УДК 531.01

В. В. КОЗЛОВ

О КОЛЕБАНИЯХ ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

1. Введение. Формулировка результатов. При исследовании нелинейных колебаний одномерных механических систем часто встречается уравнение следующего вида:

$$\ddot{x}+\omega^2\{1+\varepsilon f(t)\}\sin x=0, \qquad (1)$$

где $\omega, \varepsilon=\mathrm{const}$, а f — аналитическая 2π-периодическая функция времени. Такой вид, в частности, имеет уравнение, описывающее движение математического маятника с периодически колеблющейся точкой подвеса. Уравнение (1) можно записать в канонической форме:

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q},\ \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}\ (q=x,\ p=\dot{x}), \qquad H=K-V, \qquad (2)$$

где $K=p^2/2$ — кинетическая энергия, а $V=\omega^2\{1+\varepsilon f(t)\}\cos q$ — потенциал, периодически зависящий от времени. Расширенное фазовое пространство этой системы трехмерно и является прямым произведением фазового цилиндра $\mathbf{R}^1\{p\}\times\mathbf{T}^1\{q \bmod 2\pi\}$ на окружность $\mathbf{T}^1\{t \bmod 2\pi\}$. При $\varepsilon=0$ система (2) вполне интегрируема (математический маятник). Считая, что $f(t)\not\equiv 0$, положим $a^{-1}=\max_R|f(t)|$. Относительно системы, описываемой уравнениями (1), (2), в работе будут доказаны следующие утверждения:

A. При всех значениях $\varepsilon\in[-a, a]$ периодическое решение $x(t)\equiv\equiv\pi$ (или, что то же самое, $x(t)\equiv-\pi$) — вертикальные колебания перевернутого маятника — является гиперболическим.

B. Двумерные инвариантные асимптотические поверхности этого решения пересекаются при всех $\varepsilon\in(-a, a)$.

B′. При всех $\varepsilon\in(-a, a)$ существуют гомоклинные решения, то есть решения $x(t)$, такие, что $x(t)\to\pm\pi$ при $t\to\pm\infty$.

C. Пусть $f(t)=\sum_N a_n\sin nt+b_n\cos nt$. Если

$$\sum_{\mathbf{N}} n^2a_n/\mathrm{sh}(\pi n/2\omega)\neq 0, \qquad (3)$$

то, за исключением конечного числа значений $\varepsilon\in(-a, a)$, пересекающиеся асимптотические поверхности не совпадают.

C′. Если выполнено (3), то, за исключением некоторого конечного числа значений ε из интервала $[-a, a]$, уравнения (2) не имеют первого аналитического интеграла $F(p, q, t)$, 2π-периодического по переменным q и t.

Утверждения B и B′ эквивалентны, а C′ выводится из C.

З а м е ч а н и е. Существование гомоклиник и неинтегрируемость обычно удается доказать для систем, мало отличающихся от интегрируемых (см., например, [1—3]). Для уравнения (1) малость параметра ε не столь существенна.

2. Неустойчивость вертикальных колебаний и асимптотические поверхности. Положим $x=\pi+y$. Тогда уравнением в вариациях для периодического решения $x(t)=\pi$ будет уравнение

$$\ddot{y}-p(t)y=0, \qquad p(t)=\omega^2\{1+\varepsilon f(t)\}.$$

Поскольку $p(t)\geqslant 0$ *и* $p(t)\not\equiv 0$ (при $\varepsilon\in[-a, a]$), то мультипликаторы этого решения положительны и один из них больше единицы, а другой — меньше единицы [4]. Таким образом, решение $x(t)=\pi$ действительно гиперболического типа. Это решение имеет две двумерные инвариантные *асимптотические поверхности* Π_+ и Π_-, *сплошь заполненные* траекториями, неограниченно приближающимися к точке $x=\pm\pi$ при $t\to+\infty$ или $t\to\infty$ (см. [5]). Поскольку гамильтониан H аналитичен, поверхности Π_+ и Π_- связные регулярные аналитические. Очевидно, что сечение $t=0$ трансверсально пересекает асимптотические поверхности Π_+ и Π_- по аналитическим кривым S_+ и S_-, инвариантным относительно отображения плоскости $\{t=0\}$ на себя за период. Кривые S_+ и S_- обычно называются сепаратрисами. По непрерывности, отмеченные выше свойства периодического решения $x(t)=\pi$ будут иметь место и при значениях $|\varepsilon|$, чуть больших a.

3. Гомоклинные решения. Канонические уравнения (2) не изменятся, если вместо функции Гамильтона H взять функцию $\tilde{H}(p, q, t)=p^2/2-\omega^2\{1+\varepsilon f(t)\}(\cos q+1)$. Функция $\tilde{H}$ удовлетворяет следующим условиям «регулярности» [6]:

$$c_1\leqslant\left|\frac{\partial^2\tilde{H}}{\partial p^2}\right|\leqslant c_2,\ \tilde{H}(p, q, t)\leqslant c_3p^2+c_4 \qquad (c_1, \ldots, c_4=\mathrm{const}).$$

Положим $U(q, t)=H(0, q, t)$. Так как пространство положений $T^1\{q \bmod 2\pi\}$ компактно и функция U отрицательно определена в окрестности точки $q=\pi$ при всех $\varepsilon\in(-a, a)$, то существование гомоклинных решений $q(t)$ вытекает из результатов [6]. При этом сепаратрисы S_+ и S_- пересекаются, например, в точке $(p, q)=(\dot{q}(0), q(0))$.

Замечание. Если функция $f(t)$ четна, то сепаратрисы S_+ *и* S_- пересекаются на прямой $\{q=0\}$.

4. Расщепление сепаратрис. При малых значениях параметра ε уравнения асимптотических поверхностей Π_+ и Π_- можно представить в следующем виде (см., например, [1]):

$$p=\frac{\partial S}{\partial q}, \quad S=S_0(q, t)+\varepsilon S_1(q, t)+\ldots,$$

причем функция $S(q, t, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2-\omega^2\{1+\varepsilon f(t)\}\cos q=0.$$

Очевидно, что $\partial S_0/\partial q=\pm 2\omega\cos q/2$, а функция S_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S_1}{\partial t}\pm 2\omega\cos\frac{q}{2}\,\frac{\partial S_1}{\partial q}=\omega^2 f(t)\cos q.$$

Будем искать функцию S_1 в следующем виде:

$$S_1=\sum_{n=0}^{\infty}\{\xi_n(q)\sin nt+\eta_n(q)\cos nt\}.$$

Коэффициенты ξ_n и η_n удовлетворяют системе уравнений

$$-n\eta_n \pm 2\omega\cos q/2\xi_n' = \omega^2 a_n \cos q, \quad n\xi_n \pm 2\omega\cos q/2\eta_n' = \omega^2 b_n \cos q.$$

Положим $\xi_n = \widetilde{\xi}_n + b_n\omega^2/n$, $\eta_n = \widetilde{\eta}_n - a_n\omega^2/n$, $\psi_n = \widetilde{\xi}_n + i\widetilde{\eta}_n$, $c_n = a_n + ib_n$. Тогда

$$\pm 2\omega\cos q/2\,\psi_n' + in\psi_n = 2^2\omega c_n \cos^2 q/2.$$

Общее решение однородного уравнения —

$$\psi_n = \zeta\left(\frac{1-\sin q/2}{1+\sin q/2}\right)^{\pm\frac{in}{2\omega}}, \qquad \zeta = \mathrm{const}, \tag{4}$$

и неоднородного —

$$\psi_n = \omega c_n \left(\frac{1-\sin q/2}{1+\sin q/2}\right)^{\pm\frac{in}{2\omega}} \int\limits_{\alpha}^{q} \left(\frac{1-\sin x/2}{1+\sin x/2}\right)^{\mp\frac{in}{2\omega}} \cos\frac{x}{2}\,dx, \qquad \alpha = \mathrm{const}. \tag{5}$$

Функция (5) аналитична в точке $q=\pi(-\pi)$, если положить $\alpha=\pi(-\pi)$, а функция (4) при $\zeta\neq 0$ в этой точке аналитической не является. Таким образом, в уравнении асимптотической поверхности Π_+ (Π_-) следует положить $\alpha=\pi(-\pi)$. Обозначим через $\psi_n^\pm$ функции, определяемые формулой (5), где $\alpha=\pm\pi$. Если поверхности Π_+ и Π_- совпадают при $t=0$ и некотором достаточно малом значении $\varepsilon\neq 0$, то функции

$$G^\pm(q) = \frac{\partial S_1}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dq}\eta_n = \mathrm{Im}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dq}\psi_n^\pm$$

совпадают при всех $q\in(-\pi, \pi)$. Приравняв их значения при $q=0$, получим, что

$$\mathrm{Im}\sum_{n=1}^{\infty} \pm\frac{inc_n}{2} I_n = 0, \quad I_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1-\sin x/2}{1+\sin x/2}\right)^{\mp\frac{in}{2\omega}}\cos\frac{x}{2}\,dx.$$

Интеграл I_n ($n\in\mathbf{N}$) нетрудно вычислить с помощью вычетов. Он равен $2\pi n/\omega\,\mathrm{sh}\,(\pi n/2\omega)$. Следовательно,

$$\mathrm{Im}\sum_{\mathbf{N}} \pm\frac{inc_n}{2} I_n = \pm\frac{\pi}{\omega}\sum_{\mathbf{N}}\frac{n^2 a_n}{\mathrm{sh}\,(\pi n/2\omega)}$$

Таким образом, если выполнено условие (3), то поверхности Π_+ и Π_- не совпадают при $t=0$ и малых значениях $\varepsilon\neq 0$. Иначе говоря, сепаратрисы S_+ и S_- «расщепляются» при достаточно малых $\varepsilon\neq 0$.

5. *Поведение сепаратрис при больших значениях* ε. Как отмечено в п. 2, сепаратрисы S_+ и S_- являются регулярными аналитическими кривыми, аналитически зависящими от параметра $\varepsilon\in[-a-\delta,\ a+\delta]$, где δ — некоторое малое положительное число. Значения параметра ε, $|\varepsilon|\leqslant a+\delta$, при которых $S_+\equiv S_-$, изолированы (поскольку изолированы нули любой аналитической функции). В противном случае $S_+\equiv S_-$ при всех ε, однако если выполнено неравенство (3), то это не так (п. 4). Следовательно, сепаратрисы S_+ и S_- могут совпадать лишь при конечном числе значений ε из интервала $[-a,\ a]$.

Пусть при некотором фиксированном $\varepsilon \in (-a, a)$, когда сепаратрисы не совпадают, существует первый интеграл $F(p, q, t)$, 2π-периодический по переменным q и t. Функция $f(p, q) = F(p, q, 0)$ является инвариантной функцией отображения за период плоскости $\Sigma_0 = \{t = 0\}$ на себя. Поскольку сепаратрисы S_+ и S_- пересекаются и не совпадают, то, как доказано в работе [7], $f(p, q) \equiv \mathrm{const}$. Рассмотрим сечение $\Sigma_\mu = \{t = \mu\}$. *При малых μ сепаратрисы $S_+(\mu) = \Pi_\pm \cap \Sigma_\mu$ тоже пересекаются, не совпадая.* Следовательно, функция $F(p, q, t)$ не зависит от переменных p и q при малых значениях t. Поскольку F аналитична по всем переменным, то не зависит от p и q при всех $t \in \mathbf{R}$. Ясно, что уравнения (2) не могут иметь первого интеграла, зависящего лишь от времени.

V. V. Kozlov

ABOUT OSCILATIONS OF ONE DIMENTIONAL SYSTEMS WITH PERIODIC POTENTIAL

This paper deals with asymptotic motions and conditions of integrability of the system described by the equation $\ddot{x} + \omega^2\{1 + \varepsilon f(t)\} \sin x = 0$, where ω, $\varepsilon = \mathrm{const}$ and f is an analytic 2π-periodic function of time.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. — Избр. труды, т. 1. М., 1971.
2. Козлов В. В. О несуществовании аналитических интегралов канонических систем, близких к интегрируемым. — Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1974, № 2, с. 77—82.
3. Зиглин С. Л. Ветвление решений и несуществование дополнительного первого интеграла в задаче о движении несимметричного тяжелого твердого тела относительно неподвижной точки. — Докл. АН СССР, 1980, 251, № 4, с. 786—790.
4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
6. Болотин С. В., Козлов В. В. Об асимптотических решениях уравнений динамики. — Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1980, № 4, с. 84—89.
7. Cushman R. Examples of nonintegrable analytic Hamiltonian vector fields with no small divisors. — Trans. Amer. Math. Soc., 1978, 238, p. 45—55.

Поступила в редакцию
15.05.80