УДК 531.01

В. В. КОЗЛОВ, Н. Н. КОЛЕСНИКОВ

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

1. Хорошо известна следующая теорема Лиувилля [1]: если гамильтонова система с n степенями свободы имеет n независимых интегралов в инволюции, то решения этой системы можно найти с помощью квадратур, то есть с помощью алгебраических операций, включая операцию обращения функций, и вычисления интегралов известных функций.

А. Пуанкаре подметил [2, п. 312], что фазовое пространство интегрируемых систем с двумя степенями свободы расслаивается на двумерные инвариантные торы, несущие условно-периодические движения. В. И. Арнольд в предположении компактности совместных уровней интегралов, удовлетворяющих теореме Лиувилля, установил [3] соответствующий общий результат (получил n-мерные торы). В работах Н. Н. Нехорошева, А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко [4, 5] этот результат был обобщен для различных случаев, когда число интегралов больше n.

В настоящей работе исследуется интегрируемость в квадратурах канонической системы для случая, когда число интегралов равно n и они образуют разрешимую алгебру относительно скобки Пуассона двух функций. Обозначаем так: (,). Сформулируем задачу. Пусть в фазовом пространстве канонической системы

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad H = H(p, q), \tag{1}$$

заданы n независимых функций $F_1(p, q) = H, \ldots, F_n(p, q)$, таких, что

$$(F_i, F_j) = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k F_k, \qquad c_{ij}^k = \mathrm{const}.$$

Тогда, очевидно, линейное пространство **A**, натянутое на элементы $F_1, \ldots, F_n$, будет конечномерной алгеброй Ли. Числа c_{ij}^k — структурные константы алгебры **A** в базисе $F_1, \ldots, F_n$.

2. Пусть **B** и **C** — подалгебры алгебры **A**. Множество $\mathbf{C} \subset \mathbf{B}$ называется идеалом алгебры **B**, если для $f \in \mathbf{C}$, $g \in \mathbf{B}$ скобка Пуассона (f, g) принадлежит **C**. Алгебра **A** называется разрешимой, если существует последовательность $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \supset \mathbf{A}_1 \supset \ldots \supset \mathbf{A}_k = \{0\}$ подалгебр **A**, таких, что A_{i+1} — идеал коразмерности 1 в $\mathbf{A}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$. В частности, разрешимы коммутативные алгебры ($(f, g) \equiv 0$).

Теорема 1. Предположим, что выполнены следующие условия: 1) на множестве $M_a = \{p, q : F_1 = a_1, \ldots, F_n = a_n\}$ функции $F_1, \ldots, F_n$ независимы;

2) $\sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k a_k = 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$; ($H_a = A$, где H_a - стаб-р $a \in A^*$)

3) алгебра **A** разрешима, причем $(F_1, F_i) = c_{1i}^1 F_1$.

Тогда решения системы (1), лежащие на M_a, можно найти в квадратурах.

Множество **П** наборов $a = (a_1, \ldots, a_n)$, удовлетворяющих условию 2), является линейным подпространством $\mathbb{R}^n$, размерность которого не меньше $\dim \mathbf{A} - \dim(\mathbf{A}, \mathbf{A})$, где $(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ — коммутант алгебры **A**. Так как она разрешима, то $\dim \mathbf{П} \geqslant 1$.

Доказательство теоремы 1 базируется на одной теореме, принадлежащей С. Ли. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Теорема Ли [6]. Рассмотрим в области определения системы (2) n линейно-независимых векторных полей $X_1, \ldots, X_n$, среди которых

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Если:

а) $[X_1, X_i] = X_1 X_i - X_i X_1 = \lambda_i X_1, \qquad \lambda_i = \mathrm{const}$;

б) пространство линейных комбинаций полей $X_1, \ldots, X_n$ является разрешимой алгеброй Ли относительно операции [,]. Тогда уравнения (2) интегрируются в квадратурах.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим n линейно-независимых векторных полей $X_1, \ldots, X_n$, определяемых каноническими системами уравнений

$$\dot{p} = -\frac{\partial F_k}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial F_k}{\partial p}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Естественное отображение алгебры Ли **A** функций $F_1, \ldots, F_n$ на алгебру Ли **X** полей $X_1, \ldots, X_n$ является изоморфизмом, поскольку линейная комбинация $\Sigma \lambda_i F_i$ есть тождественная константа только при $\lambda_i = 0$ в силу функциональной независимости F_i.

Так как $(F_i, F_j) = 0$ на M_a (условие 2), то векторные поля X_k касаются многообразия M_a. В любых локальных координатах $x = (x_1, \ldots, x_n)$ на M_a уравнения (3) будут иметь вид

$$\dot{x} = f^k(x), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

При этом, очевидно, поля $X_k = \Sigma f_i^k \frac{\partial}{\partial x_i}$ удовлетворяют теореме Ли. Утверждение доказано.

С топологической точки зрения (в случае, когда поля X_k не стеснены на M_a, например когда M_a компактно) M_a диффеоморфно несущему многообразию группы Ли, соответствующей алгебре **A**, которое профакторизовано по некоторой дискретной подгруппе. Это общее замечание упирается в проблему классификации разрешимых алгебр и групп Ли, которая не решена до сих пор.

Ход доказательства показывает, что на интегралы системы можно наложить более слабые условия. Например, если

$$(F_k F_l) = \Phi_{kl} (F_1, \ldots, F_n),$$

то

$$d(F_k, F_l) = \Sigma c^i_{kl} (a_1, \ldots, a_n) dF_i$$

и, следовательно,

$$[X_k X_l] = \Sigma c^i_{kl} (a) X_i.$$

3. В качестве примера рассмотрим движение по одной прямой трех точек, взаимодействующих между собой с силой, обратно пропорциональной кубу расстояния между ними. Эту задачу рассматривали К. Якоби [7] и А. Пуанкаре [2]. Пусть m_1, m_2, m_3 — массы точек, а x, y, z — их координаты. Потенциальная энергия этой системы имеет следующий вид:

$$U(x, y, z) = \frac{a}{(x-y)^2} + \frac{b}{(x-z)^2} + \frac{c}{(y-z)^2}; \qquad a, b, c = \mathrm{const}.$$

Рассмотрим три функции:

$$H = F_1 = p_x^2/2m_1 + p_y^2/2m_2 + p_z^2/2m_3 + U(x, y, z),$$
$$F_2 = xp_x + yp_y + zp_z, \quad F_3 = p_x + p_y + p_z.$$

Здесь p_x, p_y, p_z — канонические координаты, сопряженные с x, y, z. Ясно, что F_1 — полная энергия системы,

$$F_2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m_1 x^2 + m_2 y^2 + m_3 z^2),$$

а F_3 — импульс всей системы. Нетрудно проверить, что эти функции независимы и

$$(F_1, F_3) = 0, \quad (F_2, F_3) = -F_3, \quad (F_1, F_2) = 2F_1. \tag{4}$$

Соответствующая алгебра Ли A разрешима, поскольку $A \supset B \supset C \supset \{0\}$, где одномерная подалгебра C порождается функцией F_1, а двумерная подалгебра B порождается функциями F_1 и F_3; подалгебры B и C в силу (4) являются идеалами соответственно A и B

Применяя теорему 1, заключаем, что решения этой задачи, лежащие на нулевых уровнях полной энергии и импульса, можно найти с помощью квадратур. Эту возможность нетрудно реализовать непосредственно. Полученный результат справедлив, очевидно, и для более общего случая, когда потенциальная энергия U зависит только от разностей $x-y$, $x-z$, $y-z$ и является однородной функцией по переменным x, y, z степени -2.

Замечание. Известно, что при $m_1=m_2=m_3$ и $a=b=c$ каноническая система с гамильтонианом H вполне интегрируема (см., например, статью Ю. Мозера [8]; в ней, в частности, изложена история этого вопроса). Нам неизвестно, вполне ли интегрируема система с функцией Гамильтона H в общем случае.

Авторы признательны Я В. Татаринову за полезные обсуждения.

V. V. Kozlov, N. N. Kolesnikov

ON THE INTEGRABILITY OF HAMILTONIAN SYSTEMS

The Liouville theorem on the integrability of Hamiltonian systems is generalized on the case when the integrals form the solvable Lie algebra As an example the motion on a fixed straight line of the three points, mutually attracted by forces inversely proportional to the cubed distance between them is considered

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Уиттекер Е Т Аналитическая механика. М — Л, 1937
2. Пуанкаре А Новые методы небесной механики Избр труды, т. II М, 1972
3. Арнольд В. И. «Сиб матем ж», 1963, вып 2, 471—474.
4. Нехорошев Н. Н — «Тр Моск. матем о-ва», 1972, 26, 181—198.
5. Мищенко А. С., Фоменко А Т. — «Функц анализ и его прилож», 1977, 12, вып. 2, 46—56.
6. Чеботарев Н Г. Теория групп Ли. М. — Л, 1940.
7. Якоби К Лекции по динамике М. — Л., 1936
8 Moser Yu — «Adv Math», 1975, 16, N 2, 354—360

Кафедра
теоретической механики

Поступила в редакцию
29.03.79