Phi=0$, когда $\Phi=0$) этой системы уравнений. Пусть

$$\dot\Phi_j = \sum_{l=k+1}^{n-2} \Theta_{jl}\Phi_l^{n_{jl}},$$

причем $n_{jl}>1$ (здесь Θ_{jl} — функции класса C^1). Предположим, что на множестве $E=\{x: \Psi_i(x)=c_i,\ \ \Phi_j(x)=0;\ i=1, 2, ..., k;\ j=k+1, ..., n-2\}$ функции $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_k, \Phi_{k+1}, ..., \Phi_{n-2}$ независимы. Тогда уравнения (1) на E приводятся к уравнениям с известным последним множителем и поэтому интегрируются в квадратурах.

2. Пусть теперь на каноническом многообразии M^{2n} задана функция H, определяющая канонические уравнения

$$\dot{x} = I \operatorname{grad} H, \tag{2}$$

где

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Для уравнений (2) известна теорема Лиувилля об интегрируемости [3, 4, 5]. Эта теорема утверждает, что если у канонической системы (2) с n степенями свободы существуют n первых интегралов в инволюции, расслаивающих фазовое пространство задачи (M^{2n}) на компактные инвариантные многообразия, то эти многообразия суть n-мерные торы, фазовые траектории являются «обмотками» этих торов и, наконец, решения уравнений (2) можно найти с помощью квадратур.

В этом пункте мы укажем ограничения на частные интегралы дифференциальных уравнений (2), при которых справедливы все заключения теоремы Лиувилля.

Теорема 1. Предположим, что на каноническом $2n$-мерном многообразии M^{2n} заданы n функций $H=F_1, F_2, \ldots, F_n$. Пусть L — связная компонента множества $E=\{x: F_i(x)=f_i;\ i=1, 2, \ldots, n\}$. Предположим, что функции F_i на L независимы и в точках множества L выполнены соотношения:

1) $(F_i F_j) = 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n;$

2) $\operatorname{grad}(F_i F_j) = 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$

Тогда: 1) L — гладкое n-мерное многообразие, инвариантное относительно фазового потока g_H^t с гамильтонианом H; 2) решения уравнений (2), траектории которых лежат на L, находятся с помощью квадратур. Если многообразие L компактно, то: 3) L диффеоморфно n-мерному тору T^n; 4) фазовый поток g_H^t определяет на L условно периодическое движение.

Прежде чем доказать эту теорему, сделаем несколько замечаний.

А. Функции $F_1, F_2, \ldots, F_n$, о которых идет речь в теореме 1, составляют семейство частных интегралов канонических уравнений (2).

В. Условия теоремы 1 достаточны, но не являются необходимыми. Это показывает следующий пример. Пусть на линейном пространстве R^4 с естественной канонической структурой заданы две функции: $H=p_1q_2+p_2q_1$ и $F=p_1+p_2$. Нетрудно убедиться в том, что многообразие $L=\{p_1q_2+p_2q_1=h,\ p_1+p_2=0\}$ инвариантно относительно g_H^t, но функции H и F не удовлетворяют условиям теоремы 1. Однако система с гамильтонианом H интегрируема по Лиувиллю, потому что можно указать еще один интеграл этой задачи: $p_1^2-p_2^2=p_0$.

С. Теорему С. А. Чаплыгина о последнем множителе (см. п. 1) можно применять к каноническим уравнениям (2) только тогда, когда $2n-2=n$, то есть при $n=2$. Очевидно, что теорема Чаплыгина налагает на частный интеграл F системы (2) ограничение $(H, F)=\Phi F^\alpha$, причем $\alpha>1$ (Φ — функция класса C^1). В таком случае

$$\operatorname{grad}(H, F) = F^\alpha \operatorname{grad}\Phi + \alpha\Phi F^{\alpha-1}\operatorname{grad} F,$$

то есть $\operatorname{grad}(H, F)=0$, когда $F=0$. Поэтому в применении к каноническим уравнениям (2) с двумя степенями свободы теорема 1 является обобщение теоремы С. А. Чаплыгина. То, что обобщение существенно, показывает следующий пример. Пусть на линейном пространстве R^4 с естественной канонической структурой заданы две функции: $H=\frac{1}{2}p_1^2\varphi(q_1q_2)+p_2$ $(\varphi\in C^1)$ и $F=p_1+p_2$. Пусть $L=\{p_1=p_2=0\}$. Легко показать, что L инвариантно относительно g_H^t и $(H, F) = -\frac{1}{2}p_1^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right)$. Нетрудно проверить, что выполнены все условия теоремы 1, но функция F не является интегралом С. А. Чаплыгина.

3. Доказательство теоремы 1. Производная функция F_i по направлению векторного поля $I\operatorname{grad}F_i$ равна нулю на многообразии L (условие 1). Значит, поля $I\operatorname{grad}F_j$ касаются L. Из условия 2 следует, что n касательных векторных полей $I\operatorname{grad}F_i$ попарно коммутируют на многообразии L.

Функции $F_1, \ldots, F_n$ независимы, поэтому многообразие L разбивается на области, в которых дифференциальные уравнения

$$\dot{x} = I\operatorname{grad}F_k, \qquad k=1, 2, \ldots, n,$$

можно разрешить относительно какой-либо совокупности n переменных. Так получаем n систем дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = Y_k(y), \tag{3}$$

фазовые потоки которых перестановочны между собой. Обозначим через X_k линейные дифференциальные операторы, соответствующие уравнениям (3).

Лемма (С. Ли). Предположим, что в $C^1(D)$ (D — область в R^n) заданы n независимых линейных дифференциальных операторов первого порядка $A, A_2, \ldots, A_n$. Пусть $[A, A_i]=0$ $(i=2, 3, \ldots, n)$ и, кроме того, операторы $A_2, \ldots, A_n$ образуют разрешимую алгебру Ли относительно операции коммутирования. Тогда решения уравнения $A(f)=0$ находятся с помощью квадратур [6, 7].

В нашем случае операторы X_k попарно коммутируют, потому соответствующая алгебра Ли абелева. Для доказательства пункта 2 остается заметить, что абелевы алгебры разрешимы.

Справедливость заключений 3 и 4 устанавливается так же, как при доказательстве соответствующих пунктов теоремы Лиувилля [5].

4. Применим общую теорему 1 к задаче о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Обозначения этого пункта совпадают с общепринятыми (см., например, [1]). Ввиду того что уравнения Эйлера — Пуассона не являются каноническими, теорему 1 придется соответствующим образом переформулировать.

Теорема 2. Если функции H — интеграл энергии, M — интеграл момента, Γ — геометрический интеграл и F — частный интеграл динамических уравнений Эйлера — Пуассона, независимы на связной компоненте L инвариантного множества $E=\{H=h,\ M=m,\ \Gamma=1,\ F=f\}$ и в точках множества L векторы $\operatorname{grad}F$ и $\operatorname{grad}M$ параллельны, то: 1) L — гладкое двумерное инвариантное многообразие динамических уравнений Эйлера — Пуассона; 2) L диффеоморфно T^2; 3) фазовый поток определяет на L условно-периодическое движение: 4) решения уравнений Эйлера — Пуассона, траектории которых лежат на L, можно найти с помощью квадратур.

Доказательство. В канонических переменных θ, φ, ψ (углы Эйлера), $p_\theta, p_\varphi, p_\psi$ функция Гамильтона имеет вид $H(\theta, \varphi, -, p_\theta, p_\varphi, p_\psi)$. Интегралу p_ψ канонических уравнений соответствует интеграл момента уравнений Эйлера — Пуассона. Используя интегралы M и Γ, можно число переменных в динамических уравнениях уменьшить на два (понятно, что это можно сделать там, где M и Γ независимы). Выполним преобразование Эйлера — Пуассона:

$$p = \frac{1}{A\sin\theta}\left[(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)\sin\varphi + p_\theta\sin\theta\cos\varphi\right],$$

$$q = \frac{1}{B\sin\theta}\left[(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)\cos\varphi - p_\theta\sin\theta\sin\varphi\right],$$

$$r = \frac{1}{C}p_\varphi,$$

$$\gamma_1 = \sin\varphi\sin\theta, \quad \gamma_2 = \cos\varphi\sin\theta, \quad \gamma_3 = \cos\theta.$$

В эти формулы p_ψ входит как параметр. Тогда полученные четыре урав- нения перейдут в замкнутую систему уравнений для θ, φ, p_θ, p_φ. Из единственности решений следует, что уравнения для $\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi$ имеют канонический вид с функцией Гамильтона

$$H(\theta, \varphi, -, p_\theta, p_\varphi, p_\psi^\circ). \tag{4}$$

При преобразовании Эйлера — Пуассона $\dot{F}$ перейдет в (H, F). Поэтому условия grad $\dot{F} \parallel$ grad M и grad$(H, F) = 0$ эквивалентны. Значит, для ка- нонических уравнений с гамильтонианом (4) справедлива теорема 1. Заключение 1 теоремы 2 очевидно, заключения 2 и 3 доказываются по- средством применения теоремы 1. Чтобы найти переменные p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3, достаточно воспользоваться еще раз преобразованием Эйле- ра — Пуассона.

5. В заключение сделаем несколько замечаний.

А. Частный интеграл в случае Горячева — Чаплыгина ([1], гл. VIII) удовлетворяет условиям теоремы 2. Тем самым проясняется картина движения в этом случае.

В. Теорема 2 справедлива для любого поля сил, имеющего ось сим- метрии, которая проходит через точку закрепления (в частности, для ньютоновского поля сил и поля де Бруна).

С. В применении к задаче о вращении твердого тела вокруг непо- движной точки теорема 2 является обобщением теоремы С. А. Чаплы- гина о последнем множителе (см. п. 1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твер- дого тела около неподвижной точки. М., Гостехиздат, 1953.
2. Чаплыгин С. А. Собрание сочинений, т. I. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
3. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.—Л, ОНТИ, 1937.
4. Арнольд В. И. Об одной теореме Лиувилля, касающейся интегрируемых проблем динамики. «Сиб. матем. ж.», 4, № 2, 471—474, 1963.
5. Арнольд В. И. Лекции по классической механике. Изд-во МГУ, ротапринт, 1968.
6. Чеботарев Н. Г. Теория групп Ли. М.—Л., Гостехиздат, 1940.
7. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. М., ИЛ, 1947.

Кафедра
теоретической механики

Поступила в редакцию
26.11 1971 г.

V. V. Kozlov

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES PARTICULIÈRES DES SYSTÈMES CANONIQUES

Deux théorèmes sont démontrés. Le premier, généralisant le théorème classique de Liouville, établit des conditions suffisantes simples pour que dans un système hamilto- nien, la variété invariante définie par des intégrales particulières porte des solutions pou- vant être obtenues par quadratures; supposée compacte, cette variété sera alors un tore à plusieurs dimensions avec des solutions quasi périodiques. Le second théorème est consacré a la quatrième intégrale particulière des équations du mouvement d'un solide autour d'un point fixe. Déduit du premier, ce théorème peut être appliqué au cas de Goryatchev—Tchaplyguine.

Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1973

УДК 536.24

А. Я. САГОМОНЯН, В. А. КУЛИКОВ

ВЗРЫВ СФЕРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА В ПЛАСТИЧЕСКОЙ СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ

Пусть в пластической сжимаемой однородной изотропной среде, занимающей все пространство, находится сферический заряд конечного радиуса. В некоторый момент времени $t=0$ заряд без изменения объ- ема мгновенно превращается в газ высокого давления и температуры. Предполагаем, что в результате взрыва в пластической среде возникает ударная волна. Требуется найти закон распространения этой волны, а также поля давления, скорости и температуры. К пластическим сжи- маемым средам, в которых возникают ударные волны, относятся, на- пример, многие виды грунтов [1]. При исследовании задачи принимаем, что пластическая среда при нагружении (увеличение давления) изме- няет свою плотность по определенному закону, но при разгрузке (уменьшение давления) сохраняет полученную при нагружении плот- ность [1]. Предполагаем, что наибольшее сжатие частица испытывает на ударной волне [1]. Очевидно, задача обладает сферической симмет- рией. В силу приведенного выше свойства среды в лагранжевой системе координат r, t, где r — расстояние частицы среды от центра заряда до начала движения, плотность среды за ударной волной есть функция координаты r, не зависящая от времени t. Уравнения движения и энер- гии пластической среды в рассматриваемом случае имеют вид

$$\rho_0 r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (r+u)^2 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + (\sigma_r - \sigma_\theta)\frac{\partial (r+u)^2}{\partial r}, \tag{1}$$

$$(r+u)^2 \frac{\partial (r+u)}{\partial r} = r^2 \frac{\rho_0}{\rho}, \tag{2}$$

$$\rho_v r^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(e + \frac{v^2}{2}\right) - \sigma_r v \frac{\partial (r+u)^2}{\partial r} + v\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}(r+u)^2 +$$

$$+ \sigma_r \frac{\partial v}{\partial r}(r+u)^2 - \frac{\partial}{\partial r}\left[(r+u)^2 q_r\right], \qquad v = \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{3}$$

Здесь $u(r, t)$ — смещение; ρ_0, ρ — начальная плотность среды и плотность ее за ударной волной; σ_r, σ_θ — радиальное и тангенциальное напряжения; e — внутренняя энергия; v — скорость частицы, q_r — теп- ловой поток в направлении r.