Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.381

НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ ОДНОЗНАЧНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В. В. Козлов

(Москва)

Исследования Ковалевской, Ляпунова и других авторов в динамике твердого тела показали, что общее решение уравнений движения представляется однозначными функциями времени только в классических случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской как раз тогда, когда существует дополнительный однозначный интеграл. Оставалось неясным, является ли это обстоятельство случайным совпадением или же в его основе лежат какие-то глубокие причины. В работе методом малого параметра Пуанкаре доказано, что именно существование бесконечного числа неоднозначных решений препятствует появлению нового однозначного аналитического интеграла в общем случае.

1. Теорема о несуществовании однозначных интегралов. Рассмотрим каноническую систему дифференциальных уравнений с гамильтонианом

$$H(I, \varphi, \mu) = H_0(I) + \mu H_1(I, \varphi) + \ldots \tag{1.1}$$
$$I = (I_1, I_2), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$$

Функция $H(I, \varphi, \mu)$ предполагается действительной аналитической функцией в прямом произведении $D \times T^2 \{\varphi \bmod 2\pi\} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ (D — область в $R^2\{I_1, I_2\}$).

Предположим, что при фиксированных $I \in D$, $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ гамильтониан (1.1) продолжается до однозначной аналитической функции по переменным φ_1, φ_2 в прямом произведении комплексных плоскостей $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$. При этом не исключается наличие особых точек у функции (1.1) при комплексных значениях φ_1, φ_2.

Введем некоторые обозначения. Пусть V — компактная подобласть D и $\nu > 0$. Тогда $\Delta(V, \nu) = \{I : I = I' + iI'', I' \in V, |I''| < \nu\}$. Если $V' \subset V$ и $\nu' < \nu$, то $\Delta(V', \nu') \subset \Delta(V, \nu)$. Положим $\Pi(\rho) = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}: |\operatorname{Im} \varphi_k| < \rho;\ k = 1,2\}$.

Все решения невозмущенной системы

$$I = I^\circ, \ \varphi = \varphi^\circ + \omega t \ (\omega = (\omega_1, \omega_2), \ \omega_k(I) = \partial H_0 / \partial I_k; \ k = 1,2)$$

являются однозначными функциями комплексного переменного $t \in \mathbf{C}$. Однако решения возмущенных уравнений, когда $\mu \neq 0$, в общем случае неоднозначны.

Рассмотрим на комплексной плоскости времени $t \in \mathbf{C}$ замкнутый непрерывный контур Γ и его образ γ при отображении $t \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ ($t \in \Gamma$) согласно формуле

$$\varphi(t) = \varphi^\circ + \omega(I^\circ) t \quad (I^\circ \in D, \ \varphi^\circ \in T^2)$$

Предположим, что функция Гамильтона $H(I, \varphi, \mu)$ аналитична в прямом произведении $V \times \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, где V — некоторая компактная окрестность точки $I^\circ \in D$, Ω — связная область в $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, $\Pi(s) \subset \Omega \subset \Pi(S)$ $(0 < s < S)$, содержащая непрерывную кривую γ.

Если $\varphi \in \Omega$, то

$$H(I, \varphi + 2\pi, \mu) = H(I, \varphi, \mu)$$

В самом деле, это равенство справедливо для действительных значений φ. В общем случае, когда $\varphi \in \Omega$, оно вытекает из связности Ω и единственности аналитического продолжения.

Заметим, что когда $\varphi \in \Omega$, $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, функция $H(I, \varphi, \mu)$ аналитична по переменным I_1, I_2 в области $\Delta(V, \nu)$, если ν достаточно мало.

Согласно теореме Пуанкаре [1,2] решения возмущенных уравнений можно разложить в степенные ряды по μ

$$I = I^\circ + \mu I^1(t; I^\circ, \varphi^\circ) + \ldots \tag{1.2}$$
$$\varphi = \varphi^\circ + \omega(I^\circ)t + \mu\varphi^1(t; I^\circ, \varphi^\circ) + \ldots$$

Если $t \in \Gamma$, то эти ряды сходятся при малых значениях параметра μ.

Будем говорить, что аналитическая вектор-функция $f(t)$, $t \in \Gamma$ неоднозначна вдоль Γ, если она испытывает скачок $\xi \neq 0$ после обхода контура Γ. Если функция $I^1(t; I^\circ, \varphi^\circ)$ неоднозначна вдоль Γ, то при малых значениях параметра μ возмущенное решение (1.2) тоже неоднозначно вдоль контура Γ.

Зафиксируем начальные данные I°, φ° и будем непрерывно деформировать контур Γ так, что при этом контур γ не пересечет ни одной особой точки функции Гамильтона $H(I, \varphi, \mu)$. Используя теорему Коши, можно показать, что функция $I^1(t; I^\circ, \varphi^\circ)$ при обходе деформированного контура будет снова изменяться на ту же величину $\xi = (\xi_1, \xi_2) \neq 0$. Так как решения (1.2) непрерывны по начальным данным [1,2], то неоднозначность функции $I^1(t; I^\circ, \varphi^\circ)$ вдоль контура Γ будет иметь место при всех $I = I^\circ$ из некоторой малой области $U \subset D$. При этом скачок $\xi = \xi(I^\circ) \neq 0$, если $I^\circ \in U$.

Будем говорить, что система канонических уравнений с гамильтонианом (1.1) имеет однозначный интеграл $F(I, \varphi, \mu)$, если эта функция

1) есть первый интеграл;

2) является действительной аналитической функцией в области $D \times T^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$;

3) при фиксированных значениях, I, μ однозначна по переменным φ_1, φ_2 в прямом произведении $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$.

Очевидно, что одним из однозначных интегралов служит функция H. Подчеркнем, что не исключается наличие особых точек функции F при комплексных значениях переменных φ_1, φ_2.

Теорема 1. Предположим, что невозмущенная система невырождена, т. е. гессиан

$$|\partial^2 H_0 / \partial I^2| \neq 0$$

в области D, и при некоторых $I^\circ \in D$, $\varphi^\circ \in T^2$ функция $I^1(t;\ I^\circ,\ \varphi^\circ)$ неоднозначна вдоль контура Г. Тогда каноническая система дифференциальных уравнений с гамильтонианом (1.1) не имеет однозначного интеграла $F(I, \varphi, \mu)$, независимого от функции (1.1) и аналитического в прямом произведении $W \times \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, где W — некоторая окрестность точки $I = I^\circ$.

2. Доказательство теоремы 1 (ср. с [1], гл. V). Разложим функцию $F(I, \varphi, \mu)$ в ряд по степеням μ

$$F = F_0(I, \varphi) + \mu F_1(I, \varphi) + \ldots \tag{2.1}$$

Если $(I, \varphi) \in \Delta(V, \nu) \times \Omega$ ($V \subset W$, ν достаточно мало), то этот ряд сходится при малых значениях параметра μ.

Лемма 1. Функция F_0 не зависит от φ.

Действительно, если $(I, \varphi) \in D \times T^2$, то из невырожденности невозмущенной системы вытекает, что F_0 не зависит от φ (см. [1], гл. V). Если же $\varphi \in \Omega$, то это утверждение следует из связности области Ω.

Лемма 2. Функции $H_0(I)$ и $F_0(I)$ зависимы в области W, т. е. якобиан

$$\frac{\partial(H_0, F_0)}{\partial(I_1, I_2)} \equiv 0 \tag{2.2}$$

когда $I \in W$.

Доказательство. Так как $F(I, \varphi, \mu)$ — первый интеграл канонической системы уравнений с гамильтонианом (1.1), то эта функция постоянна вдоль решений (1.2). Следовательно, ее значения в момент времени $\tau \in \Gamma$ и после обхода контура Г совпадают. Отсюда

$$\begin{aligned}&F_0(I^\circ + \mu I^1(\tau) + \ldots) + \mu F_1(I^\circ + \mu I^1(\tau) + \ldots,\ \varphi^\circ + \omega t + \\ &+ \mu\varphi^1(\tau) + \ldots) + \ldots \equiv F_0(I^\circ + \mu(I^1(\tau) + \xi(I^\circ)) + \ldots) + \\ &+ \mu F_1(I^\circ + \ldots, \varphi^\circ + \omega t + \ldots) + \ldots\end{aligned}$$

Разлагая это тождество в степенной ряд по μ и приравнивая нулю коэффициент при первой степени μ, получим

$$\frac{\partial F_0}{\partial I_1}\xi_1 + \frac{\partial F_0}{\partial I_2}\xi_2 = 0$$

Так как $H(I, \varphi, \mu)$ — тоже первый однозначный интеграл, то

$$\frac{\partial H_0}{\partial I_1}\xi_1 + \frac{\partial H_0}{\partial I_2}\xi_2 = 0$$

Сравнивая последние два соотношения, заключаем, что при $I^\circ \in W \cap U$ справедливо тождество (2.2), т. е. функции H_0 и F_0 зависимы в области $W \cap U$, а значит, и во всей области W.

Предположим теперь, что функции (1.1) и (2.1) независимы. Пусть J — ненулевой минор второго порядка матрицы Якоби

$$\frac{\partial(H, F)}{\partial(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2)}$$

Функция $J(I, \varphi, \mu)$ аналитична, и её можно разложить в сходящийся степенной ряд по μ. Предположим, что в этом разложении коэффициент при μ^p ($p \geqslant 0$) отличен от нуля. Из леммы 2 вытекает, что $p \geqslant 1$.

Так как гессиан $|\partial^2 H_0/\partial I^2| \not\equiv 0$, то в некоторой малой области $V \subset W \subset D$ производная $\partial H_0/\partial I_1 \neq 0$. Следовательно, в этой области уравнение $H_0(I_1, I_2) = H_0$ можно разрешить относительно I_1 и подставить полученное выражение в функцию $F_0(I_1, I_2)$. Тогда $F_0 = F_0(I_1(H_0, I_2), I_2)$. Так как H_0 и F_0 зависимы, то $F_0 = \Psi(H_0)$, где $\Psi(x)$ — аналитическая функция в интервале ($\min_V H_0$, $\max_V H_0$). Заметим, что $\Psi(z)$ аналитична в малой комплексной окрестности этого интервала.

Если μ достаточно мало, то функция $\Psi(H)$ аналитична по I, φ в области $V' \times \Omega$, где V' — компактная область, лежащая внутри V. Так как разложение функции $F - \Psi(H)$ в ряд по степеням μ не содержит свободного члена, то $F - \Psi(H) = \mu F'$. Функция $F'(I, \varphi, \mu)$ — первый однозначный интеграл, аналитический в области $\Delta(V', \nu') \times \Omega \times (-\varepsilon', \varepsilon')$, где ν', ε' достаточно малы. По леммам 1 и 2 функция F_0' не содержит φ и $H_0(I)$ и $F_0'(I)$ зависимы в области $V' \subset D$. Так как $F = \Psi(H) + \mu F_0' + \mu^2 F_1' + \ldots$, то разложение минора J в ряд по степеням μ начинается с членов порядка μ^2.

Повторяя эту операцию p раз, придем к заключению, что разложение функции J начинается с членов порядка μ^{p+1}, а не μ^p, как предполагалось выше. Полученное противоречие доказывает теорему 1.

3. Приложение к задаче о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Функцию Гамильтона этой задачи можно представить в виде (см. [1], п. 86)

$$H = H_0 + \mu H_1 \tag{3.1}$$

где H_0 — кинетическая энергия системы (гамильтониан задачи Эйлера — Пуансо), μH_1 — потенциальная энергия (μ — произведение веса тела на расстояние от точки подвеса до центра тяжести). Будем считать параметр μ малым. Другими словами, задача о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой рассматривается как возмущение интегрируемого случая Эйлера — Пуансо.

Используя интеграл площадей, понизим число степеней свободы до двух. Всюду ниже предполагается, что постоянная площадей зафиксирована.

Невозмущенная задача, когда $\mu = 0$, интегрируема. В переменных действие — угол I, φ функция H_0 зависит только от $I = (I_1, I_2)$. Эта зависимость определяется из следующего неявного соотношения [3]:

$$I_1(H_0, I_2) = \frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{\frac{2H_0 - I_2^2(A^{-1}\sin^2 x + B^{-1}\cos^2 x)}{C^{-1} - A^{-1}\sin^2 x - B^{-1}\cos^2 x}}\,dx$$

Здесь $A \geqslant B \geqslant C$ — главные моменты инерции твердого тела. Функция $H_0(I_1, I_2)$, определенная в области $\Delta = \{I_1, I_2 : I_2 \geqslant 0, |I_1| \leqslant I_2\}$, аналитична всюду, за исключением точек, лежащих на прямых линиях $I_1 = 0$, $|I_1| = I_2$, $2H_0 = B^{-1}I_2^2$ [3]. Обозначим через Δ_a одну из связных компонент области аналитичности функции H_0.

При фиксированном $I \in \Delta_a$ возмущающая функция $H_1(I, \varphi)$ аналитична на двумерном торе $T^2\{\varphi \bmod 2\pi\}$ и является однозначной мероморфной функцией в $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ [4,5]. Следовательно, в рассматриваемой задаче можно поставить вопрос о существовании новых однозначных аналитических интегралов. Будем рассматривать случай, когда твердое тело несимметрично, т. е. $A > B > C$.

Невозмущенная интегрируемая задача Эйлера — Пуансо невырождена, так как гессиан $|\partial^2 H_0/\partial I^2|$ отличен от нуля во всей области Δ_a [3]. Возникает вопрос: существует ли контур Γ и начальные условия $(I^0, \varphi^0) \in \Delta_a \times T^2$, при которых соответствующая функция $I^1(t;\, I^0, \varphi^0)$ неоднозначна вдоль Γ.

Возмущающую функцию $H_1(I, \varphi)$ можно представить в следующем виде [5]:

$$H_1 = f_+(I, \varphi_1)\exp(i\varphi_2) + f_-(I, \varphi_1)\exp(-i\varphi_2) + f_0(I, \varphi_1)$$

При фиксированном значении $I \in \Delta_a$ комплексно-сопряженные мероморфные функции $f_+(I, z)$ и $f_-(I, z)$ имеют действительный период 2π и чисто мнимый «квазипериод» $i\alpha(I)$ (подробности см. в [5]). Например, если центр тяжести лежит на большей оси эллипсоида инерции, то

$$f_\pm(I, z + i\alpha) = f_\pm(I, z)\exp[\mp\sigma(I)]$$

Приведем явные выражения для функций $\alpha(I)$ и $\sigma(I)$ [5]:

$$\alpha = \frac{\mathbf{K}'}{\mathbf{K}}, \quad \sigma = \frac{\pi}{\mathbf{K}} F\left(\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{\lambda}, \lambda'\right), \quad \mathbf{K}'(\lambda) = \mathbf{K}(\lambda') \tag{3.2}$$

$$\varkappa^2 = \frac{C(A-B)}{A(B-C)}, \quad \lambda^2 = \varkappa^2\frac{2CH_0 - I_2^2}{I_2^2 - 2AH_0}, \quad \lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$$

Здесь $\mathbf{K}(\lambda)$ – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем λ, F — эллиптический интеграл первого рода.

Функция $f_0(I, z)$ — эллиптическая, с действительным периодом 2π и мнимым периодом $i\alpha$.

Пусть при $I = I^0$ отношение частот ω_2/ω_1 равно целому числу n. Если величина $|n|$ достаточно велика, то такие значения переменных «действие» I^0 существуют [3]. В этом случае действительная функция

$$h(I^0, t) = f_+(I^0, \omega_1 t)\exp(i\omega_2 t) + f_-(I^0, \omega_1 t)\exp(-i\omega_2 t)$$

периодична по t с некоторым периодом T. Положим

$$h_n(I^\circ) = \frac{1}{T}\int_0^T h(I^\circ, t)\,dt$$

Заметим, что при фиксированных значениях A, B, C средние h_n зависят лишь от n, но не от I° [3,6]. Используя разложения функций f_+ и f_- в тригонометрические ряды [5], можно показать, что бесконечно много средних величин h_n отличны от нуля (ср. с [6]). Обозначим через $\mathbf{B}_n$ множество точек $I \in \Delta_a$, удовлетворяющих условиям $\omega_2(I)\,/\,\omega_1(I) = n$ и $h_n(I) \neq 0$.

Пусть I° принадлежит некоторому $\mathbf{B}_n$ и $\varphi^\circ = 0$. Рассмотрим на комплексной плоскости $t \in \mathbf{C}$ замкнутый контур Γ — границу прямоугольника ABCD (фигура). Число τ выберем так, чтобы мероморфные функции $f_\pm(I^\circ, \omega_1 z)$, $f_0(I^\circ, \omega_1 z)$ не имели полюсов на Γ. Обозначим через γ замкнутую непрерывную кривую в $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, являющуюся образом следующего отображения:

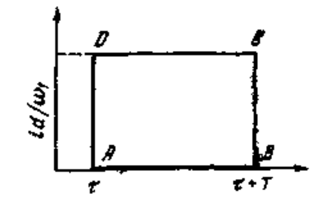
$$\varphi = \omega(I^\circ)t,\ t \in \Gamma \quad (\varphi = (\varphi_1, \varphi_2),\ \omega = (\omega_1, \omega_2))$$

Обозначим через U малую окрестность точки $I^\circ \in \mathbf{B}_n$. Пусть Ω — связная окрестность контура γ в $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, $\Pi(s) \subset \Omega \subset \Pi(S)(0 < s < S)$, такая, что при всех $I \in U$ мероморфные функции $f_\pm(I, \varphi_1)$, $f_0(I, \varphi_1)$ не имеют полюсов в области Ω.

Теорема 2. Для любого несимметричного твердого тела существует $N(A, B, C)$, такое, что если точка

$$I^\circ \in \mathbf{B} = \bigcup_{|n| \geqslant N} \mathbf{B}_n \subset \Delta_a$$

то канонические уравнения движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой не имеют независимого от функции (3.1) однозначного интеграла $F(I, \varphi, \mu)$, аналитического в прямом произведении $U \times \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.



4. Доказательство теоремы 2. Так как невозмущенная задача невырождена, то, согласно теореме 1, достаточно установить неоднозначность функции $I^1(t;\, I^\circ, 0)$. Ограничимся случаем, когда центр тяжести лежит на большей оси эллипсоида инерции. Общий случай рассматривается аналогично.

Положим

$$\Phi(I^\circ, t) = -\frac{\partial H_1}{\partial \varphi^2} = -i\,[f_+(I^\circ, \omega_1 t)\exp(i\omega_2 t) - f_-(I^\circ, \omega_1 t)\exp(-i\omega_2 t)]$$

Так как

$$I_2^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_2} = -\mu\frac{\partial H_1}{\partial \varphi_2}$$

то

$$\xi_2 = \oint_\Gamma \Phi(I^\circ, t)\,dt \tag{4.1}$$

Функция $\Phi(I^\circ, t)$ периодична по t с действительным периодом T, следовательно

$$\int_B^C \Phi(I^\circ, t)\,dt + \int_D^A \Phi(I^\circ, t)\,dt = 0 \tag{4.2}$$

Положим

$$\sigma_\pm = \mp i\int_A^B f_\pm(I^\circ, \omega_1 t)\exp(\pm i\omega_2 t)\,dt$$

$$\Sigma_\pm = \mp i\int_C^D f_\pm(I^\circ, \omega_1 t)\exp(\pm i\omega_2 t)\,dt$$

Покажем, что

$$\Sigma_\pm = -\sigma_\pm\exp[\mp(n\alpha + \sigma)] \tag{4.3}$$

Действительно, заменяя переменные по формуле $t = z + i\alpha\,/\,\omega_1$, получим

$$\Sigma_\pm = \mp\exp[\mp(n\alpha+\sigma)]\int_{\tau+T}^{\tau} f_\pm(I^\circ, \omega_1 z)\exp(\pm i\omega_2 z)\,dz =$$

$$= -\sigma_\pm\exp[\mp(n\alpha+\sigma)]$$

Интеграл (4.1) с учетом формул (4.2) и (4.3) равен

$$\xi_2 = \sigma_+ [1 - \exp(-n\alpha - \sigma)] + \sigma_- [1 - \exp(n\alpha + \sigma)]$$

Очевидно, что $h_n = i(\sigma_+ - \sigma_-) / T$. Функции f_+ и f_- комплексно сопряжены, следовательно, $\bar{\sigma}_+ = \sigma_-$. Так как $h_n \neq 0$, то интегралы σ_+ и σ_- отличны от нуля.

Покажем, что $\xi_2(I^\circ) \neq 0$. Действительно, в противном случае

$$\left| \frac{1 - \exp(-n\alpha - \sigma)}{1 - \exp(n\alpha + \sigma)} \right| = \left| \frac{\sigma_-}{\sigma_+} \right| = 1$$

и, следовательно, $n\alpha(I^\circ) + \sigma(I^\circ) = 0$. Используя формулы (3.2), это соотношение можно записать в следующем виде:

$$nK'(\lambda) + \pi F\left(\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{\lambda}, \sqrt{1 - \lambda^2}\right) = 0 \tag{4.4}$$

Устремим $|n|$ к бесконечности. Тогда $\omega_2 / \omega_1 \to \infty$ и $2H_0 / I_2^2 \to B^{-1}$ [3]. Значит, $\lambda \to C / A < 1$ и функции K' и F стремятся к определенным пределам. Так как

$$\lim_{\lambda \to C/A} K'(\lambda) \neq 0$$

и функция λ постоянна на множествах B_n, то соотношение (4.4) не имеет места при $|n| > N$, $N(A, B, C)$.

Теорема 2 доказана.

Можно показать, что аналогичное утверждение справедливо также в случае, когда начальные фазы φ° равны не (0, 0), а (0, π). В работе [6] доказано, что периодические решения невозмущенной задачи с начальными данными $I^\circ \in B_n$, $\varphi_1^\circ = 0$, $\varphi_2^\circ = 0, \pi$ не исчезают при добавлении возмущения, а при малых значениях параметра $\mu \neq 0$ переходят в невырожденные периодические решения возмущенной системы уравнений. Таким образом, вычисления, проведенные в п. 4, показывают, что, начиная с некоторого номера n, найденные в работе [6] невырожденные периодические решения при малых значениях $\mu \neq 0$ — неоднозначные функции на комплексной плоскости времени.

Автор благодарит В. В. Румянцева и Ю. А. Архангельского за внимание к работе.

Поступила 10 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А.* Избранные тр., т. 1. Новые методы небесной механики. М , «Наука», 1971.
2. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
3. *Козлов В. В.* Геометрия переменных «действие — угол» задачи Эйлера — Пуансо. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1974, № 5.
4. *Jacobi C. G. J.* Gesammelte Werke. Berlin, Raimer, 1882, Bd 2, S 289—352.
5. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М., «Наука», 1977.
6. *Козлов В. В.* Новые периодические решения в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.

Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.36

О СВОЙСТВЕ ЖЕСТКОСТИ ДВИЖЕНИЯ

В. Н. Скимель

(Казань)

Известно, что ось быстро вращающегося гироскопа мало податлива к воздействию больших возмущающих сил — обладает «жесткостью» [1]. Обращалось внимание на то, что при определенных условиях свойство жесткости присуще и системам с гироскопами [2]. Свойством, в некотором смысле сходным с гироскопической жесткостью, обладают многие механические системы.

В работе жесткость интерпретируется как своеобразная устойчивость. Формулируются теоремы, устанавливающие признаки жесткости аналогично теоремам прямого метода Ляпунова.

Описание свойства жесткости связано с разделением переменных подобно тому, как это имеет место в задачах устойчивости по части переменных (см. [3, 4] и др.).

Отдельные вопросы жесткости движения рассматривались в работах [5, 6].

1. Основные определения. Уравнения движения механической системы запишем в виде

$$dy/dt = Y(t, y, g) \tag{1.1}$$

где $t \geqslant 0$ — время, y — n-мерный вектор состояния системы, g — постоянный векторный физический параметр.

В качестве невозмущенных рассмотрим движения (частное решение (1.1))

$$y = f(t, y_0, g) \tag{1.2}$$

некоторого семейства, удовлетворяющие начальным условиям: $y = y_0$ при $t = t_0$. Заметим, что значения y_0 и параметры g могут быть связаны соотношениями, представляющими собой условия существования движений (1.2).

Положив в (1.1) $y = f + x$, получим уравнение возмущенного движения

$$dx/dt = Y(t, f + x, g) - Y(t, f, g) \tag{1.3}$$

в котором y_0, g — параметры.

Уравнение (1.3) будем рассматривать зависящим от существенных для задачи жесткости движения параметров $a_1, \ldots, a_r$, записывая его в виде

$$dx/dt = X(t, x, a), \quad X(t, 0, a) \equiv 0 \tag{1.4}$$
$$a = (a_1, \ldots, a_r)$$

Будем исследовать жесткость движения $x = 0$ по отношению к части переменных x_α ($\alpha = 1, \ldots, m$; $m < n$). Положим, что вектор-функция