Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА,
МЕХАНИКА

5

Отдельный оттиск

1974

ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1974

УДК 531.36

В. В. КОЗЛОВ

ГЕОМЕТРИЯ ПЕРЕМЕННЫХ «ДЕЙСТВИЕ — УГОЛ» В ЗАДАЧЕ ЭЙЛЕРА — ПУАНСО

Как и во всякой интегрируемой задаче, в задаче Эйлера — Пуансо существуют так называемые канонические переменные «действие — угол» (I, φ), в которых функция Гамильтона зависит только от действия I. Некоторые свойства этих переменных были известны А. Пуанкаре [1, п. 86] и М. Борну [2, § 19]. Недавно А. Деприт [3] разделил переменные в рассматриваемой задаче, что позволило Ю. А. Садову [4] получить формальные выражения для (I, φ). Геометрический анализ этих переменных дает возможность установить новые свойства представления Пуансо.

§ 1. Переменные «действие — угол».

Лемма А. Деприт [3]. Существует такое каноническое преобразование $(\vartheta\varphi\psi p_\vartheta p_\varphi p_\psi)\to(l\varphi_2\varphi_3 L I_2 I_3)$ с аналитической производящей функцией, что в новых переменных гамильтониан задачи Эйлера — Пуансо приобретает вид

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 l}{A}+\frac{\cos^2 l}{B}\right)(I_2^2-L^2)+\frac{1}{2C}L^2.$$

Канонические переменные $(l\varphi_2\varphi_3 L I_2 I_3)$ будем называть переменными Деприт. Описанию механического смысла этих переменных предпошлем некоторые обозначения: OXY — неподвижный трехгранник с началом в точке подвеса; Oxy — подвижная система координат (главные центральные оси инерции); π — плоскость, проходящая через точку закрепления и перпендикулярная вектору постоянного момента.

В принятых обозначениях L — проекция момента на подвижную ось Oz; I_2 — модуль вектора постоянного момента; I_3 — проекция момента на неподвижную ось OZ (интеграл площадей); l — угол между осью Ox и линией пересечения π с Oxy; φ_2 — угол между линиями пересечения π с плоскостями Oxy и OXY; φ_3 — угол между осью OX и линией пересечения π с плоскостью OXY. Область возможных значений L и I_2 есть

$$\Delta=\{L, I_2: |L|\leqslant|I_2|\}.$$

Отметим, что переменные Деприт аналогичны каноническим переменным Делоне в интегрируемой задаче двух тел.

Не теряя общности, можно считать, что $A \geqslant B \geqslant C$. В задаче Эйлера—Пуансо обычным способом введем переменные «действие—угол»:

$$I_1(I_2, T) = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{\frac{2T - I_2^2\left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right)}{\frac{1}{C} - \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right)}}\, dl. \tag{1}$$

Сопряженная с I_1 переменная выражается через l эллиптической квадратурой.

Область Δ в координатах I_1, I_2 есть снова $\Delta = \{I_1, I_2;\ |I_1| \leqslant |I_2|\}$. В канонических переменных «действие—угол» $(\varphi_1\varphi_2\varphi_3 I_1 I_2 I_3)$ функция T имеет вид $T(\widehat{\varphi}_1\widehat{\varphi}_2\widehat{\varphi}_3 I_1 I_2 \widehat{I}_3)$, то есть зависит только от I_1, I_2. Используя формулу (1), легко получить, что линии уровня функции $2T(I_1, I_2)/I_2^2$ в координатах «действие» суть прямые линии, проходящие через начало координат. Прямые $I_1 = 0$, $|I_1| = |I_2|$ (лежащие в Δ) отвечают вращениям твердого тела вокруг меньшей и большей осей инерции. Вращениям вокруг средней оси инерции соответствуют точки из Δ, расположенные на двух прямых $2T(I_1, I_2) = \frac{1}{B} I_2^2$.

Отметим, что положение прямых линий $2T = \frac{1}{B} I_2^2$ зависит от двух параметров — отношений моментов инерции тела. Когда $B \to A$, эти прямые стремятся к прямой $I_1 = 0$; когда $B \to C$, они стремятся к паре прямых $|I_1| = |I_2|$.

Лемма 1. Функция $T(I_1, I_2)$ непрерывна, является однородной степени 2 в Δ и аналитична в области

$$\Delta_a = \Delta \setminus \left(\{I_1 = 0\} \cup \left\{2T = \frac{1}{B} I_2^2\right\} \cup \{|I_1| = |I_2|\}\right).$$

Если $A > B > C$, то три прямые линии $I_1 = 0$, $2T = \frac{1}{B} I_2^2$ являются купюрами аналитичности функции $T(I_1, I_2)$.

Доказательство легко следует из формулы (1).

§ 2. Вычисление чисел вращения и их свойства. Рассмотрим геометрическое представление Пуансо. Когда на эллипсоиде инерции точка касания (полюс) сделает один полный оборот, тело повернется вокруг оси постоянного момента на некоторый угол $\alpha = \alpha(2T/I_2^2;\ A, B, C)$. Функция $\alpha(p;\ A, B, C)$, $p = 2T/I_2^2$ была введена А. Пуанкаре и ее значения являются числами вращения потоков, возникающих на соответствующих инвариантных торах задачи Эйлера—Пуансо [1, п. 86]. Положим $\omega_i(I_1, I_2) = \frac{\partial T}{\partial I_i}$, $i = 1, 2$.

Лемма 2. В четырех связных подобластях области Δ_a, примыкающих к прямым $|I_1| = |I_2|$ (вращения вокруг оси Oz), справедливо равенство

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{2\pi}\, \alpha\left(\frac{2T}{I_2^2};\ A, B, C\right).$$

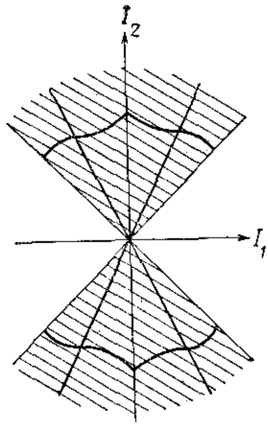
При доказательстве этого утверждения используются механический смысл переменных Депри и определение чисел вращения Пуанкаре.

Рассмотрим в области Δ линию уровня функции

$$T: I_1 = I_1(I_2, T), \quad T = \mathrm{const}.$$

Лемма 3. При $I_1, I_2 \geqslant 0$ функция $I_1 = I_1(I_2, T)$ непрерывна и монотонно убывает, причем $\frac{\partial I_1}{\partial I_2} = -\frac{\omega_2}{\omega_1}$.

На рисунке изображены линии уровня функции T (ясно, что все они подобны). Область Δ заштрихована и выделены две прямые $2T = \frac{1}{B} I_2^2$.



Теперь перейдем к вычислению функции α. Из формулы дифференцирования эллиптического интеграла вида (1) по параметру

$$\left(\frac{\partial}{\partial \beta} \oint f(\beta, x)\, dx = \oint \frac{\partial}{\partial \beta} f(\beta, x)\, dx\right)$$

получим следующее соотношение:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{\partial I_1}{\partial I_2} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right) dl}{\sqrt{\left[p - \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right)\right]\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B}\right)}}, \tag{2}$$

где

$$p = \frac{2T}{I_2^2} = \mathrm{const}\left(\frac{1}{A} < p < \frac{1}{C},\ p \neq \frac{1}{B}\right).$$

Теорема 1. Функция $\alpha(p; A, B, C)$ аналитична на $\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{C}\right) \setminus \left\{\frac{1}{B}\right\}$, причем

1) $p \to \frac{1}{A}$, $\quad \frac{1}{2\pi}\alpha \to \frac{\sqrt{BC}}{\sqrt{(A-C)(A-B)}} - 1$;

2) $p \to \frac{1}{C}$, $\quad \frac{1}{2\pi}\alpha \to \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{(B-C)(A-C)}} - 1$;

3) $p \to \frac{1}{B}$, $\quad \alpha \to \infty$.

Доказательство.

3. Когда $p = \frac{1}{B}$, интеграл (2) расходится.

$$2)\ \lim_{p\to\frac{1}{C}} \alpha(p;\ A, B, C) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\dfrac{\sin^2 l}{A}+\dfrac{\cos^2 l}{B}}{\dfrac{1}{C}-\dfrac{\sin^2 l}{A}-\dfrac{\cos^2 l}{B}}\,dl \text{ (формула (2)).}$$

Остается вычислить этот интеграл.

1. Переменные Депри можно ввести в окрестности вращений вокруг большей оси инерции (Ox). Тогда для функции α получим формулу (2), в которой моменты инерции A и C переставлены по отношению один к другому. Устремляя в новой формуле p к $\frac{1}{A}$, получаем утверждение 1. Как и следовало ожидать, формулы пунктов 1 и 2 переходят одна в другую, когда A и C меняются местами.

§ 3. Невырожденность задачи Эйлера—Пуансо. Гессиан функции T по переменным I_1, I_2 обозначим через $\Gamma(I_1, I_2)$.

Теорема 2.

1) Если $A=B=C$, то $\Gamma\equiv 0$ в области Δ.

2) Если $A=B>C$, то $\Gamma>0$ в Δ.

3) Если $A>B=C$, то $\Gamma<0$ в Δ.

4) Если $A>B>C$, то $\Gamma>0$ в четырех связных подобластях Δ_a, примыкающих к прямым $|I_1|=|I_2|$. В остальных четырех подобластях Δ_a гессиан $\Gamma<0$.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 очевидны.

3. Когда $B=C$, интеграл (1) нетрудно вычислить. Он равен

$$\sqrt{\left(\frac{I_2^2}{C}-2T\right)\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)}.$$

Следовательно,

$$T=\frac{1}{2C}I_2^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)I_1^2 \text{ и } \Gamma=\frac{1}{C}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)<0 \text{ в } \Delta.$$

$$4.\quad \frac{\partial^2 T}{\partial I_i \partial I_j}=\frac{\partial(\omega_1,\omega_2)}{\partial(I_1,I_2)}=\frac{\partial(\omega_1\omega_2)}{\partial(\omega_1\alpha)}\,\frac{\partial(\omega_1\alpha)}{\partial(Tp)}\,\frac{\partial(Tp)}{\partial(I_1I_2)},$$

где $\alpha=\frac{\omega_2}{\omega_1}$. Каждая из этих матриц Якоби определена в Δ_a. При этом

$$\det\frac{\partial(\omega_1\omega_2)}{\partial(\omega_1\alpha)}=\det{}^{-1}\frac{\partial(\omega_1\alpha)}{\partial(\omega_1\omega_2)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{\omega_2}{\omega_1^2} & \dfrac{1}{\omega_1}\end{vmatrix}^{-1}=\omega_1,$$

$$\det\frac{\partial(Tp)}{\partial(I_1I_2)}=\begin{vmatrix}\omega_1 & \omega_2\\ \dfrac{2\omega_1}{I_2^2}\quad\dfrac{2\omega_2}{I_2^2} & -\dfrac{4T}{I_2^3}\end{vmatrix}=-\frac{4T\omega_1}{I_2^3}.$$

Дифференцируя выражение (1) по I_1, получаем

$$1=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{\dfrac{\partial T}{\partial I_1}}{\sqrt{\left[2T-I_2^2\left(\dfrac{\sin^2 l}{A}+\dfrac{\cos^2 l}{B}\right)\right]\left(\dfrac{1}{C}-\dfrac{\sin^2 l}{A}-\dfrac{\cos^2 l}{B}\right)}}\,dl=$$

$$= \frac{\omega_1}{\sqrt{T}} \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \oint \frac{dl}{\sqrt{\left[1 - \frac{1}{p}\left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right)\right]\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B}\right)}}.$$

Значит, $\omega_1 = K(p; A, B, C)\sqrt{T}$, где

$$K^{-1}(p; A, B, C) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \oint \frac{dl}{\sqrt{\left[1 - \frac{1}{p}\left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right)\right]\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B}\right)}} > 0.$$

Функция α зависит лишь от p; A, B, C; следовательно, $\frac{\partial \alpha}{\partial T} = 0$. Поэтому

$$\det \frac{\partial(\omega_1 \alpha)}{\partial(Tp)} = \begin{vmatrix} \frac{K(p)}{2\sqrt{T}} & \frac{\partial \omega_1}{\partial p} \\ 0 & \frac{\partial \alpha}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{K(p)}{2\sqrt{T}} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial p}.$$

Учитывая результаты предыдущих вычислений, получаем окончательно

$$\Gamma = \left|\frac{\partial^2 T}{\partial I^2}\right| = -\frac{2\omega_1^3}{I_2^3} \frac{\partial \alpha}{\partial p}.$$

Чтобы решить вопрос о знаке $\left|\frac{\partial^2 T}{\partial I^2}\right|$, осталось вычислить $\frac{\partial \alpha}{\partial p}$. Дифференцируя интеграл (2), получаем при $\frac{1}{B} < p < \frac{1}{C}$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p} = -\int_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right)\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B}\right)}{2\sqrt{\left\{\left[p - \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right)\right]\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B}\right)\right\}^3}} dl < 0.$$

Когда $\frac{1}{A} < p < \frac{1}{B}$, из аналогичной формулы следует, что $\frac{\partial \alpha}{\partial p} > 0$.

З а м е ч а н и е. Теорема 2 является уточнением соответствующего результата, полученного В. И. Арнольдом [5, дополнение], который доказал, что в общем случае $\Gamma \not\equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. П у а н к а р е А. Новые методы в небесной механике. «Избранные труды», т. I. М., «Наука», 1971.
2. Б о р н М. Лекции по атомной механике, т. I. Киев, ОНТИ, 1939.
3. Д е п р и А. Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости. Сб. «Механика», вып. 2, 3—9, 1968.
4. С а д о в Ю. А. Переменные «действие — угол» в задаче Эйлера — Пуансо. «Прикл. матем. и механ.», 34, вып. 5, 962—964, 1970.

5. Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. «Успехи матем. наук», 18, вып. 5, 13—40, 1963.

Поступила в редакцию
23.2 1973 г.

Кафедра
теоретической механики

V. V. Kozlov

LA GÉOMÉTRIE DES VARIABLES ACTION—ANGLE DANS LE PROBLÈME D'EULER—POINSOT

L'article offre le calcul des nombres de rotation des flots naissants sur les tores invariants de ce problème.