АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Том 42

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

2

МОСКВА · 1978

Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.31

ЛИБРАЦИЯ В СИСТЕМАХ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

С. В. Болотин, В. В. Козлов

(Москва)

Рассматривается задача о существовании либрационных периодических движений натуральных механических систем со многими степенями свободы. Получены оценки числа либрационных движений с данным значением полной энергии через топологические инварианты области возможных движений. В качестве примера рассмотрена задача о колебаниях плоского многозвенного маятника.

1. Постановка задачи. Рассмотрим натуральную механическую систему с конфигурационным пространством M, потенциальной энергией U и кинетической энергией T. Будем предполагать, что кинетическая энергия определяет полную риманову метрику на M. Уравнения движения системы допускают интеграл энергии $T + U = h$. При фиксированном значении h движение происходит в множестве

$$V = \{q \in M : U(q) \leqslant h\}$$

называемом областью возможных движений.

Согласно принципу наименьшего действия, движение внутри V происходит по геодезическим линиям метрики Якоби

$$\langle q^{\cdot}, q^{\cdot} \rangle = \| q^{\cdot} \|^2 = 2(h - U(q))\, T(q, q^{\cdot})$$

Рассмотрим случай, когда на краю области возможных движений нет положения равновесия системы, т. е. h — регулярное значение потенциальной энергии и

$$\inf_M U < h < \sup_M U$$

В этом случае V — гладкое многообразие с краем $\partial V = \Sigma$, который является гладким многообразием размерности на единицу меньшей, чем размерность V. Будем считать также, что существует $h' < h$, такое, что множество $\{q \in V : U(q) \geqslant h'\}$ компактно.

В многомерных натуральных механических системах по аналогии с системами с одной степенью свободы можно ввести либрационные периодические движения. Траектория либрационного движения с полной энергией h имеет с краем области возможных движений две общие точки, а изображающая точка системы совершает колебательное движение между этими точками [1]. В дальнейшем будем называть *такие движения просто либрациями в области* V. Существование либраций впервые доказано Зейфертом для случая, когда область возможных движений диффеоморфна n-мерному диску [2]. В [1] показано, что либрации существуют, если область V диффеоморфна произведению замкнутого многообразия на замкнутый отрезок. Этот результат обобщается ниже на случай более сложных областей возможных движений.

Для любой группы π будем обозначать через $r(\pi)$ наименьшее возможное число образующих π. Обозначим через V / Σ топологическое пространство, полученное из V стягиванием Σ в точку, а через $\pi(V / \Sigma)$ — фундаментальную группу этого пространства.

Теорема. Число либраций в области V не меньше $r(\pi(V / \Sigma))$. Заметим, что это число не меньше первого числа Бетти области V по модулю Σ.

В частности, если Σ состоит из n связных компонент, то число либраций в области V не меньше $n - 1$. В этом случае можно утверждать большее: для каждой связной компоненты многообразия Σ существует либрация с концом на этой компоненте, причем траектории этих либраций не имеют самопересечений.

2. Геометрия окрестности границы. Пусть $q \in \Sigma$ и $t \geqslant 0$. Обозначим через $\varphi_t(q)$ решение уравнений движения рассматриваемой механической системы с начальными условиями

$$\varphi_t(q)|_{t=0} = q, \quad \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(q)|_{t=0} = 0 \tag{2.1}$$

Функция U не имеет критических точек на Σ, поэтому

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\varphi_t(q))|_{t=0} = -2T(q, \operatorname{grad} U(q)) < 0 \tag{2.2}$$

Так как многообразие Σ компактно, то гладкое отображение

$$\varphi : \Sigma \times [0, \infty) \to V, \quad \varphi(q, t) = \varphi_t(q)$$

гомеоморфно отображает достаточно малую окрестность $\Sigma \times \{0\}$ на некоторую окрестность Σ, а обратное отображение является гладким вне Σ.

Пусть $s(q, t)$ — длина дуги в метрике Якоби вдоль геодезической $t \mapsto \varphi_t(q)$

$$s(q, t) = \int_0^t \left\| \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(q) \right\| dt = \int_0^t \sqrt{2}\,(h - U(\varphi_t(q)))\,dt$$

Из (2.1) и (2.2) следует, что

$$s(q, 0) = \frac{\partial}{\partial t} s(q, t)|_{t=0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} s(q, t)|_{t=0} = 0$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} s(q, t)|_{t=0} > 0$$

По теореме о неявной функции при достаточно малых $r \geqslant 0$ уравнение $r^3 = s(q, t)$ можно разрешить относительно $t = t(q, r)$, причем функция $t(q, r)$ гладкая и

$$t(q, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} t(q, r)|_{r=0} > 0 \tag{2.3}$$

Отображение $(q, r) \mapsto (q, t(q, r))$ определено при всех $q \in \Sigma$ и достаточно малых $r \geqslant 0$. Так как его якобиан при $r = 0$ равен $\partial t / \partial r|_{r=0} > 0$ и множество Σ компактно, то это отображение является диффеоморфизмом в достаточно малой окрестности множества $\Sigma \times \{0\}$. Поэтому существует $\varepsilon > 0$, такое, что можно определить отображение

$$f : \Sigma \times [0, \varepsilon] \to V$$

по формуле

$$f(q, s) = \varphi(q, t(q, s^{1/3}))$$

причем f гомеоморфно отображает $\Sigma \times [0, \varepsilon]$ на некоторую окрестность Σ, а ограничение f на $\Sigma \times (0, \varepsilon]$ есть диффеоморфизм. Отметим, что отображение $(q, r) \to f(q, r^3)$ гладкое и, в силу (2.1), (2.2) и (2.3)

$$f(q, 0) = q, \quad \frac{\partial}{\partial r} f(q, r^3)\Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} U(f(q, r^3))\Big|_{r=0} < 0 \tag{2.4}$$

В частности, для любого $s \in (0, \varepsilon]$ множества $W_s = f(\Sigma \times [0, s])$, $V_s = V \setminus f(\Sigma \times [0, s))$ и $\Sigma_s = f(\Sigma \times \{s\})$ — гладкие подмногообразия V, диффеоморфные соответственно $\Sigma \times [0, 1]$, V и Σ.

Следующее утверждение является аналогом леммы Гаусса в римановой геометрии [3].

Лемма. Для любой точки $q_0 \in W_\varepsilon$ существует единственная лежащая в W_ε геодезическая метрики Якоби, начинающаяся на Σ и проходящая через q_0. Эта геодезическая пересекает гиперповерхности Σ_s под прямым углом.

Первое утверждение леммы следует из того, что для любого $q \in \Sigma$ кривая $s \mapsto f(q, s)$ — геодезическая метрики Якоби, а отображение f — гомеоморфизм. Для доказательства второго утверждения рассмотрим любую гладкую кривую $t \mapsto q(t)$ в Σ и докажем, что для любого $s \in (0, \varepsilon]$

$$F(t, s) \equiv \left\langle \frac{\partial}{\partial t} f(q(t), s), \frac{\partial}{\partial s} f(q(t), s) \right\rangle = 0$$

Так как $s \mapsto f(q(t), s)$ — геодезическая метрики Якоби, то (см. [3])

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial s} \right\| \equiv 1, \quad \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial s} \right\|^2 \right) \equiv 0$$

Следовательно, F не зависит от s. По неравенству Коши — Буняковского

$$F^2 \leqslant \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 = 2(h - U(f(q(t), s)))\, T\left(f(q(t), s), \frac{\partial f}{\partial q} q^{\cdot}\right)$$

Из (2.4) следует, что существует

$$\lim_{s \to 0} \frac{\partial f}{\partial q}(q(t), s)\, q^{\cdot}(t) = q^{\cdot}(t)$$

поэтому $F \to 0$ при $s \to 0$. Лемма доказана.

Стандартными методами римановой геометрии можно показать, что геодезическая, существование которой утверждает лемма,— кратчайшая кривая, соединяющая точку q_0 с множеством Σ.

Изложенные результаты позволяют применить для доказательства теоремы методы вариационного исчисления в целом.

$\sup_{V_\varepsilon} U < h$

По предположению метрика, определяемая на M кинетической энергией, полна, поэтому на M существует полная метрика, совпадающая в V_ε с метрикой Якоби. Обозначим через Ω множество кусочно-гладких кривых ω : $[0, 1] \to M$, таких, что $\omega(0)$, $\omega(1) \in \Sigma_\varepsilon$. Пусть $L(\omega)$ — длина кривой $\omega \in \Omega$ в построенной метрике. Известно [3,4], что экстремали функционала L — геодезические этой метрики, ортогональные Σ_ε в своих концах, и что на каждом классе $\Gamma \subset \Omega$ гомотопных кривых с концами на Σ_ε функционал L достигает минимума $L(\Gamma) = \min_\Gamma L(\omega)$.

Если $\Gamma \subset \Omega$ — нетривиальный гомотопический класс (т. е. гомотопический класс, состоящий из кривых, которые не могут быть продеформированы в точку), то $L(\Gamma) > 0$. Предположим, что минимум длин кривых из Γ достигается на геодезической $\omega \in \Gamma$, такой, что $\omega([0, 1]) \subset V_\varepsilon$. Тогда кривая ω — геодезическая метрики Якоби и ортогональна Σ_ε в своих концах. Поэтому по лемме ее можно продолжить до геодезической метрики Якоби с концами на Σ, которая, очевидно, является траекторией либрационного движения.

Покажем, что число гомотопических классов, удовлетворяющих сделанному предположению, не меньше $r(\pi)$, где $\pi = \pi(V / \Sigma)$. Очевидно, что естественная проекция

$$M \to M / \overline{M \setminus V_\varepsilon} \approx V / \Sigma$$

определяет отображение

$$g : \Gamma \mapsto g(\Gamma) = \gamma \in \pi$$

множества классов гомотопных кривых с концами на Σ_ε на группу π, причем в единицу группы переходят те и только те гомотопические классы, которые содержат кривые, лежащие в $\overline{M \setminus V_\varepsilon}$. Определим на группе π функцию L по формуле

$$L(\gamma) = \min_{g(\Gamma)=\gamma} L(\Gamma)$$

Тогда из $L(\gamma) = 0$ следует, что γ — единица группы.

Так как для любого $l > 0$ число гомотопических классов $\Gamma \subset \Omega$, удовлетворяющих условию $L(\Gamma) \leqslant l$, конечно [3,4], то конечно и число элементов $\gamma \in \pi$, таких, что $L(\gamma) \leqslant l$. Поэтому на каждом непустом подмножестве π функция L достигает минимума. Пусть минимум функции L на множестве элементов группы π, отличных от единицы, достигается на элементе $\gamma_1 \in \pi$. Если элементы $\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}$ уже определены и не являются образующими группы π, то пусть γ_i — тот элемент группы π, на котором достигается минимум функции L на множестве элементов группы π, не принадлежащих подгруппе, порожденной $\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}$. Получим таким образом конечную или счетную систему $\{\gamma_i\}$ образующих группы π, причем $L(\gamma_i) > 0$ для каждого i. Выберем среди гомотопических классов $\Gamma \subset \Omega$, таких, что $g(\Gamma) = \gamma_i$, тот класс Γ_i, для которого $L(\Gamma_i) = L(\gamma_i)$, и пусть минимум длин кривых из Γ_i достигается на геодезической $\omega_i \in \Gamma_i$. Покажем, что кривая ω_i целиком содержится в множестве V_ε.

Действительно, кривая ω_i не может содержаться также и в множестве $M \setminus V_\varepsilon$, поэтому в противном случае существует такое $t \in (0, 1)$, что $\omega_i(t) \in \Sigma_\varepsilon$. Пусть ω и ω' — ограничения геодезической ω_i соответственно на $[0, t]$ и $[t, 1]$. Тогда, изменив параметр на кривых ω и ω', получим $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$ и $L(\omega) < L(\omega_i)$, $L(\omega') < L(\omega_i)$. Обозначим через Γ и Γ' гомотопические классы, содержащие кривые ω и ω', и пусть $\gamma = g(\Gamma)$, $\gamma' = g(\Gamma')$. Тогда $L(\gamma) \leqslant L(\Gamma) \leqslant L(\omega) < L(\omega_i) = L(\gamma_i)$ и аналогично $L(\gamma') < L(\gamma_i)$. Но так как $\gamma\gamma' = \gamma_i$, то хотя бы один из элементов γ, γ' не принадлежит подгруппе, порожденной элементами $\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}$, поэтому $L(\gamma) \geqslant L(\gamma_i)$ или $L(\gamma') \geqslant L(\gamma_i)$, что противоречит полученным выше неравенствам. Таким образом, для каждого i существует геодезическая метрики Якоби с концами на Σ. Теорема доказана.

4. Пример. В качестве примера применения теоремы п. 1 рассмотрим задачу о существовании периодических движений плоского n-звенного математического маятника. Пусть $l_1, \ldots, l_n$ — длины звеньев, которые будем нумеровать от точки подвеса, $P_1, \ldots, P_n$ — веса соответствующих материальных точек, а $\theta_1, \ldots, \theta_n$ — углы, образуемые звеньями с вертикалью.

Конфигурационное пространство M является n-мерным тором, а потенциальная энергия имеет вид

$$U = -\sum_{i=1}^{n} a_i \cos\theta_i, \quad a_i = l_i \sum_{j=i}^{n} P_j$$

Множество критических точек потенциальной энергии находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством всех подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$, причем индекс критической точки, соответствующей подмножеству $I \subset \{1, \ldots, n\}$, равен числу элементов I, а критическое значение равно

$$h_I = \sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\notin I} a_i$$

Пусть h — некритическое значение потенциальной энергии, т. е. $h \neq h_I$ для всех $I \subset \{1, \ldots, n\}$, и

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i < h < \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{4.1}$$

В этом случае область возможных движений $V \subset M$ имеет непустой край Σ. Положим $V' = \overline{M \setminus V}$. Так как $V / \Sigma = M / V'$, то $\pi(V/\Sigma) = \pi(M/V')$. Положим $r = r(\pi(M/V'))$ и $r' = r(\pi(V'))$. Пусть $k \leqslant n$ — число критических точек потенциальной энергии индекса $n-1$ в множестве V. Докажем, что $r = k$.

Действительно, из основной теоремы теории Морса [3] следует, что M/V' гомотопически эквивалентно клеточному комплексу, содержащему k одномерных клеток, а V' гомотопически эквивалентно клеточному комплексу, содержащему $n-k$ одномерных клеток. Поэтому $r \leqslant k$, $r' \leqslant n-k$. Так как группы $\pi(V')$ и $\pi(M/V')$ порождают фундаментальную группу n-мерного тора, то $n \leqslant r + r' \leqslant k + (n-k) = n$. Поэтому во всех рассматриваемых неравенствах имеет место знак равенства и, следовательно, $r = k$.

Применяя теорему п. 1, получим следующее утверждение: если h — некритическое значение потенциальной энергии, удовлетворяющее неравенству (4.1), то число либрационных периодических движений с полной энергией h не меньше числа индексов i, таких, что $a_1 + \ldots + a_{i-1} - a_i + a_{i+1} + \ldots + a_n < h$.

В зависимости от значения интеграла энергии h оценка снизу числа либрационных движений изменяется от нуля до n.

Авторы благодарны В. В. Румянцеву за внимание к работе.

Поступила 30 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В. В.* Принцип наименьшего действия и периодические решения в задачах классической механики. ПММ, 1976, т. 40, вып. 3.
2. *Seifert H.* Periodische bewegungen mechanischer Systeme. Math. Z., 1948, Bd 51, H.2.
3. *Милнор Дж.* Теория Морса. М., «Мир», 1965.
4. *Зейферт Г.*, *Трельфалль Н.* Вариационное исчисление в целом. М., Изд-во иностр. лит., 1947.