В. В. Козлов

МЕТОДЫ КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Издание второе, исправленное и дополненное

Научно-издательский центр
«Регулярная и хаотическая динамика»

2000

УДК 531

Козлов В. В.
Методы качественного анализа в динамике твердого тела. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, 256 стр.

В монографии излагаются современные математические методы качественного анализа динамических систем применительно к классической задаче о вращении твердого тела с неподвижной точкой. Рассмотренные задачи группируются вокруг трех связанных друг с другом проблем: существование однозначных аналитических интегралов, периодические решения, малые знаменатели. Эти проблемы занимают одно из центральных мест в классической механике.

Первое издание вышло в 1980 г. и давно стало библиографической редкостью. В новое издание вошла работа В. В. Козлова, посвященная исследованию уравнений Дуффинга.

Издание выполнено при финансовой поддержке
Удмуртского государственного университета

ISBN 5-93972-011-0

http://www.rcd.ru

Содержание

Я дал лишь набросок этого метода, из которого, без сомнения, еще много можно извлечь.

А. Пуанкаре
Аналитическое резюме

НЕКОТОРЫЕ ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbf{R}$ — множество всех действительных чисел.

$\mathbf{C}$ — множество всех комплексных чисел.

$\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел.

$\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел.

$\exists$ — «существует».

$\forall$ — «для всякого».

$a \in A$ — элемент a из множества A.

$A \subset B$ — подмножество A множества B.

$A \cap B$ — пересечение множеств A и B.

$A \cup B$ — объединение множеств A и B.

$A \setminus B$ — разность множеств A и B.

$A \times B$ — прямое произведение множеств A и B (множество пар (a, b) таких, что $a \in B$, $b \in B$).

$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$ — n-мерное вещественное линейное пространство.

$\mathbf{R}^n\{x_1, \ldots, x_n\}$ — n-мерное пространство с декартовыми координатами $x_1, \ldots, x_n$.

S^1, $\mathbf{T}^1$ — окружность, S^n — n-мерная сфера.

$\mathbf{T}^n = \mathbf{T}^1 \times \ldots \times \mathbf{T}^1$ — n-мерный тор.

$\mathbf{T}^n\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n \bmod 2\pi\}$ — n-мерный тор с угловыми координатами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, изменяющимися по модулю 2π.

$\overline{A}$ — замыкание множества A (но $\overline{z}$ — число, сопряженное с z).

$\operatorname{Int} A$ — внутренность множества A.

∂A — граница множества A ($\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$).

$\{a \in A : \mathscr{J}\}$ — множество элементов из A, удовлетворяющих условию $\mathscr{J}$.

$\{a, b, c \ldots\}$ — множество, состоящее из элементов $a, b, c, \ldots$.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

ОТ РЕДАКЦИИ

Вниманию читателей предлагается второе издание монографии В. В. Козлова «Методы качественного анализа в динамике твердого тела». Эта книга вышла 20 лет назад и давно стала библиографической редкостью. По сути дела она является докторской диссертацией В. В. Козлова, защищенной в 1978 году.

Эта монография оказала существенное влияние на развитие современной аналитической динамики и теории динамических систем. Ряд изложенных в ней результатов стали классическими, часто цитируются и развиты многими авторами в различных направлениях.

В первых трех главах содержится решение проблемы Пуанкаре о несуществовании дополнительного аналитического первого интеграла уравнений вращения тяжелого несимметричного волчка, поставленной в знаменитых «Новых методах небесной механики». В четвертой главе рассмотрены динамические эффекты, препятствующие интегрируемости несимметричного волчка: рождение бесконечного числа невырожденных долгопериодических решений и расщепление сепаратрис. Впоследствии автор этой книги связал два указанных явления, оба из которых восходят к Пуанкаре. Мы приводим в приложении доклад В. В. Козлова на семинаре в Институте машиноведения РАН, в котором демонстрируется превосходство методов Пуанкаре над стандартными методами теории колебаний при изучении периодических колебаний в системах Дуффинга. В пятой главе приведено решение старой проблемы Пенлеве–Голубева о связи между ветвлением решений уравнений динамики в комплексной плоскости времени и существованием новых однозначных первых интегралов. Эти результаты дали сильный толчок исследованиям по проблеме точной интегрируемости уравнений движения. Современное состояние этой теории изложено в недавней книге В. В. Козлова «Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике» (Ижевск, Изд-во Удмуртского университета, 1995).

В шестой главе развиваются вариационные методы изучения траекторий в областях возможных движений с краем. После теоремы Зейферта 1948 г. о либрациях в диске, основные результаты в этом направлении получены В. В. Козловым и С. В. Болотиным. Обзор достижений в этой области содержится в работе В. В. Козлова «Вариационное исчисление в целом и классическая механика» (Успехи математических наук, 1985, т. 40, вып. 2, с. 33–60).

Заключительные главы 7–9 посвящены качественной картине вращения тяжелого волчка в наиболее сложных случаях интегрируемости Горячева–Чаплыгина и Ковалевской. Как ни странным кажется сегодня, но до работ В. В. Козлова эти задачи вообще не связывались с теорией условно-периодических функций. Центральной здесь является глава 8 и особенно теорема о равномерной возвращаемости интеграла от двухчастичной функции с нулевым средним. В. В. Козлов ставил вопрос о распространении этого результата на многочастотный случай. Эта задача оказалась довольно трудной, и лишь недавно положительный ответ получен С. В. Конягиным для нечетных функций и Н. Г. Мощевитиным в общем случае. Более того, как показал Н. Г. Мощевитин, свойство равномерной возвращаемости теряется уже для интегралов от трехчастотных функций.

По прошествии двадцати лет книга является вполне современной. Она не отягощена общностью и абстрактностью изложения, и ее смело можно рекомендовать молодым исследователям как введение в широкую область современных качественных методов.

1 января 2000 г. В. В. Козлову исполнилось 50 лет. В этом же году он был избран действительным членом Российской Академии наук. Со стороны НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» издание этой книги — скромный дар крупнейшему ученому и замечательному человеку, благодаря которому в России возникло целое научное направление.

Ижевск, октябрь 2000

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задача о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки наряду с задачей трех тел является одной из самых знаменитых задач динамики.

Замечательны эти задачи тем, что являются непосредственным обобщением задач, решаемых до конца простыми средствами классического анализа, и обе представляют столь большие трудности, что еще далеки от завершения, несмотря на глубокие результаты, полученные крупнейшими математиками и механиками двух последних столетий — Эйлером, Лагранжем, Пуассоном, Ковалевской, Пуанкаре, Ляпуновым и др. Задача трех тел представляет прямое обобщение задачи о движении двух тел под действием сил притяжения, блестяще решенной еще Ньютоном. Аналогично, задача о движении твердого тела с закрепленной точкой является естественным обобщением интегрируемой задачи о качании физического маятника.

В истории этих классических задач можно найти много общего как в характере полученных результатов, так и в путях применения математического аппарата. Приведу некоторые, на мой взгляд, наиболее существенные параллели.

1. Исследования С. В. Ковалевской в динамике твердого тела и К. Зундмана в задаче трех тел, где время считается комплексной переменной. Цели введения комплексного переменного у Ковалевской и Зундмана различные, однако их методы объединяет идея, состоящая в том, что исследование комплексных особенностей дает важную информацию о поведении действительных решений.

2. Результаты Брунса и Пенлеве в задаче трех тел и Пуанкаре, Лиувилля, Гюссона в динамике твердого тела, касающиеся отсутствия новых алгебраических интегралов.

3. Отыскание стационарных решений и исследование их устойчивости. В небесной механике это точки либрации,

а в динамике твердого тела с неподвижной точкой — перманентные вращения.

4. Нахождение частных решений и интегрируемых случаев: гомографические решения в задаче трех тел и общие (а также многочисленные частные) случаи интегрируемости в динамике твердого тела. Задача о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки намного богаче интегрируемыми случаями, и она в этом смысле «ближе» к интегрируемой, чем задача трех тел. А это приводит к тому, что сложнее доказать ее неинтегрируемость.

Правда, в целом задаче трех тел «повезло» все же больше: начиная с исследований А. Пуанкаре, эта задача и разнообразные ее варианты постоянно были первоочередным объектом приложения теоретических новинок. Так, например, созданный недавно С. Смейлом общий метод топологического анализа натуральных систем с симметрией был апробирован им на задаче трех тел, и только впоследствии аналогичные результаты были получены рядом авторов в динамике твердого тела с учетом специфики этой задачи.

Таким важным проблемам, возникшим в небесной механике, как вопросы существования новых аналитических (а не только алгебраических) первых интегралов, отыскание периодических решений с помощью метода малого параметра А. Пуанкаре и методов вариационного исчисления в целом, расщепление сепаратрис, в динамике твердого тела не было уделено должного внимания.

Правда, есть ряд работ, посвященных нахождению периодических решений методом малого параметра (см., например, обзорную статью [37]). Однако эти работы не исчерпывают всех возможностей, которые даст метод А. Пуанкаре.

Все только что перечисленные задачи нашли свое отражение в этой книге. Кроме этого, рассмотрена задача Пенлеве о связи между неоднозначностью (в смысле теории функций комплексного переменного) общего решения и несуществованием новых однозначных первых интегралов, а также исследован ряд математических задач, возникающих при качественном анализе наиболее сложных случаев интегрируемости Ковалевской и Горячева–Чаплыгина. Последние группируются вокруг идеи равномерного распределения и проблемы «малых делителей», также зародившихся в небесной механике.

К каждой главе написан исторический очерк, в котором кратко рассказано об истории рассмотренного круга вопросов и об основных относящихся сюда результатах.

Предполагается, что читатель знаком с обычным курсом аналитической механики (в частности, с основными фактами динамики твердого тела). Достаточно, например, знакомства с учебником В. И. Арнольда «Математические методы классической механики» (М., «Наука», 1974). При изложении материала часто используется известная теорема Лиувилля–Арнольда об интегрируемых гамильтоновых системах, а также связанные с ней идеи и понятия, такие, как инвариантные торы, квазипериодические движения на торах, усреднение и т. д.

Содержание настоящей книги составили результаты, полученные автором в 1971–1977 гг. Я считаю своим долгом выразить благодарность чл.-кор. АН СССР профессору В. В. Румянцеву и профессорам В.И.Арнольду, В.М.Алексееву и Ю. А. Архангельскому за их внимание и советы, которыми я многократно пользовался.

В. Козлов

Глава I

Несуществование аналитических интегралов канонических систем, близких к интегрируемым

§ 1. Обобщение теоремы Пуанкаре об отсутствии аналитических интегралов

Предположим, что прямое произведение двумерного тора $\mathbf{T}^2\{\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi\}$ на связную ограниченную область D плоскости $\mathbf{R}^2\{I_1, I_2\}$ снабжено естественной канонической структурой — невырожденной 2-формой $dI_1 \wedge d\varphi_1 + dI_2 \wedge d\varphi_2$. Пусть на множестве $D \times \mathbf{T}^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ задана аналитическая функция

$$\begin{gathered}\mathscr{H}(I, \varphi, \mu) = \mathscr{H}_0(I) + \mu\mathscr{H}_1(I, \varphi) + \ldots, \\ I = (I_1, I_2), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2).\end{gathered} \tag{1.1}$$

Функции $\mathscr{H}_k(I, \varphi)$ $(k = 0, 1, 2 \ldots)$ аналитичны в $D \times \mathbf{T}^2$.

Согласно А. Пуанкаре [1, п. 13], исследование канонических уравнений

$$\dot{I} = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial I}$$

с гамильтонианом вида (1.1) является «основной проблемой динамики».

Система канонических уравнений с функцией Гамильтона

$$\mathscr{H}_0(I) = \mathscr{H}(I, \varphi, 0)$$

называется невозмущенной. Она немедленно интегрируется:

$$I = I^0,\ \varphi = \omega(I)t + \varphi^0,\ \omega = (\omega_1, \omega_2),\ \omega_k = \frac{\partial\mathscr{H}_0}{\partial I_k} \quad (k = 1, 2).$$

Четырехмерное фазовое пространство $D \times \mathbf{T}^2$ невозмущенной системы расслаивается на двумерные инвариантные торы

$$\{(I,\, \varphi) : I = I^0,\ \varphi \in \mathbf{T}^2\}. \tag{1.2}$$

Угловыми координатами на этих торах являются φ_1 и φ_2. Переменные I «нумеруют» инвариантные торы (1.2). Канонические координаты I, φ называются переменными действие-угол интегрируемой системы с гамильтонианом $\mathscr{H}_0$.

Формулы

$$\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_1^0, \quad \varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_2^0$$

задают на торах (1.2) квазипериодические движения с двумя частотами ω_1 и ω_2. Если на инвариантном торе $I = I^0$ частоты соизмеримы (несоизмеримы), то такой тор называется резонансным (нерезонансным).

Функция $\mathscr{H}_1(I,\, \varphi)$ называется возмущающей (пертурбационной). Разложим ее в сходящийся двойной ряд Фурье:

$$\mathscr{H}_1(I,\, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} H_{m_1 m_2}(I) e^{i(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)}.$$

Определение 1. *Вековым множеством* $\mathscr{B}$ системы с гамильтонианом (1.1) называется множество всех пар $(I_1,\, I_2) \in D$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $m_1\omega_1(I) + m_2\omega_2(I) = 0$, $m_1,\, m_2 \in \mathbf{Z}$;

2) $|m_1| + |m_2| \neq 0$;

3) $H_{m_1 m_2}(I) \neq 0$.

Под вековым множеством мы будем понимать также множество всех резонансных торов в фазовом пространстве невозмущенной задачи, отвечающих переменным действие $I \in \mathscr{B}$. Из текста всегда будет ясно, о каком множестве идет речь.

Обозначим через $A(M)$ класс функций, аналитических в области $M \subset \mathbf{R}^n$.

Определение 2. Множество $N \subset M$ называется *ключевым множеством* для класса $A(M)$, если для любой функции f из $A(M)$, равной нулю на N, справедливо равенство $f \equiv 0$ во всей области M.

Пусть область G плоскости $\mathbf{R}^2\{I_1,\, I_2\}$ является подобластью D и $\overline{G} \subset D$.

Теорема 1. *Предположим, что для системы с гамильтонианом* (1.1) *выполнены следующие условия*:

1) *гессиан* $\partial^2 \mathscr{H}_0/\partial I^2 \neq 0$ *в области* D;

2) *множество* $\mathscr{B} \cap G$ *является ключевым для класса* $A(G)$;

3) *функция* $\mathscr{H}_0$ *не имеет критических точек в области* D. *Тогда у системы с функцией Гамильтона* (1.1) *нет независимого от функции* $\mathscr{H}$ *первого интеграла, аналитического в* $D \times \times \mathbf{T}^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Теорема 1 является обобщением известного результата А. Пуанкаре о несуществовании аналитических интегралов канонических систем [1, гл. V; 2, гл. XIV] в случае, когда вековое множество задачи не всюду плотно в области D. Распространение этой теоремы на системы с большим числом степеней свободы не представляет затруднений.

Доказательство теоремы 1 опирается на ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1 (А. Пуанкаре). *Пусть невозмущенная система невырождена, т. е.* $\partial^2 \mathscr{H}_0/\partial I^2 \not\equiv 0$. *Предположим, что система с функцией Гамильтона* (1.1) *обладает первым интегралом* $\mathscr{F}(I, \varphi, \mu)$, *аналитическим в* $D \times \mathbf{T}^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. *Тогда*

1) *функция* $\mathscr{F}_0(I, \varphi) = \mathscr{F}(I, \varphi, 0)$ *не зависит от* φ;

2) *якобиан* $\dfrac{\partial(\mathscr{H}_0, \mathscr{F}_0)}{\partial(I_1, I_2)}$ *на* $\mathscr{B}$.

Доказательство (ср. с [1, гл. V]).

1. Функция $\mathscr{F}_0$ — первый интеграл невозмущенной системы. Пусть тор $I = I^0$ нерезонансный. Тогда $\mathscr{F}_0(I^0, \varphi)$ не зависит от φ, так как любая траектория заполняет нерезонансный тор всюду плотно [4] и функция $\mathscr{F}_0$ постоянна на решениях невозмущенной задачи. Для завершения доказательства остается использовать непрерывность функции $\mathscr{F}_0$ и всюду плотность множества нерезонансных торов невырожденной интегрируемой системы [4].

2. Пусть

$$\mathscr{F}(I, \varphi, \mu) = \mathscr{F}_0(I) + \mu \mathscr{F}_1(I, \varphi) + \ldots,$$

$$\mathscr{F}(I, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_{m_1 m_2}(I) e^{i(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)}.$$

Так как

$$\dot{\mathscr{F}} = (\mathscr{H}, \mathscr{F}) = (\mathscr{H}_0, \mathscr{F}_0) + \mu[(\mathscr{H}_0, \mathscr{F}_1) + (\mathscr{H}_1, \mathscr{F}_0)] + \ldots \equiv 0,$$

то

$$(\mathscr{H}_0, \mathscr{F}_1) \equiv (\mathscr{F}_0, \mathscr{H}_1). \tag{1.3}$$

Здесь символ $(\mathscr{F}', \mathscr{F}'')$ обозначает скобку Пуассона функций $\mathscr{F}'$ и $\mathscr{F}''$. Поскольку функции $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$ не зависят от φ, то из равенства (1.3) следует, что

$$(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)\, F_{m_1m_2} = \left(m_1 \frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial I_1} + m_2 \frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial I_2}\right) H_{m_1m_2}$$

для всех m_1, $m_2 \in \mathbf{Z}$. Пусть $I \in \mathscr{B}$. Тогда

$$m_1 \frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial I_1} + m_2 \frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial I_2} = 0, \tag{1.4}$$

и, так как $H_{m_1m_2}(I) \neq 0$,

$$m_1 \frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial I_1} + m_2 \frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial I_2} = 0. \tag{1.5}$$

Поскольку $|m_1| + |m_2| \neq 0$, то из равенств (1.4) и (1.5) следует заключение п. 2. ■

Если

$$\frac{\partial^2 \mathscr{H}_0}{\partial I^2} = \frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(I_1, I_2)} \neq 0$$

в области D, то уравнение

$$l_{m_1m_2} : m_1\omega_1(I) + m_2\omega_2(I) = 0 \tag{1.6}$$

$(|m_1| + |m_2| \neq 0)$ определяет в D регулярную аналитическую кривую без особых точек. Следовательно, в предположениях теоремы 1 и леммы 1

1) функции $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$ зависимы на множестве $\mathscr{B}' \supset \mathscr{B}$, состоящем из аналитических кривых (1.6), на которых соответствующие коэффициенты $H_{m_1m_2}(I)$ не обращаются в тождественный нуль;

2) $\mathscr{B} \cap G$ является ключевым множеством для класса $A(G)$ тогда и только тогда, когда ключевым является множество $\mathscr{B}' \cap G$.

Лемма 2. *В предположениях теоремы* 1

1) *множество* $\mathscr{B}' \cap G$ *состоит из бесконечного числа аналитических кривых, лежащих в области* G;

2) *для любого* $\delta < \delta_0$ $(\delta > 0)$ *существует круг* K_δ *радиуса* δ*, целиком лежащий в* D*, такой, что* $\mathscr{B}' \cap K_\delta$ — *ключевое множество для класса* $A(E)$*, где* $E \subset D$ — *любая окрестность множества* K_δ.

Доказательство.

1. Предположим противное, т. е. множество $\mathscr{B}' \cap G$ состоит из конечного числа аналитических кривых

$$l_{m_1^{(k)} m_2^{(k)}} : m_1^{(k)} \omega_1 + m_2^{(k)} \omega_2 = 0; \quad k = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим аналитическую функцию

$$\mathscr{P}(I) = \prod_{k=1}^{n} \left[m_1^{(k)} \omega_1(I) + m_2^{(k)} \omega_2(I) \right].$$

Очевидно, что $\mathscr{P}(I) = 0$, когда $I \in \mathscr{B}' \cap G$ и $\mathscr{P} \not\equiv 0$ в области G. Но это противоречит условию 2) теоремы 1.

2. Пусть δ — малое положительное число. Так как область D ограничена и $\overline{G} \cap D$, то существует $\delta_0 > 0$ такое, что при всех $\delta < \delta_0$ круги радиуса δ с центрами в точках множества G лежат в D. Рассмотрим покрытие области G кругами K_δ радиуса $\delta < \delta_0$ с центрами во всех ее точках. Из этого бесконечного покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Действительно, заменяя круги K_δ их внутренностями $\operatorname{Int} K_\delta$, получим открытое покрытие множества $\overline{G}$. Так как $\overline{G}$ компактно, то по теореме Гейне–Бореля из этого открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $\operatorname{Int} K_\delta^{(1)}, \ldots, \operatorname{Int} K_\delta^{(n)}$. Очевидно, что круги $K_\delta^{(1)}, \ldots, K_\delta^{(n)}$ целиком покрывают область G.

При некотором i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ пересечение $\mathscr{B}' \cap K_\delta^{(i)}$ состоит из бесконечного числа регулярных аналитических кривых вида (1.6). Докажем, что множество $\mathscr{B}' \cap K_\delta$ $(K_\delta = K_\delta^{(i)})$ является ключевым для класса аналитических функций $A(E)$, где $E \subset D$ — любая окрестность круга K_δ. Так как якобиан

$$\frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(I_1, I_2)} \neq 0$$

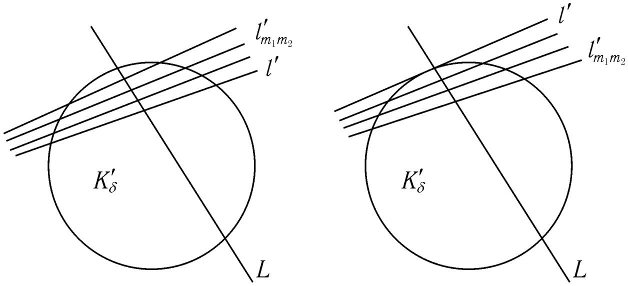

Рис. 1

в области D, то при малых значениях $\delta > 0$ в некоторой окрестности круга K_δ аналитической обратимой заменой переменных можно ввести новые координаты I'_1, I'_2 по формулам

$$I'_1 = \omega_1(I_1, I_2), \quad I'_2 = \omega_2(I_1, I_2).$$

В плоскости переменных I'_1, I'_2 круг K_δ является некоторым выпуклым множеством K'_δ, а кривые (1.6) суть прямые линии

$$l'_{m_1m_2} : m_1 I'_1 + m_2 I'_2 = 0. \tag{1.7}$$

Заметим, что свойство множества быть ключевым не зависит от выбора системы координат. Так как $|\omega_1(I)| + |\omega_2(I)| \neq 0$ в круге K_δ, то множество K'_δ не содержит точку $I'_1 = I'_2 = 0$. Следовательно, прямые (1.7) либо совпадают, либо не имеют точек пересечения в K'_δ. Бесконечное множество различных прямых $l'_{m_1m_2}$ имеет некоторую предельную прямую линию l'. На рис. 1 изображены возможные случаи расположения прямых l' и $l'_{m_1m_2}$.

Пусть $f(I')$ — функция, аналитическая в некоторой окрестности K'_δ и обращающаяся в нуль на прямых $l'_{m_1m_2}$. Обозначим через $f|_L$ сужение функции f на прямую L (см. рис. 1). Так как нули аналитической функции $f|_L$ имеют предельную точку, лежащую внутри ее области аналитичности, то $f|_L \equiv 0$ и, следовательно, $f \equiv 0$ в любой окрестности множества K'_δ. ∎

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и предположения леммы* 1. *Тогда существуют достаточно малое* $\delta > 0$ *и выпуклая область* $E \subset D$, $\overline{E} \subset D$, $K_\delta \subset E$, *такие, что*

1) *в области E справедливо равенство $\mathscr{F}_0 = \mathscr{R}(\mathscr{H}_0)$, где $\mathscr{R}(x)$ — функция, аналитическая в интервале (δ', δ''), $\delta' = \min\limits_E \mathscr{H}_0$, $\delta'' = \max\limits_E \mathscr{H}_0$ $(\delta' < \delta'')$;*

2) *существуют $\varepsilon' > \varepsilon$ и выпуклая область $E' \subset E$, $\overline{E}' \subset E$, $K_\delta \subset E'$, такие, что функция*

$$(\mathscr{F} - \mathscr{R}(\mathscr{H}))/\mu$$

является первым интегралом канонической системы уравнений с гамильтонианом (1.1), аналитическим в прямом произведении $E' \times \mathbf{T}^2 \times (-\varepsilon', \varepsilon')$.

Доказательство.

1. Так как в области D нет критических точек функции $\mathscr{H}_0(I)$, то при малых $\delta > 0$ в некоторой выпуклой окрестности E круга K_δ отлична от нуля одна из производных $\partial\mathscr{H}_0/\partial I_1$, $\partial\mathscr{H}_0/\partial I_2$. Пусть, например, $\partial\mathscr{H}_0/\partial I_1 \neq 0$. Множество E выпукло, следовательно, равенство

$$\mathscr{H}_0 = \mathscr{H}_0(I_1, I_2)$$

можно разрешить относительно I_1:

$$I_1 = I_1(\mathscr{H}_0, I_2).$$

Рассмотрим аналитическую функцию

$$\mathscr{F}_0(\mathscr{H}_0, I_2) = \mathscr{F}_0(I_1(\mathscr{H}_0, I_2), I_2).$$

Так как $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$ зависимы, то нетрудно доказать, что $\mathscr{F}_0$ не зависит от I_2 (ср. с [1, гл. V]). Итак, $\mathscr{F}_0 = \mathscr{R}(\mathscr{H}_0)$, где $\mathscr{R}(x)$ — аналитическая функция, определенная в интервале (h', h''),

$$h' = \min_{I \in E} \mathscr{H}_0(I), \quad h'' = \max_{I \in E} \mathscr{H}_0(I) \quad (h' < h'').$$

2. При малых значениях параметра μ функция $\mathscr{R}(\mathscr{H})$ аналитична по переменным I, φ в области $E' \times \mathbf{T}^2$, где E' — выпуклая подобласть E, $\overline{E}' \subset E$, $K_\delta \subset E'$. Так как $\mathscr{F}$ — первый интеграл канонической системы уравнений с гамильтонианом (1.1), то такова же и разность

$$\mathscr{F} - \mathscr{R}(\mathscr{H}). \tag{1.8}$$

Функция (1.8) аналитична в области $E' \times \mathbf{T}^2 \times (-\varepsilon', \varepsilon')$, где $\varepsilon' < \varepsilon$ — достаточно малое положительное число. Разложение этой функции в ряд по степеням μ не содержит свободного члена, так как $\mathcal{F}_0 - \mathcal{R}(\mathcal{H}_0) = 0$. Полагая поэтому

$$\mathcal{F} - \mathcal{R}(\mathcal{H}) = \mu\mathcal{F}',$$

находим, что $\mathcal{F}'(I, \varphi, \mu)$ — первый интеграл рассматриваемой системы, аналитический в области $E' \times \mathbf{T}^2 \times (-\varepsilon', \varepsilon')$. ■

Доказательство теоремы 1.

Пусть

$$\mathcal{F}(I, \varphi, \mu) = \mathcal{F}_0(I, \varphi) + \mu\mathcal{F}_1(I, \varphi) + \ldots$$

— аналитический интеграл системы с гамильтонианом (1.1). Если функции $\mathcal{H}$ и $\mathcal{F}$ независимы, то ранг матрицы Якоби

$$\frac{\partial(\mathcal{H}, \mathcal{F})}{\partial(I, \varphi)} \tag{1.9}$$

равен двум. Обозначим через $J(I, \varphi, \mu)$ один из миноров второго порядка матрицы (1.9), не равный тождественно нулю. Разложим аналитическую функцию J в сходящийся степенной ряд:

$$J = J_0 + \mu J_1 + \ldots \tag{1.10}$$

Согласно лемме Пуанкаре и условию 2) $J_0 \equiv 0$. Предположим, что в разложении (1.10) коэффициент при μ^p $(p \geqslant 1)$ не равен тождественно нулю. По лемме 3 функцию $\mathcal{F}$ можно представить в виде

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}(\mathcal{H}) + \mu\mathcal{F}', \tag{1.11}$$

где $\mathcal{F}'(I, \varphi, \mu)$ — первый интеграл, аналитический в области $E' \times \mathbf{T}^2 \times (-\varepsilon', \varepsilon')$. Разложим функцию $\mathcal{F}'$ в сходящийся степенной ряд:

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}'_0(I, \varphi) + \mu\mathcal{F}'_1(I, \varphi) + \ldots$$

По лемме Пуанкаре $\mathscr{F}_0'$ не зависит от φ и функции $\mathscr{F}_0'$ и $\mathscr{H}_0$ зависимы в точках множества $\mathscr{B}' \cap E'$. Так как $\mathscr{B}' \cap K_\delta \subset \subset \mathscr{B}' \cap E'$ является ключевым множеством для класса $A(E')$ (лемма 2), то функции $\mathscr{F}'_0$ и $\mathscr{H}_0$ зависимы во всей области E'. Следовательно, согласно (1.11) $J_1 \equiv 0$ и $p \geqslant 2$. Повторяя эту операцию p раз, мы придем к заключению, что разложение (1.10) начинается с членов порядка μ^{p+1}, а не μ^p, как предполагалось выше. Полученное противоречие завершает доказательство.

■

§ 2. Пример из динамики

Приведем пример механической системы с двумя степенями свободы, удовлетворяющей условиям теоремы 1, но для которой замыкание $\overline{\mathscr{B}}$ не совпадает с областью D.

Рассмотрим на плоскости непересекающиеся эллипс и окружность; пусть (для упрощения вычислений) центр окружности совпадает с одним из фокусов эллипса. По этим кривым могут свободно перемещаться две точки с массами m_1 и m_2, которые связаны между собой упругой пружиной с коэффициентом упругости k.

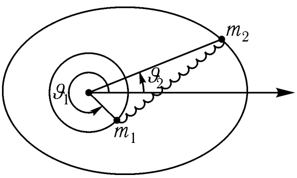

Рис. 2

При $k = 0$ имеем интегрируемый случай: независимое движение точек по инерции.

Параметры эллипса обозначим через p и e ($e \neq 0$), радиус окружности — через R. Положение масс на окружности и эллипсе будем задавать угловыми координатами ϑ_1, ϑ_2 (в полярной системе координат с началом в центре окружности).

В канонических переменных ϑ_1, ϑ_2, Θ_1, Θ_2 гамильтониан $\mathscr{H}_0$ невозмущенной задачи (при $k = 0$) тождественен живой силе движения точек и имеет вид

$$\mathscr{H}_0 = \frac{\Theta_1^2}{2m_1R^2} + \frac{\Theta_2^2(1 + e\cos\vartheta_2)^4}{2m_2p^2(1 + 2e\cos\vartheta_2 + e^2)}.$$

Функция Гамильтона возмущенной задачи есть

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \mu\mathscr{H}_1, \quad \mu = k, \tag{2.1}$$

где

$$\mathscr{H}_1 = R^2 + \frac{p^2}{(1 + e\cos\vartheta_2)^2} - \frac{2Rp}{1 + e\cos\vartheta_2}\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1).$$

Переменные действие-угол I_1, I_2, φ_1, φ_2 в невозмущенной задаче суть следующие:

$$\begin{gathered} I_1 = \Theta_1, \quad \varphi_1 = \vartheta_1, \\ I_2 = \frac{p}{2\pi}\sqrt{2m_2\left(\mathscr{H}_0 - \frac{I_1^2}{2m_1R^2}\right)}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1 + 2e\cos x + e^2}}{(1 + e\cos x)^2}dx, \\ \varphi_2 = \frac{p}{\Lambda}\int\limits_0^{\vartheta_2}\frac{\sqrt{1 + 2e\cos x + e^2}}{(1 + e\cos x)^2}dx. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь

$$2\pi\Lambda = p\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1 + 2e\cos x + e^2}}{(1 + e\cos x)^2}dx$$

— периметр эллипса. Отметим, что переменная φ_2 является натуральным параметром (длиной дуги) на эллипсе.

Интеграл (2.2) можно упростить. Для этого перейдем от ϑ_2 к эксцентрической аномали E по формуле

$$\frac{1}{1 + e\cos\vartheta_2} = \frac{1 - e\cos E}{(1 - e^2)^2}. \tag{2.3}$$

Тогда интеграл (2.2) запишется так:

$$\varphi_2 = \frac{p}{(1 - e^2)\Lambda}\int\limits_0^{E}\sqrt{1 - e^2\cos^2 E}\, dE.$$

В канонических переменных действие-угол

$$\mathscr{H}_0 = \frac{I_1^2}{2m_1R^2} + \frac{I_2^2}{2m_2\Lambda^2}.$$

Возмущение в новых переменных примет вид

$$\mathscr{H}_1 = R^2 + \sum_{-\infty}^{\infty} H_{m,\,0} e^{im\varphi_2} + \\ + \sum_{-\infty}^{\infty} H_{m,\,1} e^{i(m\varphi_2 + \varphi_1)} + \sum_{-\infty}^{\infty} H_{m,\,-1} e^{i(m\varphi_2 - \varphi_1)},$$

коэффициенты $H_{m,0}$, $H_{m,\,1}$, $H_{m,\,-1}$ зависят только от p, e, R, но не от I.

Докажем, что среди коэффициентов $H_{m,\,1}$, $H_{m,\,-1}$ содержится бесконечно много отличных от нуля. Для этого, очевидно, достаточно показать, что разложение функции

$$\frac{\cos\vartheta_2}{1 + e\,\cos\vartheta_2} \tag{2.4}$$

в ряд Фурье по переменной φ_2 имеет бесконечно много членов. Предположим противное, т. е. функция (2.4) — тригонометрический полином. Из равенства (2.3) вытекает тогда, что $\cos E$ равен отношению двух полиномов. Следовательно, функция $\cos E$, рассматриваемая как функция комплексного переменного φ_2, является однозначной мероморфной функцией. Положим $w(\varphi_2) = \cos E$, тогда

$$(w')^2 = \frac{1 - w^2}{c^2(1 - e^2 w^2)}, \quad c = \frac{p}{(1 - e^2)\Lambda}.$$

Из одной теоремы Фукса [3, гл. II] следует, что все решения этого дифференциального уравнения имеют критические подвижные особые точки и, следовательно, неоднозначны на комплексной плоскости. Полученное противоречие доказывает высказанное выше утверждение.

Уравнения $\omega_1 + m\omega_2 = 0$ $(m \in \mathbf{Z})$, где ω_i $(i = 1, 2)$ — частоты невозмущенной задачи, определяют на плоскости $\mathbf{R}^2\{I_1, I_2\}$ прямые линии, проходящие через начало координат. Соответствующие коэффициенты в разложении возмущающей функции не зависят от переменных действие, и среди них есть бесконечно много, не равных нулю. Поэтому вековое множество $\mathscr{B}$ задачи с функцией Гамильтона (2.1) состоит из бесконечного числа прямых, проходящих через начало координат и имеющих единственную предельную прямую $I_2 = 0$.

Гессиан

$$\left|\frac{\partial^2 \mathscr{H}_0}{\partial I_1 \partial I_2}\right| = \frac{1}{m_1 m_2 R^2 \Lambda^2} \neq 0.$$

Очевидно, что $I_1 = I_2 = 0$ — единственная критическая точка $\mathscr{H}_0$.

Пусть область D плоскости $\mathbf{R}^2\{I_1, I_2\}$ имеет с прямой $I_2 = 0$ непустое пересечение. Тогда $\mathscr{B} \cap D$ является множеством, ключевым для класса $A(D)$. Действительно, пусть аналитическая функция $f(I_1, I_2)$ равна нулю на $\mathscr{B} \cap D$. Фиксируя $I_1 = I_1^0$, получаем аналитическую функцию одного переменного, нули которой имеют предельную точку $I_2 = 0$, лежащую внутри ее области аналитичности. Значит, f равна нулю на любой прямой $I_1 = I_1^0$ и, следовательно, во всей области D. Таким образом, на множестве $D\{I_1, I_2\} \times \mathbf{T}^2\{\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi\} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ для системы с гамильтонианом (2.1) выполнены все условия теоремы 1, но множество $\mathscr{B} \cap D$ не всюду плотно в D.

§ 3. Несуществование частных аналитических интегралов

У канонической системы с функцией Гамильтона (1.1) в общем случае вековое множество всюду плотно в D. По теореме 1 у таких систем, вообще говоря, не существует, кроме интеграла энергии, дополнительного интеграла, аналитического по каноническим переменным и параметру μ.

Возможно, однако, что общего второго интеграла не существует, но может существовать частный интеграл при каком-то фиксированном значении постоянной энергии h. Ниже мы покажем, что в общем случае этого также быть не может: не существует частного интеграла, аналитического по каноническим переменным и по малому параметру, который введен в общей задаче. Мы воспользуемся редукцией канонической автономной системы с двумя степенями свободы к системе с одной степенью свободы с гамильтонианом, зависящим от времени (такой переход осуществляется на уровне энергии) [2, 4]. Часто новый гамильтониан зависит от времени периодически.

Итак, предположим, что на множестве $(I', I'') \times \mathbf{T}^2\{\varphi, t \bmod 2\pi\} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ задана аналитическая функция

$$\mathscr{H}(I, \varphi, t, \mu) = \mathscr{H}_0(I) + \mu\mathscr{H}_1(I, \varphi, t) + \ldots \tag{3.1}$$

Функции $\mathscr{H}_k(I, \varphi, t)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ аналитичны на $(I', I'') \times \times \mathbf{T}^2$ и разлагаются в сходящиеся двойные ряды Фурье. Пусть, например,

$$\mathscr{H}_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} H_{m_1 m_2}(I) e^{i(m_1\varphi + m_2 t)}. \tag{3.2}$$

Определение 3. *Вековым множеством* $\widetilde{\mathscr{B}}$ системы с гамильтонианом (3.1) называется множество всех импульсов $I \in (I', I'')$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $m_1\omega + m_2 = 0$, $\omega(I) = \partial\mathscr{H}_0/\partial I$, $m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$;
2) $|m_1| + |m_2| \neq 0$;
3) $H_{m_1 m_2}(I) \neq 0$.

Теорема 2. *Пусть система с гамильтонианом $\mathscr{H}_0$ невырождена, т. е. $\partial^2\mathscr{H}_0/\partial I^2 \not\equiv 0$. Пусть вековое множество $\widetilde{\mathscr{B}}$ задачи с функцией Гамильтона* (3.1) *является ключевым множеством для класса $A(I', I'')$. Тогда система с гамильтонианом* (3.1) *не имеет интеграла $\mathscr{F}(I, \varphi, t, \mu)$, аналитического в области $(I', I'') \times \mathbf{T}^2\{\varphi, t \bmod 2\pi\} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

Замечание. С помощью теоремы Вейерштрасса о бесконечном произведении [5] можно доказать, что множество $M \subset (I', I'')$ является ключевым для класса $A(I', I'')$ тогда и только тогда, когда M имеет предельную точку, лежащую внутри интервала (I', I'').

Доказательство теоремы 2 вытекает из следующей индуктивной леммы, которая потребуется нам в дальнейшем.

Лемма 4. *Пусть $\partial^2\mathscr{H}_0/\partial I^2 \not\equiv 0$. Предположим, что у системы с функцией Гамильтона* (3.1) *существует аналитический интеграл*

$$\mathscr{F}(I, \varphi, t, \mu) = \mathscr{F}_0(I, \varphi, t) + \mu\mathscr{F}_1(I, \varphi, t) + \ldots .$$

Тогда

1) $\mathscr{F}_0\,(I,\,\varphi,\,t)$ *зависит только от* I;

2) $\partial\mathscr{F}_0/\partial I = 0$, *когда* $I \in \widetilde{\mathscr{B}}$.

Доказательство (ср. с [1, гл. V]).

1. Разложим функцию $\mathscr{F}_0(I,\,\varphi,\,t)$ в сходящийся двойной ряд Фурье:

$$\mathscr{F}_0 = \sum_{-\infty}^{\infty} F_{m_1m_2}(I)e^{i(m_1\varphi+m_2t)}. \tag{3.3}$$

Так как $\mathscr{F}_0$ — первый интеграл канонической системы дифференциальных уравнений с гамильтонианом $\mathscr{H}_0$, то

$$\frac{\partial\mathscr{F}_0}{\partial t} + \frac{\partial\mathscr{F}_0}{\partial\varphi}\omega \equiv 0.$$

Используя разложение (3.3), получим равенства

$$iF_{m_1m_2}(m_1\omega + m_2) \equiv 0. \tag{3.4}$$

Предположим, что при некоторых целых m_1, m_2 ($|m_1|+|m_2| \neq$ $\neq 0$) функция $F_{m_1m_2}(I) \not\equiv 0$. Тогда из (3.4) следует, что

$$m_1\omega(I) + m_2 \equiv 0.$$

Следовательно, $\omega(I) = \mathrm{const}$, что противоречит невырожденности невозмущенной системы. Итак, коэффициенты $F_{m_1m_2} \equiv$ $\equiv 0$, когда $|m_1| + |m_2| \neq 0$ и $\mathscr{F}_0\,(I,\,\varphi,\,t) = F_{00}(I)$.

2. Разложим функцию $\mathscr{F}_1\,(I,\,\varphi,\,t)$ в сходящийся двойной ряд Фурье:

$$\mathscr{F}_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} F_{m_1m_2}(I)e^{i(m_1\varphi+m_2t)}. \tag{3.5}$$

Так как $\mathscr{F}$ является первым интегралом системы с гамильтонианом (3.1), то

$$\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial t} + \frac{\partial\mathscr{F}}{\partial\varphi}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial I} - \frac{\partial\mathscr{F}}{\partial I}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi} \equiv 0.$$

Разлагая левую часть этого тождества в ряд по степеням μ и приравнивая нулю коэффициент при μ, получим

$$\frac{\partial \mathscr{F}_1}{\partial t}+\frac{\partial \mathscr{F}_1}{\partial \varphi}\frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial I}-\frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial I}\frac{\partial \mathscr{H}_1}{\partial \varphi}\equiv 0.$$

Воспользовавшись разложениями (3.2) и (3.5), будем иметь

$$i(m_1\omega+m_2)F_{m_1m_2}-im_1\frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial I}H_{m_1m_2}\equiv 0.$$

Пусть $I\in\widetilde{\mathscr{B}}$. Тогда

$$m_1\frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial I}=0.$$

Коэффициент m_1 отличен от нуля, так как в противном случае $m_2=-m_1\omega=0$. Следовательно, $\partial\mathscr{F}_0/\partial I=0$ на множестве $\widetilde{\mathscr{B}}$. ■

Рассмотрим снова систему канонических уравнений с гамильтонианом (1.1)

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_0(I)+\mu\mathscr{H}_1(I,\,\varphi)+\ldots$$

Функция $\mathscr{H}$ предполагается аналитической в прямом произведении $D\times\mathbf{T}^2\times(-\varepsilon,\,\varepsilon)$. Пусть G — выпуклая подобласть связной ограниченной области D, $\overline{G}\subset D$, и всюду в $\overline{G}$ производная $\partial\mathscr{H}_0/\partial I_2$ отлична от нуля. Тогда при малых значениях параметра μ производная $\partial\mathscr{H}/\partial I_2\neq 0$, когда $(I,\,\varphi)\in G\times\mathbf{T}^2$.

Разрешим уравнение

$$\mathscr{H}(I_1,\,I_2,\,\varphi_1,\,\varphi_2,\,\mu)=h$$

относительно I_2:

$$I_2=\mathscr{K}(h,\,I_1\varphi_1,\,\varphi_2,\,\mu).$$

Разложение функции $\mathscr{K}$ в сходящийся степенной ряд имеет следующий вид:

$$\mathscr{K}=\mathscr{K}_0(h,\,I_1)+\mu\mathscr{K}_1(h,\,I_1,\,\varphi_1,\,\varphi_2)+\ldots$$

Нетрудно установить, что функция $\mathscr{K}_0$ удовлетворяет уравнению

$$\mathscr{H}_0(I_1,\, \mathscr{K}_0(h,\, I_1)) = h, \tag{3.6}$$

а функция $\mathscr{K}_1$ равна

$$-\frac{1}{\omega_2}\mathscr{H}_1(I_1,\, \mathscr{K}_0(h,\, I_1),\, \varphi_1,\, \varphi_2). \tag{3.7}$$

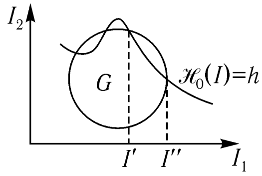

Рис. 3

Зафиксируем значение постоянной интеграла энергии h. Положим $I_1 = I$, $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = t$. Тогда на трехмерном уровне интеграла $\mathscr{H} = h$ возникает каноническая система дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона [2, 4]

$$\mathscr{L} = -K = \mathscr{L}_0(I) + \mu\mathscr{L}_1(I,\, \varphi,\, t) + \ldots \tag{3.8}$$

Функция $\mathscr{L}(I,\, \varphi,\, t,\, \mu)$ аналитична в некоторой области

$$(I',\, I'') \times \mathbf{T}^2\{\varphi,\, t \mod 2\pi\} \times (-\varepsilon',\, \varepsilon'),$$

$\varepsilon' > 0$ (рис. 3).

Если невозмущенная система с функцией Гамильтона $\mathscr{L}_0(I)$ невырождена, и вековое множество $\widetilde{\mathscr{B}}$ полной системы имеет предельные точки внутри интервала $(I',\, I'')$, то согласно теореме 2 пониженная система канонических уравнений с гамильтонианом (3.8) не имеет аналитического и аналитически зависящего от параметра μ первого интеграла, 2π-периодического по переменным φ, t. Другими словами, в этом случае исходная автономная система с функцией Гамильтона (1.1) не имеет частного аналитического интеграла при фиксированном значении постоянной энергии h. Невырожденность невозмущенной системы ($\partial^2\mathscr{L}_0/\partial I^2 \not\equiv 0$) означает геометрически, что линия уровня $\{I \in G : \mathscr{H}_0(I) = h\}$ не есть прямая.

Вековое множество системы с полным гамильтонианом $\widetilde{\mathscr{B}}$ тоже описывается достаточно просто:

$$\widetilde{\mathscr{B}} = pr_{I_1}(\mathscr{B} \cap \{I : \mathscr{H}_0(I) = h\}).$$

Действительно, дифференцируя соотношение (3.6) по I_1 $(= I)$, получим, что

$$\frac{\partial \mathscr{L}_0}{\partial I} = -\frac{\partial \mathscr{K}_0}{\partial I_1} = \frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial I_1} \Big/ \frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial I_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \tag{3.9}$$
$$I_1 = I, \quad \mathscr{H}_0(I_1\, I_2) = h.$$

Разложим возмущающую функцию $\mathscr{L}_1(I,\, \varphi,\, t)$ в сходящийся двойной ряд Фурье по угловым переменным φ, t:

$$\mathscr{L}_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} L_{m_1 m_2}(I) e^{i(m_1\varphi + m_2 t)}.$$

Так как $\mathscr{L}_1 = -K_1$, то с учетом равенства (3.7)

$$L_{m_1 m_2}(I) = \frac{1}{\omega_2} H_{m_1 m_2}(I,\, \mathscr{K}_0(h,\, I)). \tag{3.10}$$

Соотношения (3.9) и (3.10) позволяют описать вековое множество $\widetilde{\mathscr{B}}$. Оно состоит из точек $I = I_1$ таких, что

$$(I_1,\, I_2) \in \mathscr{B},\ \mathscr{H}_0(I_1,\, I_2) = h.$$

Другими словами, $\widetilde{\mathscr{B}}$ состоит из проекций на ось I_1 точек пересечения линии уровня $\{I : \mathscr{H}_0(I) = h\}$ с аналитическими кривыми, составляющими вековое множество $\mathscr{B}$ системы с гамильтонианом (1.1). ■

§ 4. Приложение к динамике. Вынужденные колебания математического маятника

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях математического маятника, описываемых уравнениями

$$\dot q = p, \quad \dot p = -\omega^2(t) \sin q,$$

где q — естественная угловая координата материальной точки, $\omega(t + \tau) = \omega(t)$, $t \in \mathbf{R}$ ([6, гл. 4]). Эти уравнения имеют канонический вид с функцией Гамильтона

$$\mathscr{H} = \frac{p^2}{2} - \omega^2(t) \cos q.$$

Такими уравнениями описываются, в частности, колебания маятника в периодически меняющемся поле тяжести.

Предположим, что «частота» ω мало отличается от некоторой постоянной величины ω_0:

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 - \mu\cos\nu t),$$

где μ — малый параметр ($\mu \ll 1$), $\nu = 2\pi/\tau = \mathrm{const}$ — частота вынуждающей силы (подробности см. в [6, гл. 4]).

Когда $\mu = 0$, имеем интегрируемый случай — математический маятник. В этой интегрируемой задаче можно перейти к переменным действие-угол I, φ. Они определяются из следующих соотношений:

$$\begin{gathered} I = \frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{2(\mathscr{H}_0 + \omega_0^2\cos q)}\,dq, \quad \mathscr{H}_0 = \mathscr{H}_0(I); \\ \varphi = \omega\int\limits_0^q \frac{dx}{\sqrt{\mathscr{H}_0(I) + \omega_0^2\cos x}}, \quad \omega(I) = \frac{\partial\mathscr{H}_0}{\partial I}. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Возмущающая функция $\mathscr{H}_1$ равна $\cos q\cos\nu t$. Для того чтобы разложить $\mathscr{H}_1$ в кратный ряд Фурье по угловым переменным φ, t, заменим во второй формуле соотношений (4.1) x на $2u$. Тогда

$$\varphi = 2\omega\int\limits_0^{q/2}\frac{du}{\sqrt{a - b\sin^2 u}}; \quad a = \mathscr{H}_0 + \omega_0^2, \quad b = 2\omega_0^2,$$

или

$$\varphi = \frac{2\omega}{\sqrt{a}}\int\limits_0^{q/2}\frac{du}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}}; \quad k^2 = \frac{b}{a} = \frac{2\omega_0^2}{\mathscr{H}_0 + \omega_0^2}.$$

Отсюда [7, 8]

$$\sin\frac{q}{2} = \operatorname{sn}\frac{\sqrt{a}}{2\omega}\varphi, \quad \cos\frac{q}{2} = \operatorname{cn}\frac{\sqrt{a}}{2\omega}\varphi,$$

$$\cos q = \operatorname{cn}^2\frac{\sqrt{a}}{2\omega}\varphi - \operatorname{sn}^2\frac{\sqrt{a}}{2\omega}\varphi.$$

Так как

$$\omega^{-1} = \frac{\partial I}{\partial \mathscr{H}_0} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{dq}{\sqrt{\mathscr{H}_0 + \omega_0^2 \cos q}} = \frac{1}{\pi} \oint \frac{du}{\sqrt{a - b\sin^2 u}} =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{a}} \oint \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = \frac{2K}{\pi\sqrt{a}}, \qquad (4.2)$$

то

$$\cos q = \mathrm{cn}^2 \frac{K}{\pi}\varphi - \mathrm{sn}^2 \frac{K}{\pi}\varphi.$$

Действительный период эллиптических функций $\mathrm{sn}^2 x$ и $\mathrm{cn}^2 x$ равен $2\mathbf{K}$ [7, 8], следовательно, функция $\cos q$ периодична по φ с периодом 2π.

Разложение функции $\mathscr{H}_1$ в двойной ряд Фурье имеет вид

$$\mathscr{H}_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} H_{m,\,1}(I) e^{i(m\varphi + \nu t)} + \sum_{-\infty}^{\infty} H_{m,\,-1}(I) e^{i(m\varphi - \nu t)}.$$

Коэффициенты $H_{m,\,1}$, $H_{m,\,-1}$ легко вычислить, используя известную формулу Якоби [8, с. 415]:

$$(k\mathbf{K})^2 \,\mathrm{sn}^2 \frac{\mathbf{K}x}{\pi} = \mathbf{K}^2 - \mathbf{KE} - 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1 - q^{2n}} \cos nx.$$

Обозначения в этой формуле общепринятые; см., например, [7, 8].

Вековое множество $\widetilde{\mathscr{B}}$ рассматриваемой задачи состоит из тех значений I, при которых $\pm n\omega + \nu = 0$ и $H_{\pm n,\,1} = \overline{H}_{\mp n,\,-1} \neq 0$. Нетрудно показать, что бесконечно много коэффициентов $H_{n,\,1}(I) = \overline{H}_{-n,\,-1}(I)$ отличны от нуля. Обозначим через I_c значение переменной действие, соответствующей движению по сепаратрисам. Так как

$$\omega^{-1}(I) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{dq}{\sqrt{\mathscr{H}_0(I) + \omega_0^2 \cos q}},$$

то $\omega(I) \to 0$ тогда и только тогда, когда $I \to I_c$. Следовательно, $\widetilde{\mathscr{B}}$ состоит из бесконечного множества точек, имеющих только одну предельную точку $I = I_c$. Поэтому вековое множество $\widetilde{\mathscr{B}}$ является ключевым множеством для класса $A(I', I'')$ тогда и только тогда, когда $I_c \in (I', I'')$.

Однако гамильтониан $\mathscr{H}$ не аналитичен в области $(I', I'')\times \times\, \mathbf{T}^2\{\varphi, t \mod 2\pi\} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Докажем это. Пусть

$$\mathbf{K}(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad k' = \sqrt{1-k^2}.$$

Хорошо известно [7, 8], что

$$\lim_{k'\to 0}\left\{\mathbf{K}(k) - \ln\frac{4}{k'}\right\} = 0. \tag{4.3}$$

Очевидно, что функция $\mathscr{H}_0$ непрерывно дифференцируема, причем

$$\mathscr{H}_0(I_c) = \omega_0^2, \qquad \left.\frac{d\,\mathscr{H}_0}{d\,I}\right|_{I=I_c} = 0.$$

Пусть $I > I_c$. Согласно (4.2)

$$\frac{d\mathscr{H}_0}{dI} = \frac{\pi\sqrt{\mathscr{H}_0+\omega_0^2}}{2K\left(\dfrac{2\omega_0^2}{\mathscr{H}_0+\omega_0^2}\right)}.$$

Положим

$$\mathscr{H}_0 = \omega_0^2 h, \quad J = I - I_c.$$

Тогда

$$h(0) = 1, \quad h'(0) = 0, \quad h' = \frac{\pi\omega_0\sqrt{h+1}}{2K\left(\dfrac{2}{h+1}\right)}.$$

Последнее равенство с учетом соотношения (4.3) можно представить в виде

$$h' = \frac{cf(J)}{\ln(h-1)+g(J)}, \tag{4.4}$$

где $c = \mathrm{const}$ $(c \neq 0)$, функция $f(J)$ непрерывна, $f(0) \neq 0$, а $g(J)$ ограничена. Предположим, что функция $h(J)$ аналитическая. Так как $h(0) = 1$, $h'(0) = 0$, то ее разложение в степенной ряд имеет вид

$$h = 1 + \alpha_n J^n + \alpha_{n+1} J^{n+1} + \ldots; \quad \alpha_n \neq 0, \quad n \geqslant 2. \tag{4.5}$$

Функция $h(J)$ монотонно возрастает, следовательно, $\alpha_n > 0$. Подставляя разложение (4.5) в формулу (4.4) и деля обе части на J^{n-1}, получим

$$n\alpha_n + \ldots = \frac{cf(J)}{J^{n-1}[\ln(\alpha_n J^n + \ldots) + g(J)]},$$

или

$$n\alpha_n + \ldots = \frac{cf(J)}{J^{n-1}\ln J^n + J^{n-1} g_1(J)},$$

где функция $g_1(J)$ снова является ограниченной при $J > 0$. Перейдем в этой формуле к пределу при $J \to 0$. Предел левой части равен $n\alpha_n$, а правой — бесконечности, так как $f(0) \neq 0$ и при $n \geqslant 2$

$$\lim_{J \to 0} J^{n-1} \ln J^n = \lim_{J \to 0} nJ^{n-1} \ln J = 0.$$

Полученное противоречие доказывает неаналитичность функции $\mathscr{H}_0(I)$.

Таким образом, из-за аналитических особенностей теорему 2 в рассматриваемой задаче непосредственно применить нельзя. Тем не менее можно доказать следующее утверждение: не существует первого интеграла этой задачи, аналитического на множестве $D \times \mathbf{T}^1\{t \mod 2\pi\} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, где D — область на фазовом цилиндре $\{p, q \mod 2\pi\}$, содержащая обе сепаратрисы.

Действительно, пусть такой интеграл существует и есть

$$\mathscr{F}(p, q, t, \mu) = \mathscr{F}_0(p, q, t) + \mu\mathscr{F}_1(p, q, t) + \ldots$$

Из невырожденности невозмущенной задачи легко следует, что $\mathscr{F}_0$ не зависит от t. Использовав лемму 4 и взаимную однозначность перехода к переменным действие-угол внутри сепаратрис и вне их, получим, что $\partial\mathcal{F}_0/\partial p = \partial\mathcal{F}_0/\partial q = 0$ на инвариантных кривых невозмущенной задачи, которые расположены на цилиндре $\{p, q \mod 2\pi\}$ и отвечают переменным действие $I \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Множество всех таких инвариантных кривых в области D является ключевым для класса $A(D)$. Поэтому $\partial\mathcal{F}_0/\partial p = \partial\mathcal{F}_0/\partial q \equiv 0$ в D, т.е. $\mathcal{F}_0 = \mathrm{const}$. Эту константу можно считать равной нулю. Тогда $\mathcal{F}_1 + \mu\mathcal{F}_2 + \ldots$ — тоже первый интеграл задачи с гамильтонианом $\mathcal{H}$. Как и выше, получим, что $\mathcal{F}_1$ не зависит от t и является константой. Этот процесс можно продолжить сколь угодно далеко и прийти к заключению, что все функции $\mathcal{F}_k$ — постоянные величины. Тогда $\mathcal{F}$ будет просто постоянной. Это доказывает изложенное выше утверждение.

Исторический очерк

К настоящему времени в динамике известно довольно много интегрируемых задач. Решение всех таких задач, имеющих n степеней свободы, основано на существовании n первых независимых интегралов в инволюции. В этих случаях согласно теореме Лиувилля [2] уравнения движения решаются в квадратурах. Можно показать [4], что существование полного набора интегралов в инволюции влечет следующую картину поведения траекторий в $2n$-мерном фазовом пространстве. Все фазовое пространство разбивается на области, расслоенные совместными уровнями первых интегралов на замкнутые n-мерные инвариантные многообразия. Если эти многообразия компактны, то они суть n-мерные торы, несущие на себе квазипериодические движения.

Отыскание случаев интегрируемости уравнений динамики было в основном делом XIX в. (Якоби, Лиувилль, Ковалевская и др.). Но с появлением работ Пуанкаре стало ясно, что уравнения динамики в общем случае неинтегрируемы: интегралы не только неизвестны, но и не существуют вовсе, так как траектории в целом не ложатся на инвариантные многообразия [9].

До исследований Пуанкаре в классических работах Брунса и Пенлеве [10, 11] *был получен ряд результатов отрицательного характера, касающихся существования новых алгебраических интегралов уравнений задачи трех тел. Однако эти изящные отрицательные результаты не имеют «какого-либо значения в динамике»* [12, с. 120]. *Свойство интегралов быть алгебраическими в очень сильной степени зависит от выбора независимых переменных, что не соответствует инвариантной природе уравнений динамики.*

Теорема Пуанкаре о несуществовании аналитических интегралов была доказана впервые в знаменитом мемуаре «О проблеме трех тел и об уравнениях динамики» [13] *с использованием невырожденных периодических решений. Другое доказательство неинтегрируемости, данное в пятой главе «Новых методов небесной механики»* [1], *отличается от первого, как замечает сам Пуанкаре, только формой. В том и другом случае используется по существу тот факт, что резонансные торы общего положения невозмущенной задачи распадаются при возмущении.*

Более того, основная идея доказательства и более поздней теоремы Зигеля о неинтегрируемости гамильтоновых систем вблизи положений устойчивого равновесия [14] *тоже восходит к Пуанкаре. Рассуждения основаны на подробном исследовании некоторых множеств долгопериодических решений канонических систем дифференциальных уравнений.*

В работах Пуанкаре говорится о несуществовании «однозначных интегралов». По существу Пуанкаре заимствовал этот термин из известных работ Абеля и Якоби, касающихся обращения эллиптических и гиперэллиптических интегралов. Однако к функциям комплексного переменного термин Пуанкаре не имеет прямого отношения. Это обстоятельство «является часто причиной непонимания физиками-теоретиками результатов Пуанкаре» [12, с. 120]. *Вопрос о существовании однозначных интегралов в смысле теории функций комплексного переменного мы рассмотрим в главе* V.

Глава II
Задача о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой как возмущение случая Эйлера–Пуансо

Функция Гамильтона в задаче о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки имеет вид [1 гл. V]

$$\mathscr{H} = \mathscr{T} + \mu\,\mathscr{U},$$

где $\mathscr{T}$ — живая сила (гамильтониан случая Эйлера–Пуансо), $\mu\,\mathscr{U}$ — потенциальная энергия системы. Выделенный постоянный множитель μ, параметр Пуанкаре — произведение веса тела на расстояние от центра тяжести до точки закрепления.

Будем считать параметр μ малым. Тогда рассматриваемая задача является возмущением интегрируемой задачи Эйлера–Пуансо. Отметим, что исследование канонической системы уравнений с гамильтонианом $\mathscr{T} + \mu\,\mathscr{U}$ при малых значениях параметра μ математически эквивалентно исследованию быстрых вращений тела в умеренном поле тяготения.

Как и во всякой интегрируемой задаче с компактными уровнями энергии, в задаче Эйлера–Пуансо существуют канонические переменные действие-угол I, φ, в которых функция Гамильтона $\mathscr{T}$ зависит только от действия I. Геометрический анализ переменных действие-угол дает возможность установить новые свойства представления Пуансо.

§ 1. Переменные действие-угол

В динамике твердого тела с неподвижной точкой удобно использовать специальные канонические переменные L, G, H, l, g, h. Описанию механического смысла этих переменных предпошлем некоторые обозначения: $OXYZ$ — неподвижный

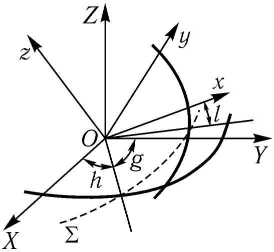

Рис. 4

трехгранник с началом в точке подвеса; $Oxyz$ — подвижная система координат (главные оси инерции); Σ — плоскость, проходящая через точку закрепления и перпендикулярная вектору кинетического момента тела. В принятых обозначениях L — проекция кинетического момента на подвижную ось Oz (или на оси Ox, Oy), G — величина кинетического момента, H — проекция момента на неподвижную ось OZ, l — угол между осью Ox и линией пересечения Σ с Oxy, g — угол между линиями пересечения Σ с плоскостями Oxy и OXY, h — угол между осью OX и линией пересечения Σ с плоскостью OXY (см. рис. 4). Переменные l, g, h, сопряженные с L, G, H, являются углами, изменяющимися по модулю 2π.

Пусть, как обычно, ϑ, φ, ψ — углы Эйлера (обобщенные координаты в динамике твердого тела с неподвижной точкой), а p_ϑ, p_φ, p_ψ — им сопряженные канонические переменные.

Лемма 1. *Аналитическое преобразование* $(\vartheta, \varphi, \psi, p_\vartheta, p_\varphi, p_\psi) \to (l, g, h, L, G, H)$ *— однородное каноническое*:

$$p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi + p_\psi d\psi = L\,dl + G\,dg + H\,dh.$$

Это утверждение, доказываемое с помощью формул сферической тригонометрии, можно найти, например, в книгах [15, 26].

Из леммы 1 следует, в частности, что уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в переменных l, g, h, L, G, H имеют вид:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial L}, \quad \frac{dL}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial l}, \quad \frac{dg}{dt} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial G},$$
$$\frac{dG}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial g}, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial H}, \quad \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial h},$$

где $\mathscr{H}$ — полная энергия тела, записанная в этих координатах.

Главные моменты инерции твердого тела будем обозначать всюду через A, B, C. Наравне с главными моментами инерции мы будем использовать им обратные величины, которые обозначим соответственно a, b, c.

Пусть p, q, r — проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции Ox, Oy, Oz. Тогда Ap, Bq, Cr — проекции кинетического момента на те же оси. Из определения специальных канонических переменных нетрудно получить, что

$$Ap = \sqrt{G^2 - L^2}\sin l, \quad Bq = \sqrt{G^2 - L^2}\cos l, \quad Cr = L.$$

Кинетическая энергия тела (гамильтониан задачи Эйлера–Пуансо) равна

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right)(G^2 - L^2) + \frac{L^2}{2C}.$$

Отметим, что специальные канонические переменные в динамике твердого тела аналогичны каноническим переменным Делоне в интегрируемой задаче двух тел [17].

Область возможных значений L и G есть

$$\Delta = \{(L, G) \in \mathbf{R}^2 : G \geqslant 0, \ |L| \leqslant G\}.$$

Не теряя общности, можно считать, что $A \geqslant B \geqslant C$.

При фиксированном значении $G \neq 0$ линии уровня функции $\mathcal{T}$ на плоскости $(l, L) \in \mathbf{R}^2$ изображены на рис. 5. Заметим, что точки на этой плоскости, l-координаты которых отличаются на 2π, соответствуют одним и тем же точкам фазового пространства. Производя соответствующее отождествление, получим двумерное кольцо K, расслоенное на замкнутые линии уровня функции $\mathcal{T}$.

В задаче Эйлера–Пуансо обычным способом введем переменные действие [18]: $I_3 = H$, $I_2 = G$,

$$I_1(I_2, \mathcal{T}) = \frac{1}{2\pi}\oint \sqrt{\frac{2\mathcal{T} - I_2^2(a\sin^2 l + b\cos^2 l)}{c - a\sin^2 l - b\cos^2 l}}\, dl. \qquad (1.1)$$

В последней формуле интегрирование производится по замкнутым кривым, на которые расслоено кольцо K (подробности

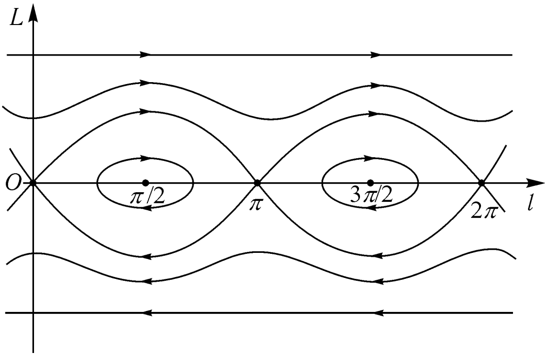

Рис. 5

см. в [4, 19]). Сопряженные с I_1, I_2, I_3 переменные выражаются через l, g, h эллиптическими квадратурами.

Область Δ в координатах I_1, I_2 есть снова $\Delta = \{I_1, I_2 : I_2 \geqslant 0, |I_1| \leqslant I_2\}$. В канонических переменных действие-угол I, φ функция $\mathscr{T}$ имеет вид $\mathscr{T}(I_1\, I_2\, \widehat{I}_3\, \widehat{\varphi}_1\, \widehat{\varphi}_2\, \widehat{\varphi}_3)$, то есть зависит только от I_1, I_2. Используя формулу (1.1), легко получить, что линии уровня функции $2\mathscr{T}(I_1, I_2)/I_2^2$ в координатах действие суть прямые линии, проходящие через начало координат. Прямые $I_1 = 0$, $|I_1| = I_2$ (лежащие в Δ) отвечают вращениям твердого тела вокруг меньшей и большей осей инерции. Вращениям вокруг средней оси инерции соответствуют точки из Δ, расположенные на двух прямых $2\mathscr{T}(I_1, I_2) = bI_2^2$.

Отметим, что положение прямых линий $2\mathscr{T} = bI_2^2$ зависит от двух параметров — отношении моментов инерции тела. Когда $B \to A$, эти прямые стремятся к прямой $I_1 = 0$; когда $B \to C$, они стремятся к паре прямых $|I_1| = I_2$.

Лемма 2. *Функция $\mathscr{T}(I_1, I_2)$ непрерывна, является однородной степени 2 в Δ и аналитична в области*

$$\Delta_a = \Delta \setminus (\{I_1 = 0\} \cup \{2\mathscr{T} = bI_2^2\} \cup \{|I_1| = I_2\}).$$

Доказательство легко следует из формулы (1.1).

Отметим, что если $A > B > C$, то три прямые линии $I_1 = 0$, $2\mathscr{T} = B^{-1} I_2^2$ не лежат в области аналитичности функции $\mathscr{T}(I_1, I_2)$. Более точно, при фиксированном $I_2 = I_2^0 \neq 0$

функция $\mathscr{T}(I_1, I_2^0)$ не аналитична в окрестности точек $I_1 = 0$, $I_1 = J$: $\mathscr{T}(J, I_2^0) = b(I_2^0)$. Неаналитичность в окрестности нуля вытекает из того, что

$$\lim_{I_1 \to +0} \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial I_1} = -\lim_{I_1 \to -0} \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial I_1} \neq 0,$$

а в окрестности точки $I_1 = J$ это доказывается так же, как для гамильтониана математического маятника (§ 4, гл. 1).

Положим $\omega_i(I) = \partial \mathscr{T} / \partial I_i$ $(i = 1, 2)$. Величины ω_1, ω_2 являются частотами квазипериодических движений на двумерных инвариантных торах задачи Эйлера–Пуансо.

Рассмотрим в области Δ линию уровня функции $\mathscr{T}$:

$$I_1 = I_1(I_2, \mathscr{T}), \quad \mathscr{T} = \mathrm{const}.$$

Лемма 3. *При $I_1 \geqslant 0$, $I_2 \geqslant 0$ функция $I_1(I_2, \mathscr{T})$ непрерывна и монотонно убывает, причем $\partial I_1 / \partial I_2 = -\omega_2/\omega_1$.*

Действительно, дифференцируя тождество

$$\mathscr{T}(I_1(I_2, \mathscr{T}), I_2) = \mathscr{T}$$

по I_2, получим, что

$$\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial I_2} + \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial I_2} \equiv 0.$$

Откуда

$$\frac{\partial I_1}{\partial I_2} = -\frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Из формулы дифференцирования интеграла вида (1.1) по параметру

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \oint f(\beta, x)\, dx = \oint \frac{\partial}{\partial \beta} f(\beta, x)\, dx \tag{1.2}$$

получим следующее соотношение:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{\partial I_1}{\partial I_2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{(a \sin^2 l + b \cos^2 l) dl}{\sqrt{(p - a \sin^2 l - b \cos^2 l)(c - a \sin^2 l - b \cos^2 l)}}, \tag{1.3}$$

где
$$p = \frac{2\mathscr{T}}{I_2^2} = \mathrm{const} \quad (1/A < p < 1/C, \quad p \neq 1/B).$$

Из (1.3) следует, что при $I_1 \geqslant 0$ производная $\partial I_1/\partial I_2 < 0$. ■

Положим
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \gamma\,(p;\, A,\, B,\, C).$$

Значения функции γ являются числами вращения потоков, возникающих на соответствующих двумерных торах задачи Эйлера–Пуансо ([1, п. 86; 20]).

Лемма 4. *Если* $p \in (1/A,\, 1/B)$, *то* $\partial\gamma/\partial p > 0$; *если* $p \in (1/B,\, 1/C)$, *то* $\partial\gamma/\partial p < 0$.

Доказательство.

Рассмотрим сначала случай, когда $1/B < p < 1/C$. Продифференцируем соотношение (1.3) по параметру p:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial p} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(p - a\sin^2 l - b\cos^2 l)^3}} \times$$
$$\times \frac{(a\sin^2 l + b\cos^2 l)\,dl}{\sqrt{c - a\sin^2 l - b\cos^2 l}} < 0.$$

Пусть теперь $1/A < p < 1/B$. В этом случае для интеграла (1.3) формула (1.2) уже несправедлива. Для вычисления $\partial\gamma/\partial p$ в интеграле (1.3) сделаем замену переменной по формуле $x = \mp\cos l$ (знак $-$ [+] выбирается в том случае, когда интегрирование производится по замкнутому контуру на плоскости $(L,\, l) \in \mathbf{R}^2$, охватывающему точку $(0,\, \pi/2)$ $[(0,\, -\pi/2)]$). Тогда

$$\gamma = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)[(c-a)+(b-a)x^2]}} \times$$
$$\times \frac{[a+(b-a)x^2]dx}{\sqrt{[(p-a)-(b-a)x^2]}}. \quad (1.4)$$

Выполним еще раз замену переменной согласно формуле

$$x = \sqrt{\frac{p-a}{b-a}} \sin y.$$

Тогда

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{(b-a)-(p-a)\sin^2 y}} \frac{[a+(b-a)\sin^2 y]dy}{\sqrt{(c-a)-(p-a)\sin^2 y}}.$$

Обозначим подынтегральную функцию через $\Phi(p, y)$. Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} > 0,$$

когда $y \in [-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$, $p \in (a, b)$. Следовательно, при $a < p < b$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial p} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial \Phi}{\partial p} dy > 0. \qquad \blacksquare$$

Предложение 1. *Если твердое тело несимметрично, то линии уровня функции* $\mathscr{T}(I_1, I_2)$ *не имеют перегибов в области* Δ_a.

Доказательство.

Достаточно, очевидно, показать, что

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial I_2^2} \neq 0, \quad I_1 = I_1(I_2, \mathscr{T}), \quad \mathscr{T} = \text{const}.$$

Так как

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial I_2^2} = -\frac{\partial}{\partial I_2} \gamma\,(p;\, A,\, B,\, C) = -\frac{\partial \gamma}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial I_2} = \frac{\partial \gamma}{\partial p} \frac{4\mathscr{T}}{I_2^3},$$

то согласно лемме 4 $\partial^2 I_1/\partial I_2^2 > 0$ при $p \in (1/A, 1/B)$ и $\partial^2 I_1/\partial I_2^2 < 0$ при $p \in (1/B, 1/C)$. $\blacksquare$

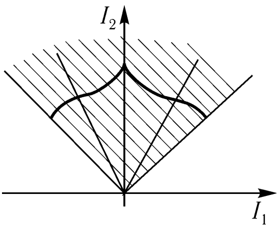

Рис. 6

Замечание. Условие отсутствия перегибов у линий уровня функции $\mathcal{T}$ можно представить аналитически в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial I_1^2}\omega_2^2 - 2\frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial I_1 \partial I_2}\omega_1\omega_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial I_2^2}\omega_1^2 \neq 0.$$

На рис. 6 изображены линии уровня функции $\mathcal{T}$ (ясно, что все они подобны). Область Δ заштрихована, и выделены две прямые $2\mathcal{T} = B^{-1}I_2^2$.

§ 2. Числа вращения и их свойства

Исследуем более подробно отношение частот

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \gamma\,(p;\, A,\, B,\, C).$$

Теорема 1. *Функция* $\gamma\,(p;\, A,\, B,\, C)$ *аналитична на* $\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{C}\right) \setminus \left\{\frac{1}{B}\right\}$, *причем при*

1) $p \to \dfrac{1}{A}$, $\gamma \to \dfrac{\sqrt{BC}}{\sqrt{(A-C)(A-B)}}$;

2) $p \to \dfrac{1}{C}$, $\gamma \to \dfrac{\sqrt{AB}}{\sqrt{(B-C)(A-C)}} - 1$;

3) $p \to \dfrac{1}{B}$, $\gamma \to \infty$.

Доказательство.

3) Когда $p = 1/B$, интеграл (1.3) расходится. Следовательно,

$$\lim_{p\to 1/B} \gamma\,(p;\, A,\, B,\, C) = \infty.$$

2) $\lim\limits_{p\to 1/C} \gamma\,(p;\, A,\, B,\, C) =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{a\sin^2 x + b\cos^2 x}{c - a\sin^2 x - b\cos^2 x}dx = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{(B-C)(A-C)}} - 1.$$

1) Воспользуемся следующим предложением: пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ непрерывна в окрестности точки $x = 0$. Тогда

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{2\pi} \oint \frac{f(x)}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}\, dx = f(0). \tag{2.1}$$

Действительно, выполняя замену переменной по формуле $x = \alpha \sin\varphi$, получим, что

$$\frac{1}{2\pi} \oint \frac{f(x)}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}\, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}\, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\alpha \sin\varphi)\, d\varphi.$$

Так как $f(x)$ непрерывна, то

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\alpha \sin\varphi)\, d\varphi = f(0).$$

Согласно формуле (1.4)

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{\sqrt{b-a}} \frac{[a + (b-a)x^2]\, dx}{\sqrt{(1-x^2)[(c-a) - (b-a)x^2](\alpha^2 - x^2)}},$$

где

$$\alpha^2 = \frac{p-a}{b-a} > 0.$$

Следовательно, по формуле (2.1)

$$\lim_{p\to 1/A} \gamma\,(p;\, A,\, B,\, C) =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{(b-a)(c-a)}} = \frac{\sqrt{BC}}{\sqrt{(A-C)(A-B)}}. \tag{2.2}$$

■

По лемме 4 функция $\gamma(p)$ возрастает в интервале $(a,\, b)$ и убывает в интервале $(b,\, c)$. Из неравенства треугольника для моментов инерции $(A + B > C)$ и теоремы 1 следует, что пределы

$$\lim_{p\to a} \gamma\,(p), \quad \lim_{p\to c} \gamma\,(p)$$

больше нуля. Следовательно, функция $\gamma(p)$ всюду положительна. Нетрудно показать, что $\partial^2\gamma/\partial p^2 > 0$ при всех $p \in (a, c) \setminus \{b\}$. Значит, график функции $\gamma(p)$ имеет вид, изображенный на рис. 7.

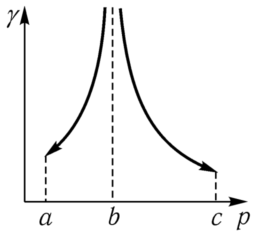

Рис. 7

Специальные канонические переменные можно ввести в окрестности вращений вокруг большей оси инерции (т.е. вместо оси Oz взять ось Ox). Тогда для отношения частот получим формулу (1.3), в которой моменты инерции A и C переставлены местами. Обозначим это отношение через $\gamma'(p;\, A,\, B,\, C)$. Устремим в новой формуле p к $1/A$. Нетрудно показать, что

$$\lim_{p\to 1/A} \gamma'(p;\, A,\, B,\, C) = \frac{\sqrt{BC}}{\sqrt{(A-C)(A-B)}} - 1 \tag{2.3}$$

(ср. с доказательством п. 2 теоремы 1). Формулы (2.2) и (2.3) не совпадают, однако здесь нет никакого противоречия. Дело в том, что у векторного поля без особых точек на двумерном торе существует не одно, а бесконечно много чисел вращения (они зависят от выбора замкнутой трансверсали) [21]. Все они связаны между собой следующим соотношением:

$$\gamma' = \frac{k\gamma + l}{m\gamma + n}, \tag{2.4}$$

где $\begin{Vmatrix} k & l \\ m & n \end{Vmatrix}$ — унимодулярная матрица (ее элементы — целые числа, а определитель равен ± 1).

Иллюстрацией к этому утверждению может служить следующее рассуждение. Рассмотрим на двумерном торе $\mathbf{T}^2\{\varphi_1,\, \varphi_2 \mod 2\pi\}$ постоянное векторное поле

$$\dot\varphi_1 = \omega_1, \quad \dot\varphi_2 = \omega_2 \quad (\omega_1,\, \omega_2 = \mathrm{const} \neq 0). \tag{2.5}$$

Если в качестве замкнутой трансверсали взять окружность $S^1 = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{T}^2 : \varphi_2 = 0\}$, то число вращения поля (2.5) равно $\gamma = \omega_1/\omega_2$. Рассмотрим линейный автоморфизм тора $\varphi \to \varphi'$:

$$\varphi_1' = k\varphi_1 + l\varphi_2, \quad \varphi_2' = m\varphi_1 + n\varphi_2,$$

где $\begin{Vmatrix} k & l \\ m & n \end{Vmatrix}$ — некоторая унимодулярная матрица. В новых переменных $\varphi' \mod 2\pi$ уравнения (2.5) запишутся в следующем виде:

$$\dot\varphi_1' = k\omega_1 + l\omega_2 = \omega_1', \quad \dot\varphi_2' = m\omega_1 + n\omega_2 = \omega_2', \quad (\omega_1', \omega_2' = \mathrm{const}).$$

Пусть, например, $\omega_2' \neq 0$. Тогда в качестве замкнутой трансверсали можно взять окружность $S^1 = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{T}^2 : m\varphi_1 + n\varphi_2 = 0\}$. Соответствующее число вращения равно

$$\gamma' = \frac{\omega_1'}{\omega_2'} = \frac{k\gamma + l}{m\gamma + n}.$$

В нашем случае

$$\begin{Vmatrix} k & l \\ m & n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим геометрическое представление Пуансо. Когда на эллипсоиде инерции точка касания (полюс) сделает один полный оборот, тело повернется вокруг оси постоянного момента на некоторый угол $\alpha = \alpha(2\mathcal{T}/I_2^2;\, A,\, B,\, C)$. Функция $\alpha\,(p;\, A,\, B,\, C)$, $p = 2\mathcal{T}/I_2^2$ была введена А. Пуанкаре; отношения $\alpha/2\pi$ являются числами вращения потоков, возникающих на соответствующих инвариантных торах задачи Эйлера–Пуансо ([1, п. 86; 9, дополнение]).

Теорема 2. *Если* $p \in (1/A,\, 1/B)$, *то* $\alpha = 2\pi\,(\gamma + 1)$, *если* $p \in (1/B,\, 1/C)$, *то* $\alpha = 2\pi\gamma$.

Доказательство.

Так как величины $\alpha/2\pi$ и γ являются числами вращения одних и тех же потоков, то они связаны формулой (2.4). Найдем коэффициенты k, l, m, n.

Пусть $\gamma(x)$ — непостоянная аналитическая функция. Предположим, что выполнено тождество

$$\frac{k'\gamma + l'}{m'\gamma + n'} \equiv \frac{k''\gamma + l''}{m''\gamma + n''},$$

где $\Sigma' = \begin{Vmatrix} k' & l' \\ m' & n' \end{Vmatrix}$ и $\Sigma'' = \begin{Vmatrix} k'' & l'' \\ m'' & n'' \end{Vmatrix}$ — две унимодулярные матрицы. Тогда, очевидно, $\Sigma' = \pm\Sigma''$. Следовательно, в нашей задаче коэффициенты k, l, m, n определяются с точностью до знака.

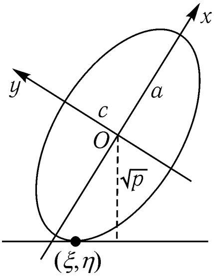

Рис. 8

Рассмотрим сначала случай, когда $1/B < p < 1/C$. Полагая $A = B$, найдем

$$\lim_{p\to 1/C} \frac{1}{2\pi}\alpha\,(p;\ A,\ A,\ C).$$

Для этого исследуем качение эллипсоида вращения с полуосями a, c по неподвижной плоскости, отстоящей от центра эллипсоида на расстоянии $\sqrt{p} = \sqrt{2\mathcal{T}/I_2^2}$ (см. рис. 8). Очевидно, что

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{r_1}{r_2},$$

где r_1, r_2 — радиусы окружностей являющихся соответственно полодиями и герполодиями. Рассмотрим сечение эллипсоида инерции плоскостью, проходящей через ось симметрии и точку касания. Координаты точки касания в прямоугольной системе координат Oxy обозначим через ξ, η (рис. 8). Нетрудно проверить, что

$$r_1^2 = \eta^2, \quad r_2^2 = \xi^2 + \eta^2 - p, \quad p = \frac{1}{C^2\xi^2 + A^2\eta^2}. \tag{2.6}$$

Заменяя ξ^2 на $\dfrac{1}{C} - \eta^2\dfrac{A}{C}$, с учетом (2.6) получим следующее равенство:

$$r_2^2 = \frac{(A-C)^2\eta^2 - A(A-C)^2\eta^4}{C[C + A(A-C)\eta^2]}.$$

Если $p \to 1/C$, то $\eta \to 0$ и

$$\lim_{p\to 1/C} \frac{r_1^2}{r_2^2} = \lim_{\eta\to 0} \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{C^2}{(A-C)^2}.$$

Следовательно, если $A = B$, то

$$\lim_{p\to 1/C} \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{C}{A-C}. \tag{2.7}$$

Согласно п. 2) теоремы 1, при $A = B$

$$\lim_{p\to 1/C} \gamma = \frac{C}{A-C}. \tag{2.8}$$

Так как пределы (2.6) и (2.7) совпадают и являются непостоянными аналитическими функциями моментов инерции A и C, то при $1/B < p < 1/C$

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \gamma.$$

Рассмотрим случай, когда $1/A < p < 1/B$. Если $B = C$, то из формулы (2.7) получим, что

$$\lim_{p\to 1/A} \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{A}{A-C}.$$

В этом случае, согласно п. 1) теоремы 1,

$$\lim_{p\to 1/A} \gamma = \frac{C}{A-C}.$$

Так как

$$\frac{A}{A-C} = \frac{C}{A-C} + 1,$$

то при $1/A < p < 1/B$

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \gamma + 1. \qquad \blacksquare$$

Из этой теоремы вытекает, в частности, что график функции $\alpha(p)$ имеет вид, изображенный на рис. 7.

§ 3. Невырожденность задачи Эйлера–Пуансо

Гессиан функции $\mathscr{T}$ по переменным I_1, I_2 обозначим через $\Gamma(I_1, I_2)$.

Теорема 3.

1. *Если* $A = B = C$, *то* $\Gamma \equiv 0$ *в области* Δ.

2. *Если* $A = B > C$, *то* $\Gamma > 0$ *в* Δ.

3. *Если* $A > B = C$, *то* $\Gamma < 0$ *в* Δ.

4. *Если* $A > B > C$, *то* $\Gamma > 0$ *в двух связных подобластях* Δ_a, *примыкающих к прямым* $|I_1| = I_2$. *В остальных двух подобластях* Δ_a *гессиан* $\Gamma < 0$.

Доказательство.

Утверждения 1 и 2 очевидны.

3. Когда $B = C$, интеграл (1.1) нетрудно вычислить. Он равен

$$\sqrt{\left(\frac{I_2^2}{C} - 2\mathcal{T}\right) \Big/ \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2C} I_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) I_1^2, \quad \Gamma = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) < 0.$$

4. $$\frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial I_i \partial I_j} = \frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(I_1, I_2)} = \frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(\omega_1, \gamma)} \frac{\partial(\omega_1, \gamma)}{\partial(\mathcal{T}, p)} \frac{\partial(\mathcal{T}, p)}{\partial(I_1, I_2)},$$

где $\gamma = \omega_2/\omega_1$. Каждая из этих матриц Якоби определена в Δ_a. При этом

$$\det \frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(\omega_1, \gamma)} = \det{}^{-1} \frac{\partial(\omega_1, \gamma)}{\partial(\omega_1, \omega_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\omega_2}{\omega_1^2} & \frac{1}{\omega_1} \end{vmatrix}^{-1} = \omega_1,$$

$$\det \frac{\partial(\mathcal{T}), p)}{\partial(I_1, I_2)} = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \frac{2\omega_1}{I_2^2} & \frac{2\omega_2}{I_2^2} - \frac{4\mathcal{T}}{I_2^3} \end{vmatrix} = -\frac{4\mathcal{T}\omega_1}{I_2^3}.$$

Дифференцируя выражение (1.1) по I_1, получаем

$$1 = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{\sqrt{\left[2\mathcal{T} - I_2^2\left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right)\right]}} \frac{\partial \mathcal{T}/\partial I_1}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B}\right)}} dl =$$

$$= \frac{\omega_1}{\sqrt{\mathcal{T}}} \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \oint \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{1}{p}\left(\frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B}\right)\right]}} \frac{dl}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B}\right)}}.$$

Значит $\omega_1 = K\sqrt{\mathcal{T}}$, где

$$K^{-1}(p;\, A,\, B,\, C) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \oint \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{1}{p}\left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right)\right]}} \times \\ \times \frac{dl}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B}\right)}} > 0.$$

Функция γ зависит лишь от p, A, B, C; следовательно, $\partial\gamma/\partial\mathcal{T} = 0$. Поэтому

$$\det\frac{\partial(\omega_1,\gamma)}{\partial(\mathcal{T},p)} = \begin{vmatrix} \dfrac{K(p)}{2\sqrt{\mathcal{T}}} & \dfrac{\partial\omega_1}{\partial p} \\ 0 & \dfrac{\partial\gamma}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{K(p)}{2\sqrt{\mathcal{T}}}\,\frac{\partial\gamma}{\partial p}.$$

Учитывая результаты предыдущих вычислений, получаем окончательно

$$\Gamma = \left|\frac{\partial^2\mathcal{T}}{\partial I^2}\right| = -\frac{2\omega_1^3}{I_2^3}\,\frac{\partial\gamma}{\partial p}.$$

Чтобы решить вопрос о знаке гессиана, осталось применить лемму 4, которая утверждает, что производная $\partial\gamma/\partial p > 0$ (< 0), когда $1/A < p < 1/B$ ($1/B < p < 1/C$).

Замечание. Теорема 3 является уточнением соответствующего результата, полученного В. И. Арнольдом [9, дополнение], который доказал, что в общем случае $\Gamma \not\equiv 0$.

§ 4. Разложение возмущающей функции

С помощью формул сферической тригонометрии можно показать [26], что в специальных канонических переменных L, G, H, l, g, h возмущающая функция $\mathcal{U}$ имеет вид

$$\mathcal{U} = \frac{x}{r}\gamma_1 + \frac{y}{r}\gamma_2 + \frac{z}{r}\gamma_3, \tag{4.1}$$

$$\gamma_1 = \frac{H}{G}\sqrt{1-\left(\frac{L}{G}\right)^2}\sin l + \frac{L}{G}\sqrt{1-\left(\frac{H}{G}\right)^2}\sin l\cos g + \\ +\sqrt{1-\left(\frac{H}{G}\right)^2}\cos l\sin g,$$

$$\gamma_2 = \frac{H}{G}\sqrt{1-\left(\frac{L}{G}\right)^2}\cos l + \frac{L}{G}\sqrt{1-\left(\frac{H}{G}\right)^2}\cos l\cos g - \\ -\sqrt{1-\left(\frac{H}{G}\right)^2}\sin l\sin g,$$

$$\gamma_3 = \frac{LH}{G^2}\sqrt{1-\left(\frac{L}{G}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{H}{G}\right)^2}\cos g,$$

где $(x,\ y,\ z)$ — координаты центра тяжести в главных осях инерции, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — расстояние от центра тяжести до точки подвеса.

В переменных действие-угол $I_1\, I_2\, I_3\, \varphi_1\, \varphi_2\, \varphi_3$ функция $\mathcal{U}(I_1\, I_2\, I_3\, \varphi_1\, \varphi_2\, \varphi_3)$ не зависит от φ_3 и 2π-периодична по φ_1 и φ_2. Согласно результатам работ [22, 18], разложение этой функции в двойной ряд Фурье по переменным φ_1 и φ_2 можно представить следующим образом:

$$\mathcal{U} = (\sin\delta\sin\varphi_2,\ \sin\delta\cos\varphi_2,\ \cos\delta)S\begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix}, \quad \cos\delta = \frac{I_3}{I_2}. \tag{4.2}$$

Здесь элементы квадратной матрицы $S = \|s_{ij}\|$ третьего порядка не зависят от φ_2. Выпишем разложения s_{ij} в ряды Фурье по угловой переменной φ_1:

$$s_{11} = -\frac{2\pi}{\mathbf{K}}\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}(1-q^{2n+1})\operatorname{ch}\delta}{1-2q^{2n+1}\operatorname{ch}2\sigma+q^{4n+2}}\sin(2n+1)\varphi_1,$$

$$s_{12} = -\frac{2\pi}{\mathbf{K}}\sqrt{\frac{1+\varkappa^2}{\Lambda^2+\varkappa^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}(1+q^{2n+1})\operatorname{ch}\delta}{1+2q^{2n+1}\operatorname{ch}2\sigma+q^{4n+2}}\cos(2n+1)\varphi_1,$$

$$s_{13} = -\frac{2\pi}{\mathbf{K}}\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}(1-q^{2n})\operatorname{ch}\sigma}{1-2q^{2n}\operatorname{ch}2\sigma+q^{4n}}\sin 2n\varphi_1,$$

$$s_{21}=\frac{2\pi}{\mathbf{K}}\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}(1+q^{2n+1})\operatorname{sh}\sigma}{1-2q^{2n+1}\operatorname{ch}2\sigma+q^{4n+2}}\cos(2n+1)\varphi_1,$$

$$s_{22}=-\frac{2\pi}{\mathbf{K}}\sqrt{\frac{1+\varkappa^2}{\Lambda^2+\varkappa^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}(1-q^{2n+1})\operatorname{sh}\sigma}{1+2q^{2n+1}\operatorname{ch}2\sigma+q^{4n+2}}\sin(2n+1)\varphi_1,$$

$$s_{23}=\frac{2\pi}{K}\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\Big\{-\frac{1}{4\operatorname{sh}\delta}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n(1+q^{2n})\operatorname{sh}\sigma}{1-2q^{2n}\operatorname{ch}2\sigma+q^{4n}}\cos 2n\varphi_1\Big\},$$

$$s_{31}=\frac{2\pi}{\mathbf{K}}\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}}{1+2q^{2n+1}}\cos(2n+1)\varphi_1,$$

$$s_{32}=-\frac{2\pi}{\mathbf{K}}\sqrt{\frac{1+\varkappa^2}{\Lambda^2+\varkappa^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}}{1-q^{2n+1}}\sin(2n+1)\varphi_1,$$

$$s_{33}=\frac{2\pi}{K}\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\Big(\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos 2n\varphi_1\Big);$$

$$\varkappa^2=\frac{C(A-B)}{A(B-C)},\quad \Lambda^2=\varkappa^2\frac{2C\mathcal{T}-I_2^2}{I_2^2-2A\mathcal{T}},\quad q=\exp\left(-\frac{\pi\mathbf{K}'}{\mathbf{K}}\right),$$

$$\mathbf{K}'=\mathbf{K}(\sqrt{1-\Lambda^2}),\quad \sigma=\frac{\pi}{2\mathbf{K}}F\Big(\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{\Lambda},\sqrt{1-\Lambda^2}\Big).$$

Здесь $\mathbf{K}(\Lambda)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем Λ, F — эллиптический интеграл первого рода.

Исторический очерк

Задача о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой как возмущение интегрируемого случая Эйлера–Пуансо впервые поставлена А. Пуанкаре в пятой главе «Новых методов небесной механики».

Пуанкаре принадлежит важное замечание о том, что в некоторых канонических переменных I, φ гамильтониан свободного вращения твердого тела имеет вид $\mathcal{T}(I_1, I_2)$. Им же введена функция $\alpha(2\mathcal{T}/I_2^2; A, B, C)$; отношения $\alpha/2\pi$ суть числа вращения (опять-таки определенные впервые Пуанкаре) на двумерных торах интегрируемого случая Эйлера–Пуансо. Пуанкаре первым указал вид разложения возмущающей функции в кратный ряд Фурье по угловым переменным φ_1, φ_2. Ссы-

лаясь при этом на некоторые промежуточные формулы как на известные, А. Пуанкаре, наверное, прежде всего имел в виду результаты работы Якоби [22], *в которой указаны разложения направляющих косинусов свободно вращающегося тела в тригонометрические ряды по величинам* $\omega_1 t$ *и* $\omega_2 t$, *где* ω_1 *и* ω_2 *зависят только от постоянных первых интегралов. Так как возмущающая функция сводится к линейной комбинации направляющих косинусов, то разложения Якоби после замены* $\omega_1 t$ *и* $\omega_2 t$ *на углы* φ_1 *и* φ_2 *дают как раз ряд Фурье этой функции в переменных* φ_1 *и* φ_2.

В некоторых работах (*например,* [26, 33, 34]) *специальные канонические переменные* L, G, H, l, g, h *несправедливо называют переменными Деприи. Это связано, вероятно, с тем, что в одной из работ Депри* [15], *где вводятся эти переменные, отсутствуют ссылки на другие источники. Однако специальные канонические переменные давно применялись в небесной механике при анализе вращательного движения небесных тел* (*см., например, трактат А. Андуайе* [16]).

Используя разделение специальных канонических переменных в функции Гамильтона задачи Эйлера–Пуансо, Ю.А.Садов получил явные выражения для переменных действие-угол [18]. *Отметим, что формулы, определяющие переменные действие, были найдены иным способом в квантовой механике уже в начале* XX *в., в связи с исследованием спектров многоатомных молекул* [19]. *Дело в том, что свободно вращающееся твердое тело является в «классической» квантовой механике простейшей моделью «невозбужденной» молекулы. Как известно, переменные действие играют определяющую роль в условиях квантования Бора – Зоммерфельда.*

Отметим в заключение, что вычисления Ю. А. Садова коэффициентов Фурье разложения возмущающей функции повторяют в современных обозначениях вычисления Якоби из уже упоминавшейся работы [22].

Глава III

Неинтегрируемость задачи о вращении несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки

В соответствии со стандартными обозначениями классической теории возмущений функцию Гамильтона рассматриваемой задачи обозначим

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \mu\mathscr{H}_1$$

(здесь $\mathscr{H}_0 = \mathscr{T}$, $\mathscr{H}_1 = \mathscr{U}$). Канонические уравнения с гамильтонианом $\mathscr{H}$ имеют циклический интеграл — интеграл площадей (в переменных действие-угол I, φ он равен I_3). Фиксируя его постоянную ($I_3 = I_3^0$), сведем задачу о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой к системе с двумя степенями свободы, которую будем называть приведенной. На протяжении всей главы твердое тело предполагается несимметричным, т.е. $A > B > C$.

§ 1. Структура векового множества

Из формулы (4.2) главы II следует, что разложение возмущающей функции $\mathscr{H}_1$ в двойной ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{-\infty}^{\infty} H_{m,\,1} e^{i(m\varphi_1+\varphi_2)} + \sum_{-\infty}^{\infty} H_{m,\,-1} e^{i(m\varphi_1-\varphi_2)} + \sum_{-\infty}^{\infty} H_{m,\,0} e^{im\varphi_1}. \tag{1.1}$$

Коэффициенты этого разложения зависят от I_1, I_2, I_3. Их легко вычислить, использовав формулы § 4 главы II.

Функция Гамильтона $\mathscr{H}$ определена и аналитична по переменным I_1, I_2 в области

$$\Delta_a^0 = \Delta_a \cap \{(I_1, I_2) : |I_3^0| < I_2\}.$$

В частности, коэффициенты (1.1) аналитичны в Δ_a^0.

Согласно определению 1 § 1 главы 1 вековым множеством системы с гамильтонианом $\mathscr{H}_0 + \mu\mathscr{H}_1$ называется множество точек $I = (I_1, I_2) \in \Delta_a^0$, удовлетворяющих условиям:

1) $m\omega_1(I) \pm \omega_2(I) = 0$; $\omega_i = \partial\mathscr{H}_0/\partial I_i$ $(i = 1, 2)$, $m \in \mathbf{Z}$;

2) $H_{m,\pm 1}(I) \neq 0$.

Теорема 1. *В каждой из четырех связных подобластей области Δ_a^0 множество $\mathscr{B}$ состоит из бесконечного числа прямых, проходящих через начало координат. Эти прямые накапливаются у одной из двух прямых линий*

$$2\mathscr{H}_0(I_1, I_2) = I_2^2/B,$$

лежащих на границе Δ_a^0.

Доказательство.

Из результатов § 2 гл. II следует, что множество точек из области $\Delta^0 = \Delta \cap \{|I_3^0| < I_2\}$, удовлетворяющих уравнению

$$m\omega_1 \pm \omega_2 = 0 \tag{1.2}$$

при достаточно больших фиксированных m и выборе знака перед частотой ω_2 (когда $I_1 > 0$, то при $m > 0$ (< 0) выбирается знак $-$ $(+)$; когда $I_1 < 0$, то наоборот), суть четыре прямые линии (по одной в каждой связной компоненте области Δ_a^0), проходящие через начало координат $I_1 = I_2 = 0$. Ниже будет показано, что для бесконечного числа значений $m \in \mathbf{Z}$ функции $H_{m,\pm 1}(I)$ отличны от нуля на прямых (1.2). Использовав теорему 1 гл. II, легко найти множество предельных точек для $\mathscr{B}$. Для этого устремим в уравнении (1.2) m к бесконечности. Тогда

$$\left|\frac{\omega_2}{\omega_1}\right| = |\gamma(p;\, A,\, B,\, C)| \to \infty.$$

Согласно теореме 1 (гл. II) величина $p = 2\mathscr{H}_0/I_2^2$ стремится к $1/B$ (B — средний момент инерции). Итак, множество предельных точек для $\mathscr{B}$ — две прямые линии

$$2\mathscr{H}_0(I_1,\, I_2) = \frac{1}{B} I_2^2,$$

которые лежат на границе Δ_a и пересекаются в начале координат.

Осталось показать, что в разложении (1.1) бесконечно много коэффициентов вида $H_{m,\,\pm 1}$ отличны от нуля. Рассмотрим три случая:

1) $x^2 + y^2 = 0$, $z \neq 0$;
2) $x^2 + y^2 \neq 0$, $z = 0$;
3) $x^2 + y^2 \neq 0$, $z \neq 0$.

Пусть сначала центр тяжести лежит на оси Oz (случай 1). Согласно формулам § 4 гл. II в этом случае m — четные целые числа. Пусть $m = 2n$, $n \in \mathbf{N}$ — натуральное число. Случай $m = -2n$, $n \in \mathbf{N}$ рассматривается аналогично. Используя формулу (4.2) (гл. II), разложения Фурье для s_{13}, s_{23}, s_{33}, а также формулы

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}), \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}),$$

нетрудно установить, что

$$H_{2n,\,-1} = \overline{H}_{-2n,\,1} = \frac{z}{4r}\frac{2\pi}{\mathbf{K}}\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 + \Lambda^2}} \times \\ \times \sin\delta \frac{q^n(1+q^{2n})\operatorname{sh}\sigma - q^n(1-q^{2n})\operatorname{ch}\sigma}{1 - 2q^{2n}\operatorname{ch}2\sigma + q^{4n}}. \qquad (1.3)$$

Так как $\sin\delta \neq 0$ (в противном случае $|I_3^0| = I_2$), то коэффициент $H_{2n,\,-1}$ равен нулю только в том случае, если

$$(1 - q^{2n})\operatorname{ch}\sigma - (1 + q^{2n})\operatorname{sh}\sigma = 0. \qquad (1.4)$$

Когда $n \to \infty$, то согласно теореме 1 (гл. II) функция $p = 2\mathscr{H}_0/I_2^2$ стремится к $1/B$. При этом, очевидно,

$$\Lambda = \varkappa\sqrt{\frac{Cp-1}{1-Ap}} \to \sqrt{\frac{C}{A}} < 1.$$

Так как Λ — непрерывная функция от p в некоторой окрестности точки $1/B$, то существует номер $N_1(A, B, C)$, такой, что при $\omega_2/\omega_1 = 2n > N_1$ справедливы неравенства

$$0 < \Lambda_1 < \Lambda < \Lambda_2 < 1; \quad \Lambda_1, \Lambda_2 = \text{const}.$$

При этом, очевидно, $|\sigma| < \sigma_0$ и $|q| < q_0 < 1$ (числа Λ_1, Λ_2, σ_0 и q_0 в конечном счете зависят только от A, B, C). Следовательно, существует номер $N(A, B, C)$ $(N > N_1)$ такой, что при $2n > N$ равенство (1.4) не может выполняться.

Рассмотрим теперь случай 2, когда $x^2 + y^2 \neq 0$, $z = 0$. В этом случае числа m нечетные. Согласно формуле (4.2) (гл. II)

$$\mathscr{H}_1 = \frac{x}{r}(\sin\delta\sin\varphi_2 s_{11} + \sin\delta\cos\varphi_2 s_{21} + \cos\delta s_{31}) + \\ + \frac{y}{r}(\sin\delta\sin\varphi_2 s_{12} + \sin\delta\cos\varphi_2 s_{22} + \cos\delta s_{32}).$$

Используя разложения Фурье функций s_{ij}, нетрудно установить, что для натуральных n

$$H_{2n+1,\,-1} = \overline{H}_{-2n-1,\,1} = \frac{x}{4r}\frac{2\pi}{\mathbf{K}}\sin\delta\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}} \times \\ \times \frac{q^{n+1/2}[(1+q^{2n+1})\operatorname{sh}\sigma - (1-q^{2n+1})\operatorname{ch}\sigma]}{1-2q^{2n+1}\operatorname{ch}2\sigma + q^{4n+2}} + \\ + i\frac{y}{4r}\frac{2\pi}{\mathbf{K}}\sin\delta\sqrt{\frac{1+\varkappa^2}{\Lambda^2+\varkappa^2}} \times \\ \times \frac{q^{n+1/2}[(1-q^{2n+1})\operatorname{sh}\sigma - (1+q^{2n+1})\operatorname{ch}\sigma]}{1+2q^{2n+1}\operatorname{ch}2\sigma + q^{4n+2}}.$$

Аналогичная формула справедлива для коэффициентов $H_{2n+1,\,1} = \overline{H}_{-2n-1,\,-1}$.

Так как $\sin\delta \neq 0$, то $H_{2n+1,\,-1} = 0$ только в том случае, если обращаются в нуль его действительная и мнимая части. Значит, когда $x \neq 0$, то

$$(1+q^{2n+1})\operatorname{sh}\sigma - (1-q^{2n+1})\operatorname{ch}\sigma = 0, \tag{1.5}$$

а когда $y \neq 0$, то

$$(1-q^{2n+1})\operatorname{sh}\sigma - (1+q^{2n+1})\operatorname{ch}\sigma = 0. \tag{1.6}$$

Эти уравнения имеют вид равенства (1.4). Совершенно аналогично можно доказать существование такого $N(A, B, C)$, что соотношения (1.5) и (1.6) не имеют места при $2n+1 > N$. Следовательно, при достаточно больших n коэффициенты $H_{2n+1,\,1} \neq 0$.

Общий случай, когда $x^2+y^2 \neq 0$, $z \neq 0$, очевидно, сводится к двум рассмотренным. ■

Напомним (§1, гл. I), что вековым множеством мы называем также множество резонансных торов в фазовом пространстве невозмущенной задачи, отвечающих значениям переменных действие $I \in \mathscr{B}$. Опишем это множество, используя специальные канонические переменные L, G, l, g (значение интеграла площадей $H = \mathrm{const}$ зафиксировано).

Рассмотрим двумерное кольцо

$$K = \{(l,\, L) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqslant l \leqslant 2\pi,\ |L| \leqslant G,\ G = G^0,\ g = 0\},$$

секущее трехмерный уровень интеграла модуля момента $G = \mathrm{const}$ задачи Эйлера–Пуансо (ср. с § 1 гл. II). Траектории невозмущенной системы трансверсальны к кольцу K всюду, кроме границ, которые представляют собой периодические решения — постоянные вращения вокруг большей оси инерции в противоположных направлениях. Любая точка k кольца K через некоторое время снова вернется на K.

Действительно, в силу уравнения Гамильтона

$$\dot g = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial G},$$

где $\mathscr{H}_0$ определяется формулой

$$\mathscr{H}_0 = \frac{1}{2}(a\sin^2 l + b\cos^2 l)(G^2 - L^2)\frac{c}{2}L^2,$$

будем иметь

$$\dot g = G(a\sin^2 l + b\cos^2 l).$$

Так как $G = G^0 \neq 0$ (безразличное равновесие тела, когда $G^0 = 0$, мы исключаем из рассмотрения), то $\dot g > \varepsilon > 0$. Следовательно, за конечное время переменная g станет равной 2π, и точка k снова вернется на кольцо K, подойдя к ней с «противоположной стороны».

Таким образом, получаем естественное отображение S внутренности кольца K на себя. Используя интегральный инвариант Пуанкаре–Картана, нетрудно показать, что S сохраняет меру

$$\nu(D) = \iint\limits_D dL\, dl$$

(см., например, [23, 24]). Преобразование S по непрерывности вращает границы K в противоположных направлениях.

Задача Эйлера–Пуансо интегрируема, поэтому фазовое пространство расслоено на замкнутые двумерные поверхности

$$\{G = G^0, \mathscr{H}_0 = h\}, \tag{1.7}$$

которые являются в общем случае двумерными торами. Очевидно, что поверхности (1.7) пересекаются с кольцом K по замкнутым инвариантным кривым отображения S, которые совпадают с линиями уровня функции $\mathscr{H}_0(l\widehat{g}LG^\circ)$. Значит, кольцо K расслоено на замкнутые инвариантные кривые отображения S. Эти кривые показаны на рис. 9 (чтобы получить эту картинку, надо отождествить на рис. 5 точки, l-координаты которых отличаются на 2π).

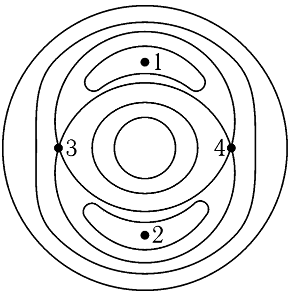

Рис. 9

Неподвижные точки 1 и 2 соответствуют периодическим решениям — вращениям вокруг меньшей оси инерции в противоположных направлениях. Точки 3 и 4 тоже являются неподвижными точками отображения S. Им отвечают постоянные вращения вокруг средней оси инерции, которые имеют гиперболический тип. В невозмущенной интегрируемой задаче сепаратрисы неподвижных точек 3 и 4 сдвоены: они идут из седла в седло. Эти сепаратрисы разбивают кольцо K на четыре связные подобласти K_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

После этого анализа легко представить себе двумерные инвариантные торы в задаче Эйлера–Пуансо. Они являются прямым произведением двух окружностей, одна из которых — линия уровня функции $\mathscr{H}_0(\widehat{l}gLG^0)$ на кольце K, другая — окружность $S^1\{g \mod 2\pi\}$. Иными словами, если сдвигать инвариантную кривую отображения вдоль окружностей

$$S^1 = \{L = L^0,\, G = G^0,\, l = l^0,\, 0 \leqslant g \leqslant 2\pi\},$$

то в результате получим как раз инвариантный двумерный тор невозмущенной системы уравнений.

Предложение 1. *Пересечение $\mathscr{B} \cap K_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ состоит из бесконечного числа замкнутых инвариантных кривых отображения S; эти кривые накапливаются у сепаратрис, расположенных на границе области K_i.*

Обозначим через D область кольца K, содержащую сепаратрисы неустойчивых неподвижных точек 3 и 4.

Лемма 1. *Множество $\mathscr{B} \cap K_i \cap D$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ является ключевым для класса $A(D)$.*

Доказательство.

Пусть f — аналитическая функция в области D, обращающаяся в нуль на $\mathscr{B} \cap K_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Рассмотрим аналитическую кривую без особенностей $l(s)$: $(\alpha, \beta) \to D$, проходящую через точку $d \in K_i \cap D$ и трансверсально пересекающую одну из сепаратрис. Согласно предложению 1, эта линия пересечет бесконечно много замкнутых инвариантных кривых отображения S из множества $\mathscr{B} \cap K_i$. Функция $f(l(s))$ аналитична в интервале (α, β), и ее нули имеют предельную точку внутри этого интервала. Следовательно, $f(l(s)) \equiv 0$, $s \in (\alpha, \beta)$ и, в частности, $f(d) = 0$. Так как d — любая точка внутри $K_i \cap D$, то $f \equiv 0$ в области D. ■

§ 2. Задача о несуществовании нового аналитического интеграла

Предположим, что приведенная система канонических уравнений с гамильтонианом

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \mu \mathscr{H}_1$$

имеет, кроме интеграла энергии, дополнительный интеграл $\mathscr{F}(I, \varphi, \mu)$, аналитический в канонических переменных действие-угол невозмущенной задачи и аналитический по параметру μ. Пусть

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_0(I, \varphi) + \mu\mathscr{F}_1(I, \varphi) + \ldots$$

Так как задача Эйлера–Пуансо невырождена (теорема 3 гл. II), функция $\mathscr{F}_0$ не зависит от φ. Согласно лемме Пуанкаре (§ 1 гл. I), функции $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$ зависимы на множестве $\mathscr{B} \subset \Delta_a^0 \subset \Delta^0$. Вековое множество $\mathscr{B}$ не является всюду плотным в Δ_a^0 (теорема 1). Это обстоятельство не позволило А. Пуанкаре на основании доказанных им общих теорем заключить, что рассматриваемая задача не имеет аналитических интегралов, отличных от классических [1, п. 86].

Такая трудность преодолевалась бы сравнительно просто, если бы функция $\mathscr{H}_0$ была аналитической в Δ^0. Действительно, якобиан $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$ равен нулю на множестве $\mathscr{B}$ и является аналитической функцией в Δ^0. Следовательно, на прямой $I_2 = I_2^0$ якобиан аналитичен, и его нули имеют предельную точку

$$\{(I_1^0, I_2^0) : 2\mathscr{H}_0(I_1^0, I_2^0) = (I_2^0)^2/B\}.$$

Поэтому он равен нулю на любой прямой $I_2 = I_2^0$ и, следовательно, есть тождественный нуль во всей области Δ^0, так что функции $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$ зависимы. Однако при помощи метода А. Пуанкаре [1, п. 81] можно доказать, что если существует некоторый независимый интеграл $\mathscr{F}(I, \varphi, \mu)$, то существует и такой, для которого $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$ не являются зависимыми.

К сожалению, гамильтониан задачи Эйлера–Пуансо $\mathscr{H}_0$ не аналитичен в Δ^0, так как прямые $2\mathscr{H}_0(I_1, I_2) = I_2^2/B$ являются для него особыми (см. §2 гл. II). Поэтому мы будем доказывать отсутствие новых интегралов, аналитических в переменных, не имеющих аналитических особенностей в окрестности вращений вокруг средней оси эллипсоида инерции (специальные канонические переменные, переменные Эйлера–Пуассона). При этом доказательства несуществования интегралов сильно усложняются в техническом отношении.

§ 3. Несуществование дополнительного интеграла, аналитического в специальных канонических переменных

Рассмотрим каноническую систему с двумя степенями свободы, гамильтониан которой есть

$$\mathscr{H}_0(l,\, \widehat{g},\, L,\, G,\, \widehat{H}^0) + \mu \mathscr{H}_1(l,\, g,\, L,\, G,\, H^0) \tag{3.1}$$

(значение параметра H^0 зафиксировано).

Обозначим через D область на кольце K, содержащую при некотором значении модуля момента $G^\circ \neq 0$, $|H^\circ| < G^\circ$ сепаратрисы неподвижных точек 3 и 4 (заштрихована на рис. 10). Очевидно, что эти сепаратрисы будут расположены в области D при всех значениях G из малого интервала $(\alpha_1,\, \alpha_2) \subset \mathbf{R}$, содержащего точку G° $(\alpha_2 > \alpha_1 > 0)$.

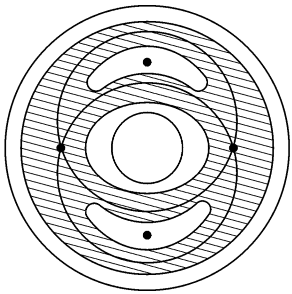

Рис. 10

Теорема 2. *В области* $D \times (\alpha_1,\, \alpha_2) \times T^1\{g \bmod 2\pi\} \times (-\varepsilon,\, \varepsilon)$ *нет аналитического интеграла канонических уравнений с гамильтонианом* (3.1)*, независимого от интеграла энергии* (3.1) *и аналитического по параметру* μ.

Следствие 1. *В фазовом пространстве переменных* L, l, G, g *нет аналитического интеграла приведенной системы канонических уравнений движения несимметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, независимого от интеграла энергии* $\mathscr{H}$*,* 2π*-периодического по угловым переменным* l*,* g *и аналитического по параметру* μ *в окрестности значения* $\mu = 0$.

Доказательство теоремы 2.

Пусть

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_0(L,\, l,\, G,\, g) + \mu \mathscr{F}_1(L,\, l,\, G,\, g) + \ldots \tag{3.2}$$

— первый интеграл приведенной канонической системы дифференциальных уравнений с гамильтонианом (3.1), аналитический в области

$$D \times (\alpha_2,\, \alpha_2) \times \mathbf{T}^1\{g \mod 2\pi\} \times (-\varepsilon,\, \varepsilon).$$

Покажем, что функция $\mathscr{F}_0$ не зависит от угловой переменной g. Так как функция $\mathscr{F}_0$ — первый интеграл невозмущенной задачи, то она постоянна вдоль траекторий невозмущенной системы уравнений. На нерезонансных инвариантных торах интегрируемой задачи траектории всюду плотны [4], следовательно, непрерывная функция постоянна на каждом нерезонансном торе. Хорошо известно [4], что в невырожденной интегрируемой гамильтоновой системе нерезонансные торы всюду плотно заполняют фазовое пространство. Так как задача Эйлера–Пуансо невырождена (теорема 3 гл. III) и функция $\mathscr{F}_0$ непрерывна, то $\mathscr{F}_0$ постоянна на всех инвариантных торах задачи Эйлера–Пуансо. Очевидно, что для всех $g \in \mathbf{R}$ точки $(L^0,\, l^0,\, G^0,\, g)$ лежат на одном и том же инвариантном торе (см. §1). Следовательно,

$$\mathscr{F}_0(L^0, l^0, G^0, g') = \mathscr{F}_0(L^0, l^0, G^0, g'')$$

для всех $g',\, g'' \in \mathbf{R}$. Значит, действительно, функция $\mathscr{F}_0$ не зависит от переменной g.

Докажем теперь, что функции $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$ зависимы на множестве $D \times (\alpha_1,\, \alpha_2)$. При каждом значении $G \in (\alpha_1,\, \alpha_2)$ сепаратрисы гиперболических точек 3 и 4 делят область D на четыре связные подобласти D_i $(i = 1,\, 2,\, 3,\, 4)$ (см. рис. 10). В каждой области D_i каноническим преобразованием $(L,\, l) \to \to (I_1,\, \varphi_1)$ можно ввести переменные действие-угол (см. § 1 гл. II). Это преобразование зависит, конечно, от значения переменной G, которая сама является одной из переменных действие $(G = I_2)$. Тогда $I_1 = I_1(L,\, l,\, I_2)$, $\varphi_1 = \varphi_1(L,\, l,\, I_2)$.

Введем в рассмотрение матрицу Якоби

$$R = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial L} & \dfrac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial l} & \dfrac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial I_2} \\ \dfrac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial L} & \dfrac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial l} & \dfrac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial I_2} \end{Vmatrix} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial I_1} & \dfrac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial I_2} \\ \dfrac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial I_1} & \dfrac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial I_2} \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial I_1}{\partial L} & \dfrac{\partial I_1}{\partial l} & \dfrac{\partial I_1}{\partial I_2} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial L} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial l} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial I_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|. \tag{3.3}$$

Обозначим матрицу размером 2×3 в правой части равенства (3.3) через $\widetilde{R}$. Заметим, что $\partial \mathscr{H}_0/\partial \varphi_1 = \partial \mathscr{F}_0/\partial \varphi_1 = 0$. Это вытекает из невырожденности задачи Эйлера–Пуансо и леммы Пуанкаре (см. § 1 гл. 1). Пусть $(I_1, I_2) \in \mathscr{B} \cap \Delta_a^0$. Тогда ранг матрицы $\widetilde{R}$ равен 1. Значит, при фиксированном значении переменной I_2, на инвариантных кривых отображения S кольца K на себя (§ 1 настоящей главы), составляющих множество $\mathscr{B} \cap D$, матрица R тоже имеет ранг 1. Согласно лемме 1 множество $\mathscr{B} \cap D$ является ключевым для класса $A(D)$. Так как все миноры второго порядка матрицы Якоби R при любом фиксированном значении I_2 являются аналитическими функциями в области D, то в области $D \times (\alpha_1, \alpha_2)$ ранг R равен 1, то есть функции $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$ зависимы.

Предположим теперь, что функции (3.1) и (3.2) независимы. Пусть $J(L, l, G, g, \mu)$ — ненулевой минор второго порядка матрицы Якоби функций $\mathscr{H}$ и $\mathscr{F}$. Функция J аналитична в области

$$D \times (\alpha_1, \alpha_2) \times \mathbf{T}^1\{g \mod 2\pi\} \times (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Разложим ее в сходящийся степенной ряд:

$$J = J_0 + \mu J_1 + \ldots \tag{3.4}$$

Так как функции $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$ зависимы, то $J_0 \equiv 0$. Предположим, что в разложении (3.4) коэффициент при μ^p $(p \geqslant 1)$ не равен тождественно нулю.

В области $D \times (\alpha_1, \alpha_2)$, $(L, l) \in D$, $G \in (\alpha_1, \alpha_2)$ отлична от нуля производная

$$\frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial G} = G(a \sin^2 l + b \cos^2 l).$$

Следовательно, равенство

$$\mathscr{H}_0(L, l, G) = \mathscr{H}_0$$

можно разрешить относительно G и подставить полученное выражение в $\mathscr{F}_0$. В результате получим функцию

$$\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_0(L,\, l,\, G(L,\, l,\, \mathscr{H}_0)).$$

Покажем, что эта функция не зависит от L и l. Действительно,

$$\frac{d\mathscr{F}_0}{dL} = \frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial L} + \frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial G}\frac{\partial G}{\partial L} = 0,$$

так как

$$\frac{\partial G}{\partial L} = -\frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial L} \Big/ \frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial G}.$$

Аналогично доказывается, что $\partial \mathscr{F}_0/\partial l = 0$.

Таким образом, $\mathscr{F}_0 = \mathscr{R}(\mathscr{H}_0)$, где $\mathscr{R}(x)$ — функция, аналитическая в интервале $(h',\, h'')$, $0 < h' < h''$

$$h' = \min_{\substack{(L,l)\in D\\ G\in(\alpha_1,\,\alpha_2)}} \mathscr{H}_0, \quad h'' = \max_{\substack{(L,l)\in D\\ G\in(\alpha_1,\,\alpha_2)}} \mathscr{H}_0.$$

Отметим, что при фиксированных значениях переменных $L = L^0$ и $l = l^0$ минимальное и максимальное значение функции $\mathscr{H}_0(L^0,\, l^0,\, G)$ достигается в точках α_1 и α_2 и только в них.

При $\mu \in (-\varepsilon',\, \varepsilon')$, ε' — достаточно малое положительное число, функция $(\mathscr{R} - \mathscr{H})$ аналитична в области $D' \times (\alpha_1',\, \alpha_2') \times \times \mathbf{T}^1\{g \mod 2\pi\}$, где $\alpha_1' > \alpha_1$, $\alpha_2' < \alpha_2$, а $D' \subset D$, $\overline{D'} \subset D$ — некоторая область кольца K, содержащая при всех $G \in (\alpha_1',\, \alpha_2')$ обе сепаратрисы.

Рассмотрим функцию

$$\mathscr{F}' = \frac{\mathscr{F} - \mathscr{R}(\mathscr{H})}{\mu},$$

аналитическую в области

$$D' \times (\alpha_1',\, \alpha_2') \times \mathbf{T}^1\{g \mod 2\pi\} \times (-\varepsilon',\, \varepsilon').$$

Эта функция — первый интеграл канонической системы с гамильтонианом (3.1), и ее можно разложить в сходящийся степенной ряд

$$\mathscr{F}' = \mathscr{F}'_0 + \mu \mathscr{F}'_1 + \ldots$$

Снова получим, что $\mathscr{F}'_0$ не зависит от переменной g и функции $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}'_0$ зависимы. Так как

$$\mathscr{F} = \mathscr{R}(\mathscr{H}) + \mu\mathscr{F}'_0 + \mu^2\mathscr{F}'_1 + \ldots ,$$

то разложение минора J в степенной ряд начинается с членов порядка μ^2. Значит, $J_1 \equiv 0$.

Повторяя эту операцию p раз, мы придем к заключению, что разложение (3.4) начинается с членов порядка μ^{p+1}, а не μ^p, как предполагалось выше. ■

Замечание 1. Нетрудно доказать, что система с функцией Гамильтона (3.1) не допускает даже частных аналитических интегралов, аналитически зависящих от μ, при ограничениях на постоянную энергии (ср. с § 3, 4 главы I).

Замечание 2. Теорема 1 фактически утверждает, что канонические уравнения задачи о вращении тяжелого несимметричного твердого тела с неподвижной точкой не допускают, кроме интегралов энергии и площадей, третьего аналитического интеграла, находящегося в инволюции с интегралом площадей. Последнее условие можно отбросить, но это потребует более громоздкого доказательства (ср. с [1, п. 86]).

Замечание 3. Рассмотрим каноническую систему с функцией Гамильтона

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \mu\mathscr{H}_1 + \mu^2\mathscr{H}_2 + \ldots , \tag{3.5}$$

где $\mathscr{H}_0 + \mu\mathscr{H}_1$ — гамильтониан задачи о вращении несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, а $\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H}_3$, … — произвольные аналитические функции в фазовом пространстве переменных L, l, G, g, 2π-периодические по углам l, g. Если

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_0 + \mu\mathscr{F}_1 + \mu^2\mathscr{F}_2 + \ldots$$

— первый аналитический интеграл такой системы, то

$$\frac{d\mathscr{F}}{dt} = (\mathscr{H}, \mathscr{F}) = (\mathscr{H}_0, \mathscr{F}_0) + \mu[(\mathscr{H}_0, \mathscr{F}_1) + (\mathscr{H}_1, \mathscr{F}_0)] + \ldots \equiv 0,$$

и, следовательно,

$$(\mathscr{H}_0, \mathscr{F}_0) \equiv 0, \quad (\mathscr{H}_0, \mathscr{F}_1) + (\mathscr{H}_1, \mathscr{F}_0) \equiv 0, \ldots$$

При доказательстве теоремы 1 мы использовали только два первых равенства, куда входят функции $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{H}_1$. Значит, теорема 1 справедлива для более общих систем канонических уравнений с гамильтонианом вида (3.5).

§ 4. Несуществование дополнительного интеграла, аналитического в переменных Эйлера–Пуассона

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной точки в потенциальном поле сил, инвариантном относительно поворотов вокруг некоторой прямой Г, проходящей через точку подвеса. Обозначим, как обычно, через p, q, r проекции вектора угловой скорости на главные оси эллипсоида инерции тела, а через γ_1, γ_2, γ_3 — косинусы углов между прямой Г и главными осями инерции. Потенциал поля сил $\mathcal{V}$ зависит только от переменных $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Предположим, что $\mathcal{V}$ — аналитическая функция в некоторой окрестности нуля $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$, содержащей сферу Пуассона

$$S^2 = \{(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbf{R}^3 : \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1\}.$$

Уравнения движения тела имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&A\dot{p} + (C - B)qr = \gamma_3 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \gamma_3},\\
&B\dot{q} + (A - C)pr = \gamma_1 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \gamma_3} - \gamma_3 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \gamma_1},\\
&C\dot{r} + (B - A)pq = \gamma_2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \gamma_1} - \gamma_1 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \gamma_2},\\
&\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Эти уравнения называются уравнениями Эйлера–Пуассона. Они имеют три первых интеграла:

интеграл энергии

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2\mathcal{V}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = c_1,$$

интеграл площадей

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = c_2,$$

геометрический интеграл

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = c_3.$$

Для реальных движений твердого тела $c_3 = 1$.

Разложим функцию $\mathscr{V}$ в сходящийся ряд

$$\mathscr{V} = \mathscr{V}_1 + \mathscr{V}_2 + \ldots + \mathscr{V}_k + \ldots,$$

где $\mathscr{V}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — однородная форма переменных γ_1, γ_2, γ_3 степени k.

Уравнения Эйлера–Пуассона определены в $\mathbf{R}^6 = \mathbf{R}^3\{p, q, r\} \times \mathbf{R}^3\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. Пусть E — некоторая окрестность нуля в $\mathbf{R}^6$.

Теорема 3. *Если $A > B > C$ и форма $\mathscr{V}_1$ невырождена (т.е. $\mathscr{V}_1 \not\equiv 0$), то уравнения (4.1) не имеют в области $E \subset \mathbf{R}^6$ четвертого аналитического интеграла, не зависящего от классических интегралов энергии, площадей и геометрического.*

В случае вращения твердого тела в однородном поле тяготения

$$\mathscr{V} = -P(x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\gamma_3),$$

где P — вес тела, а (x, y, z) — координаты центра тяжести в главных осях инерции.

Следствие 2. *Если тело несимметрично и центр тяжести не лежит в точке подвеса, то уравнения Эйлера–Пуассона задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки не имеют четвертого аналитического интеграла, независимого от классических.*

Замечание. Это утверждение существенно усиливает теорему Пуанкаре–Гюссона об отсутствии в этом случае нового алгебраического интеграла [25].

Рассмотрим еще задачу о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в ньютоновском поле сил [26, 35]. С большой точностью потенциал в этом случае можно представить в следующем виде [26]:

$$\mathscr{V} = \lambda_1(x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\gamma_3) + \lambda_2(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2), \tag{4.2}$$

где λ_1, λ_2 — некоторые постоянные. Отметим, что такой же вид имеет потенциал в задаче о вращении тела вокруг неподвижной точки, находящегося под действием силы тяжести и силы притяжения к некоторой неподвижной плоскости, пропорциональной расстоянию [27, п. 499].

Следствие 3. *Если $A > B > C$ и $x^2+y^2+z^2 \neq 0$, то уравнения Эйлера–Пуассона (4.1) с потенциалом (4.2) не имеют нового аналитического интеграла, независимого от классических.*

Замечание. Это утверждение является существенным усилением теоремы Ю. А. Архангельского об отсутствии в рассматриваемой задаче нового алгебраического интеграла [28].

Точная потенциальная функция ньютоновского поля сил равна

$$\mathcal{V} = \lambda \iiint\limits_U \frac{\rho(\xi,\, \eta,\, \zeta) d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{R^2 + 2R(\xi\gamma_1 + \eta\gamma_2 + \zeta\gamma_3) + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}, \quad (4.3)$$

где $(\xi,\, \eta,\, \zeta)$ — координаты точки твердого тела в главных осях инерции, $\rho(\xi,\, \eta,\, \zeta)$ — плотность массы в этой точке, R — расстояние от гравитирующего центра O' до точки подвеса O, U — область в подвижной системе координат, занимаемая твердым телом, λ — гравитационная постоянная (см. рис. 11).

Если точка O' не может находиться внутри твердого тела, то согласно формуле (4.3) $\mathcal{V}$ — аналитическая функция направляющих косинусов γ_1, γ_2, γ_3. Положим

$$\mathcal{V}_1 = X_{\gamma_1} + Y_{\gamma_2} + Z_{\gamma_3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \gamma_1}\Big|_{\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0} = -\lambda R \iiint\limits_U \frac{\xi\rho(\xi,\, \eta,\, \zeta) d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(R^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}}, \\ Y &= \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \gamma_2}\Big|_{\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0} = -\lambda R \iiint\limits_U \frac{\eta\rho(\xi,\, \eta,\, \zeta) d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(R^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}}, \\ Z &= \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \gamma_3}\Big|_{\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0} = -\lambda R \iiint\limits_U \frac{\zeta\rho(\xi,\, \eta,\, \zeta) d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(R^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Следствие 4. *Если $A > B > C$ и хотя бы один из интегралов (4.4) отличен от нуля, то уравнения Эйлера–Пуассона задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в ньютоновском поле сил не имеют дополнительного аналитического интеграла, независимого от классических.*

Доказательство теоремы 2.

Предположим, что существует новый интеграл $\mathscr{F}(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, аналитический в $E \subset \mathbf{R}^6$. Введем в уравнения Эйлера–Пуассона малый параметр μ, заменяя γ_i на $\mu\gamma_i$. Тогда $\mathscr{F}(p,\ q,\ r,\ \mu\gamma_1,\ \mu\gamma_2,\ \mu\gamma_3)$ можно представить в виде степенного ряда по μ.

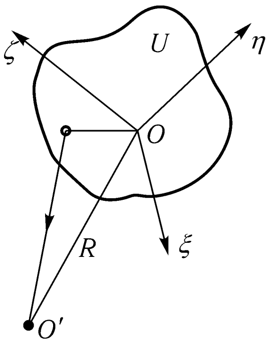

Рис. 11

Этот ряд будет сходиться для достаточно малых значений μ, если $(p,\ q,\ r) \in G$ (G — некоторая малая окрестность нуля в $\mathbf{R}^3\{p,\ q,\ r\}$), а γ_i принимают значения из сферы Пуассона

$$S^2 = \{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1\}.$$

После введения малого параметра μ уравнения (4.1) будут иметь тот же вид, а потенциал станет равным

$$\mathscr{V} = \mu\mathscr{V}_1 + \mu^2\mathscr{V}_2 + \ldots .$$

Таким образом, новые уравнения (4.1) будут описывать движения твердого тела в слабом потенциальном поле. Заметим, что форма $\mu\mathscr{V}_1$ имеет смысл потенциальной функции силы тяжести, а ее коэффициенты можно интерпретировать как произведения веса тела на координаты центра тяжести в главных осях инерции.

Переменные $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ выражаются через специальные канонические переменные L, G, H, l, g, h по формулам (4.1) гл. II, а переменные p, q, r — по формулам:

$$p = \frac{1}{A}\sqrt{G^2 - L^2}\sin l, \quad q = \frac{1}{B}\sqrt{G^2 - L^2}\cos l, \quad r = \frac{L}{C}. \tag{4.5}$$

Обозначим через D область на кольце K, содержащую при каждом значении $G \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ ((α_1, α_2) — малый интервал R) обе сепаратрисы неподвижных точек 3 и 4 (см. § 3).

Согласно формулам (4.1) (гл. II) и (4.5) переменные Эйлера–Пуассона являются аналитическими функциями специальных канонических переменных, если

$$G \in (\alpha_1, \alpha_2), \quad |H| < \alpha_1, \quad (L, l) \in D, \quad g \in \mathbf{T}^1\{x \mod 2\pi\}.$$

Подставляя выражения (4.1) (гл. II) и (4.5) в функцию $\mathscr{F}$, получим при фиксированном значении переменной $H = H^0$ ($|H^0| < \alpha_1$) интеграл канонических уравнений с функцией Гамильтона (3.5), аналитический в области

$$D \times (\alpha_1, \alpha_2) \times \mathbf{T}^1\{g \mod 2\pi\} \times (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Так как $\mathscr{H}$ и $\mathscr{F}$ как функции от переменных L, l, G, g и параметров H, μ независимы, то при некотором фиксированном значении $H = H^0$ из интервала $(-\alpha_1, \alpha_1)$ новый интеграл уравнений с гамильтонианом (3.5) не зависит от интеграла энергии. Но это противоречит заключению теоремы 1 (с учетом замечания 3 предыдущего параграфа). ■

Исторический очерк

Задача о существовании дополнительного интеграла уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, аналитического по каноническим переменным и параметру μ, впервые поставлена А. Пуанкаре в п. 86 его «Новых методов небесной механики». Анализируя разложение возмущающей функции, А. Пуанкаре показал, что (в нашей терминологии) вековое множество не является всюду плотным, и, следовательно, его общая теорема об отсутствии новых аналитических интегралов не применима: «...ничто не препятствует существованию третьего однозначного интеграла, если только якобиан трех интегралов обращается в нуль, как только n' (у нас ω_2, В. К.) становится кратным n (у нас ω_1, В. К.); отсюда следует, что этот третий интеграл не может в общем случае быть алгебраическим.

Поскольку сформулированные в этой главе условия являются необходимыми, но не достаточными, ничто не доказывает, что этот третий интеграл существует...» [1, с. 226].

Фактически в этих строках содержится постановка задачи о существовании новых алгебраических интегралов и утверждение, которое сейчас принято называть теоремой Пуанкаре–Гюссона: если твердое тело несимметрично, и центр тяжести не совпадает с точкой подвеса, то нового алгебраического интеграла нет. Общая задача А. Пуанкаре о дополнительных алгебраических интегралах решена в работах Лиувилля, Гюссона, Бургатти. Исследования этих авторов аналогичны работам Брунса и Пенлеве, посвященным задаче трех тел. Прекрасное изложение истории вопроса об алгебраических интегралах можно найти в статье П. Я. Полубариновой–Кочиной [44]. *Следует сослаться также на недавние работы А. И. Докшевича* [88, 89], *в которых исправлены и упрощены некоторые существенные моменты доказательства теоремы об отсутствии новых алгебраических интегралов.*

Глава IV
Динамические эффекты, препятствующие интегрируемости уравнений движения несимметричного тела

Теория рождения периодических решений в канонических системах дифференциальных уравнений, близких к интегрируемым, была разработана А. Пуанкаре для целей небесной механики. В данной главе устанавливается применимость этих результатов к классической задаче о движении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой. Тем самым удается существенно расширить класс известных периодических решений. В этой же главе исследовано воздействие возмущения на сепаратрисы неустойчивых периодических решений задачи Эйлера–Пуансо — постоянных вращений вокруг средней оси эллипсоида инерции. Сложное поведение траекторий уравнений движения несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки (в частности, рождение многочисленных изолированных периодических решений и расщепление сепаратрис) несовместимо с существованием нового независимого аналитического интеграла.

§ 1. Характеристические показатели. Теорема Пуанкаре о периодических решениях

В этом параграфе содержатся некоторые утверждения теории дифференциальных уравнений, принадлежащие, в основном, А. Пуанкаре, которые будут использованы нами в дальнейшем.

Рассмотрим аналитическую систему дифференциальных уравнений, определенную в R^n:

$$\dot{x} = f(x), \quad x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad f = \begin{Vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{Vmatrix}. \tag{1.1}$$

Эта система имеет единственное аналитическое решение $x(t, \xi)$ такое, что

$$x(0, \xi) = \xi, \quad \xi = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\eta \end{Vmatrix}$$

(см., например, [3]). Предположим, что при $\xi = \xi^*$ решение системы (1.1) периодическое с периодом T^*. Частные производные

$$x_{kl} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_l}\bigg|_{\xi=\xi^*}$$

удовлетворяют линейной системе

$$\dot{x}_{kl} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_r} x_{rl},$$

где в выражении для $\partial f^k/\partial x_r$ вместо x подставлена периодическая функция $x(t, \xi^*)$. Введем матрицу n-го порядка

$$F = \left\| \frac{\partial f_k}{\partial x_r} \right\|.$$

Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами

$$\dot{y} = Fy, \quad y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix} \tag{1.2}$$

называются уравнениями в вариациях периодического решения $x(t, \xi^*)$.

Матрица
$$X(t) = \|x_{kl}(t)\|$$
является, очевидно, фундаментальной матрицей линейной системы (1.2), причем $X(0) = E$, где E — единичная матрица n-го порядка. Матрица $X(T^*)$ называется матрицей монодромии системы линейных уравнений (1.2). Собственные числа $\lambda_1, \ldots , \lambda_n$ матрицы $X(T^*)$ называются мультипликаторами, а величины $\alpha_1, \ldots , \alpha_n$: $\lambda_k = \exp(\alpha_k T^*)$ — характеристическими показателями системы (1.2). Числа $\alpha_1, \ldots , \alpha_n$ называются также характеристическими показателями периодического решения $x(t, \xi^*)$. Система (1.1) предполагается автономной, поэтому хотя бы один из характеристических показателей равен нулю. Действительно, в этом случае
$$\|X(T^*) - E\| f^* = 0, \quad f^* = f(\xi^*) \neq 0. \tag{1.3}$$

Мы будем, в основном, иметь дело с периодическими решениями автономных канонических систем
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x},$$

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}(x, y), \quad x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix}. \tag{1.4}$$

Для таких систем справедлива

Теорема Пуанкаре–Ляпунова. *Характеристический многочлен $p(\lambda)$ матрицы монодромии периодического решения гамильтоновой системы* (1.4) *возвратный*: $(p)\lambda = \lambda^{2n} p(1/\lambda)$.

Доказательство можно найти, например, в [4, 20].

Значит, если λ — корень характеристического уравнения $p(x) = 0$, то $1/\lambda$ — корень того же уравнения. Так как многочлен $p(x)$ имеет действительные коэффициенты, то его корнями являются также числа $\overline{\lambda}$ и $1/\overline{\lambda}$.

Отсюда, в частности, следует, что характеристические показатели периодического решения автономной гамильтоновой системы попарно равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. При этом два из них всегда равны нулю.

В случае $n = 2$ оставшиеся характеристические показатели либо оба действительны, либо оба чисто мнимы. Если они отличны от нуля, то периодическое решение называется невырожденным. Невырожденное решение с действительными характеристическими показателями называется гиперболическим, а с чисто мнимыми — эллиптическим. Эллиптическое решение устойчиво в первом приближении, а гиперболическое неустойчиво.

Предположим теперь, что система (1.1) имеет m $(0 \leqslant m \leqslant n-1)$ первых интегралов $\mathscr{F}_1(x), \ldots, \mathscr{F}_m(x)$, аналитических в $\mathbf{R}^n$. Докажем, что если в точках траектории периодического решения $x(t, \xi^*)$ ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \mathscr{F}_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \mathscr{F}_1}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial \mathscr{F}_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \mathscr{F}_m}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

равен m, то по меньшей мере $m + 1$ характеристических показателей этого решения равны нулю.

Действительно, так как функция $\mathscr{F}_k(x)$ — первые интегралы, то

$$\mathscr{F}_k(x(t, \xi^*)) \equiv \mathscr{F}_k(\xi^*), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathscr{F}_k}{\partial x_1} x_{1l} + \ldots + \frac{\partial \mathscr{F}_k}{\partial x_n} x_{nl} = \frac{\partial \mathscr{F}_k}{\partial x_l} \quad (l = 1, \ldots, n). \tag{1.5}$$

Положим $t = T^*$. Тогда $x(T^*, \xi^*) = \xi^*$ и равенство (1.5) можно представить в следующей матричной форме:

$$\|X(T^*) - E\| \eta_k = 0, \quad \eta_k = \operatorname{grad} \mathscr{F}_k, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{1.6}$$

С другой стороны,

$$\frac{d\mathscr{F}_k}{dt} = (\eta_k, f) \equiv 0.$$

Так как $f(\xi^*) = f^* \neq 0$, то из этих равенств вытекает линейная независимость векторов $\eta_1, \ldots, \eta_n, f^*$. Из формул (1.3) и (1.6) следует, что $\eta_1, \ldots, \eta_n, f^*$ — собственные векторы матрицы

$$Y = \|X(T^*) - E\|$$

с собственными значениями $\lambda = 1$. Следовательно, по крайней мере $m+1$ ее характеристических чисел (мультипликаторов) равны единице. Это и требовалось доказать.

В качестве следствия получаем следующее утверждение: если $n-m$ характеристических показателей решения $x(t, \xi^*)$ отличны от нуля, то на его траектории интегралы $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_m$ зависимы. В частности, на траекториях невырожденных периодических решений двумерной гамильтоновой системы интеграл энергии $\mathscr{H}$ и любой первый интеграл $\mathscr{F}$ зависимы.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \tag{1.7}$$

правая часть которой аналитична в прямом произведении $\mathbf{R}^n \times (-\varepsilon, \varepsilon;\ x \in \mathbf{R}^n,\ \alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. При всех значениях параметра $\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ существует аналитическое решение $x(t, \xi, \alpha)$ системы (1.7) такое, что $x(0, \xi, \alpha)$ для всех α. Предположим, что решение $x(t, \xi^*, 0)$ — периодическое с периодом T^*. Будет ли «возмущенная» система (1.7) допускать периодические решения, если $\alpha \neq 0$, но мало?

Для рассматриваемых ниже приложений особый интерес представляет случай, когда система (1.7) имеет первый интеграл $g(x, \alpha)$, аналитический в $\mathbf{R}^n \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Без ущерба общности можно считать, что $f_n(\xi^*, 0) \neq 0$. Так как

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_n} f_n \equiv 0,$$

то одна из производных

$$g_r = \left.\frac{\partial g}{\partial x_r}\right|_{\xi=\xi^*,\, \alpha=0} \quad (r = 1, \ldots, n-1)$$

отлична от нуля. Пусть, например, $g_1 \neq 0$.

Введем в рассмотрение матрицу V, которая получается из матрицы Y «порождающего» решения $x(t,\, \xi^*,\, 0)$ вычеркиванием последнего столбца и первой строки.

Теорема (А. Пуанкаре). *Если $V \neq 0$, то при достаточно малых α существует аналитическая функция $\xi(\alpha)$, $\xi(0) = \xi^*$, такая, что решение $x(t,\, \xi(\alpha),\, \alpha)$ системы* (1.7) — *периодическое с периодом T^* «порождающего» решения $x(t, \xi^*, 0)$.*

Доказательство.

Условие периодичности решения $x(t,\, \xi,\, \alpha)$ имеет следующий вид:

$$z_k(\xi,\, \alpha) = x_k(T^*,\, \xi,\, \alpha) - \xi_k = 0, \quad k = 1,\, \ldots,\, n.$$

Полагая $\xi_n = \xi_n^*$, найдем $n-1$ функций $\xi_1(\alpha),\, \ldots,\, \xi_{n-1}(\alpha)$, удовлетворяющих уравнениям

$$z_k(\xi,\, \alpha) = 0, \quad k = 2,\, \ldots,\, n. \tag{1.8}$$

Эти уравнения, очевидно, удовлетворяются, если положить $\alpha = 0$, $\xi_k = \xi_k^*$ $(k = 2,\, \ldots,\, n)$. Соответствующая функциональная матрица

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial z_2}{\partial \xi_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_2}{\partial \xi_{n-1}} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial z_n}{\partial \xi_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_n}{\partial \xi_{n-1}} \end{matrix} \right\|$$

совпадает с матрицей V. Так как $|V| \neq 0$, то по теореме о неявных функциях существуют аналитические решения $\xi_k(\alpha)$, $\xi_k(0)$ $(k = 1,\, \ldots,\, n-1)$ системы (1.8). Осталось показать, что при этом выполнено уравнение $z_1(\xi,\, \alpha) = 0$. Действительно, по теореме о среднем значении

$$g(x(T^*,\, \xi,\, \alpha),\, \alpha) - g(\xi,\, \alpha) = \frac{\partial g}{\partial x_1}\bigg|_{x=\widetilde{x}} z_1(\xi,\, \alpha) = 0, \tag{1.9}$$

где $\widetilde{x}_k = \xi_k$ $(k \neq 1)$ и $\widetilde{x}_1$ лежит между ξ_1 и $x_1(T^*,\, \xi,\, \alpha)$. Так как $g_1 = \partial g/\partial x_1 \neq 0$ при $\xi = \xi^*$ и $\alpha = 0$, то при малых α будем иметь $\partial g/\partial x_1 \neq 0$. Но тогда из (1.9) вытекает, что $z_1(\xi,\, \alpha) = 0$.

■

Для некоторых целей выгодно искать периодические решения «возмущенной» задачи, расположенные на фиксированном уровне $g(x,\,\alpha) = g^* = g(\xi^*,\,0)$. Тогда к уравнениям периодичности

$$z_k(T,\,\xi,\,\alpha) = x_k(T,\,\xi,\,\alpha) - \xi_k = 0 \quad (k = 1,\,\dots\,,\,n) \tag{1.10}$$

надо добавить уравнение

$$z_{n+1}(\xi,\,\alpha) = g(\xi,\,\alpha) - g^* = 0. \tag{1.11}$$

При этом в уравнениях (1.10) период T является неизвестной функцией α.

Полагая $\xi_n = \xi_n^*$, ищем решение $\xi_1(\alpha,),\,\dots\,,\,\xi_{n-1}(\alpha),\,T(\alpha)$ уравнений (1.10), когда $k \neq 1$, и (1.11). Этим уравнениям при $\alpha = 0$ удовлетворяют величины $\xi_1^*,\,\dots\,,\,\xi_{n-1}^*,\,T^*$. Соответствующая функциональная матрица

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial z_2}{\partial \xi_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_2}{\partial \xi_{n-1}} & \dfrac{\partial z_2}{\partial T} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial z_{n+1}}{\partial \xi_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_{n+1}}{\partial \xi_{n-1}} & \dfrac{\partial z_{n+1}}{\partial T} \end{Vmatrix}$$

совпадает при $\alpha = 0$ с матрицей W, которая получается из матрицы

$$Z = \begin{Vmatrix} Y & f^* \\ \eta & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.12}$$

вычеркиванием n-го столбца и первой строки. В матрице (1.12) $f^* = f(\xi^*,\,0)$, а $\eta = (\partial g/\partial x_1,\,\dots\,,\,\partial g/\partial x_n)$, где вместо x подставлено ξ^*. Если $|W| \neq 0$, то по теореме о неявных функциях при малых α существуют периодические решения системы (1.7), расположенные на интегральной гиперповерхности $g(x,\,\alpha) = g^*$.

§ 2. Возмущение равномерных движений

Когда параметр Пуанкаре μ равен нулю, имеем случай Эйлера–Пуансо. В этой невозмущенной интегрируемой задаче существуют частные периодические решения — равномерные вращения тела вокруг главных осей эллипсоида инерции.

В специальных канонических переменных L, G, l, g вращения вокруг меньшей и средней осей инерции записываются соответственно в виде:

$$L = 0, \quad G = G_0, \quad l = \pm\frac{\pi}{2}, \quad g = \frac{G_0}{A}t + g_0, \tag{2.1}$$

$$L = 0, \quad G = G_0, \quad l = 0, \pi, \quad g = \frac{G_0}{B}t + g_0. \tag{2.2}$$

На траекториях вращений вокруг большей оси специальные канонические переменные вырождаются. Для исследования возмущений этих периодических решений следует по-другому ввести специальные координаты, принимая вместо оси Oz, например, ось Ox (см. гл. II, § 1).

Периоды T решений (2.1) и (2.2) равны соответственно $2\pi A/G_0$ и $2\pi B/G_0$.

Выясним, будут ли канонические уравнения

$$\dot{L} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial l}, \quad \dot{l} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L}, \quad \dot{G} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g}, \quad \dot{g} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G}, \qquad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mu\mathcal{H}_1 \tag{2.3}$$

допускать периодические решения, если $\mu \neq 0$, но очень мало.

Случай несимметричного твердого тела

Теорема 1. *Периодические решения невозмущенной задачи — невертикальные постоянные вращения вокруг главных осей инерции — не исчезают при добавлении возмущения, а при малых μ переходят в периодические решения возмущенной задачи, аналитически зависящие от малого параметра μ. Они существуют на каждом ненулевом уровне интеграла энергии.*

Следовательно, на почти всех трехмерных уровнях энергии приведенная возмущенная система имеет шесть периодических решений при малых значениях μ.

Доказательство.

В окрестности невертикальных равномерных вращений гамильтониан $\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \mu\mathscr{H}_1$ является аналитической функцией. Значит, можно воспользоваться результатами § 1. В качестве интеграла, аналитического по независимым переменным и малому параметру, можно взять интеграл энергии.

Рассмотрим сначала возмущение периодического решения (2.1). Нетрудно показать, что линейные уравнения

$$\dot{L}_1 = \frac{B-A}{AB}G_0^2 l_1, \quad \dot{G}_1 = 0, \quad \dot{l}_1 = \frac{A-C}{AC}L_1, \quad \dot{g}_1 = \frac{G_1}{A} \tag{2.4}$$

суть уравнения в вариациях для «порождающего» решения (2.1). Они легко интегрируются

$$G_1 = G_{1,0}, \quad g_1 = \frac{G_{1,0}}{A}t + g_{1,0}, \quad L_1 = A_1 \sin\omega t + B_1 \cos\omega t,$$

$$l_1 = A_2 \sin\omega t + B_2 \cos\omega t,$$

$$\omega^2 = \frac{(A-B)(A-C)}{BC}\left(\frac{G_0}{A}\right)^2 > 0,$$

$$B_1 = L_{1,0}, \quad B_2 = l_{1,0},$$

$$A_1 = \frac{B-A}{AB}\frac{G_0^2}{\omega}l_{1,0}, \quad A_2 = \frac{A-C}{AC}\frac{L_{1,0}}{\omega}.$$

Заметим, что

$$\frac{A_1A_2}{l_{1,0}L_{1,0}} = \frac{(B-A)(A-C)}{A^2BC}\left(\frac{G_0}{\omega}\right)^2 = -1.$$

Матрица монодромии уравнений (2.4)

$$X(T) = \begin{Vmatrix} \cos\omega T & 0 & \dfrac{A_1}{l_{1,0}}\sin\omega T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{A_2}{l_{1,0}}\sin\omega T & 0 & \cos\omega T & 0 \\ 0 & \dfrac{2\pi}{G_0} & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Так как $\dot{g} = \partial\mathscr{H}/\partial G \neq 0$ в окрестности периодического решения (2.1), то, применяя теорему Пуанкаре (§ 1), надо образовать матрицу $Y = X(T) - E$ и, вычеркивая последний столбец и вторую строку, убедиться в том, что определитель полученной матрицы V отличен от нуля. Можно показать, что это условие выполнено, следовательно, у системы (2.3) существуют периодические решения, аналитически зависящие от μ, период которых в точности равен $T = 2\pi A/G_0$.

Действительно, определитель матрицы V равен

$$4\pi G_0^{-1}(\cos\omega T - 1).$$

Для того, чтобы этот определитель был отличен от нуля, нужно потребовать выполнения условия $\omega T \neq 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, или, что то же самое,

$$(A - B)(A - C)/BC \neq k^2.$$

Это неравенство справедливо всегда. В противном случае

$$A = B + C + (k^2 - 1)BC/A.$$

При $k \neq 0$ последнее соотношение противоречит неравенству треугольника $A < B + C$, а при $k = 0$ легко вытекает из условия $A > B > C$. Таким образом, $|V| \neq 0$.

Установим, что периодические решения возмущенной задачи существуют на любом ненулевом уровне интеграла энергии. Для этого составим следующую матрицу пятого порядка

$$Z = \begin{Vmatrix} Y & \varphi \\ \psi & 0 \end{Vmatrix},$$

где φ — вектор-столбец правой части невозмущенной системы уравнений, а ψ — строка

$$\left(\frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial L}, \frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial G}, \frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial l}, \frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial g}\right),$$

в которую подставлено решение (2.1) при $t = T$. Можно показать, что ранг матрицы Z равен четырем, поэтому согласно результатам § 1 периодические решения возмущенной задачи существуют при любом значении полной энергии

$$h = \mathscr{H}_0\Big|_{L=0,\, G=G_0,\, l=\pm\pi/2} = \frac{G_0^2}{2A} \neq 0.$$

Действительно, вычеркивая из Z последний столбец и вторую строку, получим матрицу, определитель которой равен

$$-(G_0/A)^2(\cos\omega T - 1).$$

Как было показано выше, эта величина никогда в нуль не обращается.

Для равномерных вращений вокруг большей оси инерции теорема доказывается точно так же.

Осталось рассмотреть возмущения постоянных вращений вокруг средней оси инерции (2.2). Уравнения в вариациях для этого решения следующие:

$$\dot{L}_1 = \frac{A-B}{AB}G_0^2 l_1, \quad \dot{G}_1 = 0, \quad \dot{l}_1 = \frac{B-A}{BC}L_1, \quad \dot{g}_1 = \frac{G_1}{B}.$$

Решения этих линейных уравнений с начальными условиями $L_{1,0}$, $G_{1,0}$, $l_{1,0}$, $g_{1,0}$ суть

$$L_1 = A_1 \operatorname{sh}\Omega t + B_1 \operatorname{ch}\Omega t, \quad G_1 = G_{1,0},$$
$$l_1 = A_2 \operatorname{sh}\Omega t + B_2 \operatorname{ch}\Omega t, \quad g_1 = \frac{G_{1,0}}{B}t + g_{1,0},$$

где

$$\Omega^2 = \frac{(A-B)(B-C)}{AC}\left(\frac{G_0}{B}\right)^2, \quad A_1 = \frac{A-B}{AB}\frac{G_0^2}{\Omega}l_{1,0},$$
$$B_1 = L_{1,0}, \quad A_2 = \frac{B-C}{BC}\frac{L_{1,0}}{\Omega}, \quad B_2 = l_{1,0} \quad \left(\frac{A_1A_2}{l_{1,0}L_{1,0}} = 1\right).$$

Матрица монодромии

$$X(T) = \begin{Vmatrix} \operatorname{ch}\Omega T & 0 & \dfrac{A_1}{l_{1,0}}\operatorname{sh}\Omega T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{A_2}{L_{1,0}}\operatorname{sh}\Omega T & 0 & \operatorname{ch}\Omega T & 0 \\ 0 & \dfrac{2\pi}{G_0} & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Образуем матрицу $Y = X(T) - E$ и, вычеркивая из нее последний столбец и вторую строку, получим матрицу с определителем

$$\frac{4\pi}{G_0}\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi B\Omega}{G_0} - 1\right).$$

Определитель равен нулю только в том случае, если

$$(A - B)(B - C) = 0.$$

Но этого не может быть из-за условия $A > B > C$.

Следовательно, при малых μ существуют периодические решения возмущенной системы, аналитически зависящие от этого параметра, которые при $\mu = 0$ совпадают с равномерными вращениями вокруг средней оси эллипсоида инерции. Существование периодических решений при фиксированной постоянной интеграла энергии доказывается так же, как для рассмотренных выше случаев. ■

Случай динамической симметрии

Теорема 2. *Если $A = B \neq C$, то два периодических решения невозмущенной приведенной задачи — невертикальные постоянные вращения вокруг оси симметрии в противоположных направлениях — не исчезают при добавлении возмущения, а переходят при малых μ в периодические решения возмущенной задачи, аналитически зависящие от параметра μ. Они существуют на любом ненулевом уровне интеграла энергии.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 1. Случай $A = B = C$ не рассматривается, ибо он относится к числу интегрируемых.

Замечание 2. В рассматриваемой задаче известен ряд частных случаев интегрируемости [36]. В основном это периодические решения, выраженные в конечном виде через известные функции. Некоторые из них (например, решения Бобылева – Стеклова) при малых значениях параметра μ представляют собой частные случаи периодических решений, существование которых доказывается теоремами 1 и 2.

Нетрудно вычислить характеристические показатели постоянных вращений вокруг главных осей эллипсоида инерции. Например, мультипликаторы (собственные числа матрицы монодромии) постоянного вращения вокруг меньшей оси равны

$$\lambda_{1,2} = 1, \quad \lambda_{3,4} = \cos\omega T \pm i\sin\omega T = e^{\pm i\omega T},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(A-B)(A-C)}{BC}\frac{G_0}{A}}.$$

Следовательно, характеристические показатели этого периодического решения равны

$$\alpha_{1,2} = 0, \quad \alpha_{3,4} = \pm i\omega.$$

Аналогичные формулы справедливы для показателей постоянных вращений вокруг средней и большей осей инерции:

$$\alpha_{1,2} = 0, \quad \alpha_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}\frac{G_0}{B}},$$

$$\alpha_{1,2} = 0, \quad \alpha_{3,4} = \pm i\sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}\frac{G_0}{C}}.$$

Таким образом, в случае несимметричного тела вращения вокруг большей и меньшей осей являются решениями эллиптического типа, а вращения вокруг средней оси инерции имеют гиперболический тип. Несложно показать, что в случае $A = B \neq C$ вращения вокруг оси динамической симметрии — эллиптические, а вращения вокруг любой оси из экваториальной плоскости эллипсоида инерции вырождены. Если $A = B = C$, то любое равномерное вращение является вырожденным.

§ 3. Рождение изолированных периодических решений из семейств периодических решений задачи Эйлера–Пуансо

Сформулируем сначала одну теорему А. Пуанкаре о существовании периодических решений системы канонических уравнений следующего вида (см. гл. I, § I):

$$\dot I = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi}, \quad \dot\varphi = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial I}, \quad I = (I_1, I_2) \in D \subset \mathbf{R}^2,$$

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{T}^2, \quad \mathscr{H} = \mathscr{H}_0(I) + \mu\mathscr{H}_1(I, \varphi) + \ldots$$

Пусть для $I = I^0 \in D$ частоты ω_1 и ω_2 невозмущенной задачи соизмеримы. Тогда функция $\mathscr{H}_1(I^0, \omega_1 t, \omega_2 t+\lambda)$ периодична по времени с некоторым периодом T. Положим

$$\overline{\mathscr{H}}_1(I^0, \lambda) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \mathscr{H}_1(I^0, \omega_1 t, \omega_2 t + \lambda)dt.$$

Инвариантный тор $I = I^0$ невозмущенной задачи сплошь заполнен траекториями периодических решений. Спрашивается, если $\mu \neq 0$, но очень мало, существуют ли периодические решения возмущенной задачи, аналитически зависящие от параметра μ и при $\mu = 0$, совпадающие с некоторыми периодическими решениями невозмущенной системы?

Теорема (А. Пуанкаре). *Предположим, что выполнены следующие условия*:

1) *гессиан* $\left|\dfrac{\partial^2 \mathscr{H}_0}{\partial I^2}\right| \neq 0$ *для* $I + I^0$,

2) *при некотором* $\lambda = \overline{\lambda}$ $\dfrac{\partial \overline{\mathscr{H}}_1}{\partial \lambda} = 0$, *а* $\dfrac{\partial^2 \overline{\mathscr{H}}_1}{\partial \lambda^2} \neq 0$.

Тогда при малых $\mu \neq 0$ *существует периодическое решение возмущенной системы, период которого равен* T; *оно аналитически зависит от параметра* μ *и при* $\mu = 0$ *совпадает с периодическим решением невозмущенной системы*

$$I = I^0, \quad \varphi_1 = \omega_1 t, \quad \varphi_2 = \omega_2 t + \overline{\lambda}.$$

Два характеристических показателя этого решения всегда равны нулю, а два других $\pm\alpha$ *можно разложить в сходящийся ряд по степеням* $\sqrt{\mu}$:

$$\alpha = \alpha_1\sqrt{\mu} + \alpha_2\mu + \alpha_3\mu\sqrt{\mu} + \ldots,$$

причем

$$\omega_1^2\alpha_1^2 = \frac{\partial^2\overline{\mathscr{H}}_1}{\partial\lambda^2}\bigg|_{\lambda=\overline{\lambda}}\left(\omega_1^2\frac{\partial^2\mathscr{H}_0}{\partial I_2^2} - 2\omega_1\omega_2\frac{\partial^2\mathscr{H}_0}{\partial I_1\partial I_2} + \omega_2^2\frac{\partial^2\mathscr{H}_0}{\partial I_1^2}\right). \tag{3.1}$$

Все детали доказательства (которое мы ниже кратко воспроизводим) можно найти в книге [1, пп. 42, 79]; там же рассмотрен случай систем со многими степенями свободы.

Доказательство.

Пусть в начальный момент времени $I = I^0$, $\varphi_1 = \varphi_1^0$, $\varphi_2 = \varphi_2^0$. Так как $\omega_1(I_0) \neq 0$, то можно положить $\varphi_1^0 = 0$. Через время T значения переменных действие-угол станут равными

$$I_1 = I_1^0 + \widetilde{I}_1, \quad I_2 = I_2^0 + \widetilde{I}_2, \quad \varphi_1 = 2\pi m_1 + \widetilde{\varphi}_1,$$
$$\varphi_1 = 2\pi m_2 + \varphi_2^0 + \widetilde{\varphi}_2 \quad (m_1, m_2 \in \mathbf{Z}).$$

Величины $\widetilde{I}$, $\widetilde{\varphi}$ аналитически зависят от I^0, φ^0 и параметра μ. Условия периодичности записываются в виде: $\widetilde{I}_1 = \widetilde{I}_2 = \widetilde{\varphi}_1 = \widetilde{\varphi}_2 = 0$. Эти уравнения не все независимы; они связаны следующим соотношением:

$$\mathscr{H}(I^0, \varphi^0, \mu) = \mathscr{H}(I^0 + \widetilde{I}, \varphi^0 + \widetilde{\varphi}, \mu).$$

Поэтому отбросим условие $\widetilde{I}_1 = 0$. Из уравнений движения легко вывести, что $\widetilde{I}_2 = \mu J$, где J — аналитическая функция начальных данных и параметра μ.

Если уравнения периодичности $\widetilde{\varphi}_1 = \widetilde{\varphi}_2 = J = 0$ удовлетворяются при $I = I^0$ и $\varphi_2 = \lambda$, $\mu = 0$ и при $\mu = 0$ функциональный определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\widetilde{\varphi}_1}{\partial I_1^0} & \dfrac{\partial\widetilde{\varphi}_1}{\partial I_2^0} & \dfrac{\partial\widetilde{\varphi}_1}{\partial \varphi_2^0} \\ \dfrac{\partial\widetilde{\varphi}_2}{\partial I_1^0} & \dfrac{\partial\widetilde{\varphi}_2}{\partial I_2^0} & \dfrac{\partial\widetilde{\varphi}_2}{\partial \varphi_2^0} \\ \dfrac{\partial J}{\partial I_1^0} & \dfrac{\partial J}{\partial I_2^0} & \dfrac{\partial J}{\partial \varphi_2^0} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то по теореме о неявных функциях существуют аналитические решения $I^0(\mu)$, $\varphi_2^0(\mu)$ уравнений периодичности и, следовательно, решения возмущенных канонических уравнений с этими начальными данными периодичны с периодом T.

Подсчитаем значения функций $\widetilde{\varphi}_1$, $\widetilde{\varphi}_2$ при $\mu = 0$. Так как

$$\dot{\varphi}_i = \partial\mathscr{H}_0/\partial I_i = \omega_i = \text{const},$$

то $\widetilde{\varphi}_i = T\omega_i - 2\pi m_i$ $(i = 1, 2)$. Для вычисления функции J воспользуемся уравнением

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I_2 - I_2^0}{\mu}\right) = \left(\frac{I_2}{\mu}\right)^{\cdot} = \frac{\partial\mathscr{H}_1}{\partial\varphi_2} + \mu\frac{\partial\mathscr{H}_2}{\partial\varphi_2} + \ldots$$

Полагаем $\mu = 0$, $I = I^0$, $\varphi_1 = \omega_1 t$, $\varphi_2 = \omega_2 t + \lambda$. В результате получим, что

$$J = \int_0^T \frac{\partial \mathscr{H}_1}{\partial \varphi_2} dt = \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^T \mathscr{H}_1(I^0, \omega_1 t, \omega_2 t + \lambda) dt = T \frac{\partial}{\partial \lambda} \overline{\mathscr{H}}_1(I^0, \lambda).$$

Уравнениям $\widetilde{\varphi}_1 = \widetilde{\varphi}_2 = 0$ удовлетворяет, очевидно, значение $I = I^0$. Предположим, что $\lambda = \overline{\lambda}$ удовлетворяет уравнению $J = 0$. Якобиан

$$\frac{\partial(\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_1, J)}{\partial(I_1, I_2, \lambda)}$$

при $I = I^0$, $\lambda = \overline{\lambda}$ равен

$$T^3 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathscr{H}_0}{\partial I_1^2} & \dfrac{\partial^2 \mathscr{H}_0}{\partial I_1 \partial I_2} \\ \dfrac{\partial^2 \mathscr{H}_0}{\partial I_2 \partial I_1} & \dfrac{\partial^2 \mathscr{H}_0}{\partial I_2^2} \end{vmatrix} \frac{\partial^2 \overline{\mathscr{H}}_1}{\partial \lambda^2}.$$

В силу предположений теоремы Пуанкаре этот якобиан отличен от нуля. Итак, существование периодических решений доказано. Обозначим их через $I = I^0 + \widetilde{I}(t, I^0, \varphi^0, \mu)$, $\varphi = \varphi^0 + \omega t + \widetilde{\varphi}(t, I^0, \varphi^0, \mu)$. Функции $I(t)$ и $\varphi(t)$ периодические с периодом T. Матрица монодромии этого решения есть

$$X = \begin{Vmatrix} 1 + \dfrac{\partial \widetilde{I}_1}{\partial I_1^0} & \dfrac{\partial \widetilde{I}_1}{\partial I_2^0} & \dfrac{\partial \widetilde{I}_1}{\partial \varphi_1^0} & \dfrac{\partial \widetilde{I}_1}{\partial \varphi_2^0} \\ \dfrac{\partial \widetilde{I}_2}{\partial I_1^0} & 1 + \dfrac{\partial \widetilde{I}_2}{\partial I_2^0} & \dfrac{\partial \widetilde{I}_2}{\partial \varphi_1^0} & \dfrac{\partial \widetilde{I}_2}{\partial \varphi_2^0} \\ \dfrac{\partial \omega_1}{\partial I_1^0} T + \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_1}{\partial I_1^0} & \dfrac{\partial \omega_1}{\partial I_2^0} T + \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_1}{\partial I_2^0} & 1 + \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_1}{\partial \varphi_1^0} & \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_1}{\partial \varphi_2^0} \\ \dfrac{\partial \omega_2}{\partial I_1^0} T + \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_2}{\partial I_1^0} & \dfrac{\partial \omega_2}{\partial I_2^0} T + \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_2}{\partial I_2^0} & \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_2}{\partial \varphi_1^0} & 1 + \dfrac{\partial \widetilde{\varphi}_2}{\partial \varphi_2^0} \end{Vmatrix}.$$

Пусть $Y = X - E$. Тогда собственными числами матрицы Y будут величины $e^{\alpha T} - 1$, где α — характеристические показатели. Обозначим через $G(\alpha, \mu)$ определитель $|Y - SE|$, где $S = e^{\alpha T} - 1$. Очевидно, что G аналитична по α и μ. Положим $\alpha = \varepsilon\sqrt{\mu}$. Разделим первые две строки и последние два столбца определителя $|Y - SE|$ на $\sqrt{\mu}$. В результате получим следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{\partial \widetilde{I}_1}{\partial I_1^0} - \frac{S}{\sqrt{\mu}} & \frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{\partial \widetilde{I}_1}{\partial I_2^0} & \frac{1}{\mu}\frac{\partial \widetilde{I}_1}{\partial \varphi_1^0} & \frac{1}{\mu}\frac{\partial \widetilde{I}_1}{\partial \varphi_2^0} \\ \frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{\partial \widetilde{I}_2}{\partial I_1^0} & \frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{\partial \widetilde{I}_2}{\partial I_2^0} - \frac{S}{\sqrt{\mu}} & \frac{1}{\mu}\frac{\partial \widetilde{I}_2}{\partial \varphi_1^0} & \frac{1}{\mu}\frac{\partial \widetilde{I}_2}{\partial \varphi_2^0} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial I_1^0}T + \frac{\partial \widetilde{\varphi}_1}{\partial I_1^0} & \frac{\partial \omega_1}{\partial I_2^0}T + \frac{\partial \widetilde{\varphi}_1}{\partial I_2^0} & \frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{\partial \widetilde{\varphi}_1}{\partial \varphi_1^0} - \frac{S}{\sqrt{\mu}} & \frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{\partial \widetilde{\varphi}_1}{\partial \varphi_2^0} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial I_1^0}T + \frac{\partial \widetilde{\varphi}_2}{\partial I_1^0} & \frac{\partial \omega_2}{\partial I_2^0}T + \frac{\partial \widetilde{\varphi}_2}{\partial I_2^0} & \frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{\partial \widetilde{\varphi}_2}{\partial \varphi_1^0} & \frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{\partial \widetilde{\varphi}_2}{\partial \varphi_2^0} - \frac{S}{\sqrt{\mu}} \end{vmatrix}$$

При этом уравнение $G(\alpha, \mu) = 0$ превращается в уравнение $\mu^{-2}G(\varepsilon\sqrt{\mu}, \mu) = G_1(\varepsilon, \sqrt{\mu}) = 0$. Вычислим $\lim\limits_{\mu\to 0} G_1(\varepsilon, \sqrt{\mu})$. Для этого воспользуемся следующими соотношениями:

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{\partial \widetilde{I}_i}{\partial I_j^0} = \lim_{\mu\to 0}\frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{\partial \widetilde{\varphi}_i}{\partial \varphi_j^0} = \lim_{\mu\to 0}\frac{\partial \widetilde{\varphi}_i}{\partial I_j^0} = 0,$$

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{S}{\sqrt{\mu}} = \lim_{\mu\to 0}\frac{e^{T\varepsilon\sqrt{\mu}} - 1}{\sqrt{\mu}} = \varepsilon T, \qquad \lim_{\mu\to 0}\frac{1}{\mu}\frac{\partial \widetilde{I}_i}{\partial \varphi_j^0} = T\frac{\partial^2 R}{\partial \varphi_j^0 \partial \varphi_i^0},$$

$$R(I^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \mathscr{H}_1(I^0, \omega_1 t + \varphi_1^0, \omega_2 t + \varphi_2^0)dt.$$

Тогда

$$G_1(\varepsilon, 0) = \begin{vmatrix} -\varepsilon T & 0 & T\frac{\partial^2 R}{\partial {\varphi_1^0}^2} & T\frac{\partial^2 R}{\partial \varphi_1^0 \partial \varphi_2^0} \\ 0 & -\varepsilon T & T\frac{\partial^2 R}{\partial \varphi_2^0 \partial \varphi_1^0} & T\frac{\partial^2 R}{\partial {\varphi_2^0}^2} \\ T\frac{\partial^2 \mathscr{H}_0}{\partial {I_1^0}^2} & T\frac{\partial^2 \mathscr{H}_0}{\partial I_1^0 \partial I_2^0} & -\varepsilon T & 0 \\ T\frac{\partial^2 \mathscr{H}_0}{\partial I_2^0 \partial I_1^0} & T\frac{\partial^2 \mathscr{H}_0}{\partial {I_2^0}^2} & 0 & -\varepsilon T \end{vmatrix}.$$

Так как

$$\frac{\partial^2 R}{\partial {\varphi_1^0}^2}\omega_1 + \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi_1^0 \partial \varphi_2^0}\omega_2 = 0, \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi_1^0 \partial \varphi_2^0}\omega_1 + \frac{\partial^2 R}{\partial {\varphi_2^0}^2}\omega_2 = 0,$$

то
$$G_1(\varepsilon,\,0)=\varepsilon^2T^4\Bigl(\Gamma\frac{\partial^2 R}{\partial\varphi_2^{0^2}}+\varepsilon^2,\omega_1^2\Bigr),$$
где
$$\Gamma=\begin{vmatrix} -\omega_1 & -\omega_2 & 0\\ \dfrac{\partial^2\mathscr{H}_0}{\partial I_1^{0^2}} & \dfrac{\partial^2\mathscr{H}_0}{\partial I_1^0\partial I_2^0} & -\omega_1\\ \dfrac{\partial^2\mathscr{H}_0}{\partial I_2^0\partial I_1^0} & \dfrac{\partial^2\mathscr{H}_0}{\partial I_2^{0^2}} & -\omega_2 \end{vmatrix}=$$
$$=-\Bigl(\frac{\partial^2\mathscr{H}_0}{\partial I_1^{0^2}}\omega_2^2-2\frac{\partial^2\mathscr{H}_0}{\partial I_1^0\partial I_2^0}\omega_1\omega_2+\frac{\partial^2\mathscr{H}_0}{\partial I_2^{0^2}}\omega_1^2\Bigr).$$

Два корня уравнения $G_1(\varepsilon,\,0)=0$ равны нулю, а два других
$$\varepsilon_{1,\,2}=-\frac{\Gamma}{\omega_1^2}\frac{\partial^2 R}{\partial\varphi_2^{0^2}}$$
отличны от нуля. Поскольку функция $G_1(\varepsilon,\,\sqrt{\mu})$ аналитична по обоим аргументам и $\varepsilon=0$ — двукратный корень уравнения $G_1(\varepsilon,\,\sqrt{\mu})=0$ при всех достаточно малых значениях μ (так как у периодических решений гамильтоновых систем с двумя степенями свободы два характеристических показателя всегда равны нулю), то функция $G_2(\varepsilon,\,\sqrt{\mu})=\varepsilon^{-2}G_1(\varepsilon,\,\sqrt{\mu})$ тоже аналитична. Так как $\partial G_2/\partial\varepsilon\neq 0$ при $\mu=0$ и $\varepsilon=\varepsilon_{1,\,2}$, то по теореме о неявных функциях существуют аналитические решения $\varepsilon(\sqrt{\mu})$ уравнения $G(\varepsilon\sqrt{\mu},\,\mu)=0$, значения которых при $\mu=0$ равны $\varepsilon_{1,\,2}$. Следовательно, характеристические показатели найденных решений действительно можно разложить по степеням $\sqrt{\mu}$, причем коэффициенты при $\sqrt{\mu}$ равны $\varepsilon_{1,\,2}$. ■

Функция $\overline{\mathscr{H}}_1(I^0,\,\lambda)$ периодическая, поэтому существуют по крайней мере два значения λ, при которых $\overline{\partial\mathscr{H}_1}/\partial\lambda=0$. В общем случае эти критические точки невырождены, т.е. в этих точках $\partial^2\overline{\mathscr{H}}_1/\partial\lambda^2\neq 0$. При этом локальных минимумов функции $\overline{\mathscr{H}}_1$ (где $\overline{\partial^2\mathscr{H}_1}/\partial\lambda^2>0$) ровно столько, сколько локальных максимумов (где $\overline{\partial^2\mathscr{H}_1}/\partial\lambda^2<0$). Если при $I=I^0$

квадратичная форма

$$\omega_1^2 \frac{\partial^2 \mathscr{H}_0}{\partial I_2^2} - 2\omega_1\omega_2 \frac{\partial^2 \mathscr{H}_0}{\partial I_1 \partial I_2} + \omega_2^2 \frac{\partial^2 \mathscr{H}_0}{\partial I_1^2} \neq 0,$$

то в силу соотношения (3.1) уравнение $\partial\overline{\mathscr{H}}_1/\partial\lambda = 0$ будет иметь столько корней, для которых $\alpha_1^2 > 0$, сколько корней, для которых $\alpha_1^2 < 0$. Это равносильно тому, что при малых значениях $\mu \neq 0$ возмущенная система будет иметь ровно столько устойчивых в линейном приближении периодических решений, сколько неустойчивых. В этой ситуации обычно говорят, что на невозмущенном резонансном инвариантном торе $I = I^0$ рождаются пары изолированных периодических решений.

Применим теорему Пуанкаре к задаче о вращении твердого тела с неподвижной точкой в слабом поле сил тяжести.

Случай несимметричного твердого тела

Напомним некоторые обозначения. Переменные действие-угол невозмущенной задачи снова обозначим через $I_1 I_2 I_3 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ (см. гл. II). Переменная I_3 — интеграл площадей; его постоянную обозначим I_3^0. Отношение частот ω_1/ω_2 квазипериодических движений на инвариантных торах задачи Эйлера–Пуансо зависит только от $2\mathscr{H}_0/I_2^2$ и моментов инерции A, B, C. Эта функция в гл. II обозначена через γ.

Разложение возмущающей функции $\mathscr{H}_1(I_1 I_2 I_3^0 \varphi_1 \varphi_2)$ в двойной ряд Фурье по переменным φ_1 и φ_2 имеет вид

$$\sum_{-\infty}^{\infty} H_{m,1} e^{i(m\varphi_1+\varphi_2)} + \sum_{-\infty}^{\infty} H_{m,-1} e^{i(m\varphi_1-\varphi_2)} + \sum_{-\infty}^{\infty} H_{m,0} e^{im\varphi_2}. \tag{3.2}$$

Коэффициенты $H_{m,1}$, $H_{m,-1}$, $H_{m,0}$ — функции от I_1, I_2, I_3^0, аналитические при фиксированном значении I_3^0 в области Δ_a^0.

Обозначим снова через x, y, z координаты центра тяжести тела в главных осях инерции.

Теорема 3. *Пусть $I = I^0 \in \mathscr{B}$, $\mathscr{B} \subset \Delta^0$ — вековое множество возмущенной системы. Тогда из семейства периоди-*

ческих решений задачи Эйлера–Пуансо, лежащих на торе $I = I^0 \in \Delta_a^0$, рождаются при возмущении по крайней мере два изолированных периодических решения, существующие при достаточно малых μ и аналитически зависящие от этого параметра. При этом одно из них устойчиво по первому приближению, а другое неустойчиво.

Пусть $I_2 \neq 0$, $I_2 \neq |I_3^0|$. Рассмотрим множество инвариантных торов приведенной задачи Эйлера–Пуансо с числами вращения

$$\gamma(2\mathscr{H}_0/I_2^2;\ A,\, B,\, C) = k, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{3.3}$$

Если $x^2 + y^2 \neq 0$, $z = 0$, то k нечетно, если $x^2 + y^2 = 0$, $z \neq 0$, то k четно, если, наконец, $z \neq 0$ и $x^2 + y^2 \neq 0$, то k — любое целое число. Из результатов § 1 гл. III вытекает, что для любого несимметричного тела существует $N(A,\, B,\, C)$, такое, что при $|k| > N$ инвариантные торы (3.3) принадлежат вековому множеству и, следовательно, на этих торах рождаются пары изолированных периодических решений.

Доказательство теоремы 3.

Пусть для $I = I^0 = (I_1^0,\, I_2^0) \in \Delta_a^0$ частоты невозмущенной задачи Эйлера–Пуансо соизмеримы. Тогда функция $\mathscr{H}_1(I^0, \omega_1 t, \omega_2 t + \lambda)$ периодична по t. Обозначим через $\overline{\mathscr{H}}_1(I^0, \lambda)$ ее временное среднее. Для того, чтобы на торе $I = I^0$ рождались пары изолированных периодических решений, достаточно в силу теоремы Пуанкаре проверить выполнение следующих условий:

1) гессиан $\left|\dfrac{\partial^2 \mathscr{H}_0}{\partial I_2}\right| \neq 0$ для $I = I^0$;

2) $\dfrac{\partial^2 \overline{\mathscr{H}}_1}{\partial \lambda^2} \neq 0$, когда $ds \dfrac{\partial \overline{\mathscr{H}}_1}{\partial \lambda} = 0$;

3) квадратичная форма

$$\omega_1^2 \frac{\partial^2 \mathscr{H}_0}{\partial I_2^2} - 2\omega_1\omega_2 \frac{\partial^2 \mathscr{H}_0}{\partial I_1 \partial I_2} + \omega_2^2 \frac{\partial^2 \mathscr{H}_0}{\partial I_1^2} \neq 0,$$

когда $I = I_0$.

Условие 1) выполнено во всей области Δ_a (теорема 3 гл. III). Условие 3) означает геометрически, что линия уровня функции $\mathscr{H}_0(I_1, I_2)$ не имеет перегиба в точке $(I_1, I_2) = I_0$. Предложение 1 гл. II утверждает, что это условие выполнено всюду в Δ_a.

Осталось проверить условие 2). Если $I = I_0 \in \mathscr{B}$, то $\omega_2/\omega_1 = m$, $m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ и $H_{-m,1} = \overline{H}_{m,-1} \neq 0$ (§ 1 гл. III). Положим $\varphi_1 = \omega_1 t$, $\varphi_2 = \omega_2 t + \lambda$. Тогда из разложения (2.1) вытекает, что

$$\overline{\mathscr{H}}_1 = H_{-m,1}e^{i\lambda} + H_{m,-1}e^{-i\lambda} + H_{0,0}.$$

Предположим, что при $I = I^0$ условие 2) теоремы Пуанкаре нарушено. Тогда при некотором $\lambda = \widetilde{\lambda}$ одновременно выполнены равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial\overline{\mathscr{H}}_1}{\partial\lambda} &= iH_{-m,1}e^{i\lambda} - iH_{m,-1}e^{-i\lambda} = 0, \\ \frac{\partial^2\overline{\mathscr{H}}_1}{\partial\lambda^2} &= -H_{-m,1}e^{i\lambda} - H_{m,-1}e^{-i\lambda} = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Так как уравнения (3.4), являющиеся системой линейных уравнений относительно $e^{i\lambda}$ и $e^{-i\lambda}$, имеют нетривиальное решение $(e^{i\widetilde{\lambda}}, e^{-i\widetilde{\lambda}})$, то определитель этой системы

$$-2iH_{-m,1}H_{m,-1}$$

должен быть равен нулю. Однако при $I^0 \in \mathscr{B}$

$$H_{-m,1}H_{m,-1} = \overline{H}_{m,-1}H_{m,-1} \neq 0.$$

■

Замечание. Можно указать примеры канонических систем дифференциальных уравнений, мало отличающихся от интегрируемых, для которых вековое множество $\mathscr{B}$ не совпадает с множеством $\mathscr{P}$ резонансных торов невозмущенной задачи и которые удовлетворяют теореме А. Пуанкаре о рождении изолированных периодических решений.

Случай динамической симметрии

В случае $A = B$ можно считать, что y-координата центра тяжести равна нулю. Тогда согласно формулам (4.1) гл. II функция Гамильтона (1.1) в специальных канонических переменных имеет вид

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2A}G^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\Big)L^2 + \mu\Big[\frac{x}{r}\Big(\frac{H}{G}\sqrt{1 - \Big(\frac{L}{G}\Big)^2}\sin l +$$
$$+\frac{L}{G}\sqrt{1 - \Big(\frac{H}{G}\Big)^2}\sin l\cos g + \sqrt{1 - \Big(\frac{H}{G}\Big)^2}\cos l\sin g\Big) +$$
$$+\frac{z}{r}\Big(\frac{LH}{G^2} - \sqrt{1 - \Big(\frac{L}{G}\Big)^2}\sqrt{1 - \Big(\frac{H}{G}\Big)^2}\cos g\Big)\Big],$$

где $(x,\ 0,\ z)$ — координаты центра тяжести в главных осях инерции, $r = \sqrt{x^2 + z^2}$. Отметим, что эти переменные являются переменными действие-угол интегрируемой задачи Эйлера–Пуансо в симметричном случае.

Теорема 4. *Пусть $x \neq 0$ и $A = B > 2C$. Тогда на двумерных инвариантных торах*

$$\frac{G}{A} = \pm\Big(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\Big)L, \quad G \neq 0, \quad G \neq |H| \tag{3.5}$$

приведенной задачи Эйлера–Пуансо рождаются пары изолированных периодических решений возмущенной системы при малых μ. Они аналитически зависят от μ, и одно из решений каждой пары устойчиво в первом приближении, а другое неустойчиво.

Это утверждение доказывается так же, как теорема 3.

Замечание. Если $A = B$ и $x = 0$, то задача относится к числу интегрируемых (случай Лагранжа). В этом случае резонансные инвариантные торы (3.5) невозмущенной задачи не разрушатся при добавлении возмущения; они перейдут в резонансные торы возмущенной задачи, снова сплошь заполненные траекториями периодических решений.

Если $A = B$, то в невозмущенной задаче есть замечательное семейство периодических решений — постоянные вращения вокруг главных осей инерции, расположенных в экваториальной плоскости эллипсоида инерции. Траектории этих решений заполняют двумерный инвариантный тор

$$L = 0, \quad G = G_0 > 0. \tag{3.6}$$

Исследуем бифуркацию этого семейства периодических решений.

Теорема 5. *Пусть* $A = B \neq C$, $x \neq 0$ *и* $H \neq 0$, $G \neq |H|$. *Тогда на резонансных торах* (3.6) *приведенной задачи Эйлера – Пуансо рождаются пары изолированных периодических решений возмущенной системы при малых значениях параметра* μ. *Они аналитически зависят от* μ, *и одно из решений каждой пары устойчиво в первом приближении, а другое неустойчиво.*

Доказательство.

Положим $l = \omega_1 t + \lambda$, $g = \omega_2 t$ $(\omega_1 = 0, \omega_2 = G^0/A > 0)$. Тогда

$$\overline{\mathscr{H}}_1 = \frac{x}{r}\frac{H}{G_0}\sin\lambda.$$

В предположениях теоремы $\partial^2\overline{\mathscr{H}}_1/\partial\lambda^2 \neq 0$, когда $\partial^2\overline{\mathscr{H}}_1/\partial\lambda^2 = 0$. Так как при $A \neq C$ невозмущенная задача невырождена и линии уровня функции $\mathscr{H}_0$ не имеют перегибов, то справедливость утверждения вытекает из теоремы Пуанкаре о рождении периодических решений.

Начальное значение λ найдется из равенства

$$\frac{\partial\overline{\mathscr{H}}_1}{\partial\lambda} = \frac{x}{r}\frac{H}{G_0}\cos\lambda = 0.$$

Следовательно, при добавлении возмущения не исчезнут постоянные вращения твердого тела вокруг оси Ox (от которой наименее всего удален центр масс тела). ∎

Замечание. С помощью теоремы Колмогорова – Арнольда [9] о сохранении условно-периодических движений и геометрической теоремы Пуанкаре [32] можно доказать, что при добавлении возмущения исчезают не все периодические решения, лежащие на любом инвариантном торе задачи Эйлера – Пуансо с рациональным числом вращения, а при малых μ остаются, по крайней мере, два ([4, добавление 9]). Неизвестно, правда, будут ли они изолированными и аналитически зависеть от μ.

§ 4. Рождение изолированных периодических решений — препятствие к интегрируемости

Согласно теореме 3 вековое множество $\mathscr{B}$ совпадает с множеством $\mathscr{P}$ резонансных торов задачи Эйлера–Пуансо, которые удовлетворяют условиям теоремы Пуанкаре о рождении изолированных периодических решений. Ниже будет показано, что как раз рождение большого числа невырожденных периодических решений уравнений движения несимметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой несовместимо с интегрируемостью этой задачи.

Принципиальной основой доказательства несуществования нового аналитического интеграла является лемма Пуанкаре (§ 1, гл. I): если

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_0(I, \varphi) + \mu\mathscr{F}_1(I, \varphi) + \ldots$$

— первый интеграл канонической системы с гамильтонианом (1.1), то $\mathscr{F}_0$ не зависит от φ и функции $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$ зависимы на множестве $\mathscr{B}$. Мы сейчас докажем это утверждение с использованием изолированных периодических решений, существование которых устанавливает теорема 3.

Действительно, периодические решения $\Gamma(\mu)$, рождающиеся из состава периодических решений, расположенных на произвольном резонансном торе $\mathbf{T}_0^2 \subset \mathscr{B}$ задачи Эйлера–Пуансо, невырождены, поэтому, как доказано в § 1, функции $\mathscr{H}$ и $\mathscr{F}$ зависимы во всех точках траектории $\Gamma(\mu)$. Устремим μ к нулю. Периодическое решение $\Gamma(\mu)$ перейдет в периодическое решение $\Gamma(0)$ невозмущенной задачи, лежащее на $\mathbf{T}_0^2$, а функции $\mathscr{H}$ и $\mathscr{F}$ перейдут соответственно в $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$. По непрерывности функции $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$ будут зависимы во всех точках траектории периодического решения $\Gamma(0)$. В некоторой окрестности тора $\mathbf{T}_0^2$, на котором лежит $\Gamma(0)$, введем переменные действие-угол задачи Эйлера–Пуансо: I_1, I_2, φ_1, φ_2. Тогда $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$ будут зависеть только от I_1 и I_2 (последняя — в силу невырожденности приведенной задачи Эйлера–Пуансо). Так как функции $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$ зависимы на $\Gamma(0)$, то матрица Якоби

$$\frac{\partial(\mathscr{H}_0, \mathscr{F}_0)}{\partial(I, \varphi)}$$

имеет ранг единицу, когда $(I, \varphi) \in \Gamma(0)$. В частности, в этих точках

$$\det \frac{\partial(\mathscr{H}_0, \mathscr{F}_0)}{\partial(I_1, I_2)} = 0.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что функции $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$ не зависят от φ.

Замечание. Основная идея проделанных рассуждений содержится в первом доказательстве Пуанкаре общей теоремы о неинтегрируемости канонических уравнений, близких к интегрируемым ([13, §22]).

§ 5. Теорема о расщеплении сепаратрис возмущенной задачи Эйлера–Пуансо

В специальных канонических переменных функция Гамильтона невозмущенной интегрируемой задачи Эйлера–Пуансо записывается следующим образом (см. § 1 гл. II):

$$\mathscr{H}_0 = \frac{1}{2}(a\sin^2 l + b\cos^2 l)(G^2 - L^2) + \frac{c}{2}L^2,$$

где a, b, c — величины, обратные главным моментам инерции твердого тела. Далее всюду рассматриваем несимметричное тело и без ущерба общности считаем, что $a < b < c$. При каждом значении интеграла энергии $\mathscr{H}_0$ уравнения задачи Эйлера–Пуансо имеют два изолированных периодических решения гиперболического типа — постоянные вращения тела вокруг средней оси инерции в противоположных направлениях. Записанные в специальных канонических переменных, они таковы:

$$\begin{aligned} \Gamma_i : l = \pi(i-1), \quad g = G_0 bt, \quad L = 0, \\ G = G_0, \quad (\mathscr{H}_0 = bG_0^2/2), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Через траектории решений (5.1) проходят две двумерные инвариантные асимптотические поверхности с уравнениями

$$L = \pm \frac{G_0\sqrt{b-a}\sin l}{\sqrt{c - a\sin^2 l - b\cos^2 l}}, \quad G = G_0. \tag{5.2}$$

Эти поверхности называются сепаратрисами. Они сплошь заполнены траекториями, неограниченно приближающимися при $t \to \pm\infty$ к траекториям периодических решений Γ_1 и Γ_2.

Если неустойчивые периодические решения невозмущенной задачи не вырождены, то они не исчезнут при добавлении возмущения ([1, гл. III]), и через их траектории снова пройдут пары сепаратрис ([1, гл. VII]). Однако возмущенные сепаратрисы не обязательно совпадут. Это явление, обнаруженное впервые Пуанкаре [13, § 19], называется расщеплением сепаратрис. Оно коренным образом рознит поведение траекторий невозмущенной и полной систем. Из существования расщепленных сепаратрис вытекает, например, расходимость рядов многочисленных вариантов теории возмущений. Таким образом, расщепление сепаратрис также является динамическим эффектом, препятствующим интегрируемости уравнений динамики.

Невырожденность периодических решений (5.1) задачи Эйлера–Пуансо, установленная в § 1, позволяет рассмотреть задачу о расщеплении сепаратрис (5.2) при малых значениях параметра μ.

Будем считать постоянные вращения (5.1) невертикальными. В противном случае эти вращения вырождаются в положения равновесия приведенной системы, и задача о сепаратрисах теряет смысл.

Рассмотрим поведение асимптотических поверхностей (5.2) при малых μ в случае, когда центр тяжести тела лежит на средней оси инерции. При этом согласно формуле (5.1) гл. II возмущающая функция $\mathscr{H}_1$ представима следующим образом:

$$\mathscr{H}_1 = \frac{H}{G}\sqrt{1-\frac{L^2}{G^2}}\cos l + \sqrt{1-\frac{H^2}{G^2}}\left(\frac{L}{G}\cos l\cos g - \sin l\sin g\right).$$

Теорема 6. *Если центр тяжести тела находится на средней оси инерции, то асимптотические поверхности* (5.2) *расщепляются при малых значениях параметра* $\mu \neq 0$.

Доказательство.

Для определенности рассмотрим случай, когда в первом уравнении системы (5.2) стоит знак плюс. В другом случае доказательство аналогично.

Уравнения асимптотической поверхности, проходящей через траекторию возмущенного периодического решения Γ_1, можно представить в виде

$$L = \frac{\partial S}{\partial l}, \quad G = \frac{\partial S}{\partial g}, \quad S = S_0 + \mu S_1 + \dots\,,$$

где S — функция от l и g, удовлетворяющая уравнению

$$\mathscr{H}_0\Big(l, \frac{\partial S}{\partial l}, \frac{\partial S}{\partial g}\Big) + \mu\mathscr{H}_1\Big(l, g, \frac{\partial S}{\partial l}, \frac{\partial S}{\partial g}\Big) = \mathscr{H}_0 \ (= bG_0^2/2)$$

(см. [1, гл. VII]). Когда $\mu = 0$

$$S = S_0 = G_0 g + \int\limits_0^l \frac{\sqrt{b-a}\,G_0 \sin x}{\sqrt{c - a\sin^2 x - b\cos^2 x}}\,dx.$$

Что касается функции S_1, то она должна удовлетворять уравнению

$$(a\sin^2 l + b\cos^2 l)\Big(G_0\frac{\partial S_1}{\partial g} - L\frac{\partial S_1}{\partial l}\Big) + \\ + cL\frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{H}{G_0}\sqrt{1 - \frac{L^2}{G_0^2}}\cos l + \\ + \sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}}\Big(\frac{L}{G_0}\cos l\cos g - \sin l\sin g\Big) = 0.$$

Здесь L, согласно формуле (5.2), — функция от l. Функцию S_1 будем искать в виде

$$S_1 = X(l)\sin g + Y(l)\cos g + Z(l) + sg, \quad s = \mathrm{const}.$$

Коэффициенты X, Y и Z удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$(c - a\sin^2 l - b\cos^2 l)L\frac{dX}{dl} - G_0(a\sin^2 l + b\cos^2 l)Y =$$
$$= \sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}}\sin l,$$
$$(c - a\sin^2 l - b\cos^2 l)L\frac{dY}{dl} +$$
$$+G_0(a\sin^2 l + b\cos^2 l)X = -\sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}}\frac{L}{G_0}\cos l,$$
$$(c - a\sin^2 l - b\cos^2 l)L\frac{dZ}{dl} =$$
$$= -\frac{H}{G_0}\sqrt{1 - \frac{L^2}{G_0^2}}\cos l - G_0 s(a\sin^2 l + b\cos^2 l).$$

Для того, чтобы производная dZ/dl не имела особенности при $l = 0$, следует положить $s = -H/G_0^2 b$. Два первых уравнения этой системы удобно записать в форме

$$\begin{aligned}
&\frac{dX}{dl} - f(l)Y = \varphi_1, \quad \frac{dY}{dl} + f(l)X = \varphi_2,\\
&f(l) = \frac{a\sin^2 l + b\cos^2 l}{\sqrt{b-a}\sin l\sqrt{c - a\sin^2 l - b\cos^2 l}},\\
&\varphi_1 = \sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}}\frac{\sin l}{L(c - a\sin^2 l - b\cos^2 l)},\\
&\varphi_2 = -\sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}}\frac{\cos l}{G_0(c - a\sin^2 l - b\cos^2 l)}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Введем комплекснозначные функции $\psi = X + iY$ и $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$. Уравнения (5.3) предстанут в следующем виде:

$$\frac{d\psi}{dl} + if(l)\psi = \varphi(l).$$

Так как это уравнение линейно по ψ, его общее решение есть

$$\psi = e^{-i\vartheta(l)} \int\limits_{\alpha}^{l} e^{i\vartheta(x)} \varphi(x) dx, \quad \vartheta = \int f(x) dx. \tag{5.4}$$

Здесь α — произвольная постоянная. Интеграл $\int f(x)dx$ можно вычислить. Он равен

$$\vartheta(x) = \arcsin\sqrt{\frac{b-a}{c-a}}\cos x +$$
$$+\frac{b}{\sqrt{(b-a)(c-b)}}\ln\frac{\sqrt{c-a}\sin x}{\sqrt{c-a\sin^2 x - b\cos^2 x}+\sqrt{c-b}\cos x}.$$

Поскольку функция $\psi(l)$ должна быть аналитична при $l=0$, а $\exp -i\vartheta(l)$ имеет особенность в этой точке, в формуле (5.4) постоянную α надо положить равной нулю.

Аналогично можно записать уравнения для асимптотической поверхности, проходящей через траекторию возмущенного периодического решения Γ_2:

$$L = \frac{\partial S'}{\partial l}, \quad G = \frac{\partial S'}{\partial g}, \quad S' = S_0' + \mu S_1' + \dots,$$
$$S_0' = G_0 g + \int\limits_{\pi}^{l} \frac{\sqrt{b-a}\,G_0\sin x}{\sqrt{c-a\sin^2 x - b\cos^2 x}} dx,$$
$$S_1' = X'(l)\sin g + Y'(l)\cos g + Z'(l) + s'g,$$
$$\psi' = X' + iY' = e^{-i\vartheta(l)} \int\limits_{\pi}^{l} e^{i\vartheta(x)}\varphi(x)dx.$$

Предположим, что эти сепаратрисы совпадают. Тогда, очевидно, $\psi = \psi'$ и, следовательно, интеграл

$$I = \int\limits_{0}^{\pi} e^{i\vartheta(x)}\varphi(x)dx$$

должен равняться нулю. Учитывая равенство

$$\exp i\arcsin\sqrt{\frac{b-a}{c-a}}\cos x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c-a}}(\sqrt{c-a\sin^2 x - b\cos^2 x} + i\sqrt{b-a}\cos x),$$

запишем этот интеграл в явном виде:

$$I = \frac{1}{G_0^2}\sqrt{1-\frac{H^2}{G_0^2}}\sqrt{\frac{c-a}{b-a}} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi}\Big(\frac{\sqrt{c-a}\sin x}{\sqrt{c-a\sin^2 x - b\cos^2 x} + \sqrt{c-b}\cos x}\Big)^{i\beta} \times$$

$$\times \frac{dx}{c-a\sin^2 x - b\cos^2 x},$$

где $\beta = \dfrac{b}{\sqrt{(b-a)(c-b)}}$. Выполним замену переменной по формуле

$$x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-a}{c-b}}\frac{1-t^2}{t}, \quad 0 < t < \infty.$$

Тогда

$$I = \frac{2\sqrt{1-\dfrac{H^2}{G_0^2}}}{G_0\sqrt{(c-b)(b-a)}}\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{i\beta}}{1+t^2}dt.$$

Интеграл в этой формуле легко вычисляется с помощью вычетов. Действительно, после замены переменной по формуле $t = e^x$ этот интеграл запишется следующим образом:

$$J = \int\limits_0^{\infty}\frac{t^{i\beta}}{1+t^2}dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\beta x}}{e^x + e^{-x}}dx.$$

Рассмотрим на комплексной плоскости полосу $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \pi$. В этой полосе мероморфная функция

$$f(z) = \frac{e^{i\beta z}}{e^z + e^{-z}}$$

имеет простой полюс в точке $z = i\pi/2$ с вычетом

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}i} f(z) = 2\pi i \left.\frac{e^{i\beta z}}{\frac{d}{dz}(e^z + e^{-z})}\right|_{z=\frac{\pi}{2}i} = \pi e^{-\pi\beta/2}.$$

Рассмотрим замкнутый прямоугольный контур Г (рис. 12). Очевидно, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{\lambda}^{\lambda+i\pi} f(z)dz = \lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{-\lambda+i\pi}^{-\lambda} f(z)dz = 0.$$

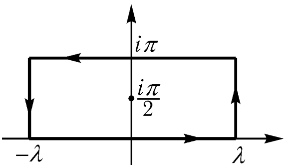

Рис. 12

Так как

$$f(z + i\pi) = -e^{-\pi\beta} f(z),$$

то

$$\int\limits_{\lambda+i\pi}^{-\lambda+i\pi} f(z)dz = e^{-\pi\beta} \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} f(z)dz.$$

Согласно теореме Коши о вычетах [5],

$$\lim_{\lambda\to\infty} \oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = J(1 + e^{-\pi\beta}) = \pi e^{-\pi\beta/2},$$

откуда

$$J = \frac{\pi}{e^{\pi\beta/2} + e^{-\pi\beta/2}}.$$

Следовательно, $I \neq 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы. ■

Замечание. «Величины» расщепления

$$\Delta_L = \frac{\partial S}{\partial l} - \frac{\partial S'}{\partial l}, \quad \Delta_G = \frac{\partial S}{\partial g} - \frac{\partial S'}{\partial g}$$

аналитически зависят от координат центра масс тела x, y, z. Поскольку доказано, что $\Delta_L \neq 0$ и $\Delta_G \neq 0$ при $x = z = 0$, $y \neq 0$, то сепаратрисы расщепляются при почти всех положениях центра масс.

§ 6. Возмущение сепаратрис в случае Гесса–Аппельрота

Расщепление сепаратрис — типичная картина в фазовом пространстве возмущенной задачи. Однако в задаче о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой сепаратрисы расщепляются не всегда. Рассмотрим случай Гесса–Аппельрота, выделяемый условием [36]:

$$y = 0, \quad x\sqrt{c-b} + z\sqrt{b-a} = 0.$$

Здесь (x, y, z) — координаты центра тяжести в главных осях эллипсоида инерции. Уравнения движения имеют частный интеграл (типа $\Phi = 0$, когда $\Phi = 0$), который в переменных L, G, l, g можно записать так:

$$L = \frac{G\sqrt{b-a}\sin l}{\sqrt{c - a\sin^2 l - b\cos^2 l}}. \tag{6.1}$$

Частный интеграл (6.1) существует при всех значениях параметра μ и аналитичен по μ, поскольку от μ он вообще не зависит.

Если $\mu = 0$, уровни интеграла энергии и частного интеграла (6.1) высекают в фазовом пространстве асимптотическую поверхность к периодическим решениям — постоянным вращениям вокруг средней оси инерции. Покажем, что эта инвариантная поверхность не распадается при малых значениях параметра μ. Будем рассматривать только невертикальные постоянные вращения, так как в противном случае периодические решения вырождаются в положения равновесия и задача о сепаратрисах теряет смысл.

При $\mu = 0$ инвариантная поверхность является двумерным тором $\mathbf{T}^2$ и фазовое векторное поле на нем имеет два замкнутых цикла γ_1 и γ_2, которые, конечно, совпадают с постоянными вращениями вокруг средней оси инерции Γ_1 и Γ_2. Циклы γ_1 и γ_2 невырождены, что следует из невырожденности периодических решений Γ_1 и Γ_2. При малых μ инвариантный тор $\mathbf{T}^2$ не исчезнет, а лишь немного изменит свое положение в фазовом пространстве. Так как векторное поле на нем тоже мало изменится, замкнутые циклы γ_1 и γ_2 не исчезнут и будут периодическими решениями возмущенной задачи. По теореме о неявных функциях возмущения замкнутых циклов γ_1 и γ_2 совпадут с возмущениями периодических решений Γ_1 и Γ_2. Следовательно, инвариантная асимптотическая поверхность, высекаемая в фазовом пространстве интегралом энергии $\mathscr{H}_0+\mu\mathscr{H}_1$ и частным интегралом (6.1), при малых значениях параметра μ является замкнутой сепаратрисой возмущенных постоянных вращений вокруг средней оси инерции. Утверждение доказано.

Исторический очерк

Как уже отмечалось, исследование движения твердого тела при малых значениях параметра μ математически эквивалентно изучению быстрых вращений (то есть случаю, когда $\mathscr{T} \gg \mathscr{U}$). Мы коснемся здесь лишь вопросов, связанных с применением метода малого параметра А. Пуанкаре.

Отысканию периодических решений уравнений движения быстро вращающегося тела с помощью метода малого параметра посвящены работы Ю. А. Архангельского и его учеников (см. обзорную статью [37]). В этих работах в уравнения Эйлера–Пуассона вводится малый параметр $\varepsilon = c/\omega_0$, где c — постоянная, зависящая от начального положения тела, а ω_0 — начальная угловая скорость вращения вокруг большей или меньшей осей инерции. Уравнения движения при этом приобретают вид системы двух квазилинейных уравнений второго порядка, аналитически зависящих от параметра ε. Если $\varepsilon = 0$ (то есть $\omega_0 = \infty$), то решения этой системы не имеют механического смысла, а при малых $\varepsilon \neq 0$ они представляют быстрое вращение твердого тела.

Для отыскания периодических решений, на наш взгляд, более естественно использовать уравнения движения в гамильтоновой форме. Для канонических систем дифференциальных уравнений метод малого параметра Пуанкаре хорошо разработан и дает более сильные результаты. Эта идея впервые реализована в работе [34] для случая вращения динамически симметричного тела в ньютоновском поле сил и независимо автором [38] в задаче о движении несимметричного тяжелого твердого тела.

Глава V

Несуществование однозначных интегралов и ветвление решений в динамике твердого тела

Исследования Ковалевской, Ляпунова и других авторов в динамике твердого тела показали, что общее решение уравнений движения представляется однозначными функциями времени только в классических случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, как раз тогда, когда существует дополнительный однозначный интеграл. Долгое время оставалось неясным, является ли это обстоятельство случайным совпадением, или же в его основе лежат какие-либо глубокие причины. В этой главе методом малого параметра Пуанкаре доказано, чго именно существование бесконечного числа неоднозначных решений препятствует появлению нового однозначного аналитического интеграла в общем случае.

§ 1. Теорема о несуществовании однозначных интегралов

Рассмотрим каноническую систему дифференциальных уравнений с гамильтонианом

$$\begin{gathered}\mathscr{H}(I,\, \varphi,\, \mu) = \mathscr{H}_0(I) + \mu \mathscr{H}_1(I,\, \varphi) + \ldots\,, \\ I = (I_1,\, I_2), \quad \varphi = (\varphi_1,\, \varphi_2).\end{gathered} \tag{1.1}$$

Функция $\mathscr{H}(i,\, \varphi,\, \mu)$ предполагается действительной аналитической функцией в прямом произведении $D \times \mathbf{T}^2\{\varphi \mod 2\pi\} \times$ $\times (-\varepsilon,\, \varepsilon)$ (D — область в $\mathbf{R}^2\{I_1,\, I_2\}$).

Предположим, что при фиксированных $I \in D$, $\mu \in (-\varepsilon,\, \varepsilon)$ гамильтониан (1.1) продолжается до однозначной аналитической функции по переменным φ_1, φ_2 в прямом произведении комплексных плоскостей $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$. При этом не исключается наличие особых точек у функции (1.1) при комплексных значениях φ_1, φ_2.

Введем некоторые обозначения. Пусть V — компактная подобласть D и $\nu > 0$. Тогда $\Delta(V, \nu) = \{I : I = I' + iI'', I' \in V, |I''| < \nu\}$. Если $V' \subset V$ и $\nu' < \nu$, то $\Delta(V', \nu') \subset \Delta(V, \nu)$. Положим $\Pi(\rho) = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} : |\operatorname{Im} \varphi_k| < \rho;\ k = 1, 2\}$.

Все решения невозмущенной системы

$$I = I^0, \quad \varphi = \varphi^0 + \omega t \quad \left(\omega(I) = \frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial I}\right)$$

являются однозначными функциями комплексного переменного $t \in \mathbf{C}$. Однако решения возмущенных уравнений, когда $\mu \neq 0$, в общем случае уже неоднозначны.

Рассмотрим на комплексной плоскости времени $t \in \mathbf{C}$ замкнутый непрерывный контур Γ и его образ γ при отображении $t \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ $(t \in \Gamma)$ согласно формуле

$$\varphi(t) = \varphi^0 + \omega(I^0)t \quad (I^0 \in D, \varphi^0 \in \mathbf{T}^2).$$

Предположим, что функция Гамильтона $\mathscr{H}(I, \varphi, \mu)$ аналитична в прямом произведении $V \times \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, где V — некоторая компактная окрестность точки $I^0 \in D$, Ω — связная область в $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, $\Pi(s) \subset \Omega \subset \Pi(S)$ $(0 < s < S)$, содержащая непрерывную кривую γ. Если $\varphi \in \Omega$, то

$$\mathscr{H}(I, \varphi + 2\pi, \mu) = \mathscr{H}(I, \varphi, \mu).$$

Действительно, это равенство справедливо для действительных значений φ. В общем случае, когда $\varphi \in \Omega$, оно вытекает из связности Ω и единственности аналитического продолжения. Заметим, что когда $\varphi \in \Omega$, $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, функция $\mathscr{H}(I, \varphi, \mu)$ аналитична по переменным I_1, I_2 в области $\Delta(V, \nu)$, если ν достаточно мало.

Нам потребуется теорема А. Пуанкаре из аналитической теории дифференциальных уравнений, касающаяся разложения решений в ряд по степеням малого параметра. Рассмотрим аналитическую систему дифференциальных уравнений

$$\dot z = f(z,\, \mu),\; z \in \mathbf{C}^n, \quad f = \begin{Vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{Vmatrix}, \quad \mu \in (-\varepsilon,\, \varepsilon),\; \varepsilon > 0. \quad (1.2)$$

Теорема Пуанкаре. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) *система* (1.2) *при* $\mu = 0$ *имеет решение* $z(t)$, *аналитическое вдоль некоторого непрерывного пути* L, *идущего от точки* t_0 *до точки* t_1.

2) *функции* $f_k(z,\, \mu)$ $(k = 1, \ldots, n)$ *аналитичны в прямом произведении* $E \times (-\varepsilon,\, \varepsilon)$, *где* E — *некоторая окрестность множества* $\{z \in \mathbf{C}^n : z = z_0(t),\ t \in L\}$ *в пространстве* $\mathbf{C}^n$.

Тогда существует аналитическое решение системы (1.2)

$$z(t,\, \mu) = z_0(t) + \mu z_1(t) + \ldots \quad (1.3)$$

с начальным условием $z(t_0,\, \mu) = z_0(t_0)$ *такое, что ряд* (1.3) *сходится при всех* $t \in L$, *если* μ *достаточно мало.*

Доказательство этого утверждения можно найти в [1, гл. II; 3].

Если $f = f_0(z) + \mu f_1(z) + \ldots$, то функция $z_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot z_1 = f_0'(z_0(t)) + f_1(z_0(t)), \quad f_0' = \partial f_0/\partial z.$$

Следовательно,

$$z_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t} [f'(z_0(t)) + f_1(z_0(t))]\, dt, \quad (1.4)$$

причем этот интеграл вычисляется вдоль пути L.

Согласно теореме Пуанкаре решения возмущенных канонических уравнений с гамильтонианом (1.1) можно разложить в степенные ряды по μ;

$$\begin{gathered} I = I^0 + \mu I^1(t;\, I^0,\, \varphi^0) + \ldots, \\ \varphi = \varphi^0 + \omega(I^0)t + \mu\varphi^1(t;\, I^0,\, \varphi^0) + \ldots \end{gathered} \quad (1.5)$$

Если $t \in \Gamma$, то эти ряды сходятся при малых значениях параметра μ.

Будем говорить, что аналитическая вектор-функция $f(t)$, $t \in \Gamma$, неоднозначна вдоль Γ, если она испытывает скачок $\xi \neq 0$ после обхода контура Γ.

Если, например, функция $I^1(t; I^0, \varphi^0)$ неоднозначна вдоль Γ, то при малых значениях параметра μ возмущенное решение (1.5) тоже неоднозначно вдоль контура Γ.

Зафиксируем начальные данные I^0, φ^0 и будем непрерывно деформировать контур Γ так, что при этом контур γ не пересечет ни одной особой точки функции Гамильтона $\mathscr{H}(I, \varphi, \mu)$. Используя теорему Коши, можно показать, что функция $I^1(t; I^0, \varphi^0)$ при обходе деформированного контура будет снова изменяться на ту же величину $\xi = (\xi_1, \xi_2) \neq 0$.

Так как решения (1.5) непрерывны по начальным данным, то неоднозначность функции $I^1(t; I^0, \varphi^0)$, вдоль контура Γ будет иметь место при всех $I = I^0$ из некоторой малой области $U \subset D$. При этом скачок $\xi = \xi(I^0) \neq 0$, если $I^0 \in U$.

Будем говорить, что система канонических уравнений с гамильтонианом (1.1) имеет однозначный интеграл $\mathscr{F}(I, \varphi, \mu)$, если эта функция

1) есть первый интеграл,

2) является действительной аналитической функцией в области $D \times \mathbf{T}^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$,

3) при фиксированных значениях I, μ однозначна по переменным φ_1, φ_2 в прямом произведении $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$.

Очевидно, что одним из однозначных интегралов является функция $\mathscr{H}$. Подчеркнем, что не исключается наличие особых точек функции $\mathscr{F}$ при комплексных значениях переменных φ_1, φ_2.

Теорема 1. *Предположим, что невозмущенная система невырождена, т. е. гессиан $\partial^2 \mathscr{H}_0 / \partial I^2 \not\equiv 0$ в области D и при некоторых $I^0 \in D$, $\varphi^0 \in \mathbf{T}^2$ функция $I^1(t; I^0, \varphi^0)$ неоднозначна вдоль контура Γ. Тогда каноническая система дифференциальных уравнений с гамильтонианом (1.1) не имеет однозначного интеграла $\mathscr{F}(I, \varphi, \mu)$, независимого от функции (1.1) и аналитического в прямом произведении $W \times \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, где W — некоторая окрестность точки $I = I^0$.*

§ 2. Доказательство теоремы 1

Разложим функцию $\mathscr{F}(I, \varphi, \mu)$ в ряд по степеням μ:

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_0(I, \varphi) + \mu\mathscr{F}_1(I, \varphi) + \dots . \tag{2.1}$$

Если $(I, \varphi) \in \Delta(V, \nu) \times \Omega$ ($V \subset W$, ν — достаточно мало), то этот ряд сходится при малых значениях параметра μ.

Лемма 1. *Функция $\mathscr{F}_0$ не зависит от φ.*

Действительно, если $(I, \varphi) \in D \times \mathbf{T}^2$, то из невырожденности невозмущенной функции вытекает, что $\mathscr{F}_0$ не зависит от φ (§ 1, гл. I). Если же $\varphi \in \Omega$, то это утверждение следует из связности области Ω.

Лемма 2. *Функции $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$ зависимы в области W, т. е. якобиан*

$$\frac{\partial(\mathscr{H}_0, \mathscr{F}_0)}{\partial(I_1, I_2)} \equiv 0,$$

когда $I \in W$.

Доказательство.

Так как $\mathscr{F}(I, \varphi, \mu)$ — первый интеграл канонической системы уравнений с гамильтонианом (1.1), то эта функция постоянна вдоль решений (1.2). Следовательно, ее значения в момент времени $\tau \in \Gamma$ и после обхода контура Γ совпадают. Отсюда

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_0(I^0 + \mu I^1(\tau) + \dots) + \mu\mathscr{F}_1(I^0 + \mu I^1(\tau) + \dots ,\\ \varphi^0 + \omega t + \mu\varphi^1(\tau) + \dots) + \dots \equiv\\ \equiv \mathscr{F}_0(I^0 + \mu(I^1(\tau) + \xi(I^0)) + \dots) +\\ + \mu\mathscr{F}_1(I^0 + \dots , \varphi^0 + \omega t + \dots) + \dots\end{aligned}$$

Разлагая это тождество в степенные ряды по μ и приравнивая нулю коэффициент при первой степени μ, получим

$$\frac{\partial\mathscr{F}_0}{\partial I_1}\xi_1 + \frac{\partial\mathscr{F}_0}{\partial I_2}\xi_2 = 0. \tag{2.2}$$

Так как $\mathscr{H}(I, \varphi, \mu)$ — тоже первый однозначный интеграл, то

$$\frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial I_1}\xi_1 + \frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial I_2}\xi_2 = 0. \tag{2.3}$$

Сравнивая (2.2) и (2.3), заключаем, что при $I^0 \in U \cap W$ якобиан

$$\frac{\partial(\mathscr{H}_0, \mathscr{F}_0)}{\partial(I_1, I_2)} \equiv 0.$$

Следовательно, эти функции зависимы в области $U \cap W$, а значит и во всей области W. ■

Предположим теперь, что функции (1.1) и (2.1) независимы. Пусть J — ненулевой минор второго порядка матрицы Якоби

$$\frac{\partial(\mathscr{H}, \mathscr{F})}{\partial(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2)}.$$

Функция $J(I, \varphi, \mu)$ аналитична, и ее можно разложить в сходящийся степенной ряд по μ. Предположим, что в этом разложении коэффициент при μ^p $(p \geqslant 0)$ отличен от нуля. Из леммы 2 вытекает, что $p \geqslant 1$.

Так как гессиан $\partial^2 \mathscr{H}_0 / \partial I^2 \not\equiv 0$, то в некоторой малой области $V \subset W \subset D$ производная $\partial \mathscr{H}_0 / \partial I_1 \neq 0$. Следовательно, в этой области уравнение $\mathscr{H}_0(I_1, I_2) = \mathscr{H}_0$ можно разрешить относительно I_1 и подставить полученное выражение в функцию $\mathscr{F}_0(I_1, I_2)$. Тогда $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_0(I_1(\mathscr{H}_0, I_2), I_2)$. Так как $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$ зависимы, то $\mathscr{F}_0 = \mathscr{R}(\mathscr{H}_0)$, где $\mathscr{R}(x)$ — аналитическая функция в интервале $(\min_V \mathscr{H}_0, \max_V \mathscr{H}_0)$. Заметим, что $\mathscr{R}(z)$ аналитична в малой комплексной окрестности этого интервала.

Если μ достаточно мало, то функция $\mathscr{R}(\mathscr{H})$ аналитична по I, φ в области $V' \times \Omega$, где V' — компактная область, лежащая внутри V. Так как разложение функции $\mathscr{F} - \mathscr{R}(\mathscr{H})$ в ряд по степеням μ не содержит свободного члена, то $\mathscr{F} - \mathscr{R}(\mathscr{H}) = \mu \mathscr{F}'$. Функция $\mathscr{F}'(I, \varphi, \mu)$ — первый однозначный интеграл, аналитический в области $\Delta(V', \nu') \times \Omega \times (-\varepsilon', \varepsilon')$, где ν', ε' достаточно малы. По леммам 1 и 2 функция $\mathscr{F}'_0$ не содержит φ и $\mathscr{H}_0(I)$ и $\mathscr{F}'_0(I)$ зависимы в области $V' \subset D$. Так как

$$\mathscr{F} = \mathscr{R}(\mathscr{H}) + \mu \mathscr{F}'_0 + \mu^2 \mathscr{F}'_1 + \dots ,$$

то разложение минора J в ряд по степеням μ начинается с членов порядка μ^2.

Повторяя эту операцию p раз, мы придем к заключению, что разложение функции J начинается с членов порядка μ^{p+1}, а не μ^p, как предполагалось выше. Полученное противоречие доказывает теорему 1. ■

§ 3. Приложение к задаче о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки

Функцию Гамильтона этой задачи можно представить в виде

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \mu\mathscr{H}_1, \tag{3.1}$$

где $\mathscr{H}_0$ — кинетическая энергия системы (гамильтониан задачи Эйлера–Пуансо), $\mu\mathscr{H}_1$ — потенциальная энергия (μ — произведение веса тела на расстояние от точки подвеса до центра тяжести) (подробности см. в гл. II). Будем считать параметр μ малым.

Используя интеграл площадей, понизим число степеней свободы до двух. Всюду ниже предполагается, что постоянная площадей зафиксирована.

Невозмущенная задача, когда $\mu = 0$, интегрируема. В переменных действие-угол I, φ функция $\mathscr{H}_0$ зависит только от $I = (I_1, I_2)$. Она определена в области Δ и аналитична всюду, за исключением точек, лежащих на границе $\partial\Delta_a$ (см. гл. II).

Согласно формуле (4.2) гл. II возмущающая функция $\mathscr{H}_1$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_1 = {}&\alpha_1(\sin\delta s_{11}\sin\varphi_2 + \sin\delta s_{21}\cos\varphi_2 + \cos\delta s_{31}) + \\ &+ \alpha_2(\sin\delta s_{12}\sin\varphi_2 + \sin\delta s_{22}\cos\varphi_2 + \cos\delta s_{32}) + \\ &+ \alpha_3(\sin\delta s_{13}\sin\varphi_2 + \sin\delta s_{23}\cos\varphi_2 + \cos\delta s_{33}).\end{aligned}$$

Через α_1, α_2, α_3 обозначены соответственно x/r, y/r, z/r.

Можно показать [22, 26, 39], что

$$
\begin{aligned}
s_{11} &= \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\frac{\vartheta_4(0)}{2i\vartheta_1(i\sigma)}\left(\frac{\vartheta_1(\varphi_1+i\sigma)}{\vartheta_4(\varphi_1)}+\frac{\vartheta_1(\varphi_1-i\sigma)}{\vartheta_4(\varphi_1)}\right),\\
s_{21} &= \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\frac{\vartheta_4(0)}{2\vartheta_1(i\sigma)}\left(\frac{\vartheta_1(\varphi_1+i\sigma)}{\vartheta_4(\varphi_1)}-\frac{\vartheta_1(\varphi_1-i\sigma)}{\vartheta_4(\varphi_1)}\right),\\
s_{12} &= -\frac{\vartheta_4(0)}{2\vartheta_2(i\sigma)}\left(\frac{\vartheta_2(\varphi_1+i\sigma)}{\vartheta_4(\varphi_1)}+\frac{\vartheta_2(\varphi_1-i\sigma)}{\vartheta_4(\varphi_1)}\right),\\
s_{22} &= \frac{\vartheta_4(0)}{2i\vartheta_2(i\sigma)}\left(\frac{\vartheta_2(\varphi_1+i\sigma)}{\vartheta_4(\varphi_1)}-\frac{\vartheta_2(\varphi_1-i\sigma)}{\vartheta_4(\varphi_1)}\right),\\
s_{13} &= -\frac{\Lambda}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\frac{\vartheta_4(0)}{2i\vartheta_4(i\sigma)}\left(\frac{\vartheta_4(\varphi_1+i\sigma)}{\vartheta_4(\varphi_1)}-\frac{\vartheta_4(\varphi_1-i\sigma)}{\vartheta_4(\varphi_1)}\right),\\
s_{23} &= -\frac{\Lambda}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\frac{\vartheta_4(0)}{2\vartheta_4(i\sigma)}\left(\frac{\vartheta_4(\varphi_1+i\sigma)}{\vartheta_4(\varphi_1)}+\frac{\vartheta_4(\varphi_1-i\sigma)}{\vartheta_4(\varphi_1)}\right),\\
s_{31} &= \frac{\Lambda}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\operatorname{cn}\frac{2K}{\pi}\varphi_1,\\
s_{32} &= -\frac{\Lambda\sqrt{1+\varkappa^2}}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\operatorname{sn}\frac{2K}{\pi}\varphi_1,\\
s_{33} &= \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\operatorname{dn}\frac{2K}{\pi}\varphi_1.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Через $\vartheta_i(z)$ $(i = 1, 2, 4)$ обозначены, как обычно, тэта-функции [7, 8], а выражения для $\varkappa$, Λ, σ выписаны в § 4 гл. II.

Из формул (3.2) видно, что при фиксированных значениях $I \in \Delta_a^0 \subset \Delta_a$ возмущающая функция $\mathscr{H}_1(I, \varphi)$ аналитична на двумерном торе $\mathbf{T}^2\{\varphi \mod 2\pi\}$ и является однозначной мероморфной функцией в $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$. Следовательно, в рассматриваемой задаче можно поставить вопрос о существовании новых однозначных аналитических интегралов.

Положим,

$$F_k^+ = \frac{\vartheta_k(\varphi + i\sigma)}{\vartheta_4(\varphi)}, \quad F_k^- = \frac{\vartheta_k(\varphi - i\sigma)}{\vartheta_4(\varphi)}, \quad k = 1,\, 2,\, 4; \quad \tau = i\frac{\mathbf{K}'}{\mathbf{K}}.$$

Используя свойства тэта-функций, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}
&F_k^{\pm}(\varphi + 2\pi) = F_k^{\pm}(\varphi), \quad k = 1,\, 2,\, 4;\\
&F_k^{\pm}(\varphi + \pi\tau) = e^{\pm 2\sigma} F_k^{\pm}(\varphi), \quad k = 1,\, 4;\\
&F_2^{\pm}(\varphi + \pi\tau) = -e^{\pm 2\sigma} F_2^{\pm}(\varphi).
\end{aligned}$$

С помощью формул (3.2) возмущающую функцию можно представить в следующем виде:

$$\mathscr{H}_1 = e^{i\varphi_2}\sum_{k=1}^{3}\alpha_k f_k^+(I,\, \varphi_1) + \\ + e^{-i\varphi_2}\sum_{k=1}^{3}\alpha_k f_k^-(I,\, \varphi_1) + \mathscr{F}(I,\, \varphi_1), \qquad (3.3)$$

причем

$$\begin{aligned}
&f_k^{\pm}(I,\, z + \pi\tau) = e^{\mp 2\sigma} f_k^{\pm}(I,\, z), \quad k = 1,\, 3;\\
&f_2^{\pm}(I,\, z + \pi\tau) = -e^{\mp 2\sigma} f_2^{\pm}(I,\, z).
\end{aligned} \qquad (3.4)$$

Отметим, что

$$\overline{f_k^+} = f_k^-, \quad f_k^+ = \overline{f_k^-} \quad (k = 1,\, 2,\, 3).$$

Невозмущенная интегрируемая задача Эйлера–Пуансо невырождена: гессиан

$$\det\frac{\partial^2\mathscr{H}_0}{\partial I^2}$$

отличен от нуля во всей области Δ_a. Существует ли контур Γ и начальные условия $(I^0,\, \varphi^0) \in \Delta_a^0 \times \mathbf{T}^2$, при которых соответствующая функция $I^1(t;\, I^0,\, \varphi^0)$ неоднозначна вдоль Γ?

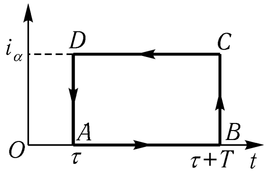

Рис. 13

Обозначим через B_n $(n \in \mathbf{Z})$ множество точек $I \in \Delta_a^0$, удовлетворяющих условиям: $\omega_2(I)/\omega_1(I) = n$ и $I \in \mathscr{B}$ ($\mathscr{B}$ — вековое множество). Пусть I^0 принадлежит некоторому B_n, а начальные фазы $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \varphi_2^0) = 0$. Рассмотрим на комплексной плоскости $t \in \mathbf{C}$ замкнутый контур Γ — границу прямоугольника $ABCD$ (см. рис. 13). Здесь $\alpha = \pi\mathbf{K}'/\mathbf{K}$, $T = 2\pi/\omega_1$. Число τ выберем так, чтобы мероморфные функции

$$f_k^{\pm}(I^0, \omega_1 z), \quad k = 1, 2, 3; \quad \mathscr{F}(I^0, \omega_1 z) \tag{3.5}$$

не имели полюсов на Γ.

Обозначим через γ замкнутую непрерывную кривую в $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, являющуюся образом Γ при отображении

$$\varphi = \omega(I^0)t, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2), \quad t \in \Gamma.$$

Пусть V — малая окрестность точки $I^0 \in B_n$, Ω — связная окрестность контура γ в $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, $\Pi(s) \subset \Omega \subset \Pi(S)$ $(0 < s < S)$, такая, что при всех $I = I^0 \in V$ мероморфные функции (3.5) не имеют полюсов в области Ω.

Теорема 2. *Для любого несимметричного твердого тела существует $N(A, B, C)$ такое, что, если точка*

$$I^0 \in \mathbf{B} = \bigcup_{|n| \geqslant N} B_n \subset \mathscr{B},$$

то канонические уравнения движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой не имеют независимого от функции (3.1) *однозначного интеграла $\mathscr{F}(I, \varphi, \mu)$, аналитического в прямом произведении $V \times \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

§ 4. Доказательство теоремы 2

Так как невозмущенная задача невырождена, то согласно теореме 1 достаточно установить неоднозначность функции $I^1(t, I^0, 0)$.

Положим

$$\Phi(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \varphi_2}\bigg|_{\substack{I=I^0\\ \varphi=\omega t}} =$$

$$= -i\left\{e^{i\omega_2 t}\sum_{k=1}^{3}\alpha_k f_k^+(I^0,\, \omega_1 t) - e^{-i\omega_2 t}\sum_{k=1}^{3}\alpha_k f_k^-(I^0,\, \omega_1 t)\right\}.$$

Так как

$$\dot{I}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_2} = -\mu\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \varphi_2},$$

то

$$\xi_2 = \oint_\Gamma \Phi(t)dt. \tag{4.1}$$

Функция $\Phi(t)$ периодична по t с действительным периодом T, следовательно,

$$\int_B^C \Phi(t)dt + \int_D^A \Phi(t)dt = 0. \tag{4.2}$$

Положим

$$\sigma_k^+ = -i\alpha_k\int_A^B e^{i\omega_2 t} f_k^+(I^0,\, \omega_1 t)dt,$$

$$\sigma_k^- = i\alpha_k\int_A^B e^{-i\omega_2 t} f_k^-(I^0,\, \omega_1 t)dt,$$

$$\Sigma_k^+ = -i\alpha_k\int_C^D e^{i\omega_2 t} f_k^+(I^0,\, \omega_1 t)dt,$$

$$\Sigma_k^- = i\alpha_k\int_C^D e^{-i\omega_2 t} f_k^-(I^0,\, \omega_1 t)dt,$$

$$\overline{\sigma_k^+} = \sigma_k^-, \quad \overline{\Sigma_k^+} = \Sigma_k^-, \quad k = 1,\, 2,\, 3.$$

Покажем, что

$$\Sigma_k^{\pm} = -e^{\mp n\alpha \mp 2\sigma}\sigma_k^{\pm}, \quad k = 1, 3; \quad \Sigma_2^{\pm} = e^{\mp n\alpha \mp 2\sigma}\sigma_k^{\pm}. \qquad (4.3)$$

Действительно, заменяя переменные по формуле $t = z + i\alpha/\omega_1$, получим

$$\Sigma_1^{+} = -i\alpha_1 e^{-n\alpha-2\sigma} \int\limits_{\tau+T}^{\tau} e^{i\omega_2 z} f_1^{+}(I^0, \omega_1 z)dz = -e^{-n\alpha-2\sigma}\sigma_1^{+}.$$

Аналогично доказываются остальные формулы (4.3).

Интеграл (4.1) с учетом формул (4.2) и (4.3) равен

$$\begin{aligned} \xi_2 = \sigma_1^{+}(1 - e^{-n\alpha-2\sigma}) + \sigma_1^{-}(1 - e^{n\alpha+2\sigma}) + \\ + \sigma_2^{+}(1 + e^{-n\alpha-2\sigma}) + \sigma_2^{-}(1 + e^{n\alpha+2\sigma}) + \\ + \sigma_3^{+}(1 - e^{-n\alpha-2\sigma}) + \sigma_3^{-}(1 - e^{n\alpha+2\sigma}). \end{aligned} \qquad (4.4)$$

Пусть

$$\mathscr{H}_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} H_{m,1}(I)e^{i(m\varphi_1+\varphi_2)} + \\ + \sum_{-\infty}^{\infty} H_{m,-1}(I)e^{i(m\varphi_1-\varphi_2)} + \sum_{-\infty}^{\infty} H_{m,0}(I)e^{im\varphi_1}. \qquad (4.5)$$

Коэффициенты этого разложения можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} H_{m,1} &= \alpha_1 H_{m,1}^{(1)} + \alpha_2 H_{m,1}^{(2)} + \alpha_3 H_{m,1}^{(3)}, \\ H_{m,-1} &= \alpha_1 H_{m,-1}^{(1)} + \alpha_2 H_{m,-1}^{(2)} + \alpha_3 H_{m,-1}^{(3)}, \\ H_{m,0} &= \alpha_1 H_{m,0}^{(1)} + \alpha_1 H_{m,0}^{(2)} + \alpha_3 H_{m,0}^{(3)}. \end{aligned}$$

Справедливо равенство

$$\Phi(t) = -\frac{\partial \mathscr{H}_1}{\partial \varphi_2}\bigg|_{\substack{I=I^0 \\ \varphi=\omega t}} = -i\sum_{-\infty}^{\infty} H_{m,1}(I^0)e^{i(m\omega_1+\omega_2)}t + \\ + i\sum_{-\infty}^{\infty} H_{m,-1}(I^0)e^{i(m\omega_1-\omega_2)}t.$$

Используя это соотношение, а также формулы (3.3) и (4.5), получим, что

$$\sigma_k^{\pm} = \mp i\alpha_k T H^{(k)}_{\pm n,\,\mp 1}, \quad k = 1,\, 2,\, 3.$$

Покажем, что $\xi_2(I^0) \neq 0$. Рассмотрим сначала случай, когда n — четное целое число. Тогда (см. § 1 гл. III)

$$H^{(1)}_{-n,\,1} = H^{(1)}_{n,\,-1} = H^{(2)}_{-n,\,1} = H^{(2)}_{n,\,-1} = 0.$$

Так как $I^0 \in \mathscr{B}$, то $H^{(3)}_{-n,\,1}(I^0) = \overline{H}^{(3)}_{n,\,-1}(I^0) \neq 0$. Значит, в этом случае $\sigma_3^+ = \sigma_3^- \neq 0$. Если $\xi_2 = 0$, то из (4.4) вытекает равенство

$$\left|\frac{1 - e^{-n\alpha - 2\sigma}}{1 - e^{n\alpha + 2\sigma}}\right| = \left|\frac{\sigma_3^-}{\sigma_3^+}\right| = 1.$$

Следовательно,

$$n\alpha(I^0) + 2\sigma(I^0) = 0. \tag{4.6}$$

Пусть теперь n — нечетно. Тогда согласно результатам § 1 гл. III $H^{(3)}_{-n,\,1} = H^{(3)}_{n,\,-1} = 0$, коэффициенты $H^{(1)}_{\mp n,\,\pm 1}$ действительные числа, а коэффициенты $H^{(2)}_{\mp n,\,\pm 1}$ чисто мнимы. Предположим, что $\xi_2 = 0$. Если $\alpha_1 \neq 0$, то из (4.4) следует равенство

$$\left|\frac{1 - e^{-n\alpha - 2\sigma}}{1 - e^{n\alpha + 2\sigma}}\right| = \left|\frac{\sigma_1^-}{\sigma_1^+}\right| = 1,$$

если же $\alpha_2 \neq 0$, то

$$\left|\frac{1 + e^{-n\alpha - 2\sigma}}{1 + e^{n\alpha + 2\sigma}}\right| = \left|\frac{\sigma_2^-}{\sigma_2^+}\right| = 1.$$

В обоих случаях должно выполняться соотношение (4.6). Запишем его в явном виде:

$$n\mathbf{K}'(\Lambda) + F\left(\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{\Lambda},\, \sqrt{1 - \Lambda^2}\right) = 0. \tag{4.7}$$

Устремим $|n|$ к бесконечности. Тогда $\omega_2/\omega_1 \to \infty$ и $2\mathscr{H}_0/I_2^2 \to \to 1/B$ (теорема 1 гл. II). Значит, $\Lambda \to C/A < 1$ и функции $\mathbf{K}'$ и F стремятся к определенным пределам. Так как

$$\lim_{\Lambda\to C/A} \mathbf{K}'(\Lambda) = \mathbf{K}'(C/A) \neq 0$$

и функция Λ постоянна на прямых, образующих множество $\mathbf{B} \subset \mathscr{B}$, то соотношение (4.7) не имеет места при $|n| > > N(A, B, C)$. Теорема 2 доказана.

§ 5. Приложение к вынужденным колебаниям математического маятника

Напомним, что функция Гамильтона этой задачи имеет вид

$$\begin{gathered} \mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \mu\mathscr{H}_1, \\ \mathscr{H}_0 = \frac{p^2}{2} + \omega_0^2 \cos q, \quad \mathscr{H}_1 = \omega_0^2 \cos q \cos t \end{gathered} \tag{5.1}$$

(подробности см. в § 4 гл. 1; мы положили здесь для простоты $\nu = 1$). В переменных действие-угол I, φ невозмущенной задачи

$$\mathscr{H}_0 = \mathscr{H}_0(I), \quad \cos q = f(I, \varphi),$$

где $\mathscr{H}_0$ определяется из неявного соотношения

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2(\mathscr{H}_0 + \omega_0^2 \cos x)}dx,$$

а

$$f(I, \varphi) = \mathrm{cn}^2 \frac{\mathbf{K}}{\pi}\varphi - \mathrm{sn}^2 \frac{\mathbf{K}}{\pi}\varphi.$$

На интервале (I', I''), не содержащем точку

$$I_c = \frac{\omega_0}{2\pi} \oint \sqrt{2(1 - \cos x)}dx,$$

функция $\mathscr{H}_0$ аналитична. При всех $I \in (I', I'')$ функция f аналитична на $\mathbf{T}^1\{\varphi \mod 2\pi\}$ и является однозначной мероморфной функцией в комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Таким образом, в этой задаче естественно поставить вопрос о существовании однозначных аналитических интегралов.

Будем говорить, что система канонических уравнений с гамильтонианом (5.1) имеет однозначный интеграл $\mathscr{F}(I,\, \varphi,\, t,\, \mu)$, если эта функция

1) есть первый интеграл,

2) является действительной аналитической функцией в области

$$(I',\, I'') \times \mathbf{T}^2\{\varphi,\, t \mod 2\pi\} \times (-\varepsilon,\, \varepsilon),$$

3) при фиксированных значениях I, μ однозначна по переменным φ, t в прямом произведении $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$.

Пусть $I = I^0 \in \widetilde{\mathscr{B}}$ ($\mathscr{B}$ — вековое множество), $\varphi^0 = 0$. Рассмотрим на комплексной плоскости времени $t \in C$ замкнутый контур Γ — границу прямоугольника $ABCD$ (рис. 14). Здесь T — период функции $f(I^0,\, \omega(I^0)t)\cos t$, а $i\alpha(I^0)$ — чисто мнимый период мероморфной функции $f(I^0,\, \omega z)$. Число τ выберем так, чтобы $f(I^0,\, \omega z)$ не имела полюсов на Γ.

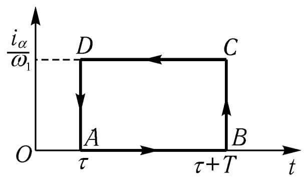

Рис. 14

Обозначим через γ замкнутую непрерывную кривую в $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, являющуюся образом следующего отображения

$$\varphi = \omega(I^0)z, \quad t = z, \quad z \in \Gamma.$$

Пусть I_1, I_2 — малый интервал $\mathbf{R}$, содержащий точку I^0, а Ω — связная окрестность контура γ в $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, $\Pi(s) \subset \Omega \subset \subset \Pi(S)$, $0 < s < S$, такая, что при всех $I \in (I_1,\, I_2)$ мероморфная функция $f(I,\, \varphi)$ не имеет полюсов в области Ω. Здесь мы положили

$$\Pi(\rho) = \{(\varphi,\, t) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} : |\operatorname{Im}\varphi| < \rho,\ |\operatorname{Im} t| < \rho\}.$$

Теорема 3. *Канонические уравнения с функцией Гамильтона* (5.1) *не имеют однозначного интеграла* $\mathscr{F}(I, \varphi, t, \mu)$, *аналитического в прямом произведении* $(I_1,\, I_2) \times \Omega \times (-\varepsilon,\, \varepsilon)$.

Доказательство.

Прежде всего заметим, что функция $\mathscr{F}(I, \varphi, t, \mu)$ аналитична в области $\Delta \times \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, где

$$\Delta = \{I \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} I \in (I_1', I_2'),\ |\operatorname{Im} I| < \nu\},$$

интервал (I_1', I_2') содержит I^0 и лежит внутри (I_1, I_2), а ν — малое положительное число.

Разложим функцию $\mathscr{F}$ в ряд по степеням μ:

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_0(I, \varphi, t) + \mu \mathscr{F}_1(I, \varphi, t) + \ldots \tag{5.2}$$

Если $(I, \varphi, t) \in \Delta \times \Omega$, то этот ряд сходится при малых значениях параметра μ. Покажем, что $\mathscr{F}_0$ не зависит от переменных φ и t. Действительно, если $(I, \varphi, t) \in (I_1, I_2) \times \mathbf{T}^2$, то из невырожденности невозмущенной системы вытекает, что $\mathscr{F}_0$ не содержит φ, t (§ 3, 4 гл. I). Если же $(\varphi, t) \in \Omega$, то это утверждение следует из связности области Ω.

Докажем теперь, что $\partial \mathscr{F}_0 / \partial I \equiv 0$ в интервале (I_1, I_2).

Согласно теореме Пуанкаре [1, 3] решения возмущенной задачи можно разложить в сходящиеся ряды по степеням параметра μ вдоль контура Γ:

$$I = I^0 + \mu I^1(t) + \ldots, \quad \varphi = \omega(I^0)t + \mu \varphi^1(t) + \ldots \tag{5.3}$$

Покажем, что после обхода контура Γ функция $I^1(t)$ получит приращение $\xi \neq 0$. Воспользуемся уравнением

$$\dot{\mathscr{H}} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \mathscr{H}_1}{\partial t}.$$

Положим

$$\left.\frac{\partial \mathscr{H}_1}{\partial t}\right|_{\substack{I=I^0 \\ \varphi=\omega t}} = \Phi(t) = -f(I^0, \omega t) \sin t =$$

$$= \frac{i}{2}[e^{it} f(I^0, \omega t) - e^{-it} f(I^0, \omega t)].$$

Рассмотрим значение функции $\mathscr{H}$ на решениях (5.3). Приращение h этой функции после обхода контура Γ можно разложить в сходящийся степенной ряд:

$$h = h_0 + \mu h_1 + \ldots .$$

Очевидно, что $h_0 = 0$ и

$$\eta = h_1 = \oint\limits_{\Gamma} \Phi(I^0, t)dt. \tag{5.4}$$

Функция $\Phi(I^0, t)$ периодична по t с действительным периодом T, следовательно,

$$\int\limits_B^C \Phi(I^0, t)dt + \int\limits_D^A \Phi(I^0, t)dt = 0.$$

Положим

$$\sigma_1 = \frac{i}{2}\int\limits_A^B e^{it} f(I^0, \omega t)dt, \quad \sigma_2 = -\frac{i}{2}\int\limits_A^B e^{-it} f(I^0, \omega t)dt,$$

$$\Sigma_1 = \frac{i}{2}\int\limits_C^D e^{it} f(I^0, \omega t)dt, \quad \Sigma_2 = -\frac{i}{2}\int\limits_C^D e^{-it} f(I^0, \omega t)dt.$$

Покажем, что

$$\Sigma_1 = -e^{-\alpha}\sigma_1, \quad \Sigma_2 = -e^{-\alpha}\sigma_2. \tag{5.5}$$

Действительно, заменяя переменные по формуле $t = z + ia$, получим

$$\Sigma_1 = \frac{i}{2}\int\limits_{\tau+T}^{\tau} e^{i(z+i\alpha)} f(I^0, \omega(z+i\alpha))dz =$$

$$= -\frac{i}{2}e^{-\alpha}\int\limits_{\tau}^{\tau+T} e^{iz} f(I^0, \omega z)dz = -e^{-\alpha}\sigma_1.$$

Аналогично доказывается вторая формула.

Интеграл (5.4) с учетом формул (5.5) запишется в виде

$$\eta = (1 - e^{-\alpha})\sigma_1 + (1 - e^{\alpha})\sigma_2. \tag{5.6}$$

Разложим возмущающую функцию $\mathscr{H}_1$ в двойной ряд Фурье (см. § 4 гл. I)

$$\mathscr{H}_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} H_{m,\,1}(I)e^{i(m\varphi+t)} + \sum_{-\infty}^{\infty} H_{m,\,-1}(I)e^{i(m\varphi-t)}.$$

С другой стороны,

$$\mathscr{H}_1 = \frac{1}{2}[e^{it}f(I,\,\varphi) + e^{-it}f(I,\,\varphi)].$$

Так как $I^0 \in \widetilde{\mathscr{B}}$, то $\omega(I^0) = 1/n$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, (§ 4, гл. I) и, следовательно,

$$\sigma_1 = -iTH_{-n,\,1}, \quad \sigma_2 = iTH_{n,\,-1}.$$

Согласно определению векового множества $\widetilde{\mathscr{B}}$ коэффициенты $H_{-n,\,1} = \overline{H}_{n,\,-1}$ отличны от нуля, поэтому комплексно-сопряженные интегралы σ_1 и σ_2 тоже не равны нулю. Предположим, что $\eta = 0$. Тогда равенство (5.6) дает

$$\left|\frac{1-e^{-\alpha}}{1-e^{\alpha}}\right| = \left|\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right| = 1,$$

и, следовательно, $\alpha = 0$. Но это не так.

Воспользуемся определением приращения функции $\mathscr{H}$,

$$\begin{gathered}\mathscr{H}_0(I^0 + \mu(I^1(\tau) + \xi) + \ldots) + \mu\mathscr{H}_1(I^0 + \ldots\,, \\ \omega(I^0)t + \ldots\,, t) - \mathscr{H}_0(I^0 + \mu I^1(\tau) + \ldots) - \\ -\mu\mathscr{H}_1(I^0 + \ldots\,, \omega(I^0)t + \ldots\,, t) = \mu\eta + \ldots\,.\end{gathered}$$

Разлагая левую часть этого тождества в степенной ряд по μ и приравнивая члены при первой степени μ, получим, что

$$\eta = \frac{\partial\mathscr{H}_0}{\partial I}\xi.$$

Так как $\eta \neq 0$, то $\xi \neq 0$. Итак, действительно, функция $I^1(t)$ неоднозначна вдоль Г.

Используя непрерывную зависимость решений от начальных данных, легко получить, что $I^1(t)$ неоднозначна вдоль контура Г при всех $I = I^0$, принимающих значения из малого интервала (I_1'', I_2''), содержащего исходное начальное значение I^0. При этом $\xi = \xi(I^0) \neq 0$, когда $I^0 \in (I_1'', I_2'')$.

Функция $\mathscr{F}(I, \varphi, t, \mu)$ — первый интеграл канонической системы уравнений с гамильтонианом (5.1). Значит, эта функция постоянна вдоль решений (5.3) и, следовательно, ее значения в момент времени $\tau \in \Gamma$ и после обхода контура Г совпадают. Отсюда

$$\mathscr{F}_0(I^0 + \mu I^1(\tau) + \ldots) + \mu\mathscr{F}_1(I^0 + \ldots,\\ \omega(I^0)t + \ldots, t) + \ldots \equiv \mathscr{F}_0(I^0 + \mu(I^1(\tau) + \xi) + \ldots) +\\ + \mu\mathscr{F}_1(I^0 + \ldots, \omega(I^0)t + \ldots, t) + \ldots.$$

Снова разложим это тождество в ряд по степеням μ и приравняем нулю коэффициент при μ. Тогда

$$\xi \partial\mathscr{F}_0/\partial I = 0.$$

Так как $\xi(I^0) \neq 0$, то $\partial\mathscr{F}_0/\partial I = 0$, когда $I \in (I_1'', I_2'')$. Следовательно, $\partial\mathscr{F}_0/\partial I \equiv 0$ на интервале $(I_1, I_2) \supset (I_1'', I_2'')$ и $\mathscr{F}_0 = \mathrm{const}$.

Функция

$$\mathscr{F}_1 + \mu\mathscr{F}_2 + \ldots$$

тоже является однозначным интегралом, аналитическим в области $\Delta \times \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Аналогично убеждаемся в том, что $\mathscr{F}_1 = \mathrm{const}$. Этот процесс можно продолжить сколь угодно далеко и прийти к заключению, что все $\mathscr{F}_k = \mathrm{const}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда $\mathscr{F}$ будет просто постоянной. ■

Замечание. В § 4 гл. 1 доказано, что канонические уравнения с гамильтонианом (5.1) не имеют даже действительнозначных аналитических интегралов. Однако это утверждение и только что доказанная теорема 3 независимы (т. е. их нельзя формально вывести одно из другого).

Исторический очерк

Наиболее простой случаи движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки был изучен Л. Эйлером ($x = y = z = 0$), *затем, с геометрической точки зрения,* *Л. Пуансо. Другой случай* ($A = B$, $x = y = 0$) *был исследован Ж. Лагранжем и С. Пуассоном. Позднее К. Г. Якоби доказал, что в этих случаях общие решения уравнений движения являются однозначными мероморфными функциями времени, рассматриваемого как комплексное переменное* [22, 40].

Опираясь на этот результат, С. В. Ковалевская поставила следующую задачу: найти все случаи, когда общее решение задачи о тяжелом твердом теле с неподвижной точкой представляет собой функции, мероморфные во всей плоскости комплексного времени. В результате исследований С. В. Ковалевской выяснилось, что эти случаи весьма немногочисленны: к классическим случаям Эйлера – Пуансо и Лагранжа – Пуассона надо добавить еще один случай, когда $A = B = 2C$, $z = 0$ (*случай Ковалевской*).

В случае, разобранном С. В. Ковалевской, так же как и в ранее известных, система уравнений движения имеет дополнительный первый интеграл, что и обеспечило возможность их интегрирования в квадратурах. При этом оказалось, что в некоторых естественных переменных (*переменные Эйлера – Пуассона*) *во всех случаях интегрируемости дополнительные интегралы являются многочленами, так же как и классические первые интегралы. Таким образом, общее решение представляется мероморфными функциями времени как раз в тех случаях, когда существует новый алгебраический интеграл. Этот результат, естественно, поставил общую задачу о связи между существованием алгебраических интегралов аналитических систем дифференциальных уравнений и мероморфностью общего решения. На важность этой задачи впервые обратил внимание Пенлеве* [41].

Выяснилось, однако, что однозначной связи здесь нет. Приведем соответствующие контрпримеры для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

Пусть

$$\mathscr{H} = p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + f(q_2), \tag{1}$$

где $f(z)$ — *многочлен не ниже пятой степени. Система канонических уравнений с гамильтонианом* (1) *имеет два неза-*

висимых алгебраических интеграла

$$\mathscr{F}_1 = \mathscr{H}, \quad \mathscr{F}_2 = p_2^2 + f(q_2),$$

с помощью которых уравнения можно разрешить в квадратурах. Однако у этой системы есть неоднозначное решение:

$$p_1 = q_1 = 0, \quad p_2 = \sqrt{h - f(q_2)}, \quad \dot{q}_2 = \sqrt{h - f(q_2)}; \;\; h = \mathrm{const}.$$

Действительно, $q_2(t)$ находится из обращения гиперэллиптического интеграла

$$t - t_0 = \int\limits_{q_2^0}^{q_2} \frac{dz}{\sqrt{h - f(z)}}$$

и, следовательно, является неоднозначной функцией $t \in \mathbf{C}$ [3].

Обратно, пусть

$$\mathscr{H} = p_1 + \frac{p_2^2}{2} - q_1 q_2 - 2q_2^3. \tag{2}$$

Покажем, что все решения, канонической системы с гамильтонианом (2) *мероморфны. Действительно, $\dot{q}_1 = 1$; следовательно, $q_1 = t + c$, $c = \mathrm{const}$. Далее,*

$$\dot{q}_2 = p_2, \quad \dot{p}_2 = 6q_2^2 + q_1. \tag{3}$$

Откуда

$$\ddot{q}_2 = 6q_2^2 + t + c. \tag{4}$$

Хорошо известно, что все решения дифференциального уравнения

$$\ddot{x} = 6x^2 + t \tag{5}$$

являются мероморфными функциями с полюсами второго порядка [3, гл. II]. *Следовательно, этим же свойством обладают решения уравнения* (4). *Так как $p_2 = \dot{q}_2$ и вычеты функции $q_2(t)$ в полюсах равны нулю* [3, гл. II], *то функция*

$$p_2(t) = \int\limits_0^t q_2(t)dt + c_1, \quad c_1 = \mathrm{const}$$

однозначна и мероморфна во всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$. *Утверждение доказано.*

Предположим теперь, что система с гамильтонианом (2) *имеет независимый от функции* $\mathscr{H}$ *алгебраический интеграл* $\mathscr{F}(p_1 p_2 q_1 q_2)$. *Тогда при фиксированном значении* h *функция*

$$\mathscr{F}_1(p_1(h, p_2, q_1, q_2), p_2, q_1, q_2), p_1 = h - \frac{p_2^2}{2} + q_1 q_2 + 2q_2^3$$

есть алгебраический интеграл системы уравнений (3). *Следовательно, уравнение* (4) *имеет интеграл, являющийся алгебраической функцией по* $\dot{q}_2$, q_2, t, *и, что то же самое, уравнение* (5) *имеет интеграл, алгебраический по* $\dot{x}$, x, t. *Однако, как доказал Пенлеве* [41], *такого быть не может.*

Вернемся к динамике твердого тела. Теорема С. В. Ковалевской о мероморфных общих решениях была существенно усилена А. М. Ляпуновым [42] *и Г. Г. Аппельротом* [43], *доказавшим, что общее решение уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки представляется однозначными (в частности, мероморфными) функциями времени* $t \in \mathbf{C}$ *только в классических случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. В этих случаях дополнительные интегралы, как и классические интегралы, являются многочленами, т. е. рассматриваемые как функции многих комплексных переменных, они однозначны в прямом произведении комплексных плоскостей. Эти результаты указывают на целесообразность расширения задачи Пенлеве: какова связь между существованием новых однозначных интегралов и однозначностью общего решения?*

Формально задача Пенлеве об алгебраических интегралах и мероморфных решениях не включается в эту задачу, так как алгебраические функции в общем случае неоднозначны. Однако следует отметить, что при доказательстве отсутствия алгебраических интегралов уравнений задачи о тяжелом твердом теле основная трудность состоит в доказательстве несуществования дополнительного интеграла, являющегося отношением двух многочленов (или просто многочленом), который, конечно, однозначен [44]. *Кроме того, свойство системы аналитических дифференциальных уравнений иметь ал-*

гебраические интегралы в сильной степени зависит от выбора координат.

Наличие неоднозначных решений накладывает сильные ограничения на однозначный первый интеграл. Действительно, пусть решение $z(t)$, $z \in \mathbf{C}^n$ *неоднозначно вдоль некоторого контура* $\Gamma \subset \mathbf{C}$; *т. е. функция* $z(t)$ *после обхода контура* Γ *получает приращение* $\xi \neq 0$. *Если* $f(z)$ — *однозначный интеграл, то, очевидно,*

$$f(z(\tau) + \xi) = f(z(\tau)), \quad \tau \in \Gamma.$$

Пример канонической системы с гамильтонианом (1) *показывает, что из неоднозначности общего решения еще не вытекает несуществование однозначных первых интегралов. Однако, как утверждает теорема* 1, *если на ветвление решений наложить дополнительные условия, которые выполняются в общем случае, то из неоднозначности общего решения вытекает отсутствие дополнительных однозначных интегралов гамильтоновых уравнений.*

Отметим в заключение, что вековое множество задачи о вращении тяжелого несимметричного твердого тела вокруг неподвижной точки играет важную роль при доказательстве отсутствия действительного аналитического интеграла (гл. III), *при исследовании рождения изолированных периодических решений* (§ 2 гл. IV) *и, наконец, при решении задачи Пенлеве о ветвлении решений и несуществовании однозначных интегралов* (§ 3–4 гл. V). *Это позволяет с разных сторон рассмотреть классическую задачу об интегрируемости уравнений динамики твердого тела.*

Глава VI
Принцип наименьшего действия и периодические решения в динамике твердого тела

Натуральная механическая система — тройка $(M, ds, \mathscr{V})$, где M — гладкое n-мерное многообразие (конфигурационное пространство), ds — риманова метрика на M (которая задает кинетическую энергию системы $\mathscr{T} = (ds/dt)^2/2$), $\mathscr{V}$ — гладкая функция на M (потенциал поля сил). Движения натуральной системы — это отображения $m : \Delta \to M$ (Δ — интервал в $\mathbf{R}$), удовлетворяющие в локальных координатах на M уравнениям Лагранжа с лагранжианом $\mathscr{L} = \mathscr{T} + \mathscr{V}$. Так как форма $\mathscr{T}$ положительно определена, то движение $m(t)$ с начальными условиями $m(0) = a \in M$, $\dfrac{d}{dt}m(0) = v$ (v — касательный вектор к M в точке a) существует и единственно (подробности см. в [4, гл. IV]). Уравнения движения имеют первый интеграл — интеграл энергии: $\mathscr{T} - \mathscr{V} = h$. При каждом фиксированном значении h движение происходит в области $D = \{h + \mathscr{V} \geqslant 0\}$, которая называется областью возможных движений.

§ 1. Аналог теоремы Хопфа–Ринова

Согласно принципу наименьшего действия в форме Якоби движения натуральной механической системы внутри области D являются геодезическими линиями метрики $d\rho^2 = (h + \mathscr{V})ds^2$.

Когда $h > \max_M(-\mathscr{V})$, то D совпадает с M и $(D, d\rho)$ — риманово многообразие. В противном случае граница ∂D области D не пуста, и метрика Якоби $d\rho$ имеет на ∂D особенность (длина кривых, лежащих на границе, равна нулю).

Пусть $q = (q_1, \ldots, q_n)$ — некоторые локальные координаты на M.

Лемма 1. *Если $q_1(t)$ и $q_2(t)$ — два решения уравнений движения с начальными данными $q_1(0) = q_2(0) = q_0$, $\dot q_1(0) = -\dot q_2(0) = v_0$, то $q_1(\pm t) = q_2(\mp t)$.*

Следствие 1. *Если $q(t)$ — решение уравнений движения с начальными данными $q(0) = q_0$, $\dot q(0) = 0$, то $q(t) = q(-t)$.*

Доказательство леммы 1.

Если $q(t)$ — решение уравнений Лагранжа с лагранжианом $\mathscr{L} = \mathscr{T} + \mathscr{V}$ и с начальными условиями (при $t = 0$) $q(0) = q_0$, $\dot q(0) = v_0$, то $q(-t)$ есть решение тех же уравнений с начальными условиями $q(0) = q_0$, $\dot q(0) = -v_0$. Для завершения доказательства остается использовать теорему единственности решений уравнений Лагранжа с положительно определенной квадратичной формой $\mathscr{T}$. ∎

Таким образом, если в некоторый момент времени точка $m(t)$, $m \in D$, достигла границы ∂D, то скорость точки обращается в нуль и в последующие моменты m движется в обратную сторону по той же траектории с той же по величине скоростью. Поэтому в случае, когда ∂D не пуста, естественно отождествить геодезические метрики Якоби (определенные внутри области D) с траекториями движения натуральных механических систем.

Всюду ниже область D считается компактной и связной, а также предполагается, что на границе нет критических точек потенциала $\mathscr{V}$. Другими словами, исключаются из рассмотрения те значения h, при которых уравнения движения имеют положения равновесия. Множество исключительных значений полной энергии имеет нулевую меру.

Геометрия геодезических в области D, имеющей края, не похожа на привычную геометрию римановых пространств. Например, если риманово пространство компактно, то любые две его точки можно соединить хотя бы одной геодезической [45, гл. II].

Для компактных областей возможных движений с краем это уже не так. Вот простой пример:

$$M = \mathbf{R}^2\{x, y\}, \quad 2\mathscr{T} = \dot x^2 + \dot y^2, \quad 2\mathscr{V} = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2,$$
$$\alpha/\beta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}.$$

Пусть точки $a,\, b \in D$. Обозначим через Ω_{ab} множество всех кусочно-гладких путей $\gamma : [0,\, 1] \to D$ с началом a и концом b. Определим функции $d : D \times D \to \mathbf{R}$ по формуле

$$d(a,\, b) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \in \Omega_{ab}\},$$

где $L(\gamma)$ — длина пути γ в метрике $d\rho$. Неотрицательная функция d задает отклонение на множестве D [46, гл. IX], так как

1) $d(a,\, a) = 0$ для всех $a \in D$,

2) $d(a,\, b) = d(b,\, a)$ для всех $a,\, b \in D$,

3) $d(a,\, b) + d(b,\, c) \geqslant d(a,\, c)$ для всех $a,\, b,\, c \in D$.

Отметим, что отклонение d не является расстоянием на D, так как $d(a,\, b) = 0$ для любых точек $a,\, b$ из одной связной компоненты границы ∂D. Однако если $a \notin \partial D$, то из равенства $d(a,\, b) = 0$ следует $a = b$. Значит, d есть расстояние внутри области D.

Положим

$$\partial(m) = \inf_{a \in \partial D} d(m,\, a).$$

Это число назовем расстоянием между точкой $m \in D$ и границей ∂D. Если $\partial(m) = 0$, то $m \in \partial D$. Заметим, что когда ∂D связна, то $d(m,\, a) = \partial(m)$ для всех $a \in \partial D$.

Справедливы следующие утверждения:

1. Функции $d(a,\, b)$ и $\partial(c)$ непрерывны соответственно на $D \times D$ и D.

2. Если граница ∂D связна, то для всех $a,\, b \in D$

$$d(a,\, b) \leqslant \partial(a) + \partial(b).$$

3. Если $d(a,\, b) < \partial(a) + \partial(b)$, то точки a и b можно соединить геодезической длины $d(a,\, b)$, целиком лежащей внутри D. Доказательство этих утверждений просто и здесь не приводится.

Теорема 1. *Любую точку $a \in D$ можно соединить с некоторой точкой границы ∂D геодезическо длины $\partial(a)$.*

Обозначим через $m(t,\, a)$ движение натуральной системы, начинающееся с нулевой скоростью в точке $a \in \partial D$ (т. е. $m(0,\, a) = a$). Так как уравнения движения обратимы (лемма 1), то справедливо

Следствие 2.

$$\bigcup_{t\in\mathbf{R}}\bigcup_{a\in\partial D} m(t,\,a) = D.$$

Для доказательства теоремы нам потребуется

Лемма 2. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ точка $m(t)$ не может находиться в области $V_{\varepsilon_0} = \{h + \mathscr{V} \leqslant \varepsilon\}$ бесконечно долго.*

Следствие 3. *Точка $m(t)$ не может асимптотически стремиться к ∂D при $t \to \infty$.*

Замечание. По терминологии Адамара [2, § 183] область V_ε при малых ε является областью отталкивания.

Доказательство леммы 2.

Выберем ε_1 столь малым, что в V_{ε_1} потенциал $\mathscr{V}$ не имеет критических точек. Так как V_{ε_1} компактно, то существует конечное покрытие множества V_{ε_1} малыми областями $W_s \subset M$ $(s = 1, \ldots, N)$, в которых можно ввести глобально декартовы координаты.

Оценим сначала $\dot{\mathscr{V}}$ на V_{ε_1}. Для фиксированного s обозначим через $q_1, \ldots, q_n$ локальные координаты на W_s. По неравенству Коши–Буняковского

$$|\dot{\mathscr{V}}| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_i}\right| \leqslant |\operatorname{grad}\mathscr{V}|\sqrt{v},$$

где v — величина скорости точки m. Так как $\mathscr{T}$ — положительно определенная квадратичная форма, то в области W_s справедливы неравенства $c_{1,s}v^2 \leqslant \mathscr{T} \leqslant c_{2,c}v^2$ $(c_{1,c}, c_{2,c} > 0)$. Из выражения для интеграла энергии $\mathscr{T} = h + \mathscr{V}$ следует, что в V_{ε_1} кинетическая энергия $\mathscr{T} \leqslant \varepsilon_1$. Следовательно, в области $V_{\varepsilon_1} \cap W_s$ выполняется неравенство $|\dot{\mathscr{V}}| \leqslant c_{3,c}$.

Положим $C_3 = \max_s c_{3,s}$. Тогда на всем множестве V_{ε_1} справедливо неравенство $|\dot{\mathscr{V}}| \leqslant C_3$. Пусть при некотором $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_1$ пересечение $V_\varepsilon \cap W_s$ не пусто. Оценим в этой области

$$\ddot{\mathscr{V}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\mathscr{V}}{\partial q_i}\ddot{q}_1 + \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial^2\mathscr{V}}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_1\dot{q}_j.$$

Воспользуемся преобразованием Лежандра и каноническими уравнениями

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_1} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i}.$$

Тогда

$$\ddot{\mathcal{V}} = \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i} \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial p_i \partial p_j} \left(-\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_j} \right) + \\ + \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i} \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_j} + \Phi_2,$$

где Φ_2 — квадратичная форма по $\dot{q}_i$ с ограниченными на $V_{\varepsilon_1} \cap W_s$ коэффициентами. Значит, в области $V_\varepsilon \cap W_s$ имеет место неравенство

$$|\Phi| \leqslant c_{4,\,s}\varepsilon \quad (c_{4,\,s} > 0).$$

Выражение

$$\frac{1}{2} \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i} \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_j} \tag{1.1}$$

есть скалярный квадрат вектора $\operatorname{grad} \mathcal{V}$ в метрике $\mathcal{T}$.

Так как форма $\mathcal{T}$ положительно определена и функция $\mathcal{V}$ не имеет в области V_{ε_1} критических точек, то существует $c_{5,\,s} > 0$ такое, что на $V_{\varepsilon_1} \cap W_s$ сумма (1.1) не меньше $c_{5,\,s}/2$. Следовательно, в области $V_\varepsilon \cap W_s$ справедливо неравенство $\ddot{\mathcal{V}} \geqslant c_{5,\,s} - c_{4,\,s}\varepsilon$. Положим,

$$C_4 = \max_s S_{4,\,s}, \quad C_5 = \min_s C_{5,\,s} \quad (C_4,\, C_s > 0).$$

Тогда во всей области V_ε имеет место оценка $\ddot{\mathcal{V}} \geqslant C_5 - C_4\varepsilon$. Так как C_3, C_4 и C_5 не зависят от ε, то существует $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, такое, что на V_{ε_0} одновременно

$$|\dot{\mathcal{V}}| \leqslant C_3, \quad |\ddot{\mathcal{V}}| \geqslant C_6 \quad (C_3,\, C_6 > 0).$$

Пусть при $t = 0$ точка m находится в области V_{ε_0}. Тогда $h + \mathscr{V} \geqslant C_6 t^2/2 - C_3 t$. Следовательно, время, через которое m покинет множество $\{h + \mathscr{V} \leqslant \varepsilon_0\}$, не превосходит положительного корня следующего уравнения:

$$C_6 x^2/2 - C_3 x = \varepsilon_0.$$

■

Доказательство теоремы 1.

Если $a \in \partial D$, то заключение теоремы очевидно. Пусть $a \in \operatorname{Int} D$. Обозначим через S сферу малого радиуса δ с центром в точке a. Так как S компактна, а функция $\partial(x)$, $x \in S$ непрерывна, то на S существует точка b такая, что

$$\partial(b) = \min_{x \in S} \partial(x).$$

Обозначим через γ единственную геодезическую, проходящую через точки a и b. Пусть s — натуральный параметр на $\gamma(s)$, причем $\gamma(0) = a$. Очевидно, что $\gamma(\delta) = b$. Покажем, что для всех $\delta \leqslant s < \partial(a)$ справедливо тождество

$$\partial(\gamma(s)) = \partial(a) - s \tag{1.2}$$

(ср. с доказательством теоремы Хопфа – Ринова, [45, гл. II, § 0]). Так как каждый путь из a в некоторую точку на ∂D пересекает S, то

$$\partial(a) \min_{x \in s}(d(a, x) + \partial(x)) = \delta + \partial(b).$$

Следовательно, равенство (1.2) справедливо для $s = \delta$.

Пусть $S_0 \in (\delta, \partial(a))$ — верхняя грань значений s, для которых верно тождество (1.2). По непрерывности равенство (1.2) справедливо и для $s = s_0$. Пусть S' — сфера малого радиуса δ' вокруг точки $\gamma(s_0) \in \operatorname{Int} D$ и a' — точка на S', наименее удаленная от ∂D (рис. 15). Тогда

$$\partial(\gamma(s_0)) = \min_{x \in S'}(d(\gamma(s_0), x) + \partial(x)) = \delta' + \partial(a').$$

Следовательно,

$$\partial(a') = \partial(a) - (s_0 + \delta').$$

Утверждается, что a' есть $\gamma(s_0+\delta')$. Действительно, с учетом неравенства треугольника,

$$d(a,\, a') \geqslant \partial(a) - \partial(a') = s_0 + \delta'.$$

Но путь длины $s_0+\delta'$ получится, если идти по γ от a до $\gamma(s_0)$, а затем по кратчайшей геодезической из $\gamma(s_0)$ в a'. Так как этот путь лежит внутри области D и имеет наименьшую возможную длину, то он является геодезической, а поэтому совпадает с γ. Итак,

$$\gamma(s_0+\delta') = a', \quad \partial(\gamma(s_0+\delta')) = \partial(a) - (s_0+\delta').$$

Противоречие с определением s_0 завершает доказательство тождества (1.2).

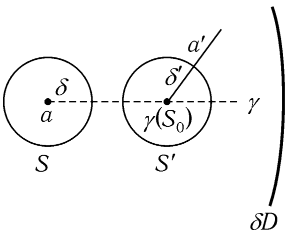

Рис. 15

Рассмотрим теперь движение $m(t)$ со следующими начальными данными: $m(0)=a$, скорость m направлена вдоль γ, а величина определяется по зафиксированному выше значению постоянной h интеграла энергии. Покажем, что когда параметр s стремится к $\partial(a)$, то время t стремится к некоторому конечному пределу t'. Предположим противное, т.е. $t'\to\infty$. При этом предположении точка $m(t)$ неограниченно приближается к ∂D, оставаясь внутри области D (сходимость здесь и ниже рассматривается относительно метрики ds).

Обозначим через U_ε ε-окрестность в метрике ∂s множества ∂D. Если m не стремится к ∂D, то существует $\varepsilon>0$ такое, что при произвольно больших t точка m находится вне U_{ε_0}. С другой стороны, при $0<t<\infty$ точка m побывает в точках $m_k\in D$, сколь угодно близких к ∂D. Начиная с некоторого номера k, эти точки будут лежать в $U_{\varepsilon_0/2}$. Расстояние в метрике ds между точками множеств $S\setminus U_{\varepsilon_0}$ и $D\cap U_{\varepsilon_0/2}$ ограничены снизу некоторым положительным числом. Так как $m(t)$ бесконечно много раз пересечет «полосу» $U_{\varepsilon_0}\setminus U_{\varepsilon_0/2}$, то длина $\gamma(s)$, $0\leqslant s<\partial(a)$, бесконечна. Однако это не так.

Следовательно, при $t\to\infty$ точка $m(t)$ асимптотически стремится к ∂D. Однако согласно лемме 2 такого быть не может. Полученное противоречие показывает, что $t'<\infty$.

Так как функция $m(t)$ непрерывна по t и

$$\lim_{t \to t'} \partial(m(t)) = 0,$$

то $m(t') \in \partial D$. Переходя в равенстве (1.2) к пределу при $t \to t'$, заключаем, что длина кривой $m(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t'$ равна $\partial(a)$. ■

§ 2. Аналог леммы Гаусса

Так как граница $\partial D = \{h + \mathscr{V} = 0\}$ компактна и в некоторой ее окрестности нет критических точек функции $\mathscr{V}$, то при малых $\varepsilon > 0$ область $V_\varepsilon = \{0 \leqslant h + \mathscr{V} \leqslant \varepsilon\} \subset D$ диффеоморфна прямому произведению $\partial D \times [0, 1]$ (см., например, [47]).

Введем в D локальные координаты x, y; $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, так, что $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — локальные координаты на многообразии ∂D, а множества $\{x, y : y = y_0\} \subset D$ являются уровнями функции $\mathscr{V}$. Будем считать, что в области D координата $y \geqslant 0$, причем $y = 0$ на границе ∂D. Заметим, что функция $\mathscr{V}(y)$ монотонно возрастает в окрестности нуля.

Рассмотрим решения уравнений движения со следующими начальными условиями: $x = x_0$, $y = \dot{x} = \dot{y} = 0$. Обозначим их через

$$x = x(t, x_0), \quad y = y(t, x_0) \quad (x_0 \in \partial D). \tag{2.1}$$

Траектории этих решений являются, конечно, геодезическими метрики Якоби.

На границе нет положений равновесия, следовательно, формулы (2.1) можно представить в виде

$$x = x_0 + t^2 X(t, x_0), \quad y = t^2 Y(t, x_0),$$

где X, Y — гладкие функции на $\mathbf{R} \times \partial D$, причем $T(0, x_0)$ для всех $x_0 \in \partial D$.

Обозначим $p(\tau, x_0)$ длину геодезической (2.1) в метрике Якоби dp, когда t изменяется в интервале $[0, \tau]$. Так как $dp = \sqrt{h + \mathscr{V}} ds$, а $(ds/dt)^2 = 2\mathscr{T}$, то

$$p(t, x_0) = \int\limits_0^t \sqrt{h + \mathscr{V}} \sqrt{2\mathscr{T}} dt = \sqrt{2} \int\limits_0^t [h + \mathscr{V}(y)] dt.$$

Откуда

$$\dot{p} = \sqrt{2}[h + \mathscr{V}(y(t,\, x_0))], \quad \ddot{p} = \sqrt{2}\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial y}\dot{y},$$

$$\dddot{p} = \sqrt{2}\left(\frac{\partial^2 \mathscr{V}}{\partial y^2}\dot{y}^2 + \frac{\partial \mathscr{V}}{\partial y}\ddot{y}\right).$$

Следовательно, при $t = 0$ $\dot{p} = \ddot{p} = 0$, а $\dddot{p} > 0$. Значит, $p(t,\, x_0) = t^3 P(t,\, x_0)$, где P — гладкая функция на $\mathbf{R} \times \partial D$, причем $P(0,\, x_0) > 0$ при всех $x_0 \in \partial D$.

Рассмотрим взаимно однозначное отображение окрестности границы $\partial D \times [0,\, 1)$ на D, определенное функциями $x' = x$, $y' = \sqrt{y}$. Это отображение является диффеоморфизмом вне ∂D. В новых переменных

$$y' = tY'(t,\, x_0), \tag{2.2}$$

где $Y' = \sqrt{Y(t,\, x_0)}$ — гладкая функция. Так как $Y'(0,\, x_0) > 0$, то при малых значениях t равенство (2.2) можно разрешить относительно t. В результате получим функцию $t = t(y',\, x_0)$, гладкую на прямом произведении $[q,\, \varepsilon) \times \partial D$. Следовательно, функция $p(t,\, x_0) = p(y',\, x_0)$ тоже гладкая. Ее можно представить в виде

$$p = {y'}^3 P'(y',\, x_0), \quad P'(0,\, x_0) > 0. \tag{2.3}$$

Обозначим через $\sum_p$ множество точек из D, расстояние от которых до границы ∂D вдоль геодезических (2.1) равно p. Очевидно, что $\sum_0 = \partial D$.

Лемма 3. *При малых $p \geqslant 0$ множество $\sum_p$ — гладкая гиперповерхность в D, диффеоморфная ∂D.*

Доказательство.

Из формулы (2.3) следует, что множества $\sum_p$ суть уровни гладкой функции $f = \sqrt[3]{p}$, не имеющей критических точек при малых значениях переменной y'. Следовательно, $\sum_p$ — гладкое многообразие, когда $0 \leqslant p \leqslant p_0$, p_0 мало. Так как уровень $\{f = 0\}$ совпадает с ∂D, то по теореме Морса [45] $\sum_p$ диффеоморфно ∂D. ■

Лемма 4. *Существует* $p_0 > 0$ *такое, что при* $0 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant p_0$ *гиперповерхности* $\sum_{p_1}$ *и* $\sum_{p_2}$ *не пересекаются.*

Действительно, в этом случае $\sum_{p_1}$ и $\sum_{p_2}$ являются различными уровнями гладкой функции $f = \sqrt[3]{p}$ и поэтому не имеют общих точек.

Лемма 5. *Существует* $p_0 > 0$ *такое, что для всех точек* $a \in \sum_p$, $0 \leqslant p \leqslant p_0$, *расстояние* $\partial(a) = p$.

Доказательство.

Расстояние $\partial(a)$, очевидно, не превосходит p. Предположим, что для некоторых $a \in \sum_p$, $p \in [0, p_0]$, выполнено неравенство $\partial < p$. По теореме 1 существует геодезическая метрики Якоби с концами в точках a и $b \in \partial D$ такая, что ее длина равна в точности $\partial(a) = p'$. Рассмотрим геодезическую γ, исходящую из точки b, лежащей на границе. Тогда, очевидно, точка a, отстоящая от границы ∂D на расстоянии p' вдоль γ, будет по определению принадлежать $\sum_{p'}$. Так как $p' < p \leqslant p_0$, то согласно лемме 4 множества $\sum_{p'}$ и $\sum_p$ не пересекаются. Полученное противоречие доказывает справедливость леммы.

■

Теорема 2 («лемма Гаусса»). *Существует* $p_0 > 0$ *такое, что для всех* $p \in (0, p_0]$ *геодезические, исходящие из точек границы* ∂D, *пересекают гиперповерхности* $\sum_p$ *под прямым углом.*

Замечание. Геодезические, выходящие из ∂D, ортогональны $\sum_p$ как в метрике ∂p, так и в метрике ds, ибо эти метрики конформно эквивалентны.

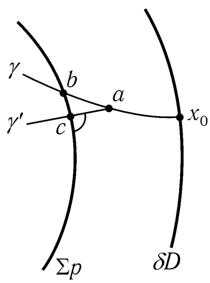

Рис. 16

Доказательство теоремы 2.

Предположим противное, т. е. что некоторая геодезическая γ с концом в точке $x_0 \in \partial D$ не ортогональна $\sum_p$ (рис. 16).

Пусть a — точка на γ, достаточно близкая к $\sum_p$. Рассмотрим геодезическую γ', проходящую через точку a и ортогональную $\sum_p$ (такая геодезическая всегда существует [49, 50]). Дуга $ac \subset \gamma'$ короче дуги $ab \subset \gamma$ (см. [49, гл. VIII]). Но тогда кусочно-гладкая кривая, состоящая из дуги $x_0 a \subset \gamma$ и дуги $ac \subset \gamma'$ имеет длину меньше p. Это противоречит, однако, заключению леммы 5. ■

Замечание. Можно показать, что при малых $p > 0$ «полоса» σ_p, заключенная между $\sum_0 = \partial D$ и $\sum_p$, локально выпукла, т. е. геодезическая, соединяющая две достаточно близкие точки из σ_p, целиком лежит в σ_p. Это утверждение аналогично теореме Уайтхеда о выпуклых окрестностях в римановой геометрии [51]. Мы здесь не доказываем этот факт, так как в дальнейшем он не используется.

§ 3. Либрации в системах со многими степенями свободы

Лемма 6. *Не существует решения уравнений движения, траектория которого пересекает границу ∂D более чем в двух различных точках.*

Доказательство.

Предположим, что существует решение, траектория которого пересекает ∂D последовательно в трех точках a, b, c. Тогда точка m, двигаясь из точки a, через некоторое время попадет в точку b. Дойдя до b, точка m согласно следствию из леммы 1 будет двигаться по той же траектории в противоположную сторону и через конечное время попадет снова в точку a. По следствию из леммы 1 точка m затем будет двигаться по той же траектории от a к b и так далее. Следовательно, точка m никогда не попадет в c. Полученное противоречие доказывает лемму 6. ■

Предложение 1. *Если траектория некоторого решения уравнений движения имеет с ∂D две общие точки, то других общих точек нет, и решение является периодическим.*

Доказательство.

Пусть γ — траектория этого решения. Согласно лемме 6 кривая γ имеет с ∂D только две общие точки. При этом точка m совершает периодические колебания между концами γ (по следствию из леммы 1). ■

Периодические решения, о которых идет речь в предложении 1, по аналогии с системами с одной степенью свободы, назовем либрациями. Вращениями естественно назвать периодические решения, траектории которых не имеют общих точек с границей области возможных движений. Легко сообразить, что в натуральных механических системах периодических решений другого типа нет.

Если $h > \max_m(-\mathcal{V})$, то D совпадает со всем конфигурационным пространством, и задача о существовании периодических решений уравнений движения сводится к нахождению замкнутых геодезических линий гладкого риманова многообразия $(M,\, d\rho)$. Каждой замкнутой геодезической отвечают два различных периодических решения исходной задачи (движения по этой кривой в противоположных направлениях). Они являются, конечно, вращениями. Существуют оценки числа замкнутых геодезических, зависящие отчасти от топологического строения M, отчасти от римановой метрики $d\rho$ [52]. Наилучшей универсальной нижней оценкой является пока 2 [53]. Таким образом, на $(2n-1)$-мерных уровнях интеграла энергии с постоянной $h > \max(-\mathcal{V})$ существуют, по крайней мере, четыре различных периодических решения.

Теорема 3. *Предположим, что граница ∂D несвязна. Тогда для каждого разбиения границы на два непересекающихся гладких многообразия E_1 и E_2 ($\partial D = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$) существует либрационное периодическое движение с несамопересекающейся траекторией, концы которой лежат на E_1 и E_2.*

Следствие 4. *Если граница области возможных движений имеет k связных компонент, то количество различных либраций, по крайней мере, $k-1$.*

Следствие 5. *Предположим, что граница ∂D несвязна. Тогда для любой связной компоненты E многообразия ∂D существует либрационное периодическое решение с несамопересекающейся траекторией и с концами на E и $\partial D \setminus E$.*

Доказательство теоремы 3.

Обозначим через $\sum_\varepsilon$ множество точек из области D, отстоящих от границы на расстоянии $\varepsilon > 0$ в метрике Якоби.

Согласно леммам 3 и 5 при малом фиксированном значении ε множество $\sum = \sum_\varepsilon$ — гладкое многообразие, диффеоморфное ∂D. Пусть P и Q — гладкие непересекающиеся многообразия, составляющие $\sum$, причем $P(Q)$ близко к $E_2(E_2)$.

Многообразие $\sum$ ограничивает некоторое гладкое многообразие с краем $N \subset D$. Покажем, что в N существует несамопересекающаяся геодезическая γ с концами на P и Q, ортогональная $\partial N = \sum$ в своих концах.

Будем считать, что D — подмногообразие гладкого многообразия M' той же размерности, полученного «склеиванием» двух многообразий D и $\partial D \times [0, \infty)$ по диффеоморфным краям (подробности см. в [47, 54]). Метрика dp определена в $N \subset D \subset M'$ и в некоторой окрестности множества N в D. Пусть dp' — гладкая метрика на m' такая, что dp' совпадает с dp на N, и риманово пространство (M', dp') полно (т. е. каждый отрезок геодезической γ_0: $[a, b] \to M'$ продолжается до бесконечной геодезической γ: $\mathbf{R} \to M'$). Такую метрику легко построить, используя утверждение о гладком продолжении тензорных полей [51]. Ясно, что геодезические в новой метрике dp' совпадают на N с геодезическими линиями в метрике dp.

Пусть $p \in P$ и $q \in Q$. Расстоянием $\rho(p, q)$ между точками p и q назовем точную нижнюю грань длин кусочно-гладких кривых с началом в p и концом в q. Расстоянием $\rho(P, Q)$ между P и Q назовем точную нижнюю грань расстояний между любыми точками из P и Q. Так как $\rho(p, q)$ непрерывна на $P \times Q$ и множества P и Q компактны, то на P и Q существуют точки p_0 и q_0, расстояние между которыми равно $\rho(P, Q)$.

Риманово пространство (M', dp') полно, следовательно, по теореме Хопфа–Ринова точки p_0 и q_0 можно соединить геодезической длины $\rho(p_0, q_0) = \rho(P, Q)$. Эта кривая не имеет самопересечений и целиком лежит в области N. Действительно, если это не так, то существует часть γ, соединяющая некоторые точки из P и Q и длина которой меньше $\rho(P, Q)$. Геодезическая γ ортогональна $\sum = P \cup Q$ в своих концах. В противном случае можно указать кусочно-гладкую кривую, соединяющую P и Q, длина которой меньше $\rho(P, Q)$ (ср. с доказательством теоремы 2).

По теоремам 1 и 2 существуют геодезические линии γ' и γ'', выходящие из некоторых точек края ∂D и пересекающие ортогонально гиперповерхность $\sum$ соответственно в точках p_0 и q_0. Положим $\Gamma = \gamma' \cup \gamma \cup \gamma''$. Эта кривая, очевидно, является геодезической линией метрики $d\rho$. Она не имеет самопересечений, и ее концы лежат на E_1 и E_2. Следовательно, Γ есть траектория некоторого либрационного периодического движения. ■

§ 4. Приложение к задаче о вращении твердого тела с неподвижной точкой в осесимметричном силовом поле

Эта натуральная механическая система рассматривалась в § 4 гл. III. Она имеет три степени свободы, конфигурационное пространство есть группа $SO(3)$. Задача инвариантна при действии группы вращении g^s $(s \in [0, 2\pi))$ относительно оси симметрии силового поля. Группе g^s соответствует циклический интеграл — интеграл площадей. Через j обозначим его постоянную.

Рассмотрим сначала вопрос о существовании периодических движений тела в трехмерном пространстве. Пусть $h = \omega$ — максимальное критическое значение интеграла энергии. При $h > \omega$ область возможных движений совпадает со всей $SO(3)$. На любом римановом $SO(3)$ существует по крайней мере три различных замкнутых геодезических [52]. Им соответствуют шесть различных периодических движений твердого тела (некоторые из них могут быть перманентными вращениями). При остальных некритических h область D имеет края. Если, например, тело вращается в ньютоновском поле сил (классическое приближение, см. § 4 гл. III), то каждая связная компонента области возможных движений согласно [55, 56] диффеоморфна $\mathbf{T}^2 \times [0, 1]$ ($\mathbf{T}^2$ — двумерный тор) или $S^1 \times D^2$ (S^1 — окружность, а D^2 — двумерный диск). В первом случае граница ∂D состоит из двух связных многообразий, диффеоморфных $\mathbf{T}^2$, и, следовательно, по теореме 3 существует, по крайней мере, одно либрационное периодическое движение тела. Это периодическое решение уравнений движения лежит на нулевом уровне интеграла площадей, так как при $j \neq 0$ скорость тела никогда не обращается в нуль. Если $\gamma(t)$ — либрационное решение, то $g^s(\gamma)$, $s \in [0, 2\pi)$ тоже либрационное периодическое решение. Так как γ не является перманентным вращением, то $g^s(\gamma) \neq \gamma$ при $s \in [0, 2\pi)$. Следовательно, в области $\mathbf{T}^2 \times [0, 1]$ существует целое однопараметрическое свойство либрационных движений.

В общем случае осесимметричного силового поля либрационные движения тела тоже, очевидно, лежат на множестве $\{j = 0\}$. Поэтому рассмотрим подробнее случай, когда $j = 0$. Наличие группы симметрий позволяет факторизацией по g^s свести задачу к системе с двумя степенями свободы. Ясно, что $SO(3)/g^s = S^2$ (сфера Пуассона). Понижая по Раусу порядок системы в локальных обобщенных координатах ϑ, φ, ψ (углы Эйлера), получим натуральную систему с двумя степенями свободы, в которой

$$\mathcal{T} = \frac{a\dot{\vartheta}^2}{2} b\dot{\vartheta}\varphi + \frac{c\dot{\varphi}^2}{2},$$

где

$$\begin{aligned}
Ka &= AB\sin^2\vartheta + C\cos^2\vartheta(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi),\\
Kb &= (B - A)C\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi,\\
Kc &= C\sin^2\vartheta(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi),\\
K &= A\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + B\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + C\cos^2\vartheta,
\end{aligned}$$

$\mathcal{V}$ — потенциал силового поля.

Нетрудно показать, что $\mathcal{T}$ — положительно определенная квадратичная форма. Докажем, что $\mathcal{T}$ и $\mathcal{V}$ определенные при $\vartheta \neq 0, \pi$, аналитически продолжаются на всю сферу Пуассона. Этот факт очевиден для потенциала $\mathcal{V}$. Рассмотрим форму $\mathcal{T}$ в локальных координатах $x = \sin\vartheta\sin\varphi$, $y = \sin\vartheta\cos\varphi$ на S^2, не имеющих особенностей в полюсах:

$$\mathcal{T} = \frac{\xi\dot{x}^2}{2} + \eta\dot{x}\dot{y} + \frac{\zeta\dot{y}^2}{2},$$

$$K\xi = \frac{ABx^2}{1 - x^2 - y^2} + BC, \quad K\eta = \frac{ABxy}{1 - x^2 - y^2},$$

$$K\zeta = \frac{ABy^2}{1 - x^2 - y^2 + AC}, \quad K = Ax^2 + By^2 + C(1 - x^2 - y^2).$$

Так как форма $\mathscr{T}$ аналитически зависит от x и y при малых значениях этих переменных, то высказанное утверждение доказано.

К полученной натуральной системе можно применить изложенные выше результаты. При $h > \omega$ область возможных движений совпадает со всей сферой Пуассона. Поскольку на двумерной римановой сфере существуют, по крайней мере, три различные замкнутые несамопересекающиеся геодезические, то в этом случае уравнения пониженной системы имеют шесть различных периодических решений [57][1]. Если задача мало отличается от интегрируемого случая Эйлера–Пуансо, то эти решения суть возмущения постоянных вращений вокруг главных осей эллипсоида инерции (см. § 2, 3 гл. IV).

Покажем, что при остальных некритических значениях полной энергии существуют либрационные периодические движения. Действительно, в этих случаях каждая связная компонента области возможных движений диффеоморфна диску D^2 с n дырами ($n \geqslant 0$). В случае диска ($n = 0$) существование либрационных периодических движений вытекает из известной теоремы Г. Зейферта [90], а в случае $n \geqslant 1$ либрации существуют согласно заключению теоремы 3. Причем, во втором случае можно утверждать больше: существуют по крайней мере n ($n \geqslant 1$) различных либрационных движений с несамопересекающимися траекториями.

Если твердое тело вращается в поле сил тяжести, то, как нетрудно показать, область возможных движений диффеоморфна двумерному диску D^2 ($n = 0$). В случае ньютоновского поля сил связные компоненты области возможных движений могут быть уже двух типов: либо кольцо $S^1 \times [0, 1]$ ($n = 1$), либо диск D^2 ($n = 0$) [55, 56]. Во всех этих случаях существуют либрационные периодические движения, причем в кольце существует либрация с самонепересекающейся траекторией.

---

[1]Этот факт был отмечен автором в работе [58] и независимо М. П. Харламовым в работе [59].

Замечание. Существование либрационного решения в кольцевой области приведенной системы вытекает, конечно, из результата о либрационных движениях тела в области $\mathbf{T}^2 \times [0, 1] \subset SO(3)$.

Подводя итог сказанному, получаем следующий замечательный результат: если $j = 0$, то на любом некритическом уровне интеграла энергии приведенной системы существует хотя бы одно периодическое движение.

Исторический очерк

Если $h > \max_M -\mathscr{V}$, то задача о периодических движениях натуральных систем сводится с помощью принципа Мопертюи к отысканию замкнутых геодезических линий некоторого риманова пространства, т. е. уже является по существу задачей римановой геометрии в целом. В нашей терминологии такие периодические движения будут вращениями.

Сравнительно просто доказать существование замкнутой геодезической, если на римановом многообразии существуют негомотопные нулю замкнутые кривые: среди всех кривых из данного гомотопического класса ищется кривая минимальной длины; она и будет искомой геодезической [48]. *Задача существенно усложняется, если пространство односвязно. А. Пуанкаре получил здесь первый нетривиальный результат: на выпуклой двумерной римановой сфере существует хотя бы одна замкнутая несамопересекающаяся геодезическая* [60]. *Позже этот результат был распространен Дж. Биркгофом на компактные многообразия, гомеоморфные n-мерной сфере* [24]. *В* 1930 *г. Л. А. Люстерник и Л. Шнирельман существенно усилили теорему Пуанкаре, доказав существование* 3*-х замкнутых несамопересекающихся геодезических на любой двумерной сфере* [57]. *В* 1951 *г. Л. А. Люстерник и А. И. Фет доказали, что на каждом компактном римановом многообразии существует замкнутая геодезическая линия. Для некоторого класса односвязных многообразий, например, гомеоморфных произведению сфер $S^m \times S^n$ $(m, n > 1)$, удалось установить существование бесконечного множества замкнутых геодезических. Однако до сих пор неизвестно, справедлив ли этот результат* *для* S^n $(n > 1)$. *Относительно современного состояния вопроса см.* [52].

Уиттекер и Биркгоф исследовали существование замкнутых геодезических на римановых пространствах (M, ds) *с краем* [2, 24]. *Их результаты касаются случая, когда в* M *есть нестягиваемые в точку замкнутые кривые и* M *локально выпукло в метрике* ds.

Если у области возможных движений есть края, то периодические движения натуральной системы могут быть уже двух типов: вращения и либрации. В этой ситуации результаты Уиттекера и Биркгофа не применимы из-за вырожденности метрики Якоби на границе. Легко указать примеры, когда вращения отсутствуют. Первый общий результат о либрационных периодических движениях натуральных механических систем принадлежит Г. Зейферту [90], *доказавшему существование либраций в случае, когда область возможных движений диффеоморфна* n*-мерному диску. В работе автора* [58] *доказано существование либрационных решений для случая, когда область возможных движений диффеоморфна* $N \times [0, 1]$, *где* N — *гладкое компактное многообразие. Методы доказательства существования либраций в работах* [58, 90] *имеют некоторые общие моменты. Доказательство теоремы о либрациях, проведенное в этой главе, отличается от первоначального* [58].

Глава VII
Вопросы качественного анализа движения волчка Горячева–Чаплыгина

В случае Горячева–Чаплыгина задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки главные моменты инерции удовлетворяют соотношению $A = B = 4C$, а центр тяжести лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции. Кроме того, начальные условия выбираются так, чтобы постоянная интеграла площадей была равна нулю. Тогда существует дополнительный частный интеграл, наличие которого позволяет свести интегрирование уравнений движения к квадратурам [36].

В этой и следующей главах рассматриваются некоторые математические задачи, возникающие в связи с качественным анализом движения тела в случае Горячева–Чаплыгина. Эти задачи в основном связаны с исследованием квазипериодических движений, квазипериодических функций и их интегралов.

В этой главе исследуются качественные свойства типичных вращений тяжелого твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина, когда первые интегралы уравнений движения независимы. Найдены числа вращения касательных векторных полей на двумерных инвариантных торах. Показано, что нутация твердого тела — квазипериодическое движение, а собственное вращение и прецессия обладают главным движением. Если число вращения иррационально, то в случае быстрых вращений твердого тела главное движение линии узлов равно нулю.

§ 1. Разделение переменных в случае Горячева–Чаплыгина

Нетрудно установить, что функция Гамильтона в этом случае в специальных канонических переменных L, G, l, g имеет вид

$$\mathscr{H} = \frac{G^2}{8C} + \frac{3L^2}{8C} + \mu\Big(\frac{L}{G}\sin l\cos g + \cos l\sin g\Big), \tag{1.1}$$

где C — момент инерции относительно оси динамической симметрии, а μ — параметр Пуанкаре. Функцию (1.1) можно переписать следующим образом:

$$\mathscr{H} = \frac{G^2}{8C} + \frac{3L^2}{8C} + \frac{\mu}{2}\Big[\Big(\frac{L}{G}+1\Big)\sin(l+g) + \Big(\frac{L}{G}-1\Big)\sin(l-g)\Big].$$

Сделаем каноническое преобразование к новым переменным q_1, q_2, p_1, p_2, производящая функция которого равна

$$S(l, g, p_1, p_2) = (l+g)p_1 + (l-g)p_2.$$

Формулы преобразования следующие:

$$L = p_1 + p_2, \quad G = p_1 - p_2, \quad q_1 = l + g, \quad q_2 = l - g.$$

В новых переменных гамильтониан (1.1) будет равен

$$\mathscr{H} = \frac{p_1^3 - p_2^3}{2C(p_1 - p_2)} + \mu\Big(\frac{p_1}{p_1 - p_2}\sin q_1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2}\sin q_2\Big).$$

Полагая это выражение равным h и умножая на $(p_1 - p_2)$, мы видим, что оно разделяется:

$$h(p_1 - p_2) = \frac{p_1^3 - p_2^3}{2C} + \mu(p_1\sin q_1 + p_2\sin q_2).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{p_1^3}{2C} + \mu p_1\sin q_1 - hp_1 = \Gamma, \quad \frac{p_2^3}{2C} - \mu p_2\sin q_2 - hp_2 = \Gamma, \tag{1.2}$$

где $\Gamma = \text{const}$. Функция Γ, являющаяся первым интегралом уравнений движения, в специальных канонических переменных имеет вид

$$\Gamma = \frac{L(G^2 - L^2)}{8C} + \frac{\mu^2(G^2 - L^2)}{2G}\sin l \cos g.$$

Нетрудно показать, что в традиционных переменных Эйлера–Пуассона p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3

$$\Gamma = 2C^2 I_2, \quad I_2 = r(p^2 + q^2) - \nu p\gamma_3 \quad (\nu = \mu/C).$$

Отметим, что I_2 есть интеграл Горячева–Чаплыгина (см. [36]).

Выпишем теперь замкнутую систему уравнений для изменения p_1 и p_2.

$$\dot p_1 = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_1} = \frac{\mu p_1}{p_1 - p_2}\cos q_1, \quad \dot p_2 = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_2} = \frac{\mu p_2}{p_1 - p_2}\cos q_2.$$

Или, учитывая (1.2)

$$\begin{aligned} \dot p_1 &= \frac{\sqrt{\mu^2 p_1^2 - (\Gamma + hp_1 - p_1^3/2C)^2}}{p_1 - p_2}, \\ \dot p_2 &= \frac{\sqrt{\mu^2 p_1^2 - (\Gamma + hp_1 - p_1^3/2C)^2}}{p_1 - p_2}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Положим $p_1 = Cs_1$, $p_2 = Cs_2$, $\mu = C\nu$, $\Gamma = 2C^2 I_2$, $h = CI_1/2$. Тогда уравнения (1.3) в переменных s_1, s_2 примут следующий вид:

$$\begin{gathered} \dot s_1 = \frac{\sqrt{\Phi(s_1)}}{2(s_1 - s_2)}, \quad \dot s_2 = \frac{\sqrt{\Phi(s_2)}}{2(s_1 - s_2)}, \\ \Phi(z) = 4\nu^2 z^2 - (z^3 - I_1 z - 4I_2)^2. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Эти уравнения равносильны системе

$$\frac{ds_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}} - \frac{ds_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}} = 0, \quad \frac{2s_1 ds_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}} - \frac{2s_2 ds_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}} = dt. \tag{1.5}$$

Уравнения (1.5) полностью аналогичны уравнениям С. В. Ковалевской, полученным при исследовании найденного ею случая.

Если с самого начала мы рассмотрим каноническое преобразование с производящей функцией

$$S(l, g, p_1, p_2) = (l+g)p_1 - (l-g)p - 2$$

и проделаем все необходимые вычисления, то получим вместо уравнений (1.3) систему для p_1 и p_2.

$$\begin{gathered}\dot{p}_1 = \frac{\sqrt{F_1(p_1)}}{p_1 - p_2}, \quad \dot{p}_2 = \frac{\sqrt{F_2(p_2)}}{p_1 - p_2}, \\ F_1(z) = F_2(-z) = \mu^2 z^2 - (\Gamma + hz - z^3/2C)^2.\end{gathered} \tag{1.6}$$

Положим снова $p_1 = Cu$, $p_2 = Cv$, $\mu = C\nu$, $\Gamma = 2C^2 I_2$, $h = CI_1/2$. Тогда в новых переменных u, v уравнения (1.6) примут вид

$$\begin{gathered}\frac{du}{\sqrt{\Phi_1(u)}} - \frac{dv}{\sqrt{\Phi_2(v)}} = 0, \quad \frac{2udu}{\sqrt{\Phi_1(u)}} + \frac{2vdv}{\sqrt{\Phi_2(v)}} dt, \\ \Phi_1(z) = \Phi_2(-z) = \nu^2 z^2 - (4I_2 + I_1 z - z^3)^2.\end{gathered} \tag{1.7}$$

Эта система уравнений совпадает с уравнениями С. А. Чаплыгина [36]. Действительно,

$$u - v = \frac{p_1 - p_2}{C} = \frac{L}{C} = r, \quad uv = \frac{p_1 p_2}{C^2} = \frac{G^2 - L^2}{4C^2} = 4(p^2 + q^2).$$

Именно с помощью этих соотношений С. А. Чаплыгин вводил свои переменные. Наш вывод уравнений (1.7) проясняет геометрию виртуозных аналитических вычислений С. А. Чаплыгина, причем попутно мы получили более симметричную систему (1.5).

Замечание. Г. В. Колосов давно нашел комплекснозначное каноническое преобразование, не включающее параметр А. Пуанкаре, которое разделяет переменные в случае Горячева – Чаплыгина [86]. В этой же работе им получены уравнения вида (1.5). Эти уравнения были затем выведены Марколонго способом С. А. Чаплыгина [87].

Однако преобразование Г. В. Колосова содержит комплексные величины, что сильно затрудняет применение его результатов при исследовании действительных движений волчка Горячева – Чаплыгина.

§ 2. Динамические системы, возникающие на инвариантных торах задачи Горячева – Чаплыгина

Переменные Эйлера – Пуассона p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3 для симметрии формул будем всюду обозначать соответственно через x_1, x_2, $\ldots$, x_6. Уравнения Эйлера – Пуассона в случае Горячева – Чаплыгина можно привести к виду [30]:

$$\begin{aligned} 4\dot{x}_1 &= 3x_2x_3, & \dot{x}_4 &= x_3x_5 - x_2x_6, \\ 4\dot{x}_2 &= -3x_1x_3 + \nu x_6, & \dot{x}_5 &= x_1x_6 - x_3x_4, \\ \dot{x}_3 &= \nu x_5, & \dot{x}_6 &= x_2x_4 - x_1x_5. \end{aligned}$$

Здесь $\nu = Pr/C$, P — вес тела, r — расстояние от центра масс до точки подвеса, C — момент инерции относительно оси динамической симметрии. Эти уравнения имеют четыре независимых интеграла

$$\begin{gathered} I_1 = 4(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 + 2\nu x_4, \quad I_2 = x_3(x_1^2 + x_2^2) - \nu x_1 x_6, \\ I_3 = 4(x_1x_4 + x_2x_2) + x_3x_6 \quad (I_3 = 0), \\ I_4 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \quad (I_4 = 1). \end{gathered} \tag{2.1}$$

Обозначим через $E(I_1, I_2)$ совместные уровни четырех интегралов (2.1) в шестимерном фазовом пространстве уравнений Эйлера – Пуассона. Всюду ниже рассматриваются только такие постоянные интегралов I_1 и I_2, при которых функции (2.1) независимы на $E(I_1, I_2)$. В частности, исключаются случаи, когда $I_1 = 1_2 = 0$. Остальные постоянные образуют множество нулевой меры. Если интегралы (2.1) независимы, то E — гладкое двумерное многообразие. На E естественным образом возникает классическая динамическая система [6]: (E, g_E, σ), где g_E^t — сужение на многообразие E однопараметрической группы сдвигов по траекториям уравнений Эйлера – Пуассона,

σ — жорданова мера на E, инвариантная относительно g_E^t (ее существование вытекает из теоремы Якоби о последнем множителе [36]). Задачей настоящего параграфа является изучение таких систем.

Сначала исследуем топологические свойства многообразия E. На E нет особых точек системы дифференциальных уравнений Эйлера–Пуассона. Действительно, особые точки отвечают стационарным вращениям (или относительным равновесиям) тела. Нетрудно проверить, однако, что на этих решениях интегралы энергии и момента зависимы. А такие случаи здесь условились не рассматривать.

Многообразие E ориентируемо. Значит, каждая связная компонента E является двумерным тором (как всякое связное, ориентируемое, компактное двумерное многообразие, допускающее касательное векторное поле без особых точек; см., например, [62]).

Естественно поставить вопрос о количестве связных компонент многообразия E. Частичный ответ на этот вопрос дает

Лемма 1. *Если ν мало, то E — объединение двух торов.*

Доказательство.

Пусть сначала $\nu = 0$. Тогда совместные уровни функций I_1 и I_2 в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3\{x_1, x_2, x_3\}$ — две окружности S_i^1 $(i = 1, 2)$, лежащие в разных плоскостях $x_3 = \text{const}$. Каждой точке $\{x_1^0, x_2^0, x_3^0\}$ на S_i $(i = 1, 2)$ соответствует окружность, высекаемая на сфере Пуассона

$$\{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 1\}$$

интегралом площадей

$$4(x_1^0x_4 + x_2^0x_5) + x_3^0x_6 = 0.$$

Так как положение этой окружности непрерывно зависит от точки $\{x_1^0, x_2^0, x_3^0\}$, то при $\nu = 0$ многообразие E состоит из двух связных компонент. Если $\nu \neq 0$, но мало, то по теореме Морса [45] совместные уровни будут диффеоморфны уровню при $\nu = 0$ и, следовательно, иметь столько же компонент связности. ∎

Замечание. Будем увеличивать ν. Тогда, по той же теореме Морса, количество связных компонент может измениться только тогда, когда интегралы (1.1) станут зависимыми.

На каждом двумерном инвариантном торе $\mathbf{T}^2$ можно выбрать угловые переменные $\varphi_1, \varphi_2 \mod 2\pi$, в которых уравнения движения имеют вид

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2, \tag{2.2}$$

где ω_1, ω_2 — постоянные, зависящие от I_1 и I_2. Уравнения (2.2) задают на $\mathbf{T}^2$ условно-периодическое движение с двумя частотами ω_1 и ω_2. Для их вычисления воспользуемся переменными s_1, s_2, которые связаны с переменными Эйлера–Пуассона следующим образом:

$$x_3 = s_1 + s_2, \quad 4(x_1^2 + x_2^2) = -s_1 s_2.$$

Переменные Эйлера–Пуассона можно выразить через s_1, s_2, воспользовавшись интегралами (2.1). В § 1 показано, что в новых переменных уравнения движения приобретут вид

$$\begin{gathered}\dot{s}_1 = \frac{\sqrt{\Phi(s_1)}}{2(s_1 - s_2)}, \quad \dot{s}_2 = \frac{\sqrt{\Phi(s_2)}}{2(s_1 - s_2)}, \\ \Phi(z) = 4\nu^2 z^2 - (z^3 - I_1 z - 4I_2)^2.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Переменные s_1 и s_2 изменяются в интервалах $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$, где многочлен $\Phi(z) \leqslant 0$. Если $I_2 \neq 0$, то пересечение $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2]$ пусто. В противном случае переменные s_1 и s_2 могут совпадать, а так как $s_1 s_2 \leqslant 0$, то при некоторых начальных данных на $\mathbf{T}^2$ имеет место равенство $s_1 = s_2 = 0$. Следовательно, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и $I_2 = 0$.

Числа a_i, b_i $(i = 1, 2)$ — простые корни многочлена $\Phi(z)$, так как в противном случае на соответствующем инвариантном торе существовали бы асимптотические движения. Но этого быть не может в силу предположения о независимости интегралов (2.1).

Пусть начальные условия для s_1, s_2 лежат внутри интервалов $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$, и в начальный момент времени оба радикала в уравнениях (2.3) положительны. Предположим для определенности, что $s_1 \geqslant s_2$. Тогда в последующие моменты времени переменные s_1 и s_2 возрастают. Это будет происходить до тех пор, пока $s_1(s_2)$ не достигнет $b_1(b_2)$ — корня многочлена $\Phi(z)$. Заметим, что это произойдет за конечный промежуток времени, так как интеграл

$$\int\limits_{z_0}^{\alpha} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}},$$

где α — простой корень $\Phi(z)$ — сходится. Пусть, например, s_1 достигло значения b_1. Тогда радикал в первом уравнении (2.3) меняет знак, и в последующие моменты времени s_1 убывает. Это происходит опять до тех пор, пока $s_1(s_2)$ не достигнет корня многочлена $\Phi(z)$. И так далее.

Введем угловые переменные ψ_1, $\psi_2 \mod 2\pi$ по формулам

$$\begin{gathered} \psi_i = \frac{\pi}{\tau_i} \int\limits_{a_i}^{s_i} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}, \\ \tau_i = \int\limits_{a_i}^{b_i} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}, \quad s_i \in [a_i, b_i]; \quad i = 1, 2. \end{gathered} \tag{2.4}$$

В новых переменных уравнения (2.3) запишутся следующим образом:

$$\dot{\psi}_i = \frac{\pi}{2\tau_i[s_1(\psi_1) - s_2(\psi_2)]}, \quad i = 1, 2, \tag{2.5}$$

где $s_i(z)$ — действительные гиперэллиптические функции с периодом 2π, определяемые из соотношений (2.4). Уравнения вида (2.5) часто встречаются при исследовании интегрируемых динамических систем, и поэтому мы рассмотрим некоторые общие свойства таких уравнений, заданных на n-мерном торе $\mathbf{T}^n\{q_1, \ldots, q_n \mod 2\pi\}$:

$$\dot{q}_i = \lambda_i / F(q_1, \ldots, q_n); \quad \lambda_i = \mathrm{const}, \quad F > 0. \tag{2.6}$$

Без ущерба общности можно считать все λ_i отличными от нуля. Положим

$$\Lambda = \frac{1}{(2\pi)n} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} F(q_1, \ldots, q_n) dq_1 \ldots dq_n.$$

Теорема 1. *Предположим, что существует аналитическое (гладкое) решение $R(q_1, \ldots, q_n)$ уравнения в частных производных*

$$\lambda_1 \frac{\partial R}{\partial q_1} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial R}{\partial q_n} = F - \Lambda,$$

периодичное по каждому аргументу с периодом 2π. Тогда существует обратимая аналитическая (гладкая) замена переменных $q \to \varphi$, приводящая систему (2.6) к виду

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i = \frac{\lambda_i}{\Lambda} = \mathrm{const} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство.

Покажем, что такой заменой является аналитическое (гладкое) преобразование

$$\varphi_i = q_i + \frac{\lambda_i}{\Lambda} R(q_i, \ldots, q_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.7}$$

Действительно, координаты φ_i — угловые переменные на $\mathbf{T}^n$, изменяющиеся по $\bmod 2\pi$. Далее,

$$\dot{\varphi}_i = \dot{q}_i + \frac{\lambda_i}{\Lambda} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial q_j} \dot{q}_j = \frac{\lambda_i}{\Lambda} = \omega_i = \mathrm{const}.$$

Так как

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(q_1, \ldots, q_n)} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\lambda_1}{\Lambda} \frac{\partial R}{\partial q_i} & \ldots & \frac{\lambda_1}{\Lambda} \frac{\partial R}{\partial q_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\lambda_n}{\Lambda} \frac{\partial R}{\partial q_1} & \ldots & 1 + \frac{\lambda_n}{\Lambda} \frac{\partial R}{\partial q_n} \end{vmatrix} = \frac{F}{\Lambda} \neq 0,$$

то замена переменных (2.7) невырождена. ■

Пусть, например,

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i(q_i),$$

где $f_i(x)$ — периодические функции с периодом 2π. В этом случае функция R существует и равна

$$R = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i(q_i) - I_i q_i}{\lambda_i}, \quad F_i(x) = \int_0^x f_i(t)\,dt, \quad I_i = \frac{1}{2\pi} F_i(2\pi).$$

Соответствующая замена переменных есть

$$\varphi_i = q_i + \frac{\lambda_i}{\Lambda} \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j(q_j) - I_j q_j}{\lambda_i}, \quad \Lambda = \sum_{j=1}^{n} I_j.$$

В частности, уравнения (2.5) обратимой заменой переменных $(\psi_1, \psi_2) \to (\varphi_1, \varphi_2)$ приводятся к виду

$$\dot\varphi_i = \frac{\pi}{2\tau_i \Lambda} \quad (i = 1, 2), \quad \Lambda = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} s_1(x)\,dx - \int_0^{2\pi} s_2(y)\,dy\right) \neq 0. \tag{2.8}$$

Уравнения (2.8) определяют на $T^2\{\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi\}$ условно-периодическое движение. Отношение частот (число вращения) равно $\gamma = \tau_1/\tau_2$, т. е. отношению периодов гиперэллиптического интеграла

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}.$$

Число вращения γ зависит, конечно, от I_1 и I_2. Эта функция непостоянна, по крайней мере, при малых значениях параметра ν.

§ 3. Задача о собственном вращении

Будем исследовать движение тела в углах Эйлера ϑ, φ, ψ. Очевидно, что $x_1, x_2, \ldots, x_6$ — условно-периодические функции времени. Так как $\cos\vartheta = x_6$ и $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, то функция $\vartheta(t)$ тоже условно-периодична.

Лемма 2. *Если в начальный момент времени* $I_1\nu^2 < 4I_2^2$, *то существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что при всех* $t \in \mathbf{R}$

$$|x_6(t)| < 1 - \varepsilon. \tag{3.1}$$

Доказательство.

Пусть $|x_6| = 1$. Тогда $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Из интегралов (2.1) вытекают равенства $x_1^2 + x_2^2 = I_1/4$, $|x_1| = |I_2/\nu|$ ($\nu \neq 0$). Отсюда $x_2^2 = I_1/4 - I_2^2/\nu^2$. Следовательно, если в некоторый момент времени на E выполнено равенство $|x_6| = 1$, то $I_1\nu^2 \geqslant 4I_2^2$. Так как множество E компактно, то в условиях леммы при некотором $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство (3.1).

■

Замечание. Если $I_1\nu^2 \geqslant 4I_2^2$, то при некоторых начальных данных, удовлетворяющих этому неравенству, ось динамической симметрии занимает вертикальное положение.

Будем использовать следующую терминологию (ср. с [17, 63]). Величина $\xi(t)$ обладает средним движением $\lambda = \mathrm{const}$, если для всех $t \in \mathbf{R}$

$$\xi(t) = \lambda t + O(1).$$

Величина $\xi(t)$ обладает главным движением λ, если $\xi(t) = \lambda t + o(t)$ при $t \to \infty$, т. е.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\xi(t) - \lambda t}{t} = 0.$$

Предложение 1. *Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда собственное вращение обладает средним движением.*

Доказательство.

Так как $1 - x_6^2 > \varepsilon > 0$ для всех t, то

$$e^{i\varphi} = \frac{x_5 + ix_4}{\sqrt{1 - x_6^2}}$$

есть двухчастотная условно-периодическая функция времени. По теореме Боля об аргументе [64]

$$\varphi = (m_1\omega_1 + m_2\omega_2)t + f(t),$$

где m_1, m_2 — целые числа, а f условно-периодична по t. Следовательно, $\varphi = \lambda t + O(1)$. ■

Если в некоторый момент времени $t = t'$ выполняется равенство $x_6^2 = 1$, то формально угол φ не определен. В этом случае можно поступить следующим образом. Известно, что

$$\dot{\varphi} = x_3 - x_6 \frac{x_1 x_4 + x_2 x_5}{1 - x_6^2} = \frac{x_3(4 - 3x_6^2)}{4(1 - x_6^2)}.$$

Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, когда $I_1 \neq 0$, получим

$$\lim_{t \to t'} \dot{\varphi} = \frac{I_2}{2I_1}.$$

Поскольку значение угла φ при $t = t'$ не определено, то мы можем положить

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int\limits_0^t \dot{\varphi}(s) ds, \quad \dot{\varphi}(t') = I_2 / 2I_1.$$

Тогда функция $\varphi(t)$ будет определена и непрерывна при всех $-\infty < t < \infty$.

Эти рассуждения указывают на целесообразность изучения собственного вращения даже в том случае, когда ось симметрии может занимать вертикальные положения.

Теорема 2. *Пусть $I_1 \neq 0$, $I_1 \nu^2 \neq 4I_2^2$. Если при заданных постоянных интегралах I_1, I_2 частоты ω_1 и ω_2 соизмеримы, то собственное вращение обладает средним движением. Если ω_1 и ω_2 несоизмеримы, то собственное вращение обладает главным движением, зависящим только от I_1, I_2.*

Доказательство.

В силу предложения 1 достаточно рассмотреть случай, когда $I_1 \nu^2 > 4I_2^2$. Если отношение ω_1 / ω_2 рационально, что $\dot{\varphi}$ — непрерывная периодическая функция времени (в точках, где $x_6^2 = 1$, функция $\dot{\varphi}$ полагается равной $I_2 / 2I_1$). Следовательно, в этом случае $\varphi = \lambda t + O(1)$.

Пусть теперь отношение ω_1 / ω_2 иррационально. Рассмотрим на $\mathbf{T}^2\{\varphi_1, \varphi_2 \mod 2\pi\}$ окружность $S^1 = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{T}^2 :$

$\varphi_1 = \varphi_1^0\}$. Переменная $\varphi_2 \mod 2\pi$ является угловой переменной на S^1. Определим на прямом произведении $S^1 \times [0,\, 2\pi/\omega_1]$ функцию

$$F(\varphi_2,\, t) = \int\limits_0^t \Phi(\omega_1\tau+\varphi_1^0,\, \omega_2\tau+\varphi_2)d\tau, \quad \varphi_2{\in}S^1, \quad t{\in}[0,\, 2\pi/\omega_1].$$

Здесь $\Phi(\varphi_1,\, \varphi_2) = \dot{\varphi}$. Ясно, что $f(\varphi_2) = F(\varphi_2,\, 2\pi/\omega_1)$ — изменение угла φ за время, когда точка на $\mathbf{T}^2$, двигаясь по иррациональной обмотке из точки $(\varphi_1^0,\, \varphi_2) \in S^1$, снова вернется на S^1. Докажем, что $f(\varphi_2)$ интегрируема по Риману.

Если $f(\varphi_2)$ имеет разрыв в точке $\varphi_2 = \varphi_2'$, то траектория $(\omega_1 t + \varphi_1^0, \omega_2 t + \varphi_2)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi/\omega_1$ проходит через точки на $\mathbf{T}^2$, где $x_6^2 = 1$. Таких точек четыре, поэтому $f(\varphi_2)$ может иметь только конечное число точек разрыва. Следовательно, достаточно доказать ограниченность этой функции. Докажем, что $F(\varphi_2,\, t)$ ограничена на $S^1 \times [0,\, 2\pi/\omega_1]$.

Рассмотрим поведение угла φ, когда точка $m(t) = (\omega_1 t + {} + \varphi_1^0,\, \omega_2 t + \varphi_2)$ находится вблизи точек $a_1, \ldots, a_4$, где $x_6^2 = 1$. Так как $I_1\nu^2 \neq 4I_2^2$, то якобиан

$$\frac{\partial(I_1,\, I_2,\, I_3,\, I_4)}{\partial(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_6)}$$

отличен от нуля в точках $a_1, \ldots, a_4{\in}\mathbf{T}^2$. Следовательно, в малых окрестностях этих точек можно принять переменные x_4 и x_5 за локальные координаты на $\mathbf{T}^2$, и переменные x_1, x_2, x_3 и x_6 — однозначные аналитические функции от x_4 и x_5.

Рассмотрим дифференциальные уравнения Пуассона

$$\dot{x}_4 = x_3x_5 - x_2x_6, \quad \dot{x}_5 = x_1x_6 - x_3x_4, \tag{3.2}$$

где вместо x_1, x_2, x_3 и x_6 подставлены их выражения через x_4 и x_5. Так как $I_1 \neq 0$, то уравнения (3.2) не имеют особых точек вблизи $a_1, \ldots, a_4$.

Существуют достаточно малые окрестности U_i точек a_i такие, что, когда $m(t) \in U_i$, то колебание функции $F(\varphi_2,\, t)$ не превосходит 2π.

Действительно, когда m движется по траекториям уравнений (2.2), то $F(\varphi_2, t)$ совпадает с углом φ, изображенным на рис. 17. Траектория Г, проходящая через точку $x_4 = x_5 = 0$, делит $U_i = U$ на две части, в каждой из которых изменение φ непрерывно, а при переходе через Г функция φ испытывает скачок на π. Но во всех случаях колебание φ ограничено заведомо числом 2π, так как в малой окрестности U траектории уравнений (3.2) почти прямые.

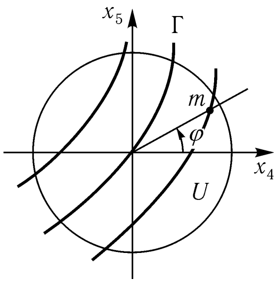

Рис. 17

В дополнении к $U_1, \ldots, U_4$ функция $1 - x_6^2 > \varepsilon > 0$, следовательно, функция $\Phi(\varphi_1, \varphi_2)$ ограничена, а вместе с ней ограничено колебание функции $F(\varphi_2, t)$. Объединяя сказанное, заключаем, что $F(\varphi_2, t)$ ограничена в $S^1 \times [0, 2\pi/\omega_1]$.

За время $t = 2\pi n/\omega_1$ угол φ станет равным

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k2\pi\omega_2/\omega_1 + \varphi_2) = \sigma_n.$$

Так как ω_2/ω_1 иррационально, то по теореме Вейля о равномерном распределении [65] существует

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sigma_n}{n} = \lambda.$$

Из ограниченности функции $F(\varphi_2, t)$ следует, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \frac{2\pi\lambda}{\omega_1} = \Lambda.$$

По той же теореме Вейля число Λ зависит только от I_1, I_2. ■

Идея доказательства этой теоремы восходит к исследованиям Вейля о среднем движении перигелиев планет [63].

§ 4. Задача о движении линии узлов

Угол прецессии ψ определяется из равенства

$$\dot{\psi} = \frac{x_1 x_4 + x_2 x_5}{1 - x_6^2} = -\frac{x_3 x_6}{4(1 - x_6^2)}.$$

Если выполнены условия леммы 2, то $\dot{\psi} = \Psi$ — аналитическая функция от равномерно изменяющихся переменных φ_1 и φ_2. В других случаях Ψ имеет особенность в точках на $\mathbf{T}^2$, где $x_6^2 = 1$. Пусть $x_6^2 = 1$ при $t = t'$. Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, когда $I_1 \neq 0$, получим

$$\lim_{t \to t'} \Psi(t) = \mp \frac{I_2}{2I_1} \quad (x_6(t) \to \pm 1).$$

Теорема 3. *Пусть $I_1 \neq 0$, $I_1 \nu^2 \neq 4I_2^2$. Если частоты ω_1 и ω_2 соизмеримы, то линия узлов обладает средним движением. Если же ω_1 и ω_2 несоизмеримы, то линия узлов обладает главным движением, зависящим только от I_1, I_2.*

Доказательство.

Если отношение частот ω_1/ω_2 рационально, то $\dot{\psi}$ — непрерывная периодическая функция времени (в точках, где $x_6 = \pm 1$, она полагается равной $\mp I_2/2I_1$). Следовательно, $\psi = = \lambda t + O(1)$.

Рассмотрим случай, когда отношение ω_1/ω_2 иррационально. Если $I_1 \nu^2 < 4I_2^2$, то $\Psi(\varphi_1, \varphi_2)$ непрерывна на $\mathbf{T}^2$, и заключение теоремы вытекает из теоремы об усреднении [4]. Если же $I_1 \nu^2 > 4I_2^2$, то, как при доказательстве теоремы 2, введем функцию

$$F(\varphi_2, t) = \int\limits_0^t \Psi(\omega_1 \tau + \varphi_1^0, \omega_2 \tau + \varphi_2) d\tau, \quad \varphi_2 \in S^1, \quad t \in [0, 2\pi/\omega_1].$$

Для доказательства ее ограниченности снова рассмотрим окрестности U_i точек $a_1, \ldots, a_4$. В областях U_i, где x_6 близко к 1, запишем тождество

$$\dot{\psi} = -\dot{\varphi} + f, \quad f = \frac{x_3(4 + 3x_6)}{4(1 + x_6)}.$$

Когда $m(t) \in U_i$, то интеграл по времени от f ограничен (так как f непрерывна в U_i) вместе с интегралом от $\dot{\varphi}$. Аналогично рассматривается движение в других окрестностях, где x_6

близко к -1. Вне $U_1, \ldots, U_4$ функция Ψ ограничена, следовательно, ограничено колебание F. Объединяя сказанное, получим, что $F(\varphi_2, t)$ ограничена на $S^1 \times [0, 2\pi/\omega_1]$. Для завершения доказательства осталось применить теорему Вейля о равномерном распределении. ■

Предложение 2. *Если* $I_1\nu^2 \neq 4I_2^2$, *то функция* $\Psi(\varphi_1, \varphi_2)$ *интегрируема по Лебегу на* $\mathbf{T}^2\{\varphi_1, \varphi_2 \mod 2\pi\}$.

Доказательство.

Если $I_1\nu^2 < 4I_2^2$, то Ψ непрерывна на $\mathbf{T}^2$ и утверждение очевидно. В случае, когда $I_1\nu^2 > 4I_2^2$, функция Ψ непрерывна всюду, кроме точек $a_1, \ldots, a_4$, где $x_6^2 = 1$. Поэтому достаточно доказать интегрируемость Ψ в малых окрестностях U_i точек $a_1, \ldots, a_4$. Так как $I_1\nu^2 \neq 4I_2^2$, то за локальные координаты в U_i можно взять переменные x_4 и x_5. Якобиан преобразования $(\varphi_1, \varphi_2) \to (x_4, x_5)$

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x_4, x_5)}$$

аналитичен по x_4, x_5. По формуле замены переменных

$$\iint\limits_{U_i} \Psi(\varphi_1, \varphi_2)d\varphi_1 d\varphi_2 = \iint\limits_{U_i} \Psi(x_4, x_5)\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x_4, x_5)}dx_4 dx_5.$$

Воспользуемся равенством

$$\Psi = -\frac{x_3x_6}{4(x_4^2 + x_5^2)}.$$

Функции x_3 и x_6 аналитичны по x_4 и x_5 в U_i, причем $x_3 = 0$, когда $x_4 = x_5 = 0$. Следовательно, подынтегральная функция в переменных x_4, x_5 имеет вид

$$F = f(x_4, x_5)/(x_4^2 + x_5^2),$$

где f — аналитическая функция в U_i и $f(0, 0) = 0$. В полярных координатах (r, φ): $x_4 = r\cos\varphi$, $x_5 = r\sin\varphi$.

$$\iint\limits_{U_i} F\, dx_4 dx_5 = \iint\limits_{U_i} \frac{f}{r} dr\, d\varphi.$$

Так как f/r непрерывна и ограничена в проколотой окрестности точки a_i, то F интегрируема по Лебегу в области $U_1, \dots, U_4$. ■

Теорема 4. *При малых* ν

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Psi(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_2\, d\varphi_2 = 0.$$

Для доказательства этой теоремы потребуется

Лемма 3. *Пусть сужение функции* $f(x_1, \dots, x_6)$ *на инвариантный тор* $\mathbf{T}^2$ *интегрируемо по Лебегу. Тогда*

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 = \oint \frac{f}{V_4} d\sigma,$$

где V_4 *— четырехмерный объем параллелепипеда, построенного на векторах* $\operatorname{grad} I_i$ $(i = 1, \dots, 4)$ *как на сторонах, а* $d\sigma$ *— элемент площади на* $\mathbf{T}^2$ *как поверхности в* $\mathbf{R}^6\{x_1, \dots, x_6\}$.

Доказательство.

В некоторой окрестности инвариантного тора $\mathbf{T}^2\{\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi\}$ в $\mathbf{R}^6$ можно сделать обратимую замену переменных

$$x_i = x_i(I_1, \dots, I_4, \varphi_1, \varphi_2) \quad (i = 1, \dots, 6).$$

В новых переменных I, φ уравнения движения имеют вид (когда $I_3 = 0$) $\dot{I}_i = 0$, $\dot{\varphi}_j = \Phi_j(I_1, \dots, I_4)$; $i = 1, \dots, 4$; $j = 1, 2$. Эти уравнения имеют интегральный инвариант с плотностью

$$\rho = M \frac{\partial(x_1, \dots, x_6)}{\partial(I_1, \dots, I_4, \varphi_1, \varphi_2)},$$

где M — плотность интегрального инварианта в переменных $x_1, \dots, x_6$. Так как $M \equiv 1$, а $\rho = 1$, когда $I_3 = 0$, то в этом случае

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_6)}{\partial(I_1, \dots, I_4, \varphi_1, \varphi_2)} = 1.$$

Рассмотрим векторы

$$\xi_i = \left(\frac{\partial x_1}{\partial I_i}, \ldots, \frac{\partial x_6}{\partial I_i}\right); \quad i = 1, \ldots, 4,$$
$$\eta_j = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \varphi_j}, \ldots, \frac{\partial x_6}{\partial \varphi_j}\right); \quad j = 1, 2.$$

Очевидно, что

$$(\operatorname{grad} I_i,\, \xi_j) = \delta_{ij}; \quad i, j = 1, \ldots, 4,$$
$$(\operatorname{grad} I_i,\, \eta_k) = 0; \quad i = 1, \ldots, 4; \quad k = 1, 2,$$

(δ_{ij} — символ Кронекера). Представим векторы ξ_i в виде $\xi_i' + \xi_i''$, где ξ_i' ортогональны η_1, η_2, а ξ_i'' разлагаются по η_1 и η_2. Тогда

$$V_6(\xi_1 \ldots \xi_4 \eta_1 \eta_2) = \left|\frac{\partial(x_1, \ldots, x_6)}{\partial(I_1, \ldots, I_4 \varphi_1 \varphi_2)}\right| = V_4(\xi_i') V_2(\eta_j) = 1. \tag{4.1}$$

Здесь через $V_n(a_1, \ldots, a_n)$ обозначен n-мерный объем параллелепипеда, построенного на векторах $a_1, \ldots, a_n$ как на сторонах. Так как снова

$$(\operatorname{grad} I_i,\, \xi_j') = \delta_{ij},$$

то

$$V_4(\operatorname{grad} I_i) V_4(\xi_j') = 1.$$

Учитывая (4.1), получим, что

$$V_4(\operatorname{grad} I_i) = V_2(\eta_j).$$

Следовательно,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f\, d\varphi_1 d\varphi_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f V_2(\eta_1, \eta_2)}{V_4(\operatorname{grad} I_i)} d\varphi_1 d\varphi_2 = \oint \frac{f\, d\sigma}{V_4},$$

так как по определению элемента площади $d\sigma = V_2(\eta_1, \eta_2) d\varphi_1 d\varphi_2$.

Доказательство теоремы 4.

Рассмотрим преобразование $\alpha : \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^6$, определенное формулой $y = \alpha(x)$, где $x = (x_1, \dots, x_6)$, а $y = (-x_1, -x_2, x_3, x_4, x_5, -x_6)$. Отображение α — линейное ортогональное преобразование — произведение трех зеркальных отражений относительно координатных гиперплоскостей. При малых ν каждый из двух инвариантных торов, составляющих совместный уровень интегралов, переходит в себя (см. доказательство леммы 1). Так как $\alpha : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$ сохраняет площадь, то якобиан этого преобразования равен единице и, следовательно,

$$\oint\limits_{\mathbf{T}^2} \frac{\Psi(\alpha(x))}{V_4(\alpha(x))} d\sigma = \oint \frac{\Psi(x)}{V_4(x)} d\sigma. \tag{4.2}$$

По формуле Грама

$$V_4(\operatorname{grad} I_k) = \sqrt{\det \|(\operatorname{grad} I_i \ \operatorname{grad} I_j)\|}; \quad i, j, k = 1, \dots, 4.$$

Используя это соотношение, можно показать, что $V_4(\alpha(x)) = V_4(x)$. Так как $\Psi(\alpha(x)) = -\Psi(x)$, то из (4.2) следует равенство

$$\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Psi(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 = \oint\limits_{\mathbf{T}^2} \frac{\Psi d\sigma}{V_4} = 0. \qquad \blacksquare$$

Следствие. *Если ν мало и отношение частот ω_1/ω_2 иррационально, то главное движение линии узлов равно нулю.*

Действительно, по теореме о равномерном распределении [6, 65]

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Psi(t)}{t} = \lambda = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Psi(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 = 0.$$

Замечание. Пусть $I_2 \neq 0$ и ν мало. Тогда главное движение линии узлов λ равно нулю. Будем увеличивать значения параметра ν. При этом, очевидно, коэффициент λ будет равен нулю по крайней мере до тех тор, пока интегралы (1.1) независимы, и функция $\dot{\psi} = \Psi$ не имеет аналитических особенностей (т. е. $I_1\nu^2 < 4I_2^2$).

§ 5. Теорема о временных средних

Рассмотрим в прямом произведении $D \times \mathbf{T}^n$, где D — область в $\mathbf{R}^k\{I_1, \ldots, I_k\}$, $\mathbf{T}^n\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n \mod 2\pi\}$ — n-мерный тор, следующую систему уравнений с непрерывными правыми частями:

$$\dot{I}_j = 0, \quad \dot{\varphi}_i = \omega_i(I_1, \ldots, I_k); \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, k.$$

Они немедленно интегрируются:

$$I = I^0, \quad \varphi = \omega t + \varphi^0, \quad I = (I_1, \ldots, I_k),$$
$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \quad \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n).$$

Пусть $f(I, \varphi)$ — непрерывная функция на $D \times \mathbf{T}^n$. Положим

$$\lambda(I) = (2\pi)^{-n} \int\limits_0^{\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} f(I, \varphi) d\varphi,$$

$$g(I, \varphi) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(I, \omega t + \varphi) dt.$$

По теореме об усреднении [4] предел всегда существует. Между временными $g(I, \varphi^0)$ и пространственными $\lambda(I)$ средними известны соотношения [4, 20]:

1) для всех I функция $g(I, \varphi)$ непрерывна по $\varphi \in \mathbf{T}^n$ и

$$(2\pi)^{-n} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} g(I, \varphi) d\varphi = \lambda(I);$$

2) если при $I = I^0$ частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ независимы, то $g(I^0, \varphi) = \lambda(I^0)$ для всех $\varphi \in \mathbf{T}^n$.

В общем случае функция $g(I, \varphi)$ разрывна на $D \times \mathbf{T}^n$.

Теорема 5. *Пусть при $I = I^0$ частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ рационально независимы. Тогда равномерно по $\varphi \in \mathbf{T}^n$*

$$\lim_{I \to I^0} g(I, \varphi) = \lambda(I^0).$$

Таким образом, функция $g(I, \varphi)$, $(I, \varphi) \in D \times \mathbf{T}^n$, непрерывна на нерезонансных торах и, вообще говоря, разрывна в точках, лежащих на резонансных торах. Эта функция напоминает классический пример функции Римана, непрерывной в иррациональных и разрывной в рациональных точках [66].

Доказательство теоремы 5.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U_1 точки $I^0 \in D$ и два тригонометрических полинома P_1 и P_2 от φ, такие, что

$$P_1(\varphi) < f(I, \varphi) < P_2(\varphi) \quad \forall (I, \varphi) \in U_1 \times \mathbf{T}^n, \tag{5.1}$$

$$(2\pi)^{-n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} (P_2 - P_1) d\varphi < \varepsilon. \tag{5.2}$$

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U_1 точки I^0 такая, что

$$|f(I, \varphi) - f(I^0, \varphi)| < \varepsilon/4 \quad \forall (I, \varphi) \in U_1 \times \mathbf{T}^n.$$

По теореме Вейерштрасса об апроксимации [46] существует тригонометрический полином $P(\varphi)$, для которого

$$|f(I^0, \varphi) - P(\varphi)| < \varepsilon/4 \quad \forall \varphi \in \mathbf{T}^n.$$

Положим $P_1 = P - \varepsilon/2$, $P_2 = P + \varepsilon/2$. Тогда P_1 и P_2 удовлетворяют (5.1) и (5.2).

Пусть N — степень P_1 и P_2. Так как при $I = I^0$ частоты $\omega_1, \dots, \omega_n$ независимы, то в некоторой окрестности $U_2 \subset D$ точки I^0 справедливы неравенства

$$|(k, \omega(I))| = \left| \sum_{i=1}^{n} k_1 \omega_i(I) \right| > \varepsilon > 0;$$
$$k = (k_1, \dots, k_n); \quad \varepsilon = \text{const},$$

где k_i — целые числа, $0 < |k| = \sum\limits_{i=1}^{n} |k_i| \leqslant N$.

Для любого тригонометрического полинома

$$f = \sum_{|k| \leqslant N} f_k e^{i(k, \varphi)}$$

существует полином $g(\varphi)$ такой, что

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial \varphi_1}\omega_1 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial \varphi_n}\omega_n = f - f_0. \tag{5.3}$$

Действительно, можно положить

$$g(\varphi) = \sum_{0<|k|\leqslant N} \frac{f_k}{i(k,\,\omega)} e^{i(k,\,\varphi)}.$$

Из (5.3) следует, что

$$\int\limits_0^t f(\omega t + \varphi^0)dt = f_0 t + g(\omega t + \varphi^0) - g(\varphi^0).$$

Отсюда

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(\omega t + \varphi^0)dt = f_0 = (2\pi)^{-n}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi.$$

В нашем случае

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T P_i(\omega t + \varphi^0)dt = \Lambda_i = (2\pi)^{-n}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi} P_i d\varphi; \quad i = 1,\,2.$$

Из (5.1) следует, что для всех $T > 0$ и всех $I \in U_1$

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T P_1 dt < \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(I,\,\omega t + \varphi)dt < \frac{1}{T}\int\limits_0^T P_2 dt.$$

Переходя к пределу при $T \to \infty$, получим для $I \in U = U_1 \cap U_2$ неравенство

$$\Lambda_1 \leqslant g(I,\,\varphi) \leqslant \Lambda_2. \tag{5.4}$$

С другой стороны, интегрируя по φ соотношение (5.1) при $I = I^0$, будем иметь

$$\Lambda_1 \leqslant \lambda(I^0) < \Lambda_2. \tag{5.5}$$

Так как $0 < \Lambda_1 - \Lambda_2 < \varepsilon$, то из (5.4) и (5.5) вытекает неравенство

$$|g(I, \varphi) - \lambda(I^0)| < \varepsilon \quad \forall (I, \varphi) \in U \times \mathbf{T}^n. \qquad \blacksquare$$

Возвращаясь к исследованию волчка Горячева–Чаплыгина, рассмотрим случай, когда $I_1\nu^2 < 4I_2^2$ и ν мало. В этом случае Ψ, ω_1, ω_2 аналитичны по I, φ: $I = (I_1, I_2)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$. Если для $I = I^0$ частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы, то по теореме 3 главное движение линии узлов λ равно нулю. Однако на практике невозможно установить, рационально или нет отношение ω_1/ω_2. Теорема 5 утверждает, что независимо от соизмеримости частот число λ мало, если I близко к I^0.

Исторический очерк

Качественное исследование движения волчка Горячева–Чаплыгина начато Л. Н. Сретенским в работе [67]. *В ней подробно изучается случай, когда тело приведено в быстрое вращение относительно горизонтально расположенной главной оси эллипсоида инерции, на которой лежит центр тяжести. Нетрудно показать, что в этом случае справедливо неравенство* $I_1\nu^2 \geqslant 4I_2^2$, *т. е. ось динамической симметрии может занимать вертикальные положения. Л. Н. Сретенский вводит в уравнения движения малый параметр, соответствующий быстрым вращениям тела, и в первом приближении по этому параметру получает формулы*:

$$\cos\vartheta = -\cos\varphi_1\cos\varphi_2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \sin\varphi_1\operatorname{ctg}\varphi_2,$$

$$\dot\psi = \frac{\cos\varphi_1\sin\varphi_1\cos\varphi_2}{1-\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2}; \quad \dot\varphi_1 = -\frac{3\nu}{4\omega_0} \ll 1, \quad \dot\varphi_2 = \omega_0 \gg 1.$$

(ω_0 ($\omega_0 \gg 1$) — *начальная угловая скорость тела*). *Отсюда вытекает, например, что нутация твердого тела имеет характер «биений».*

Однако из формул для φ *и* ψ *не удалось сделать качественных выводов о характере собственного вращения и прецессии тела при изменении времени от* $-\infty$ *до* ∞. *Препятствием оказалось то обстоятельство, что в общем случае,* *когда отношение частот иррационально, ось симметрии подходит сколь угодно близко к вертикали, и в эти моменты функции* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *изменяются скачкообразно. С аналогичной трудностью встретились в свое время в небесной механике при решении задачи Лагранжа о среднем движении перигелиев планет* [17, 63]. *Идея исследования особенностей собственного вращения и движения линии узлов, проведенного в этой главе, восходит к П. Болю* [68] *и Г. Вейлю* [63], *вычислившим главное движение в задаче Лагранжа.*

Исследования Л.Н.Сретенского были продолжены Ю.А.Архангельским [69], *рассмотревшим быстрое вращение тела в случае, когда* $I_1\nu^2 < 4I_2^2$. *Из результатов Ю. А. Архангельского вытекает, в частности, что в первом приближении линия узлов совершает ограниченные колебания. Этот факт согласуется с заключением теоремы* 4.

Работа А. И. Докшевича [70] *посвящена анализу изменения специальных переменных, введенных Чаплыгиным для интегрирования уравнений движения. В ней же исследована бифуркация корней «характеристического» многочлена* $\Phi(z)$.

Отметим, что не только в задаче Горячева – Чаплыгина уравнения движения можно свести к системе

$$\frac{ds_1}{dt} = \frac{\sqrt{\Phi(s_1)}}{s_1 \pm s_2}, \quad \frac{ds_2}{dt} = \frac{\sqrt{\Phi(s_2)}}{s_1 \pm s_2}. \tag{1}$$

Такое сведение можно сделать, например, в задаче С. В. Ковалевской, в задаче двух центров, в системах Лиувилля (гл. IX). *Приведение системы дифференциальных, уравнений* (1) *к виду* $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$, $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$, $\omega_2 = \mathrm{const}$, *выполненное в* § 1, *фактически является эффективным способом введения переменных «угол».*

Укажем еще на работу Г. В. Горра [72], *в которой дана качественная картина вращения тела в некоторых вырожденных случаях, когда первые интегралы зависимы.*

Глава VIII
Финальные свойства интегралов от квазипериодических функций

Пусть $\mathbf{T}^n$ — n-мерный тор с угловыми координатами $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \mod 1$. Рассмотрим квазипериодическое движение на $\mathbf{T}^n$:

$$\varphi = \omega t + \varphi^0, \quad \varphi^0 = \varphi(0),$$

где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) = \mathrm{const}$. Предположим, что частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ независимы над полем рациональных чисел. Пусть $f(\varphi)$ — непрерывная функция на $\mathbf{T}^n$. Рассмотрим интеграл от f вдоль траектории этого квазипериодического движения:

$$I(t, \varphi_0) = \int\limits_0^t f(\omega t + \varphi^0)\, dt.$$

По теореме об усреднении [4], $I(t, \varphi^0) = \lambda t + \Phi(t, \varphi^0)$,

$$\lambda = \overline{f} = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t, \varphi^0)}{t} = 0 \quad \forall \varphi^0 \in \mathbf{T}^n.$$

В гл. VIII рассматривается поведение $\Phi(t, \varphi^0)$ как функции времени в зависимости от начальных фаз $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0)$. Задача исследования интеграла $I(t, \varphi^0)$ часто встречается при качественном анализе динамических систем. Как было показано в гл. VII, исследование движения линии узлов в случае Горячева–Чаплыгина сводится к частному случаю этой задачи, когда $n = 2$.

§ 1. Уточнение одной теоремы Боля

Теорема 1. *Пусть частоты* $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *независимы. Тогда существует точка* $\varphi^0 \in \mathbf{T}^n$ *такая, что*

$$I(t, \varphi^0) - \lambda t \geqslant 0 \ (\leqslant 0) \quad \forall t \in \mathbf{R} \tag{1.1}$$

и $f(\varphi^0) = \lambda$.

Замечание. Уточнение теоремы Боля [73] состоит в том, что начальные фазы $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0)$, для которых справедливы неравенства (1.1), существуют на множестве $\{\varphi \in \mathbf{T}^n : f(\varphi) = \lambda\}$. В теореме Боля есть еще дополнительное условие: разность $I(t, \varphi^0) - \lambda t$ должна быть неограниченной.

Лемма 1. *Теорема* 1 *справедлива для тригонометрических многочленов.*

Доказательство.

Так как частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ независимы, то для любого тригонометрического многочлена $f(\varphi)$ со средним значением λ найдется многочлен $g(\varphi)$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial \varphi_1} \omega_i = f - \lambda. \tag{1.2}$$

Тогда

$$I(t, \varphi) = \int_0^t f(\omega t + \varphi) dt = \lambda t + g(\omega t + \varphi) - g(\varphi).$$

Пусть $g(\varphi)$ имеет минимум (максимум) в точке $\varphi = \varphi^0$. Тогда

$$I(t, \varphi^0) - \lambda t \geqslant 0 \ (\leqslant 0) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

и $\partial g / \partial g_i = 0$ при $\varphi_i = \varphi_i^0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Учитывая (1.2), получим, что $f(\varphi^0) = \lambda$. ■

Доказательство теоремы 1.

Для любой непрерывной функции $f(\varphi)$ существует последовательность тригонометрических многочленов $P_m(\varphi)$ такая, что

$$\max_{\varphi \in \mathbf{T}^n} |f(\varphi) - P_m(\varphi)| \to 0$$

при $m \to \infty$. Обозначим через λ и λ_m фазовые средние функций f и P_m. По лемме 1 существуют начальные фазы φ_m^0, при которых

$$I_m(t,\varphi_m^0)=\int\limits_0^t P_m(\omega t+\varphi_m^0)dt \geqslant \lambda_m t \; (\leqslant \lambda_m t) \quad \forall t\in \mathbf{R}$$

и $P_m(\varphi_m^0) = \lambda_m$. Так как $\mathbf{T}^n$ — компакт, то из последовательности φ_m^0 $(m = 1, 2, \dots)$ можно выбрать подпоследовательность $\varphi_{m_k}^0$ $(k = 1, 2, \dots)$, сходящуюся к некоторой точке $\varphi^0 \in \mathbf{T}^n$. При фиксированном $t \in \mathbf{R}$

$$\lim_{k\to\infty} I_{m_k}(t,\varphi_{m_k}^0)=I(t,\varphi^0), \quad \lim_{k\to\infty} P_{m_k}(\varphi_{m_k}^0)=f(\varphi^0).$$

Так как $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_m = \lambda$, то

$$I(t,\varphi^0)-\lambda t \geqslant 0 \; (\leqslant 0) \quad \forall t\in \mathbf{R}$$

и $f(\varphi^0) = \lambda$. ■

Покажем, что теорема 1 справедлива и в том случае, когда частоты $\omega_1, \dots, \omega_n$ соизмеримы. Более точно, имеет место

Предложение 1. *Если частоты $\omega_1, \dots, \omega_n$ рационально зависимы, то существуют по крайней мере две точки $\varphi^0 \in \mathbf{T}^n$ такие, что*

$$I(t,\varphi^0)-\lambda t \geqslant 0 \; (\leqslant 0) \quad \forall t\in \mathbf{R}$$

и $f(\varphi^0) = \lambda$.

Для доказательства нам потребуется

Лемма 2. *Если наибольший общий делитель целых чисел $k_1, \dots, k_n$ равен 1, то существует унимодулярная матрица S порядка n с целочисленными элементами такая, что одна из ее строк есть $k = (k_1, \dots, k_n)$.*

Для доказательства рассмотрим одномерную подгруппу $\mathbf{H}$ группы $\mathbf{Z}^n$, порожденную точкой k. Существует свободная система n точек $a_1, \dots, a_n$, порождающая $\mathbf{Z}^n$, такая, что $ba_n = k$, где b — инвариантный множитель $\mathbf{H}$ относительно $\mathbf{Z}^n$ — некоторое целое число [74, гл. VII, § 4]. Так как н.о.д. целых чисел $k_1, \ldots, k_n$ равен 1, то, очевидно, $b = \pm 1$ и $k = \pm q_n$. Точки a_i образуют базис $\mathbf{Z}^n$, следовательно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 1,$$

где $a_i = (a_{i1} \ldots a_{in})$. Утверждение доказано.

Замечание. В случае $n = 2$ заключение леммы вытекает также из «тождества Безу» [74, гл. VII]: н.о.д. $(k_1, k_2) = 1$ тогда и только тогда, когда существуют целые числа m_1 и m_2 такие, что $m_1k_1 + m_2k_2 = 1$.

Доказательство предложения 1.

Пусть частоты связаны линейным соотношением

$$k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n = 0; \quad k_i \in \mathbf{Z}; \quad i = 1, \ldots, n$$

и $\sum\limits_i |k_i| \neq 0$. Без ущерба общности можно считать, что

$$\text{н.о.д.}(k_1, \ldots, k_n) = 1.$$

Рассмотрим линейное взаимно-однозначное отображение $\mathbf{T}^n$ на себя, задаваемое унимодулярной матрицей S с целыми элементами:

$$\begin{gathered} \psi_1 = s_{11}\varphi_1 + \ldots + s_{1n}\varphi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n = s_{n1}\varphi_1 + \ldots + s_{nn}\varphi_n, \end{gathered}$$

где $s_{n1} = k_1, \ldots, s_{nn} = k_n$. Переменные $\psi_1, \ldots, \psi_n \mod 1$ — новые угловые координаты на $\mathbf{T}n$. В этих переменных

$$\begin{aligned} \dot\psi_1 &= s_{11}\omega_1 + \ldots + s_{1n}\omega_n = \Omega_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot\psi_{n-1} &= s_{n-1,1}\omega_1 + \ldots + s_{n-1,1}\omega_n = \Omega_{n-1}, \\ \dot\psi_n &= k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n = 0, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\psi_1 = \Omega_1 t + \psi_1^0, \ldots, \psi_{n-1} = \Omega_{n-1} t + \psi_{n-1}^0, \psi_n = \psi_n^0.$$

Будем считать, что $\det S = 1$ (если $\det S = -1$, то в матрице S можно переставить местами строки).

По формуле замены переменных в кратных интегралах

$$\lambda = \oint\limits_{\mathbf{T}^n} f(\psi_1, \ldots, \psi_n) \det S \, d\psi_1 \ldots d\psi_n =$$

$$= \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}, \psi_n) d\psi_1 \ldots d\psi_{n-1} \right\} d\psi_n.$$

Функция

$$J(x) = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}, x) d\psi_1 \ldots d\psi_{n-1}$$

непрерывна на $\mathbf{T}^1\{x \mod 1\}$ и

$$\int\limits_0^1 J(x) dx = \lambda.$$

Следовательно, существуют по крайней мере два значения ψ_n^0 такие, что $J(\psi_n^0) = \lambda$. Другими словами, существуют два тора

$$\mathbf{T}^{n-1} = \{(\psi_1, \ldots, \psi_n) \in \mathbf{T}^n : \psi_n = \psi_n^0\} \subset \mathbf{T}^n$$

такие, что фазовые средние сужения функции f на $\mathbf{T}^{n-1}$ равны в точности λ. На $\mathbf{T}^{n-1}\{\psi_1, \ldots, \psi_{n-1} \mod 1\}$ естественным образом возникает квазипериодическое движение:

$$\psi_1 = \Omega_1 t + \psi_1^0, \ldots, \psi_{n-1} = \Omega_{n-1} t + \psi_{n-1}^0.$$

Если частоты $\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}$ несоизмеримы, то справедливость предложения вытекает из теоремы 1. Если же $\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}$ соизмеримы, то эту операцию можно проделать еще раз. В конце концов мы придем к m-мерному тору $\mathbf{T}^m \subset \mathbf{T}^n$ $(1 \leqslant m < n)$ с независимыми частотами. ■

§ 2. Теорема о возвращении

В этом и следующем параграфах исследуется простейший нетривиальный случай, когда $n = 2$. Интеграл $I(t, \varphi^0)$ запишется следующим образом:

$$I(t, \varphi_1^0, \varphi_1^0) = \int_0^t f(\omega_1 t + \varphi_1^0, \omega_2 t + \varphi_2^0)dt.$$

Без ущерба общности можно считать, что $\lambda = \overline{f} = 0$, так как общий случай сводится к этому, если ввести функцию $g = f - \lambda$.

Пуанкаре показал на примерах [75, 76], что в этом случае интеграл $I(t)$ может стремиться к $+\infty$ или $-\infty$ (как t^α, $0 < \alpha < 1$) и (самый интересный случай) быть неограниченным, но бесконечно много раз подходить сколь угодно близко к своему начальному значению (т. е. к нулю). В связи с этим естественно поставить вопрос о нахождении условий, при которых будет иметь место возвращаемость интеграла $I(t)$ (устойчивость по Пуассону). Первый шаг в его решении — исследование дискретного аналога этой задачи, которое позволит установить, что возвращаемость имеет место, если функция f дважды непрерывно дифференцируема.

Предположим, что на окружности $S^1\{x \mod 1\}$ задана непрерывная функция $f(x)$. Пусть α — некоторое иррациональное число. Составим сумму

$$S_N(\alpha, \varphi) \sum_{i=0}^{N-1} f(1\alpha + \varphi), \quad \varphi \in S^1.$$

Если

$$\overline{f} = \int_0^1 f(x)dx > 0 \ (< 0)$$

то, очевидно, сумма $S_N(\alpha, \varphi) \to +\infty\,(-\infty)$ при $N \to \infty$ равномерно по φ. Всюду ниже будем считать, что $\overline{f} = 0$.

Все иррациональные числа разобьем на два класса. Класс K_1 составляют такие числа α, для которых неравенство

$$|n\alpha - m| < |n|^{-3/2} \tag{2.1}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах. Остальные отнесем к классу K_2. При $\alpha \in K_1$ в неравенстве (2.1) числа m и n можно считать взаимно простыми. Если это не так, то пусть d $(d > 1)$ их наибольший общий делитель. Положим $m = dm_1$, $n = dn_1$; тогда

$$|n_1\alpha - m_1| < d^{-5/2}|n_1|^{-3/2} < |n_1|^{-3/2}. \tag{2.2}$$

Покажем, что таким преобразованием можно получить бесконечное число различных неравенств (2.2) со взаимно простым m_1 и n_1. Действительно, предположим, что мы получили только конечное число таких неравенств. При этом, конечно, наибольшие общие делители d чисел m и n не ограничены сверху. Записывая неравенство (2.2) в виде

$$\left|\alpha - \frac{m_1}{n_1}\right| < \frac{1}{d^{5/2}|n_1|^{5/2}},$$

получим, согласно предположению, что количество различных рациональных чисел m_1/n_1, удовлетворяющих этому неравенству, конечно. Когда d стремится к бесконечности, разность между α и одним из чисел m_1/n_1 становится сколь угодно малой. Значит, α равно этому рациональному числу, что противоречит, однако, иррациональности α.

Отметим, что почти все иррациональные числа принадлежат классу K_2, однако, имеющее меру нуль множество $K_1 \subset \mathbf{R}$ равномощно $\mathbf{R}$.

Нам потребуется

Лемма 3 (77, с. 30). *Ряд*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}|n\alpha - m_n|}$$

сходится для всех $\varepsilon > 0$ и для всех $m_n \in \mathbf{Z}$, если α таково, что

$$|n\alpha - m| \geqslant n^{\frac{K}{1+\varepsilon-\delta}} \quad (K > 0, \quad 0 < \delta < \varepsilon)$$

при всех целых m и n.

Следствие. *Ряд*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2|n\alpha - m_n|}$$

сходится, если $\alpha \in K_2$ *(полагаем* $\varepsilon = K = 1$, $\delta = 1/2$*).*

Лемма 4. *При некотором целом* m

$$|e^{i2\pi n\alpha} - 1| \geqslant 4|n\alpha - m|.$$

Доказательство следствия леммы 3.

Исследуем поведение членов ряда S, в которых $|n\alpha - m_n| < 1$. Пусть S_i — ряды, составленные из членов ряда S, в которых суммирование распространяется на индексы $n_k^{(i)}$, для которых

$$1/2^{i+1} \leqslant |n_k^{(i)}\alpha - m_{n_k^{(i)}}| \leqslant 1/2^i \quad (i = 0, 1, \ldots; \quad n_{k+1}^{(i)} > n_k^{(i)}).$$

Очевидно, что если $S_i < \infty$ и $\sum\limits_i S_i < \infty$, то ряд S сходится.

Так как

$$\left|\alpha(n_k^{(i)} - n_{k+1}^{(i)}) - m\right| < 1/2^{i-1},$$

то

$$\frac{1}{2^{i-1}} \geqslant \frac{1}{N_i^{3/2}}, \quad \text{где} \quad N_i = \min_{0<k<\infty}(n_{k+1}^{(i)} - n_k^{(i)}).$$

Следовательно, $N_i \geqslant (2^{i-1})^{2/3}$. Ясно, что $n_1^{(i)} > N_i, \ldots, n_k^{(i)} > kN_i$. Поэтому

$$S_i < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{i+1}}{(kN_i)^2} = \frac{2^{i+1}}{N_i^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\pi^2}{6}\frac{2^{i+1}}{(2^{i-1})^{4/3}} = \frac{2\pi^2}{3}\frac{1}{(2^{i-1})^{1/3}} < \infty.$$

Так как $\sqrt[3]{2} > 1$, то $\sum\limits_i S_i < \infty$. ∎

Доказательство леммы 4.

Существует целое m такое, что $-1/2 \leqslant n\alpha - m < 1/2$. Тогда

$$|e^{2\pi i n\alpha} - 1| = |e^{\pi i n\alpha} - e^{-\pi i n\alpha}| = 2|\sin(\pi n\alpha)| = 2\sin(\pi|n\alpha - m|).$$

Так как $|n\alpha - m| = \nu \leqslant 1/2$, то $\sin\pi\nu \geqslant 2\nu$ и, следовательно,

$$|e^{2\pi i n\alpha} - 1| \geqslant 4|n\alpha - m|.$$

■

Лемма 5. *Если $\alpha \in K_2$, то существует непрерывная функция $F(\varphi)$, $\varphi \in S^1$, такая, что*

$$S_N(\alpha, \varphi) = F(N\alpha + \varphi) - F(\varphi).$$

Доказательство.

Разложим функцию f в сходящийся ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{i2\pi nx} \quad \left(|f_n| \leqslant \frac{c}{|n|^2},\ c > 0\right).$$

Тогда

$$S_N(\alpha, \varphi) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{i2\pi n(k\alpha+\varphi)} = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{i2\pi n\varphi} \frac{e^{i2\pi nN\alpha} - 1}{e^{i2\pi n\alpha} - 1}. \tag{2.3}$$

Согласно леммам 3 и 4 тригонометрический ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{f_n}{e^{i2\pi n\alpha} - 1} e^{i2\pi nx}$$

равномерно сходится и является рядом Фурье некоторой непрерывной функции $F(x)$ $(x \in S^1)$. Учитывая (2.3), получим, что

$$S_N(\alpha, \varphi) = F(N\alpha + \varphi) - F(\varphi).$$

■

Лемма 6. *Пусть $\alpha \in K_1$ и $|n\alpha - m| < n^{-3/2}$ $(n > 0)$. Тогда*

$$|S_n(\alpha, \varphi)| < \frac{M_1}{\sqrt{n}} + \frac{M_2}{24n}; \quad M_1 = \max_{\varphi \in S^1} |f'(\varphi)|,$$
$$M_2 = \max_{\varphi \in S^1} |f''(\varphi)|.$$

Доказательство.

Оценим разность

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(k\alpha+\varphi) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(k\frac{m}{n}+\varphi\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|f(k\alpha+\varphi) - f\left(k\frac{m}{n}+\varphi\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant M_1\sum_{k=0}^{n-1}\left|k\alpha - k\frac{m}{n}\right| \leqslant M_1 n\sum_{k=0}^{n-1}\left|\alpha-\frac{m}{n}\right| \leqslant$$
$$\leqslant M_1 n^2\left|\alpha-\frac{m}{n}\right| < \frac{M_1}{\sqrt{n}},$$
$$M_1 = \max_{x\in S^1}|f'(x)|.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(k\alpha+\varphi)\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(k\frac{m}{n}+\varphi\right)\right| + \frac{M_1}{\sqrt{n}}. \tag{2.4}$$

Так как числа m и n взаимно просты, то точки на S^1, угловые координаты которых

$$\varphi, \quad \varphi+\frac{m}{n}, \quad \varphi+2\frac{m}{n}, \quad \ldots, \quad \varphi+(n-1)\frac{m}{n}$$

расположены в вершинах правильного вписанного n-угольника. Так как $f\in C^2(S^1)$, то по известному способу (прямоугольников) вычисления определенных интегралов [78], на окружности S^1 существует точка ξ такая, что

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(k\frac{m}{n}+\varphi\right) + \frac{f''(\xi)}{24n^2}.$$

Отсюда

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(k\frac{m}{n}+\varphi\right)\right| \leqslant \frac{M_1}{24n}, \quad M_2 = \max_{x\in S^1}|f''(x)|.$$

Учитывая (2.4), получим окончательно

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\,(k\alpha + \varphi)\right| < \frac{M_1}{\sqrt{n}} - \frac{M_2}{24n}. \qquad \blacksquare$$

Из лемм 5 и 6 легко вытекает

Теорема 2. *Пусть*

$$f \in C^2(S^1), \quad \int\limits_0^1 f(x)dx = 0.$$

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и N_0 существует $N > N_0$ такое, что $|S_N(\alpha, \varphi)| < \varepsilon$ для всех $\varphi \in S^1$.

В качестве примера рассмотрим колебания упругой струны длины d; пусть a — скорость распространения возмущений. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ струна неподвижна, левый конец постоянно закреплен, а правый начинает совершать периодические колебания по закону $f(t)$ ($f(0) = 0$) с периодом T. Задача определения вынужденных колебаний струны при $t \geqslant 0$ является смешанной задачей для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\{t,\, x : 0 \leqslant t < \infty, \quad 0 \leqslant x \leqslant d\}.$$

Обозначим решение через $u(t,\, x)$.

Нетрудно доказать, что если отношение $d/(aT)$ рационально, то на струне существуют точки $x = \xi$ такие, что $u(t,\, \xi) \to \infty$ при $t \to \infty$ («параметрический резонанс»).

Теорема 3. *Предположим, что d/aT иррационально, функция f из класса C^2. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и τ существует $t > \tau$ такое, что $|u(t,\, x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [0,\, d]$.*

Доказательство.

Используя основное свойство характеристического параллелограмма, получим равенство

$$
\begin{gathered}
u\left(2\frac{d}{a}n;\ x\right)=\sum_{i=1}^{n} f(t_{2i})-\sum_{i=1}^{n} f(t_{2i-1}),\\
t_{2i}=t_2+2(i-1)\frac{d}{a},\quad t_{2i-1}=t_1+2(i-1)\frac{d}{a},\\
t_1=\frac{d-x}{a},\quad t_2=\frac{d+x}{a}.
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

Представим функцию $f(t)$ в виде $c+g(t)$, где c — среднее функции $f(t)$. Тогда равенство (2.5) можно переписать так:

$$
u\left(2\frac{d}{a}n;\ x\right)=\sum_{i=1}^{n} g(t_{2i})-\sum_{i=1}^{n} g(t_{2i-1}). \tag{2.6}
$$

Так как среднее периодической функции $g(t)$ класса C^2 равно нулю, а отношение $d/(aT)$ иррационально, то по теореме 2 для любых $\varepsilon>0$ и N_0 существует $N>N_0$ такое, что

$$
\left|\sum_{i=1}^{N} g(t_{2i})\right|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad \left|\sum_{i=1}^{N} g(t_{2i-1})\right|<\frac{\varepsilon}{2}
$$

равномерно по x. Учитывая (2.6), заключаем, что в момент времени $t=2dN/a$ будет справедливо неравенство $|u(t,x)|<\varepsilon$ для всех $x\in[0,\ d]$. ■

Теперь обратимся к вопросу о возвращаемости интеграла $I(t,\ \varphi_1^0,\ \varphi_2^0)$. Зафиксируем начальные фазы $\varphi_1^0,\ \varphi_2^0$.

Теорема 4 (теорема о возвращении). *Если f непрерывна на $\mathbf{T}^2$ и имеет две непрерывные производные по φ_2, а пространственное среднее функции f равно нулю, то для любых $\varepsilon>0$ и T существует $\tau>T$ такое, что $|I(\tau,\ \varphi_1^0,\ \varphi_2^0)|<\varepsilon$.*

Доказательство.

Рассмотрим на $\mathbf{T}^2$ окружность

$$
S^1=\{(\varphi_1,\ \varphi_2)\in\mathbf{T}^2:\varphi_1=\varphi_1^0\}
$$

и на ней функцию

$$
F(x)=\frac{1}{\omega_1}\int_0^1 f\left(\varphi_1,\ \frac{\omega_2}{\omega_1}\varphi_1-\frac{\omega_2}{\omega_1}\varphi_1^0+x\right)d\varphi_1,\quad x\in S^1.
$$

Очевидно равенство

$$I(na,\, \varphi_1^0,\, \varphi_2^0) = \sum_{k=0}^{n-1} F\left(k\frac{\omega_2}{\omega_1} + \varphi_1^0\right) = S_n\left(\frac{\omega_2}{\omega_1},\, \varphi_2^0\right);$$

$$a = \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0.$$

Функция $F(x) \in C^2(S^1)$. Далее,

$$\int\limits_0^1 F(x)dx = \frac{1}{\omega_1}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f\left(\varphi_1,\, \frac{\omega_2}{\omega_1}\varphi_1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\varphi_1^0 + x\right)d\varphi_1 dx =$$

$$= \frac{1}{\omega_1}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(\xi,\, \eta)d\xi d\eta = 0.$$

Теперь заключение теоремы 4 вытекает из теоремы 2. ■

Покажем, что теорема 4 неверна, если функция f только непрерывна. Мы воспроизведем здесь с точными оценками пример Пуанкаре [75, 76], о котором говорилось в начале этого параграфа.

Положим

$$f(\varphi_1,\, \varphi_2) = \sum_{n=0}^{n}\left(\frac{A}{\Lambda}\right)^n \cos 2\pi(u_n\varphi_1 + v_n\varphi_2),$$

где $\Lambda = \sqrt{2} + 1$, $(\Lambda + 1)/2 < A < \Lambda$, а целые числа u_n и v_n определяются из разложения

$$(\sqrt{2} - 1)^n = u_n + v_n\sqrt{2}.$$

Пусть частоты ω_1 и ω_2 равны соответственно $1/2\pi$, $\sqrt{2}/2\pi$, а начальные фазы φ_1^0, φ_2^0 равны нулю. Тогда

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\Lambda}\right)^n \cos\frac{t}{\Lambda^n}, \quad I(t) = \int\limits_0^t f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \sin\frac{t}{\Lambda^n}.$$

Лемма 7 (ср. с [76]). *Если* $1 < (\Lambda + 1)/2 < A < \Lambda$, *то* $I(t) \to \infty$ *при* $t \to \infty$.

Доказательство.

Пусть

$$\frac{\pi}{2}\Lambda^{n-1} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\Lambda^{n}; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$0 < \frac{\pi}{2\Lambda^{k+1}} \leqslant \frac{t}{\Lambda^{n+k}} \leqslant \frac{\pi}{2\Lambda^{k}} \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Следовательно,

$$\sin\frac{t}{\Lambda^{n+k}} \geqslant \frac{2t}{\pi\Lambda^{n+k}} \geqslant \frac{1}{\Lambda^{k+1}},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^{n+k}\sin\frac{t}{\Lambda^{n+k}} \geqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{n+k}}{\Lambda^{k+1}} = \frac{A^n}{\Lambda - A}.$$

При всех $t \in \mathbf{R}$

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} A^k \sin\frac{t}{\Lambda^k}\right| \leqslant \frac{A^n - 1}{A - 1}.$$

Значит, в интервале $\left[\frac{\pi}{2}\Lambda^{n-1}, \frac{\pi}{2}\Lambda^{n}\right]$

$$\begin{gathered} I(t) \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} A^{n+k}\sin\frac{t}{\Lambda^{n+k}} - \left|\sum_{k=0}^{n-1} A^k\sin\frac{t}{\Lambda^k}\right| \geqslant \\ \geqslant \frac{A^n}{\Lambda - A} - \frac{A^n - 1}{A - 1} = \frac{2A - \Lambda - 1}{(\Lambda - A)(\Lambda - 1)}A^n + \frac{1}{A - 1}. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Так как $\Lambda > A$, $A > 1$ и $2A > \Lambda + 1$, то правая часть неравенства (2.7) стремится к ∞ при $n \to \infty$. Следовательно, $I(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. ■

Покажем, что функция f не дифференцируема по переменным φ_1 и φ_2. Предположим, что f имеет производную, например, по φ_1. Тогда дифференцируема функция

$$g(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\Lambda}\right)^n \cos 2\pi u_n \varphi.$$

Нетрудно показать, что коэффициенты u_n равны

$$\frac{(-1)^n}{2}\Big[\Lambda^n + \frac{(-1)^n}{\Lambda^n}\Big].$$

Справедлива

Лемма 8. *Если* $1 < A < \Lambda$, *то функция* $g(\varphi)$ *нигде не дифференцируема.*

Доказательство.

Рассмотрим функцию

$$G(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{A}{\Lambda}\Big)^n \cos\pi\Lambda^n\varphi.$$

Покажем, что разность $g(\varphi) - G(\varphi)$ дифференцируема всюду. Производная от функционального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{A}{\Lambda}\Big)^n\Big\{\cos\pi\Big[\Lambda^n + \frac{(-1)^n}{\Lambda^n}\Big]\varphi - \cos\pi\Lambda^n\varphi\Big\}$$

равна

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{A}{\Lambda}\Big)^n\Big\{\pi\Big[\Lambda^n + \frac{(-1)^n}{\Lambda^n}\Big]\sin\pi\Big[\Lambda^n + \frac{(-1)^n}{\Lambda^n}\Big]\varphi - \pi\Lambda^n\sin\pi\Lambda^n\varphi\Big\}. \quad (2.8)$$

Так как

$$\Big|\Lambda^n\sin\frac{\pi(-1)^n\varphi}{\Lambda^n}\Big| \leqslant \pi|\varphi|,$$

$$\Big|\Lambda^n\Big(\cos\frac{\pi\varphi}{\Lambda^n} - 1\Big)\Big| \leqslant \Lambda^n\Big(\frac{\pi\varphi}{\Lambda^n}\Big)^2\Big/2 = \frac{\pi^2\varphi^2}{2\Lambda^n},$$

то выражение, стоящее в фигурных скобках, не превосходит

$$\pi\Big(\frac{\pi^2\varphi^2}{2\Lambda^n} + \frac{2}{\Lambda^n} + \pi|\varphi|\Big) \leqslant \pi\Big(\frac{\pi^2\varphi^2}{2} + 2 + \pi|\varphi|\Big) = \frac{\pi}{2}(\pi|\varphi| + 2)^2.$$

Следовательно, на каждом компактном множестве $\mathbf{R}$ ряд (2.8) мажорируется некоторым сходящимся рядом с положительными членами и, стало быть, равномерно сходится к некоторой непрерывной функции. Отсюда, согласно известной теореме о производной функционального ряда, функция $g - G$ принадлежит классу C^1.

Если $g(\varphi)$ имеет производную в точке $\varphi = \varphi'$, то функция $G(\varphi)$ также дифференцируема при $\varphi = \varphi'$. Однако $G(\varphi)$ — классический пример функции, не имеющей производной ни в одной точке [79]. ■

Аналогично доказывается, что функция f не дифференцируема по координате φ_2.

§ 3. Теорема о нулях

Теорема 5. *Пусть f непрерывна и имеет две непрерывные производные по φ_2, $\lambda = 0$, а отношение частот ω_1/ω_2 иррационально. Если $f(\varphi_1^0, \varphi_2^0) \neq 0$, то $\forall T > 0\ \exists t_1, t_2 > T$: $I(t_1, \varphi_1^0, \varphi_2^0) > 0$, $I(t_2, \varphi_1^0, \varphi_2^0) < 0$.*

Следствие (теорема о нулях). *Пусть выполнены условия теоремы 5. Если $f(\varphi_1^0, \varphi_2^0) \neq 0$, то функция $I(t, \varphi_1^0, \varphi_2^0)$ имеет бесконечно много нулей при $t \to \infty$.*

Доказательство теоремы 5.

Расстояние $d\{a_1, a_2\}$ между точками $a_1, a_2 \in \mathbf{T}^2$ будем определять в метрике

$$ds^2 = d\varphi_1^2 + d\varphi_2^2.$$

Докажем сначала, что

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \forall T > 0\ \exists \tau > T : |I(\tau, \varphi_1^0, \varphi_2^0)| < \varepsilon, \\ d\{(\omega_1\tau + \varphi_1^0, \omega_2\tau + \varphi_2^0), (\varphi_1^0, \varphi_2^0)\} < \varepsilon.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Рассмотрим на $\mathbf{T}^2$ окружность $S^1 = \{(\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_1 = \varphi_1^0\}$ и на ней функцию

$$F(x, \varphi_1^0) = \int\limits_0^{1/\omega_1} f(\omega_1 t + \varphi_1^0, \omega_2 t + x)dt.$$

Так как за время t, кратное $1/\omega_1$, точка $(\omega_1 t + \varphi_1^0, \omega_2 t + \varphi_2^0)$ снова вернется на S^1, то

$$I(n\omega_1^{-1}, \varphi_1^0, \varphi_2^0) = \sum_{k=1}^{n-1} F(k\alpha + \varphi_2^0, \varphi_1^0), \ \alpha = \omega_2/\omega_1.$$

Функция $F \in C^2(S^1)$ и

$$\int_0^1 F(x, \varphi_1^0) dx = 0.$$

Предположим, что $\alpha \in K_2$. По лемме 5 для фиксированного φ_1^0 существует непрерывная функция $\Phi(x)$ на S^1 такая, что

$$I(n\omega_1^{-1}, \varphi_1^0, \varphi_2^0) = \Phi(n\alpha + \varphi_2^0) - \Phi(\varphi_2^0).$$

Так как точки на S^1 с угловыми координатами $n\alpha + \varphi_2^0$ $(n \in \mathbf{Z})$ всюду плотны, то для случая $\alpha \in K_2$ утверждение (3.1) доказано.

Если $\alpha \in K_1$, то по лемме 6 существует бесконечно много натуральных чисел N, удовлетворяющих при некоторых целых m неравенству $|N\alpha - m| < N^{-3/2}$, таких, что

$$\begin{gathered} |I(N\omega_1^{-1}, \varphi_1^0, \varphi_2^0)| < \frac{M_1}{\sqrt{N}} + \frac{M_2}{24N}, \\ M_1 = \max_{x \in S^1} |F'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in S^1} |F''(x)|. \end{gathered} \tag{3.2}$$

При этом точка

$$(\omega_1 \tau + \varphi_1^0, \omega_2 \tau + \varphi_2^0), \quad \tau = N\omega_1^{-1}$$

отстоит от $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$ на расстоянии

$$d \leqslant |N\alpha - m| < N^{-3/2}. \tag{3.3}$$

Так как N может быть выбрано сколь угодно большим, то из (3.2) и (3.3) следует (3.1). Утверждение (3.1) доказано полностью.

Обозначим через U_ρ окрестность точки $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$ радиуса $\rho > 0$. Пусть, для определенности, $f(\varphi_1^0, \varphi_2^0) > 0$. Тогда в некоторой области U_δ функция $f > \gamma > 0$, $\gamma = \mathrm{const}$. Существуют $\varepsilon > 0$ и $\beta > 0$, зависящие от δ, такие, что если в момент времени $t = \tau$ точка $(\omega_1\tau + \varphi_1^0, \omega_2\tau + \varphi_2^0) \in U_{\varepsilon_0}$, то $(\omega_1 t + \varphi_1^0, \omega_2 t + \varphi_2^0) \in U_\delta$ при $\tau - \beta < t < \tau + \beta$. Следовательно, если $\varepsilon < \varepsilon_0$, то согласно (3.1) существуют сколь угодно большие τ такие, что

$$|I(\tau, \varphi_1^0, \varphi_2^0)| < \varepsilon, \quad \dot{I}(t, \varphi_1^0, \varphi_2^0) = f(\omega_1 t + \varphi_1^0, \omega_2 t + \varphi_2^0) > \gamma$$

при $\tau - \beta < t < \tau + \beta$. Так как постоянные ε_0, γ и β не зависят от ε, то при малых ε функция $I(t, \varphi_1^0, \varphi_2^0)$ принимает значения разных знаков в интервале $(\tau - \beta, \tau + \beta)$. ■

Теорема 5 неверна, если функция f только непрерывна. Действительно, в примере, рассмотренном в § 2, $f(0, 0) > 0$, а $I(t, 0, 0) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Более того, нетрудно показать, что $I(t, 0, 0) > 0$ при $t > 0$. Это вытекает из следующего утверждения: если $(\Lambda + 1)/2 < A < \Lambda$, то

$$I(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\Lambda}\right)^n \sin\frac{t}{\Lambda^n} > 0$$

при $t > 0$. Действительно, если $0 < t \leqslant \pi/2$, то, очевидно, $I(t) > 0$. При доказательстве леммы 7 было установлено, что при $t \in \left[\frac{\pi}{2}\Lambda^{n-1}, \frac{\pi}{2}\Lambda^n\right]$, $n = 1, 2, \ldots$, справедливо неравенство

$$I(t) \geqslant \frac{A^n}{\Lambda - A} - \frac{A^n - 1}{A - 1}.$$

Так как $1 < \dfrac{\Lambda + 1}{2} < A < \Lambda$, то в этих интервалах функция $I(t) > 0$.

§ 4. Динамические системы с интегральным инвариантом на торе

Рассмотрим на двумерном торе $\mathbf{T}^2\{\varphi_1, \varphi_2 \mod 1\}$ систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi}_1 = F_1(\varphi_1, \varphi_2), \quad \dot{\varphi}_2 = F_2(\varphi_1, \varphi_2), \tag{4.1}$$

обладающую интегральным инвариантом

$$I(G) = \iint\limits_G U(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 \tag{4.2}$$

(G — измеримая область на $\mathbf{T}^2$). Всюду ниже предполагается, что F_1, F_2, U — аналитические функции на $\mathbf{T}^2$, причем $U > 0$, $F_1^2 + F_2^2 > 0$ (т. е. система (4.1) не имеет положений равновесия). Общая теория уравнений (4.1) восходит к Пуанкаре [75]. Основные результаты более поздних исследований можно найти в книгах [20, 80].

Уравнения (4.1), имеющие интегральный инвариант (4.2), часто встречаются при качественном анализе динамических систем. Многочисленные примеры дает

Предложение 2 (ср. с [81]). *Рассмотрим автономную аналитическую систему дифференциальных уравнений в* $\mathbf{R}^n$:

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad f = (f_1, \ldots, f_n). \tag{4.3}$$

Предположим, что эта система имеет интегральный инвариант с плотностью $\Delta(x) > 0$ *и* $n-2$ *аналитических первых интеграла* $\Phi_1(x), \ldots, \Phi_{n-2}(x)$. *Пусть на инвариантном множестве*

$$M = \{x \in \mathbf{R}^n : \Phi_1(x) = c_1, \ldots, \Phi_{n-2}(x) = C_{n-2}\}$$

функции $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-2}$ *независимы и на* M *нет положений равновесия системы уравнений* (4.3). *Если* L *— связная компактная компонента множества* M, *то*

а) L *— аналитическое двумерное многообразие, аналитически изоморфное* $\mathbf{T}^2$;

в) *в любых угловых координатах* $\varphi_1, \varphi_2 \bmod 1$ *уравнения* (4.3) *имеют вид системы* (4.1);

с) *система уравнений на* L *обладает интегральным инвариантом с положительной аналитической плотностью.*

Действительно, с точностью до аналитического изоморфизма L совпадает с двумерным тором как всякое связное, компактное, ориентированное аналитическое двумерное многообразие, допускающее касательное векторное поле без особых точек (ср. с § 1 гл. VII). Заключение в) предложения очевидно. Существование интегрального инварианта у системы дифференциальных уравнений на L вытекает из теоремы о последнем множителе [36]. Из формул Якоби можно получить явное выражение для плотности

$$U(x) = \frac{\Delta(x)}{V_{n-2}(x)}, \quad x \in L,$$

где V_{n-2} — $(n-2)$-мерный объем параллелепипеда, построенного на векторах $\operatorname{grad}\Phi_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n-2)$ как на сторонах (ср. с доказательством леммы 3 гл. VII). Следовательно, U — аналитическая функция на L и $U < 0$.

В частности, уравнения движения задачи о качении шара по горизонтальной плоскости [82] удовлетворяют условиям предложения. Следовательно, все доказываемые ниже утверждения справедливы для динамических систем, возникающих в этой классической задаче неголономной механики.

В указанных выше предположениях относительно системы (4.1) А. Н. Колмогоров доказал [83], что эти уравнения обратимой аналитической заменой переменных $(\varphi_1, \varphi_2) \to \to (x, y)$ преобразуются к виду

$$\dot{x} = \frac{\lambda_1}{f(x, y)}, \quad \dot{y} = \frac{\lambda_2}{f(x, y)}, \tag{4.4}$$

где $\lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const}$, $f(x, y) > 0$ — аналитическая функция на $\mathbf{T}^2\{x, y \bmod 1\}$. Плотность интегрального инварианта (4.2) в новых переменных равна $f(x, y)$. Всюду ниже рассматривается случай, когда отношение $\gamma = \lambda_2/\lambda_1$ иррационально. Для почти всех γ уравнения (4.4) задают квазипериодическое движение на $\mathbf{T}^2$, т. е. в некоторых угловых координатах $u, v \bmod 1$ они записываются в виде

$$\dot{u} = \omega_1, \ \dot{v} = \omega_2; \ \omega_i = \frac{\lambda_i}{\Lambda} \ (i = 1, 2), \ \Lambda = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f \, dx \, dy. \tag{4.5}$$

Однако известны примеры, когда такое приведение невозможно (см., например, [84]).

Обозначим начальные значения переменных x, y соответственно через x_0, y_0. Из теоремы об усреднении следует, что

$$x = x_0 + \frac{\lambda_1}{\Lambda} t + X(t, x_0, y_0), \quad y = y_0 + \frac{\lambda_2}{\Lambda} t + Y(t, x_0, y_0),$$

$$\Lambda = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx\, dy,$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{X(t, x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{Y(t, x_0, y_0)}{t} = 0.$$

Докажем, например, формулу $x = x_0 + \frac{\lambda_1}{\Lambda} t + o(t)$. Из (4.4) вытекает, что $\lambda_2 x - \lambda_1 y = \lambda_2 x_0 - \lambda_1 y_0$. Тогда

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\lambda_1} f\left(x, \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_0 + y_0\right).$$

Так как числа 1 и λ_2/λ_1 несоизмеримы, то по теореме об усреднении

$$t = \frac{\Lambda'}{\lambda_1}(x - x_0) + o(x - x_0),$$

где

$$\Lambda' = \int_0^1 \int_0^1 f\left(x, y - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_0 + y_0\right) dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx\, dy = \Lambda.$$

Следовательно, при $t \to \infty$

$$x = x_0 + \frac{\lambda_1}{\Lambda} t + o(t).$$

Расстояния d между точками $\mathbf{T}^2\{x, y \bmod 1\}$ вычисляются в метрике $ds^2 = dx^2 + dy^2$ (как в § 3).

Теорема 6 (ср. с [85]). *Для любых* $\varepsilon > 0$, $T > 0$ *существует* $\tau > T$ *такое, что* $|X(\tau, x_0, y_0)| < \varepsilon$, $|Y(\tau, x_0, y_0)| < \varepsilon$, $d\{(x(\tau), y(\tau)), (x_0, y_0)\} < \varepsilon$ *для всех* $(x_0, y_0) \in \mathbf{T}^2$.

Доказательство.

Если иррациональное число $\gamma = \lambda_2/\lambda_1$ принадлежит классу K_2 (введенному в § 2), то уравнения (4.4) приводятся к системе (4.5) (ср. с [83]) и утверждение очевидно. Пусть $\gamma \in K_1$ и $|N_\gamma - m| < N^{-3/2}$. Так как $dy/dx = \lambda_2/\lambda_1 = \gamma$, то $y = \gamma x + y_0 - \gamma x_0$. Из первого уравнения системы (4.4) найдем, что

$$t = \frac{1}{\lambda_1}\int\limits_{x_0}^{x} f(s,\, \gamma s + y_0 - \gamma x_0)ds.$$

Рассмотрим функцию $g = f - \Lambda$. Тогда

$$\begin{gathered} t = \frac{\Lambda}{\lambda_1}(x - x_0) + I(x,\, x_0,\, y_0), \\ I = \frac{1}{\lambda_1}\int\limits_{x_0}^{x_0+1} g(s,\, \gamma s + y_0 - \gamma x_0)ds. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Очевидно равенство

$$I(n + x_0,\, x_0,\, y_0) = \sum_{k=0}^{n-1} F(k\gamma + y_0,\, x_0),$$

где

$$F(z,\, x_0) = \frac{1}{\lambda_1}\int\limits_{\dot{x}_0}^{x_0+1} g(s,\, \gamma s + z - \gamma x_0)ds.$$

Аналитическая функция $F(z,\, x_0)$ периодична по z с периодом 1 и

$$\int\limits_0^1 F(z,\, x_0)dz = 0 \quad \forall x_0 \in [0,\, 1].$$

Положим $\tau = N\Lambda/\lambda_1$. Пусть за время $t(x_0,\, y_0)$ координата x стала равной $x_0 + N$. Из (4.6) следует, что $t(x_0,\, y_0) = \tau + I(N + x_0,\, x_0,\, y_0)$. По теореме о среднем

$$\begin{gathered} |X(\tau,\, x_0,\, y_0)| = |x(\tau) - x_0 - N| = \\ = |x(\tau) - x(t(x_0,\, y_0))| \leqslant \left|\frac{\lambda_1}{M} I(N + x_0,\, x_0,\, y_0)\right|, \end{gathered} \tag{4.7}$$

где $M = \min\limits_{\mathbf{T}^2} f(x, y)$. Так как $y - y_0 = \gamma(x - x_0)$, то

$$|Y(\tau, x_0, y_0)| = |\gamma(x(\tau) - x_0 - N)| \leqslant \left|\frac{\lambda_2}{M} I(N + x_0, x_0, y_0)\right|. \tag{4.8}$$

Оценим расстояние

$$\begin{gathered} d\{(x(\tau), y(\tau)), (x_0, y_0)\} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{(x - x_0 - N)^2 + (y - y_0 - m)^2} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\left(\frac{\lambda_1}{M} I\right)^2 + \left(\left|\frac{\lambda_2}{M} I\right| + |M\gamma - m|\right)^2}. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Согласно лемме 6

$$|I(N + x_0, x_0, y_0)| \leqslant \frac{M_1}{\sqrt{N}} + \frac{M_2}{24N} \quad \forall (x_0, y_0) \in \mathbf{T}^2, \tag{4.10}$$

где

$$M_1 = \max_{\substack{0 \leqslant x_0 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant z \leqslant 1}} \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|, \quad M_2 = \max_{\substack{0 \leqslant x_0 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant z \leqslant 1}} \left|\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right|.$$

Так как существует бесконечно много натуральных чисел N, удовлетворяющих при некоторых целых m неравенству $|N\gamma - m| < N^{-3/2}$, то справедливость теоремы в случае $\gamma \in K_1$ вытекает из формул (4.7)–(4.10). ■

Предложение 3. *Пусть $f(x_0, y_0) \neq \Lambda$. Тогда функция $X^2(t, x_0, y_0) + Y^2(t, x_0, y_0)$ имеет бесконечно много нулей при $t \to \infty$.*

Доказательство.

Пусть $X^2(\tau, x_0, y_0) = 0$. Тогда

$$Y(\tau, x_0, y_0) = y - y_0 - \frac{\lambda_2}{\Lambda}\tau = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(x - x_0) - \frac{\lambda_2}{\Lambda}\tau = 0.$$

Следовательно, достаточно доказать, что бесконечно много нулей имеет функция $X(t, x_0, y_0)$. Воспользуемся равенством (4.6). Так как $g(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) - \Lambda \neq 0$, то по теореме 5 функция $I(x, x_0, y_0)$ имеет бесконечно много нулей при $x \to \infty$. Значит, бесконечно много раз

$$X(t,\,x_0,\,y_0) = x - x_0 - \frac{\lambda_1}{\Lambda}t = 0. \qquad \blacksquare$$

Предложение 4. *Существуют точки* $(x_0,\,y_0) \in \mathbf{T}^2$, $f(x_0,\,y_0) = \Lambda$ *такие, что одновременно* $X(t,\,x_0,\,y_0) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$, $Y(t,\,x_0,\,y_0) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ $\forall t \in \mathbf{R}$.

Доказательство.

Пусть $X(t,\,x_0,\,y_0) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Тогда $(\gamma > 0)$

$$Y(t,\,x_0,\,y_0) = y - y_0 - \frac{\lambda_2}{\Lambda}t = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}X(t,\,x_0,\,y_0) \geqslant 0 \ (\leqslant 0).$$

Воспользуемся формулой (4.6). По теореме 1 существуют точки $(x_0,\,y_0) \in \mathbf{T}^2$, такие, что $g(x_0,\,y_0) = f(x_0,\,y_0) - \Lambda = 0$ и

$$I(x,\,x_0,\,y_0) \geqslant 0 \ (\leqslant 0)$$

для всех $x \in \mathbf{R}$. Следовательно, $(\lambda_1 > 0)$

$$X(t,\,x_0,\,y_0) = x - x_0 - \frac{\lambda_1}{\Lambda}t = -\frac{\lambda_1}{\Lambda}I(x,\,x_0,\,y_0) \leqslant 0 \ (\geqslant 0). \qquad \blacksquare$$

§ 5. Приложение к задаче о движении линии узлов в случае Горячева–Чаплыгина

В этом параграфе используются специальные обозначения, введенные в гл. VII. Предположим, что $I_1\nu^2 < 4I_2^2$ и параметр ν мал. Обозначим снова через $x \in \mathbf{R}^6$ вектор переменных Эйлера–Пуассона. Тогда

$$\dot{\psi} = \Psi(x),$$

где $\Psi(x)$ — аналитическая функция на двумерных инвариантных торах $\mathbf{T}^2$ уравнений Эйлера–Пуассона в случае Горячева–Чаплыгина (эта функция выписана в явном виде в § 3 гл. VII). Теорема 3 гл. VII утверждает, что среднее функции $\Psi(x)$ по двумерному тору $\mathbf{T}^2$ равно нулю, т. е.

$$\oint\limits_{T^2} \Psi(x)d\sigma = 0,$$

где $d\sigma$ — мера инвариантная относительно сужения действия фазового потока на $\mathbf{T}^2$.

В § 1 гл. VII были вычислены числа вращения $\gamma(I_1, I_2)$ касательных векторных полей на $\mathbf{T}^2$ (они равны отношению периодов некоторого гиперэллиптического интеграла). В конечном счете γ зависит от $x \in \mathbf{R}^6$. Напомним, что γ — непостоянная аналитическая функция на плоскости $\mathbf{R}^2\{I_1, I_2\}$.

Угол прецессии можно представить в виде

$$\psi = \psi_0 + f(t, x_0), \quad x_0 = x(0), \quad f(0, x_0) = 0.$$

Согласно теореме 1 и предложению 1 на каждом инвариантном торе существуют точки $x_0 \in \mathbf{T}^2$ такие, что $\psi \geqslant \psi_0$ ($\psi \leqslant \psi_0$) и $\Psi(x_0) = 0$. На резонансных торах (когда γ рационально) таких точек даже две.

Если начальное значение x_0 принадлежит нерезонансному тору, то по теореме 4

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall T > 0\ \exists \tau > T : |f(\boldsymbol{\tau}, x_0)| < \varepsilon.$$

Так как почти все точки лежат на нерезонансных торах, то движение линии узлов устойчиво по Пуассону.

Пусть $\gamma(x_0)$ иррационально (т. е. x_0 принадлежит нерезонансному тору) и $\Psi(x_0) \neq 0$. Тогда, согласно теореме 5, функция $f(t, x_0)$ бесконечно много раз меняет знак при $t \to \infty$. В частности, бесконечно много раз имеет место равенство $\psi = \psi_0$.

Отметим еще, что для почти всех x_0 (более точно, когда $\gamma(x_0) \in K_2$ линия узлов совершает ограниченные квазипериодические колебания. Это следует, например, из леммы 5 и теоремы Боля об ограниченных интегралах квазипериодических функций [64].

Будем увеличивать значения параметра ν. Тогда доказанные выше утверждения будут справедливы по крайней мере до тех пор, пока первые интегралы уравнения движения независимы, и функция Ψ не имеет аналитических особенностей (т. е. пока $I_1\nu^2 < 4I_2^2$).

Исторический очерк

При исследовании интеграла

$$I(t) = \int\limits_0^1 f(\omega_1 t + \varphi_1^0, \ldots, \omega_n t + \varphi_n^0)dt$$

наибольший интерес на практике представляет случай, когда функция f аполитична на $\mathbf{T}^n$. Хорошо известно, что тогда анализ $I(t)$ приводит к сложным и тонким вопросам теории так называемых «малых знаменателей». Пусть, например,

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{m_1, m_2=1}^{\infty} f_{m_1, m_2} \cos(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2),$$

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = -\gamma < 0, \quad \gamma \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}; \quad \varphi_1^0 = \varphi_2^0 = 0.$$

Тогда

$$I(t) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{f_{m_1, m_2}}{m_1 - \gamma m_2} \sin(m_1 - m_2\gamma)t. \tag{1}$$

Если γ иррационально, то знаменатели $m_1 - \gamma m_2$ отличны от нуля. Однако при достаточно больших значениях m_1 и m_2 эти числа могут быть сколь угодно малыми, что может привести к неравномерной сходимости ряда (1) и неограниченности функции $I(t)$.

Согласно известной теореме П. Боля функция $I(t)$ ограничена тогда и только тогда, когда она квазипериодична. Необходимое условие квазипериодичности $I(t)$ заключается в требовании сходимости ряда

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \left(\frac{f_{m_1, m_2}}{m_1 - \gamma m_2}\right)^2. \tag{2}$$

Очевидно также, что интеграл $I(t)$ ограничен, если ряд

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \left|\frac{f_{m_1, m_2}}{m_1 - \gamma m_2}\right| \tag{3}$$

сходится.

Первый нетривиальный результат в теории «малых делителей» принадлежит К. Брунсу. Он доказал, что

1) *если* $\gamma \in A$ (A *— множество алгебраических чисел,* $\overline{A} = \mathbf{R}$), *то ряд* (3) *сходится*;

2) *если все коэффициенты* f_{m_1, m_2} *отличны от нуля, то существует множество* R, $\overline{R} = \mathbf{R}$ *такое, что при* $\gamma \in R$ *ряд* (2) *расходится.*

Следующий важный результат принадлежит Гильдену. Он доказал, что для почти всех γ (*в смысле меры Лебега*) *ряд* (3) *сходится. Отметим, что в то время* (1888 г.) *не была развита теория меры, и Гильден использовал вероятностные термины*: *вероятность расходимости ряда* (3) *равна нулю.*

Этот результат Гильдена является следствием известной теоремы, касающейся диофантовых приближений [65]: *для почти всех* γ *существуют постоянные* $k(\gamma)$ *и* $K(\gamma)$ *такие, что*

$$|m\gamma - n| \geqslant \frac{K}{|m|^k} \tag{4}$$

при всех m, $n \in \mathbf{Z}$. *В частности, все алгебраические числа обладают этим свойством* (*теорема Лиувилля* [65]).

С проблемой «малых делителей» приходится сталкиваться при решении многих задач математики и механики (см., например, [9, 29, 77]). *Общей чертой здесь является применение теоретико-числовых оценок типа неравенства* (4).

Указанные результаты не исчерпывают полностью проблемы: *они оставляют открытым вопрос о поведении интеграла* $I(t)$ *в тех случаях, когда ряд* (2) *расходится. Известные примеры А. Пуанкаре показывают, насколько сложным может быть поведение функции* $I(t)$ *при* $t \to \infty$ [75]. *Утверждения гл.* VIII *вносят в этот вопрос определенную ясность.*

Глава IX
Вопросы качественного анализа движения волчка Ковалевской

В случае Ковалевской задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки главные моменты инерции удовлетворяют соотношению $A = B = 2C$, а центр тяжести лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции. Этот случай был открыт в 1888 г., однако до сих пор не было дано удовлетворительной качественной картины вращения. Общие принципы качественного исследования, содержащиеся в гл. VII, позволяют прояснить свойства движения волчка Ковалевской.

§ 1. Динамические системы, возникающие на инвариантных торах задачи Ковалевской

Переменные Эйлера–Пуассона p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3 снова (как в гл. VII) обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_6$. Уравнения движения тела в случае Ковалевской можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} 2\dot{x}_1 &= x_2x_3, & \dot{x}_4 &= x_3x_5 - x_2x_6,\\ 2\dot{x}_2 &= -x_1x_3 + \nu x_6, & \dot{x}_5 &= x_1x_6 - x_3x_4,\\ \dot{x}_3 &= -\nu x_5, & \dot{x}_6 &= x_2x_4 - x_1x_5. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $\nu = Pr/C$, P — вес тела, r — расстояние от центра тяжести до точки подвеса, C — момент инерции относительно оси динамической симметрии. Уравнения (1.1) имеют четыре первых интеграла:

$$
\begin{aligned}
2I_1 &= 2(x_1^2 + x_2^2) + 2\nu x_4, \\
2I_2 &= 2(x_1 x_4 + x_2 x_5) + x_3 x_6, \\
I_3^2 &= (x_1^2 - x_2^2 - \nu x_4)^2 + (2x_1 x_2 - \nu x_5)^2, \\
I_4 &= x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \quad (I_4 = 1).
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Интеграл I_3^2 был найден С. В. Ковалевской.

При фиксированных значениях I_1, I_2, I_3, $I_4 = 1$ обозначим через $\mathscr{E}$ множество точек $x \in \mathbf{R}^6\{x_1, \ldots, x_6\}$, которые удовлетворяют системе уравнений (1.2). Ясно, что $\mathscr{E}$ инвариантно относительно группы g^t сдвигов по траекториям уравнений (1.1). Так как $\mathscr{E}$ замкнуто и ограничено в $\mathbf{R}^6$, то оно компактно. Всюду ниже рассматриваются только такие множества $\mathscr{E}$, на которых первые интегралы (1.2) независимы. В этом случае $\mathscr{E}$ — гладкое двумерное многообразие. Исключительные значения параметров I_1, I_2, I_3 образуют множество нулевой меры. Точно так, как в § 1 гл. VII, доказывается, что каждая связная компонента множества $\mathscr{E}$ является двумерным тором.

Лемма 1. *Если ν мало, то $\mathscr{E}$ — объединение двух торов.*

Покажем теперь, как привести с помощью квадратур уравнения движения на этих торах к следующему виду:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2; \quad \omega_1, \omega_2 = \mathrm{const}.$$

Такая форма уравнений существует согласно теореме Лиувилля–Арнольда об интегрируемых системах [4]. Введем, следуя С. В. Ковалевской, новые переменные s_1, s_2, которые выражаются через переменные Эйлера–Пуассона по формулам

$$
\begin{gathered}
s_{1,2} = I_1 + \frac{R(z_1, z_2) \mp \sqrt{R(z_1)R(z_2)}}{(z_1 - z_2)^2}, \\
z_{1,2} = x_1 \pm i x_2, \quad R(z) = R(z, z), \\
R(z_1, z_2) = -z_1^2 z_2^2 + 1 I_1 z_1 z_2 + 2\nu I_2 (z_1 + z_2) + \nu^2 - I_3^2.
\end{gathered} \tag{1.3}
$$

Как показала С. В. Ковалевская [36], в новых переменных уравнения движения имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\frac{ds_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}}+\frac{ds_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}}=0,\quad \frac{s_1ds_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}}+\frac{s_2ds_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}}=\frac{idt}{2},\\ \Phi(z)=\{z[(z-I_1)^2+\nu^2-I_3^2]-2\nu^2I_2^2\}\times\\ \times(z-I_1+I_3)(z-I_1-I_3).\end{gathered}\tag{1.4}$$

Авторы работ, посвященных задаче Ковалевской, использовали уравнения (1.4), в которых явно присутствуют комплексные величины. Это создает определенные неудобства при исследовании действительных движений системы. Мнимых величин можно избежать, записывая уравнения (1.4) в форме

$$\frac{ds_1}{\sqrt{-\Phi(s_1)}}+\frac{ds_2}{\sqrt{-\Phi(s_2)}}=0,\quad \frac{s_1ds_1}{\sqrt{-\Phi(s_1)}}+\frac{s_2ds_2}{\sqrt{-xx\Phi(s_2)}}=\frac{dt}{2}.\tag{1.5}$$

Докажем, что в действительном движении переменные s_1 и s_2 принимают действительные значения. Ясно, что $z_2\overline{z}_1$, $\overline{z}_2=z_1$. Так как $R(z_1,\,z_2)$ и $(z_1-z_2)^2$ — симметрические многочлены относительно z_1 и z_2 с действительными коэффициентами, то они принимают только действительные значения. Далее, выражение

$$R(z_1)R(z_2)=R(z_1)R(\overline{z}_1)=R(z_1)\overline{R(z_1)},$$

очевидно, неотрицательно. Действительность переменных s_1 и s_2 вытекает теперь из формул (1.3).

Из формул (1.5) следует, что область действительных движений определяется на плоскости $\mathbf{R}^2\{s_1,\,s_2\}$ неравенствами $\Phi(s_1)\leqslant 0$, $\Phi(s_2)\leqslant 0$. На рис. 18 изображена область возможных движений для случая, когда многочлен $\Phi(z)$ имеет пять действительных корней (она заштрихована).

Движение не может происходить в областях 3, 5 и 7, так как внутри этих областей существуют точки s_1 и s_2 такие, что $s_1=s_2$. Из (1.3) следует тогда, что $R(z_1)=\overline{R(z_2)}=0$.

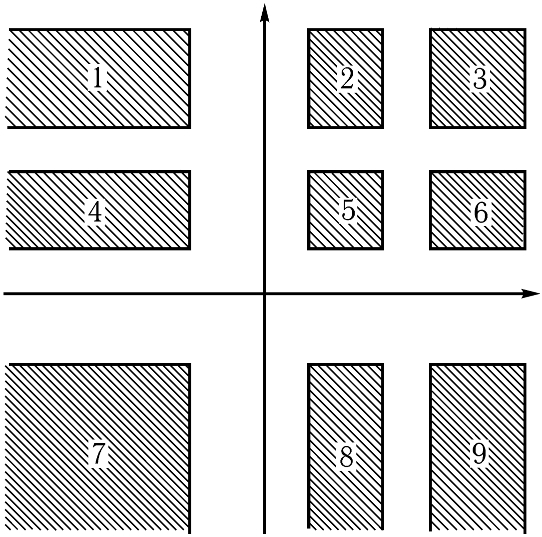

Рис. 18

Так как $R(z)$ — многочлен четвертой степени, то при фиксированных постоянных первых интегралов уравнение $R(z) = 0$ может иметь не более четырех корней. Поэтому на инвариантных торах существует конечное число точек, в которых $s_1 = s_2$. Но в областях 3, 5 и 7 таких точек бесконечно много.

Таким образом, движение может быть только в областях 1, 2, 4, 6, 8, 9. Покажем, что при малых значениях ν действительное движение происходит в «стаканах» 1 и 9. Пусть сначала $\nu = 0$. Выясним, в какую область попадут начальные условия для s_1 и s_2. При $\nu = 0$ многочлен $\Phi(z)$ не зависит от постоянной площадей I_2 и имеет вид

$$\Phi(z) = z(z - I_1 - I_3)^2(z - I_1 + I_3)^2.$$

Интегралы энергии и интеграл Ковалевской запишутся так:

$$H = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2/2 = I_1, \quad K = x_1^2 + x_2^2 = I_3 \quad (I_3 > 0).$$

Очевидно, что на любой из двух связных компонент множества $\{H = I_1, K = I_3\}$ в $\mathbf{R}^3\{x_1, x_2, x_3\}$ существуют точки,

x_1-координата которых равна нулю. Рассмотрим эти начальные условия. Тогда из (1.3) получим, что $s_1 = 0$, $s_2 = I_1 + I_2$. Заметим, что корень $(I_1 - I_3)$ многочлена $\Phi(z)$ лежит справа от нуля, так как $I_1 - I_3 = x_3^2/2 > 0$. Значит, область действительных движений в этом случае $s_1 \leqslant 0$, $s_2 = I_1 + I_3$. Пусть теперь $\nu \neq 0$, но очень мало. Тогда s_1 будет изменяться от $-\infty$ до числа, близкого к нулю (так как $z = 0$ — простой корень многочлена $\Phi(z)$ при $\nu = 0$), а s_2 будет заключено между двумя числами, мало отличающимися от $I_1 = I_3$. Следовательно, действительное движение при малых значениях параметра ν имеет место в областях 1 и 9.

Для того, чтобы изучить это движение, перепишем уравнение (1.5) в виде

$$\dot{s}_1 = \frac{\sqrt{-\Phi(s_1)}}{2(s_1 - s_2)}, \quad \dot{s}_2 = \frac{\sqrt{-\Phi(s_2)}}{2(s_1 - s_2)}. \tag{1.6}$$

Эти уравнения имеют тот же вид, что и уравнения (2.3) гл. VII в случае Горячева–Чаплыгина. Поэтому качественный характер изменения переменных s_1, s_2 в случае Ковалевской тот же самый, что в соответствующих переменных s_1, s_2 в случае Горячева–Чаплыгина, с той лишь разницей, что в рассматриваемой ситуации s_1, s_2 могут уходить в бесконечность. Заметим, что уход s_1 (или s_2) в бесконечность происходит за конечное время, так как сходится интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{a} \frac{z\,dz}{\sqrt{-\Phi(z)}} \left(\int\limits_{a}^{\infty} \frac{z\,dz}{\sqrt{-\Phi(z)}} \right),$$

где a — наименьший (наибольший) простой корень многочлена $\Phi(z)$. Возвращение переменной s_1 (или s_2) также происходит за конечное время.

Перейдем к вычислению инвариантов динамических систем, возникающих на $\mathscr{E}$ — чисел вращения касательных векторных полей, которые индуцируются уравнениями Эйлера–Пуассона.

Для определенности будем рассматривать двумерные инвариантные торы, которые соответствуют областям 1 и 9 на плоскости $\mathbf{R}^2\{s_1, s_2\}$. Корни многочлена $\Phi(z)$ обозначим a_0, a_1, a_2, a_3, a_4; они расположены в возрастающем порядке. Область 1 на рис. 18 определяется неравенствами $-\infty \leqslant s_1 \leqslant a_0$, $a_3 \leqslant s_2 \leqslant a_4$.

В уравнениях (1.6) сделаем замену переменных $s_1 = s_1(\psi_1)$, $s_2 = s_2(\psi_2)$ по формулам

$$\begin{gathered}
\psi_1 = \frac{\pi}{\tau_1}\int\limits_{s_1}^{a_0} \frac{ds}{\sqrt{-\Phi(s)}}, \quad \psi_2 = \frac{\pi}{\tau_2}\int\limits_{a_3}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{-\Phi(s)}}, \\
\tau_1 = \int\limits_{-\infty}^{a_0} \frac{ds}{\sqrt{-\Phi(s)}}, \quad \tau_2 = \int\limits_{a_3}^{a_4} \frac{ds}{\sqrt{-\Phi(s)}}, \\
s_1 \in (-\infty, a_0], \quad s_2 \in (a_3, a_4].
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Тогда ψ_1, $\psi_2 \bmod 2\pi$ — угловые переменные на инвариантных торах $\mathbf{T}^2(I_1, I_2, I_3)$, соответствующих областям вида 1 при замене Ковалевской (1.3). В новых переменных ψ_1, $\psi_2 \bmod 2\pi$ уравнения (1.6) приводятся к виду

$$\dot\psi_1 = \frac{\pi}{2\tau_1}\frac{1}{s_2(\psi_2) - s_1(\psi_1)}, \quad \dot\psi_2 = \frac{\pi}{2\tau_2}\frac{1}{s_2(\psi_2) - s_1(\psi_1)}, \tag{1.8}$$

где $s_i(z)$ — действительные гиперэллиптические функции с периодом 2π, определяемые из соотношений (1.7).

Уравнения (1.8) имеют интегральный инвариант с плотностью $F = s_1(\psi_1) - s_2(\psi_2)$ (см. § 4 гл. VII); эта функция нигде в нуль не обращается. Из (1.8) следует, что числа вращения равны $\gamma = \tau_2/\tau_1$. Значит, числа вращения динамических систем на инвариантных торах задачи Ковалевской равны отношениям периодов гиперэллиптического интеграла

$$\int\limits_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{-\Phi(z)}},$$

где $\Phi(z)$ — многочлен Ковалевской.

Из теоремы 1 гл. VII следует, что с помощью замены переменных

$$\varphi_1 = \psi_i + \frac{1}{J\tau_i}\sum_{j=1}^{2}\tau_j[F_j(\psi_j) - J_j\psi_j],$$

$$F_1(t) = \int\limits_0^2 s_2(x)dx, \quad F_2(t) = -\int\limits_0^t s_1(x)dx,$$

$$J_j = \frac{1}{2\pi}F_j(2\pi), \quad J = J_1 + J_2,$$

уравнения (1.8) приводятся к системе

$$\dot\varphi_1 = \omega_1 = \frac{\pi}{\tau_1\Lambda}, \quad \dot\varphi_2 = \omega_2 = \frac{\pi}{\tau_2\Lambda},$$
$$\Lambda = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi} s_1(x)dx - \int\limits_0^{2\pi} s_2(y)dy\right) \neq 0. \tag{1.9}$$

Данные преобразования содержат только алгебраические операции, вычисление интегралов от известных функций и обращение этих интегралов. Таким образом, уравнения (1.9), определяющие на двумерных инвариантных торах условно-периодическое движение, и есть те уравнения, которые должны существовать по теореме Лиувилля–Арнольда об интегрируемости.

Динамические системы на $\mathbf{T}^2$ вида $\dot\varphi_1 = \omega_1$, $\dot\varphi_2 = \omega_2$; $\omega_i = \mathrm{const}$ вполне определяются одним инвариантом — числом вращения $\gamma = \omega_1/\omega_2$. При этом надо иметь в виду, что у этой системы есть бесконечно много чисел вращения, но все они выражаются через одно $\gamma = \omega_1/\omega_2$ при помощи соотношения

$$\Gamma = \frac{a\gamma + b}{c\gamma + d},$$

где $\left\|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right\|$ — унимодулярная матрица с целочисленными коэффициентами (см. § 2 гл. II). В частности, $1/\gamma$ — также число вращения.

Для торов, соответствующих области 1, числа вращения даются формулой $\gamma = \tau_1/\tau_2$. Ясно, что число вращения для области 9 то же, что и для области 1. Значит, при малых ν

динамические системы, возникающие на двух связных компонентах множества $\mathscr{E}$, изоморфны.

Замечание. Число вращения векторных полей на двумерных инвариантных торах задачи Эйлера – Пуансо вычислены в § 2 гл. II. Нетрудно показать, что в случае Ланrранжа – Пуассона числа вращения равны отношению периода изменения угла нутации к периоду среднего собственного вращения.

§ 2. Собственное вращение

Лемма 2. *Если в начальный момент времени $I_1 \neq 2I_2^2 + I_3$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$|\cos\vartheta| < 1 - \varepsilon$$

для всех $t \in \mathbf{R}$.

Доказательство.

Предположим, что в некоторый момент времени $x_6^2 = 1$. Тогда $x_4 = x_5 = 0$ и, следовательно,

$$x_3 = \pm 2I_2, \quad x_1^2 + x_2^2 = I_3 \ (I_3), \quad 2(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = 2I_1.$$

Значит, в этом случае $2I_3 + 4I_2^2 = 2I_1$. Но этого не может быть согласно предположению. ■

Таким образом, в отличие от случая Горячева – Чаплыгина, лишь в исключительных случаях ось динамической симметрии волчка Ковалевской может сколь угодно близко подходить к вертикали. Всюду ниже будем считать, что $I_1 \neq 2I_2^2 + I_3$.

Предложение 1. *Собственное вращение волчка Ковалевской обладает средним движением $\lambda = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$; $m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$.* (См. доказательство предложения 1 гл. VII).

Найдем m_1 и m_2 при достаточно малых значениях параметра ν и малых значениях постоянной площадей I_2. Рассмотрим случай, когда начальный момент времени $x_3 > 0$. Случай $x_3 < 0$ рассматривается аналогично (при $\nu = 0$ в точках, где $x_3 = 0$, первые интегралы зависимы).

Подсчитаем значение λ при $\nu = 0$. Так как при $\nu = 0$ частоты ω_1 и ω_2 не зависят от I_2, то λ в этом случае тоже не зависит от I_2. Так что постоянную интеграла площадей I_2 можно считать равной нулю. Тогда

$$\dot{\varphi} = x_3 - \frac{x_6(x_1x_4 + x_2x_6)}{1 - x_6^2} = x_3\frac{2 - x_6^2}{2(1 - x_6^2)},$$

$$x_3 = \frac{L}{C}, \quad x_6 = -\sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}}\cos g, \quad \dot{g} = \frac{G}{2C}.$$

Здесь L, G, g — специальные канонические переменные. Следовательно,

$$\lambda = \frac{1}{2\pi}\frac{L}{G}\int\limits_0^{2\pi} \frac{2 - \left(1 - \frac{L^2}{G^2}\right)\cos^2 g}{2\left\{1 - \left(1 - \frac{L^2}{G^2}\right)\cos^2 g\right\}}dg = \frac{L}{2C} + \frac{G}{2C}.$$

Так как при $\nu = 0$ гамильтониан задачи Ковалевской равен

$$\mathscr{H} = \frac{G^2}{4C} + \frac{L^2}{4C},$$

то

$$\dot{l} = \Omega_1 = \frac{L}{2C} = \text{const}, \quad \dot{g} = \Omega_2 = \frac{G}{2C} = \text{const}. \tag{2.1}$$

Следовательно, $\lambda = \Omega_1 + \Omega_2 > 0$. Выразим теперь частоты Ω_1, Ω_2 через частоты ω_1, ω_2, определяемые формулой (1.9). Для этого найдем сначала связь между числами вращения Ω_1/Ω_2 и $\omega_1/\omega_2 = \tau_1/\tau_2$. При $\nu = 0$

$$\tau_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dz}{(z - I_1 - I_3)(z - I_1 + I_3)\sqrt{-z}} =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}[(x + I_1)^2 - I_3^2]} = \frac{\pi}{2I_3}\left(\frac{1}{\sqrt{I_1 - I_3}} - \frac{1}{\sqrt{I_1 + I_3}}\right).$$

Выражение для периода τ_2 при $\nu = 0$ теряет смысл, поэтому мы найдем

$$\lim_{\nu\to 0}\tau_2 = \lim_{\nu\to 0}\int\limits_{I_1+\sqrt{I_3^2-\nu^2}}^{I_1+I_3} \frac{1}{\sqrt{z(z-I_1+\sqrt{I_3^2-\nu^2})}}\times$$

$$\times\frac{dz}{\sqrt{(z-I_1+I_3)(I_1+I_3-z)(z-I_1-\sqrt{I_3^2-\nu^2})}} = \frac{\pi}{2I_3\sqrt{I_1+I_3}}.$$

При вычислении этого предела было использовано следующее утверждение: если функция $f(x)$ непрерывна в окрестности точки $x = b$, то

$$\lim_{a\to b}\int\limits_a^b \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \pi f(b)$$

(ср. с формулой (2.1) главы II).

Итак,

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{I_1+I_3}{I_1-I_3}} - 1.$$

Поскольку

$$I_3 = x_1^2 + x_2^2 = \frac{G^2-L^2}{4C^2}, \quad I_1 = I_3 + \frac{x_3^2}{2} = \frac{G^2+L^2}{4C^2},$$

то

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{G}{L} - 1 = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1. \tag{2.2}$$

Уравнения (1.9) и (2.1) являются уравнениями одной и той же динамической системы. Поэтому существует диффеоморфизм двумерного тора, переводящий уравнения (1.9) в уравнения (2.1). Покажем, что любое такое преобразование является линейным и унимодулярным. Действительно, любой диффеоморфизм

$$l = l(\varphi_1, \varphi_2), \quad g = g(\varphi_1, \varphi_2)$$

имеет вид

$$l = a\varphi_1 + b\varphi_2 + f(\varphi_1, \varphi_2), \quad g = c\varphi_1 + d\varphi_2 + h(\varphi_1, \varphi_2), \tag{2.3}$$

где a, b, c, d — некоторые целые числа, $ad - bc = \pm 1$, а f и h — периодические функции переменных φ_1 и φ_2 с периодом 2π. Разложим функции f и h в сходящиеся двойные ряды Фурье. Пусть, например,

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} f_{k_1, k_2} e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2)}.$$

Коэффициенты f_{k_1, k_2} этого ряда, как и частоты ω_1 и ω_2 зависят от параметров I_1, I_2, I_3, которые «нумеруют» инвариантные торы задачи Ковалевской. Так как

$$\dot{l} = a\omega_1 + b\omega_2 + \sum_{-\infty}^{\infty} f_{k_1, k_2} i(k_1\omega_1 + k_2\omega_2) e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2)} \equiv \Omega_1,$$

и выражения $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \not\equiv 0$ при $|k_1| + |k_2| \neq 0$, то $f_{k_1, k_2} \equiv 0$, если $|k_1| + |k_2| \neq 0$. Следовательно, $f = f_{00} = \mathrm{const}$. Аналогично доказывается, что $h = h_{00} = \mathrm{const}$. Таким образом, диффеоморфизм (2.3) имеет вид $l = a\varphi_1 + b\varphi_2 + f_{00}$, $g = c\varphi_1 + d\varphi_2 + h_{00}$. В переменных $l' = l - f_{00}$, $g' = g - h_{00}$ это преобразование будет однородным унимодулярным преобразованием. Что и требовалось доказать.

Итак,

$$\dot{l} = \Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \dot{g} = \Omega_2 = c\omega_1 + d\omega_2$$

$$\Gamma = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{a\gamma + b}{c\gamma + d}, \quad \gamma = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Лемма 3. *Если γ — трансцендентное число и*

$$\frac{a\gamma + b}{c\gamma + d} = \frac{a'\gamma + b'}{c'\gamma + d'}, \tag{2.4}$$

где $S = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$, $S' = \begin{Vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{Vmatrix}$ — унимодулярные матрицы с целочисленными коэффициентами, то либо $S = S'$, либо $S = -S'$.

Доказательство.

Из (2.4) следует, что γ удовлетворяет квадратному уравнению с целыми коэффициентами

$$(ac' - a'c)\gamma^2 + (bc' - b'c + ad' - a'd)\gamma + (bd' - b'd) = 0.$$

Так как γ — трансцендентно, то $ac' = a'c$, $bc' + ad' = b'c + a'd$, $bd' = b'd$. Если $c' = 0$, то $a' = 0$ и, следовательно, $c = 0$. Аналогично, если $d' = 0$, то $d = 0$. Пусть $c' \neq 0$, тогда $a = ca'/c$. Если $d' \neq 0$, то $b = b'd/d'$ и

$$\frac{a'd' - b'c'}{c'}c + \frac{b'c' - a'd'}{d'}d = 0.$$

Так как $a'd' - b'c' \neq 0$, то $c = c'd/d'$ и, следовательно, $a = a'd/d'$. Определитель

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'd/d' & b'd/d' \\ c'd/d' & d \end{vmatrix} = \frac{d^2}{d'^2}(a'd' - b'c') = \pm\frac{d^2}{d'^2} = \pm 1,$$

значит, $d = \pm d'$. Но тогда $a = \pm a'$, $b = \pm b'$, $c = \pm c'$ и $S = \pm S'$. Если $c' = 0$, то $d' \neq 0$ и $a = a'd/d'$, $b = b'd/d'$, $c = 0$. Тогда

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'd/d' & b'd/d' \\ 0 & d \end{vmatrix} = \frac{a'd^2}{d'} = \pm\frac{d^2}{d'^2} = \pm 1.$$

Откуда $d = \pm d'$ и $a = \pm a'$, $b = \pm b'$. Значит, и в этом случае $S = \pm S'$. Аналогично рассматривается оставшийся случай, когда $d' = 0$. ■

Если $\gamma(x)$ — непостоянная непрерывная функция, которая удовлетворяет соотношению (2.4), то снова $S = \pm S'$. Это вытекает из всюду плотного множества трансцендентных чисел и непрерывности функции $\gamma(x)$.

В рассматриваемой нами задаче

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{\omega_1}.$$

Следовательно, матрица S линейного преобразования системы (1.9) к системе (2.1) совпадает с одной из матриц

$$\begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

В первом случае $\Omega_2 = -\omega_1 - \omega_2$, $\Omega_1 = -\omega_1$ и $\lambda = -2\omega_1 - \omega_2 < 0$. Этот случай следует исключить, так как $\lambda > 0$. Во втором случае $\Omega_2 = \omega_1 + \omega_2$, $\Omega_1 = \omega_1$ и $\lambda = 2\omega_1 + \omega_2 > 0$. Итак,

$$\lambda = \frac{\pi}{2\Lambda}\left(\frac{2}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right). \tag{2.5}$$

Аналогично доказывается, что при $\nu = 0$, $I_2 = 0$ и $x_3 < 0$

$$\lambda = -\frac{\pi}{2\Lambda}\left(\frac{2}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right). \tag{2.6}$$

Так как отношение периодов τ_1/τ_2 непостоянно при $\nu = 0$ и $I_2 = 0$, то формулы (2.5) и (2.6) справедливы при достаточно малых значениях этих параметров (ср. с доказательством теоремы 2 гл. II).

§ 3. Теорема о поведении циклических переменных в интегрируемых системах

Рассмотрим каноническую систему с $n+1$ степенями свободы, функция Гамильтона которой

$$\mathscr{H}(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, J) \tag{3.1}$$

аналитична по всем своим переменным и не содержит в явном виде координаты ψ, сопряженной с J. Полезно рассмотреть систему с n степенями свободы, гамильтониан которой есть функция (3.1), где J считается параметром. Такую систему назовем приведенной.

Система канонических уравнений с гамильтонианом (3.1) предполагается интегрируемой по Лиувиллю: существуют $n+1$ независимых первых интегралов в инволюции

$$\mathscr{F}_1 = \mathscr{H}, \mathscr{F}_2, \ldots, \mathscr{F}_n, \mathscr{F}_{n+1} = J,$$

аналитических по всем каноническим переменным. Тогда приведенная система при каждом значении J будет также интегрируемой, так как n функций

$$\mathscr{F}_1 = \mathscr{H}, \mathscr{F}_2, \ldots, \mathscr{F}_n \tag{3.2}$$

независимы, не содержат ψ и находятся в инволюции.

Будем предполагать, что в фазовом пространстве приведенной системы совместные уровни интегралов (3.2) компактны, и на этих уровнях функции (3.2) независимы. Тогда эти n-мерные инвариантные многообразия суть n-мерные торы $\mathbf{T}^n$, которые несут на себе квазипериодические движения. Таким образом, в этом случае качественная картина движения в приведенной системе ясна. Для того, чтобы дать полный анализ системы с гамильтонианом (3.1), достаточно знать поведение циклической координаты ψ.

В некоторой окрестности n-мерного тора $\mathbf{T}^n$, где интегралы независимы, можно перейти к переменным действие-угол приведенной задачи. Эта окрестность диффеоморфна прямому произведению $D \times \mathbf{T}^n$, где D — область $\mathbf{R}^n$. Переменные действие $I = (I_1, \ldots, I_n)$ постоянны во все время движения и принимают значения из области D, а переменные угол $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ суть угловые координаты на n-мерном торе $\mathbf{T}^n$, равномерно меняющиеся со временем. В переменных действие-угол I_i, φ_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ функция Гамильтона (3.1) не зависит от φ_i, т. е.

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}(I_1, \ldots, I_n; J).$$

Ясно, что

$$\dot{\psi} = \Phi(J, I_i, \varphi_i)$$

будет квазипериодической функцией времени с n частотами, и поставленная задача сводится к вопросу о поведении интеграла

$$\int\limits_0^t \Phi(J, I_i, \omega_i t + \varphi_i^0) dt,$$

где $\omega_i = \partial \mathscr{H} / \partial I_i$ — частоты приведенной системы.

Теорема 1. *Предположим, что при $J = J_0$ приведенная система невырождена, т. е.*

$$\left| \frac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial I_i \partial I_j} \right| \neq 0.$$

Пусть начальные условия (I_i^0, φ_i^0) выбираются из указанной выше области $D \times \mathbf{T}^n$. Тогда в области $D \times \mathbf{T}^n$ существует непрерывная функция $f(I, \varphi)$ такая, что для всех t

$$\psi = \psi^0 + \lambda t + f(I^0, \omega t + \varphi^0) - f(I^0, \varphi^0),$$

$$\lambda = (2\pi)^{-n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \Phi(J_0, I_1^0, \dots, I_n^0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) d\varphi_1 \dots d\varphi_n.$$

Замечание. Функция $f(I, \varphi)$ на самом деле аналитична.

Доказательство.

Рассмотрим для простоты случай, когда $n = 2$. В общем случае доказательство аналогично. Пусть

$$\mathscr{F}_1 = \mathscr{H} = \mathscr{H}_0(I, J_0) + (J - J_0)\mathscr{H}_1(I, \varphi, J_0) + \dots,$$
$$\mathscr{F}_2 = \mathscr{F} = \mathscr{F}_0(I, J_0) + (J - J_0)\mathscr{F}_1(I, \varphi, J_0) + \dots$$

Тогда

$$\dot{\psi} = \Phi = \left.\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial J}\right|_{J=J_0} = \mathscr{H}_1 = H_0 + \sum_{m\neq 0} H_m e^{i(m,\varphi)}.$$

Так как $I = I^0$, $\varphi = \omega t + \varphi^0$, то

$$\begin{gathered}\psi = \lambda t + \psi^0 + \sum_{m\neq 0} \frac{H_m}{i(m, \omega)} \{e^{i(m,\varphi)} - e^{i(m,\varphi^0)}\}, \\ \lambda = H_0 = (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi \, d\varphi_1 \, d\varphi_2.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Функция $\mathscr{F}$ — первый интеграл канонической системы с гамильтонианом $\mathscr{H}$. Следовательно,

$$(\mathscr{H}_0, \mathscr{F}_0) \equiv 0, \quad (\mathscr{H}_0, \mathscr{F}_1) + (\mathscr{H}_1, \mathscr{F}_0) \equiv 0.$$

Если

$$\mathscr{F}_1 = \sum_m F_m(I) e^{i(m,\varphi)},$$

то

$$(m, \omega) F_m = \left(m, \frac{\partial F_0}{\partial I}\right) H_m$$

(ср. с доказательством леммы Пуанкаре из § 1 гл. I). Рассмотрим линейную систему уравнений

$$\frac{m_1 H_m}{(m,\, \omega)} \frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial I_1} + \frac{m_2 H_m}{(m,\, \omega)} \frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial I_2} = F_m,$$

$$\frac{m_1 H_m}{(m,\, \omega)} \frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial I_1} + \frac{m_2 H_m}{(m,\, \omega)} \frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial I_2} = H_m$$

относительно величин $m_1 H_m/(m,\omega)$, $m_2 H_m/(m,\omega)$; $(m,\omega \neq 0)$. Ее определитель

$$\Delta = \frac{\partial(\mathscr{H}_0,\, \mathscr{F}_0)}{\partial(I_1,\, I_2)} \neq 0$$

в области D. Если $m_1 = 0$, то положим

$$\frac{H_m}{(m,\, \omega)} = \frac{H_m \dfrac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial I_1} - F_m \dfrac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial I_1}}{m_2 \Delta}, \tag{3.4}$$

если $m_2 = 0$, то

$$\frac{H_m}{(m,\, \omega)} = \frac{-\, H_m \dfrac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial I_2} + F_m \dfrac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial I_2}}{m_1 \Delta}, \tag{3.5}$$

если же $m_1 \neq 0$ и $m_2 \neq 0$, то можно использовать любое из соотношений (3.4)–(3.5). Поскольку ряды $\sum |H_m|$, $\sum |F_m|$ сходятся, то при $I \in D$, таких, что $(m,\, \omega) \neq 0$, для всех $m \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, ряд

$$\sum \frac{H_m}{i(m,\, \omega)} e^{i(m,\, \varphi)}$$

сходится к некоторой непрерывной функции $f(I,\, \varphi)$. В этом случае из формулы (3.3) следует, что

$$\psi = \psi_0 + \lambda t + f(I^0,\, \varphi) - f(I^0,\, \varphi^0). \tag{3.6}$$

Так как приведенная система невырождена, то ее нерезонансные торы всюду плотны [4]. По непрерывности равенство (3.6) справедливо для всех $I^0 \in D$. ■

§ 4. Поведение линии узлов. Качественная картина вращения волчка Ковалевской

Теорема, доказанная в § 3, применима, конечно, при исследовании движения линии узлов волчка Ковалевской. В этом случае циклической переменной служит угол прецессии ψ, причем

$$\dot{\psi} = \Psi(\varphi_1, \varphi_2); \quad \dot{\varphi}_i = \omega_i = \mathrm{const}.$$

Пониженная система в случае Ковалевской невырождена, по крайней мере, при малых значениях ν (вероятно, она невырождена всегда). В этом случае из теоремы 1 § 3 вытекает

Предложение 2. *Линия узлов волчка Ковалевской обладает средним движением*

$$\Lambda = (2\pi)^{-2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Psi(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 \, d\varphi_2 \tag{4.1}$$

(независимо от соизмеримости частот ω_1 и ω_2).

Точно так же, как в § 3 гл. VII, доказывается

Теорема 2. *Если $I_2 = 0$ и ν мало, то $\Lambda = 0$.*

Таким образом, в этом случае линия узлов совершает ограниченные квазипериодические колебания.

Полученные качественные утверждения о поведении углов Эйлера позволяют указать простую геометрическую картину вращения волчка Ковалевской. Сначала исследуем движение оси динамической симметрии. Обозначим через p след оси симметрии на единичной неподвижной сфере S^2 с центром в точке подвеса. Углы ϑ, ψ являются сферическими координатами точки p.

Зафиксируем постоянные первых интегралов I_1, I_2, I_3. Если $I_1 \neq 2I_2^2 + I_3$, то согласно лемме 2 точка p никогда не совпадает с полюсами сферы S^2 и, следовательно, угол ϑ будет некоторой непрерывной функцией $g(\varphi_1, \varphi_2)$, где φ_1, φ_2 — угловые переменные на инвариантном торе $\mathbf{T}2(I_1, I_2, I_3)$, изменяющиеся с постоянными скоростями ω_1 и ω_2, которые даются формулой (1.9). По теореме 1 существует непрерывная

2π-периодическая функция $f(\varphi_1, \varphi_2)$ такая, что

$$\psi = \psi_0 + \Lambda t + f(\varphi_1, \varphi_2) - f(\varphi_1^0, \varphi_2^0).$$

Здесь постоянная Λ вычисляется по формуле (4.1).

Рассмотрим подвижную систему координат, которая вращается вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью Λ в направлении среднего движения линии узлов. Предположим, что в начальный момент времени подвижная система совпадала с неподвижной. Тогда сферические координаты ϑ', ψ' точки p в подвижной системе будут изменяться со временем следующим образом:

$$\nu' = g(\varphi_1, \varphi_2), \quad \psi' = \psi_0 + f(\varphi_1, \varphi_2) - f(\varphi_1^0, \varphi_2^0).$$

Рассмотрим непрерывное отображение инвариантного тора $\mathbf{T}^2(I_1, I_2, I_3)$ на «подвижную» сферу S^2, определяемое формулами $\vartheta' = g(\varphi_1, \varphi_2)$, $\psi' = f(\varphi_1, \varphi_2)$. Образ тора $\mathbf{T}^2$ при этом отображении обозначим через D. Пусть D' — область S^2 в подвижной системе, получающаяся из D поворотом на угол $\psi_0 - f(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$. Конфигурация области D' зависит только от постоянных первых интегралов, а ее положение зависит еще от начальных фаз φ_1^0, φ_2^0 и начального положения линии узлов. В подвижной системе отсчета движение точки p происходит в замкнутой области D'. Если отношение частот ω_1/ω_2 рационально, то траектория точки p является замкнутой кривой, если же ω_1/ω_2 иррационально, то, очевидно, p заметает D всюду плотно.

В неподвижной системе отсчета движение точки p можно рассматривать как сложное: точка p движется в области D', которая, в свою очередь, вращается как твердое тело вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью Λ. Вокруг оси динамической симметрии твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью и еще совершает ограниченные квазипериодические колебания около этого среднего движения.

При $\nu = 0$ область D является окружностью (что легко выводится из представления Пуансо). При этом якобиан

$$J = \frac{\partial(f, g)}{\partial(\varphi_1, \varphi_2)} \equiv 0.$$

Разлагая решения уравнений движения в ряды по степеням малого параметра ν, можно убедиться в том, что коэффициент при ν в разложении функции J не равен тождественно нулю. Стало быть, в общем случае $J \not\equiv 0$, и, следовательно, множество D (конгруэнтное с D') является двумерной областью.

Замечание. Несложно показать, что в случае Лагранжа для почти всех начальных данных (за исключением точек, лежащих на некоторых особых уровнях первых интегралов) углы Эйлера изменяются следующим образом:

$$\vartheta = f(t), \quad \varphi = \lambda t + g(t), \quad \psi = \Lambda t + h(t),$$

где постоянные λ, Λ зависят от констант интегралов, а функции f, g, h — периодические с одним и тем же периодом τ (причем $f(t) \in (0, \pi)$ $\forall t \in \mathbf{R}$). Из этих формул следует, что точка пересечения p оси динамической симметрии с единичной неподвижной сферой S^2, как в случае Ковалевской, совершает сложное движение: она движется по замкнутой кривой $D = \{(\vartheta, \psi) \in S^2 : \vartheta = f(t), \psi = h(t), t \in [0, \tau)\}$, которая вращается как твердое тело вокруг вертикальной прямой с постоянной угловой скоростью Λ.

§ 5. Приложение к исследованию обобщенных лиувиллевых систем

Рассмотрим динамическую систему с $n+1$ степенями свободы, гамильтониан которой в некоторых канонических переменных $q_1, \ldots, q_{n+1}, p_1, \ldots, p_{n+1}$ имеет вид

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2\sum\limits_{i=1}^{n} A_i(q_i)} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{p_i^2}{B_i(q_i)} + p_{n+1}^2 C_i(q_i) + D_i(q_i) \right]. \tag{5.1}$$

Функции A_i, B_i, C_i и D_i будем считать дважды непрерывно дифференцируемыми, причем

$$\sum A_i(q_i), \quad B_1(q_1), \ldots, B_n(q_n)$$

никогда в нуль не обращаются.

Отметим, что если $C_j \equiv 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, то $\mathscr{H}$ — гамильтониан обычной лиувиллевой системы с n степенями свободы.

Координата q_{n+1} — циклическая, следовательно, $p_{n+1} = \text{const}$. Каноническая система с гамильтонианом $\mathscr{H}$, в котором координата p_{n+1} — фиксированная постоянная, будет приведенной.

Система с функцией Гамильтона (5.1) интегрируется разделением переменных. Действительно, обозначая постоянную интеграла энергии $\mathscr{H}$ через h, будем иметь

$$\frac{p_i^2}{2B_i(q_i)} + p_{n+1}^2 C_i(q_i) + D_i(q_i) - hA_i(q_i) = \alpha_i; \quad i = 1, \ldots, n,$$

где постоянные α_i подчинены условию $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 0$. Отсюда

$$p_i = \sqrt{2B_i(\alpha_i + hA_i - D_i - p_{n+1}^2 C_i)}. \tag{5.2}$$

Выписать полный набор интегралов в инволюции как полной, так и приведенной системы не представляет труда. Исследуем сначала поведение решений приведенной системы. Из уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i} = \frac{p_i}{B_i \sum\limits_j A_j}, \quad i = 1, \ldots, n$$

с учетом соотношений (5.2) будем иметь замкнутую систему для определения переменных $q_1, \ldots, q_n$:

$$\dot{q}_i = \frac{\sqrt{F_i(q_i)}}{\sum\limits_{j=1}^{n} A_j(q_i)}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.3}$$
$$F_i = 2(\alpha_i + hA_i - D_i - p_{n+1}^2 C_i)/B_i.$$

В действительном движении переменные q_i изменяются в областях, где $F_i(x) \geqslant 0$. Ограничимся рассмотрением случая, когда координаты q_i изменяются в интервалах $[a_i, b_i]$, где a_i, b_i — соседние корни функции F_i, между которыми $F_i > 0$.

Это равносильно рассмотрению решений приведенной системы, лежащих на компактных совместных уровнях первых интегралов.

Покажем, что если корень $a_i(b_i)$ кратный (т. е. $F_i'(a_i) = 0$ $(F_i'(b_i) = 0)$), то переменная q_i совершает лимитационное движение. Пусть, например, $F_i'(b_i) = 0$. Положим,

$$M = \max_{a_i \leqslant x \leqslant b_i} |F_i''(x)| > 0, \quad N = \min_{a_j \leqslant q_j \leqslant b_j} \left| \sum A_j(q_j) \right| > 0.$$

По теореме о среднем

$$F_i(q_i) \leqslant \frac{M}{2}(q_i - b_i)^2 \quad q_i \in [a_i, b_i].$$

Из уравнения (5.3) следует, что

$$\frac{dt}{dq_i} \geqslant \sqrt{\frac{2}{M}} \frac{N}{b_i - q_i}, \quad t - t_0 \geqslant \frac{N\sqrt{2}}{M} \int\limits_{q_{i_0}}^{q_i} \frac{dx}{b_i - x}.$$

Следовательно, $t \to \infty$, когда $q_i \to b_i$, или, что то же самое, $q_i(t) \to b_i$, когда $t \to \infty$.

Будем рассматривать случай, когда корни a_i, b_i простые. Это, очевидно, эквивалентно случаю, когда первые интегралы независимы на своих совместных уровнях. По теореме Арнольда [4] эти уровни будут n-мерными торами, которые несут на себе условно-периодические решения.

В этом случае уравнения (5.3) можно упростить. Сделаем замену переменных $q_i \to \psi_i \mod 2\pi$, по формуле (ср. с § 2 гл. VII):

$$\varphi_i = \frac{\pi}{\tau_i} \int\limits_{a_i}^{q_i} \frac{dx}{\sqrt{F_i(x)}}, \quad \tau_i = \int\limits_{a_i}^{b_i} \frac{dx}{\sqrt{F_i(x)}} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.4}$$

В новых переменных уравнения (5.3) будут иметь следующий вид:

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\pi}{\tau_i \sum\limits_j f_j(\varphi_j)}, \quad f_j(\varphi_j) = F_j(q_j(\varphi_j)). \tag{5.5}$$

Применяя теорему о приведении уравнений на n-мерных торах (гл. VII), систему (5.5) можно привести к следующей:

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\pi}{\tau_i \Lambda}, \quad \Lambda = (2\pi)^{-1} \sum_{j=1}^{n} \int_0^{2\pi} f_i(x)\, dx.$$

Новые переменные $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ являются угловыми переменными на инвариантных n-мерных торах приведенной системы, равномерно изменяющимися со временем. Существование таких переменных вытекает из теоремы Арнольда об интегрируемых гамильтоновых системах.

Нам осталось исследовать поведение циклической переменной q_{n+1}. Из уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_{n+1} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_{n+1}} = p_{n+1} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} C_i(q_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i(q_i)}$$

будем иметь

$$q_{n+1} = q_{n+1}^0 + p_{n+1} \int_0^t \frac{\sum C_i(q_i(t))}{\sum A_i(q_i(t))} dt,$$

где функции $q_i(t)$ являются решениями системы (5.3).

В общем случае приведенная система невырождена, и по теореме 1 § 3 координата $q_{n+1} = \Lambda t + O(1)$, где Λ ($=$ const) зависит от постоянных первых интегралов $(h, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, p_{n+1})$, а ограниченный остаток есть n-частотная квазипериодическая функция времени. Мы дадим сейчас доказательство этой формулы без предположения о невырожденности приведенной системы.

Сделаем замену времени $t = t(\tau)$ вдоль фиксированного решения по формуле

$$\frac{dt}{d\tau} = \sum_{i=1}^{n} A_i(q_i). \tag{5.6}$$

Мы предположили, что выражение $\sum A_i$ никогда в нуль не обращается, следовательно, t является монотонной функцией τ, и замена времени обратима. Тогда

$$q_{n+1} = p_{n+1} \int_0^\tau \left\{ \sum_{i=1}^n C_i(q_i(s)) \right\} ds, \tag{5.7}$$

где $q_i(\tau)$ определяется из уравнений

$$\frac{dq_i}{d\tau} = \sqrt{F_i(q_i)}.$$

Переменные q_i являются периодическими функциями τ с периодом $2\tau_i$ (см. формулу (5.4)). Следовательно, функции $C_i(q_i(\tau))$ тоже периодические с тем же периодом.

Из (5.7) следует, что

$$q_{n+1} = p_{n+1} \Big\{ \sum_i \frac{1}{2\tau_i} \int_0^{2\tau_i} C_i(q_i(s)) ds \Big\} \tau + O(1).$$

Так как

$$\frac{1}{2\tau_i} \int_0^{2\tau_i} C_i(q_i(\tau)) d\tau = \frac{1}{\tau_i} \int_0^{\tau_i} C_i(q_i(\tau)) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\tau_i} \int_{a_i}^{b_i} \frac{C_i(q_i) dq_i}{\sqrt{F_i(q_i)}} = \oint \frac{C_i dq_i}{\sqrt{F_i}} \Big/ \oint \frac{dq_i}{\sqrt{F_i}},$$

где

$$\oint \frac{f(x)dx}{\sqrt{F_i(x)}} = \int_{a_i}^{b_i} \frac{f\,dx}{\sqrt{F_i}} - \int_{b_i}^{a_i} \frac{f\,dx}{\sqrt{F_i}} = 2\int_{a_i}^{b_i} \frac{f\,dx}{\sqrt{F_i}},$$

то

$$q_{n+1} = p_{n+1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \tau + O(1), \ \lambda_i = \oint \frac{C_i\,dq_i}{\sqrt{F_i}} \Big/ \oint \frac{dq_i}{\sqrt{F_i}}. \tag{5.8}$$

Аналогично, из (5.6) получим равенство

$$t = \left(\sum_{i=1}^{n} \nu_i\right) \tau + O(1), \quad \nu_i = \oint \frac{A_i\, dq_i}{\sqrt{F_i}} \Big/ \oint \frac{dq_i}{\sqrt{F_i}}. \tag{5.9}$$

Из (5.8) и (5.9) следует, что

$$q_{n+1} = p_{n+1} \frac{\sum \lambda_i}{\sum \nu_i} t + O(1).$$

По теореме Боля об интегралах квазипериодических функций [64] ограниченный остаток в этой формуле есть n-частотная квазипериодическая функция времени.

Таким образом, формула $q_{n+1} = \Lambda t + O(1)$ доказана. Причем попутно мы получили выражение для среднего движения циклической переменной q_{n+1}:

$$\Lambda = p_{n+1} \frac{\sum\limits_i \lambda_i}{\sum\limits_i \nu_i}.$$

Замечание. Уравнения (5.3) имеют интегральный инвариант

$$J(U) = \int \underset{U}{\cdots} \int M\, dq_1 \ldots dq_n$$

с плотностью

$$M = \frac{\sum\limits_i A_i(q_i)}{\prod\limits_i \sqrt{F_i(q_i)}}.$$

Так как $M > 0$ (< 0), то $J(U)$ задает некоторую жорданову меру, инвариантную относительно фазового потока системы (5.3). Нетрудно показать, что фазовое среднее функции q_{n+1} по этой инвариантной мере

$$\oint p_{n+1} \frac{\sum C_i}{\sum A_i} M\, dq_1 \ldots dq_n \Big/ \oint M\, dq_1 \ldots dq_n$$

равно в точности Λ (ср. с формулировкой теоремы 1 § 3).

Функции Гамильтона многих задач, важных в практических приложениях, имеют вид (5.1). Вот некоторые примеры:

1) Задача Лагранжа: движение точки вокруг протягивающего центра в однородном силовом поле (физический аспект этой задачи — эффект Штарка: воздействие однородного электрического поля на движение в атоме водорода [19]). В некоторых координатах

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2m(\xi^2+\eta^2)}\{p_\xi^2 + p_\eta^2 + (\xi^{-2}+\eta^{-2})p_\varphi^2 + c_1(\xi^4-\eta^4)c_2\},$$

$$m,\ c_1,\ c_2 = \mathrm{const}.$$

Система с тремя степенями свободы; координата φ — циклическая.

2) Задача Баррара: движение точки в силовом поле, потенциал которого в сферических координатах $(r,\ \vartheta,\ \varphi)$ имеет вид

$$\mathscr{U}(r,\ \vartheta) = \frac{c_1}{r} + \frac{c_2 \sin\vartheta}{r^2},$$

где $c_1,\ c_2 = \mathrm{const}$.

Гамильтониан этой задачи есть

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2mr^2}\left\{r^2p_r^2 + p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\cos^2\vartheta} + c_1 r + c_2\sin\vartheta\right\}.$$

Здесь циклической координатой является φ.

3) Обобщенная задача двух неподвижных центров. Функция Гамильтона в сжатых сфероидальных координатах имеет следующий вид:

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2mc_1(\operatorname{sh}^2 v + \cos^2 u)}\{p_u^2 + p_v^2 + p_w^2(\sin^{-2} u - \operatorname{ch}^{-2} v) +$$

$$+ c_2(\operatorname{sh} v - c_3\cos u)\}; \quad m,\ c_1,\ c_2,\ c_3 = \mathrm{const}.$$

Система с тремя степенями свободы; координата w является циклической.

Потенциалы двух последних задач хорошо приближают потенциал Земли (которая считается осесимметричной). Поэтому в этих приближениях искусственные спутники Земли вращаются вокруг оси симметрии по закону $\lambda t + O(1)$.

Исторический очерк

Прошло уже 110 *лет с тех пор, как С. В. Ковалевская открыла новый случай интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой* (1888 г.). *Однако до сих пор о качественных свойствах движения тела в этом случае известно очень мало. Все параметры движения выражены через время при помощи квадратур, однако они настолько громоздки, что не позволяют непосредственно изучить вращение твердого тела. Были даже поставлены эксперименты с волчком Ковалевской* (проф. Мерцалов, см. [30]), *но при этом результаты получились очень запутанными и не привели к выявлению существенных закономерностей движения. Запутанность движения оси динамической симметрии в этих экспериментах объясняет, по-видимому, тот факт, что в общем случае множество D* (§ 4) *на неподвижной единичной сфере является двумерной областью, и траектория точки p* (§ 4) *заполняет эту область всюду плотно.*

Волчок Ковалевской — популярный объект исследований, и ему посвящен ряд интересных работ. Прежде всего надо сослаться на известную работу Г. Г. Аппельрота, помещенную в сборнике [30, с. 61–155]. *В ней много внимания уделено качественным свойствам изменения переменных Ковалевской s_1, s_2. Высказано утверждение о всюду плотном заполнении в общем случае некоторых областей возможного движения на плоскости $\mathbf{R}^2\{s_1, s_2\}$. Это утверждение легко вывести из результата о приведении уравнений Ковалевской* (1.6) *к виду* (1.9) *и теоремы о равномерном распределении.*

В одной из работ Н. Е. Жуковского [31] *предложено локальное геометрическое представление вращения волчка Ковалевской. Из него, правда, трудно сделать конкретные выводы о движении твердого тела в целом. Дело в том, что фигурирующие в интерпретации Н. Е. Жуковского некоторые вспомогательные конические поверхности в общем случае не являются замкнутыми* (*в действительности они всюду плотно замощают целые области трехмерного пространства*).

В ряде недавних работ (см., например, [61, 71]) *подробно исследованы некоторые частные решения задачи Ковалев-*

ской — вырожденные решения уравнений Эйлера–Пуассона (изолированные периодические и асимптотические решения).

В этой главе предложен иной подход к задаче качественного анализа случая Ковалевской. Он основан на широком использовании понятий, связанных с теоремой В. И. Арнольда о поведении траекторий интегрируемых гамильтоновых систем.

Литература

[1] Пуанкаре А. *Новые методы небесной механики*, т. 1. В кн.: Пуанкаре А. *Избр. труды*, т. 1. М.: Наука, 1971, с. 8–326.

[2] Уиттекер Е. Т. *Аналитическая динамика.* М.-Л.: Гостехиздат, 1937.

[3] Голубев В. В. *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.* М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

[4] Арнольд В. И. *Математические методы классической механики.* М.: Наука, 1974.

[5] Шабат Б. В. *Введение в комплексный анализ.* М.: Наука, 1969.

[6] Arnold V. I., Avez A. *Ergodic problems of classical mechanics.* N. Y., W. A. Benjamin, 1968.

[7] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье.* М.: Наука, 1967.

[8] Уиттекер Э., Ватсон Г. *Курс современного анализа*, т. 2. М.: Физматгиз, 1963.

[9] Арнольд В. И. *Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.* УМН, 1963, т. 18, вып. 5, с. 13–40.

[10] Bruns H. *Über die Integrale des Vielkörper-Problems.* Acta math., 1888, v. 11, S. 25–96.

[11] Painleve P. *Sur le problème des trois corps.* Bull. Astr., 1898, v. 15, p. 81–117.

[12] Уинтнер А. *Аналитические основы небесной механики.* М.: Наука, 1967.

[13] Пуанкаре А. *О проблеме трех тел и об уравнениях динамики.* В кн.: Пуанкаре А. *Избр. труды*, т. 2, М.: Наука, 1972, с. 357–442.

[14] Зигель К. Л. *О существовании нормальной формы аналитических дифференциальных уравнений Гамильтона в окрестности положения равновесия.* Сб. пер. «Математика», 1961, т. 5, вып. 2, с. 129–156.

[15] Деприт А. *Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости.* Сб. пер. «Механика», 1968, № 2, с. 3–9.

[16] Andoyer H. *Cours de mécanique céleste.* Guathier-Villars, Paris, 1923.

[17] Шарлье К. *Небесная механика.* М.: Наука, 1966.

[18] Садов Ю. А. *Переменные действие-угол в задаче Эйлера – Пуансо.* ПММ, 1970, т. 34, вып. 5, с. 962–964.

[19] Борн М. *Лекции по атомной механике*, т. 1. Киев, ОНТИ, 1939.

[20] Немыцкий В. В., Степанов В. В. *Качественная теория дифференциальных уравнений.* М.-Л., Гостехиздат, 1949.

[21] SiegeI C. L. *Note on differential equation on the torus.* Ann. Math., 1945, v. 46, № 3, p. 423–428.

[22] Jacobi C. G. I. *Sur la rotation d'un corps.* In: Gesammelte Werke. Bd. 2., Berlin, Raimer, 1882, S. 289–352.

[23] Пуанкаре А. *Новые методы небесной механики*, т. 3. В кн.: Пуанкаре А. *Избр. труды*, т. 2, М.: Наука, 1972, с. 7–356.

[24] Биркгоф Дж. Д. *Динамические системы.* М.-Л.: Гостехиздат, 1941.

[25] Husson Ed. *Sur un theoreme de H. Poincaré, relativement d'un solide pesant.* Acta math., 1908, v. 31, p. 71–88.

[26] Архангельский Ю. А. *Аналитическая динамика твердого тела.* М.: Наука, 1977.

[27] Аппель П. *Теоретическая механика*, т. 2. М.: Физматгиз, 1960.

[28] Архангельский Ю. А. *Об одной теореме Пуанкаре, относящейся к задаче о движении твердого тела в ньютоновском поле сил.* ПММ, 1962, т. 26, вып. 6, с. 1116–1117.

[29] Зигель К. Л. *Лекции по небесной механике.* М., ИЛ, 1959.

[30] *Движение твердого тела вокруг неподвижной точки.* Сборник, посвященный памяти С. В. Ковалевской. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1940.

[31] Жуковский Н. Е. *Геометрическая интерпретация рассмотренного С. В. Ковалевской случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки.* В кн.: Жуковский Н. Е. *Собр. соч.*, т. 1. М.: Гостехиздат, 1948, с. 384–432.

[32] Пуанкаре А. *Об одной геометрической теореме.* — В кн.: Пуанкаре А. *Избр. труды*, т. 2. М.: Наука, 1972, с. 775–807.

[33] Козлов В. В. *Геометрия переменных «действие-угол» в задаче Эйлера–Пуансо.* Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех., 1974, № 5, с. 74–79.

[34] Демин В. Г., Киселев Ф. И. *Новый класс периодических движений твердого тела с одной неподвижной точкой в ньютоновском силовом поле.* Докл. АН СССР, 1974, т. 214, № 5, с. 997–998.

[35] Белецкий В. В. *Об интегрируемости уравнений движения твердого тела около неподвижной точки под действием центрального ньютоновского поля сил.* Докл. АН СССР, 1957, т. 113, № 2, с. 287–290.

[36] Голубев В. В. *Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки.* М.: Гостехиздат, 1953.

[37] Arkhangelskii Yu. A. *Construction of periodic solutions for the Euler – Poisson equations by means of power series expansion containing a small parameter.* Coil. math. soc. Janos Bolyai. Diff. equations, 1975, v. 15, p. 27–50.

[38] Козлов В. В. *Новые периодические решения в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.* ПММ, 1975, т. 39, вып. 3, с. 407–414.

[39] Садов Ю. А. *Переменные действие-угол в задаче Эйлера – Пуансо.* Препринт № 22, Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1970.

[40] Jacobi C. G. J. *Fragments sur la rotation d'un corps.* In: Gesammelte Werke, Bd. 2. Berlin, Raimer, 1882, S. 452–512.

[41] Painlevé P. *Mémoire sur les équations différénlielles dont l'intégrale générale est uniforme.* Bull. de la Societe math. de France, 1900, v. 28, p. 201–261.

[42] Ляпунов Л. М. *Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку.* — В кн.: Ляпунов А. М. *Собр. соч.*, т. 1. М.: Гостехиздат, 1954, с. 402–417.

[43] Аппельрот Г. Г. *Задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки.* Уч. зап. Моск. ун-та. Отд. физ.-мат., 1894, т. 2, вып. 11, с. 1–112.

[44] Полубаринова – Кочина П. Я. *Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки.* В кн.: *Движение твердого тела вокруг неподвижной точки.* М.: Изд-во АН СССР, 1940, с. 157–186.

[45] Милнор Дж. *Теория Морса.* М.: Мир, 1965.

[46] Бурбаки Н. *Общая топология*, кн. 3. М.: Наука, 1975.

[47] Милнор Дж. *Теорема об h-кобордизме.* М.: Мир, 1969.

[48] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. *Риманова геометрия в целом.* М.: Мир, 1971.

[49] Рашевский П. К. *Риманова геометрия и тензорный анализ.* М.: Наука, 1967.

[50] Зейферт Г., Трельфалль Н. *Вариационное исчисление в целом.* М.: ИЛ, 1947.

[51] Постников М. М. *Введение в теорию Морса.* М.: Наука, 1971.

[52] Klingenberg W. *Closed geodesics.* Ann. Math., 1969, v. 89, № 1, p. 68–91.

[53] Фет А. И. *О периодической задаче вариационного исчисления.* Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 2, с. 287–289.

[54] Munkres J. *Elementary differential topology.* Princeton Univ. Press, Princeton. N. V., 1963.

[55] Татаринов Я. В. *К исследованию фазовой топологии компактных конфигураций с симметрией.* Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех., 1973, № 5, с. 70–77.

[56] Татаринов Я. В. *Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки.* Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех., 1974, № 6, с. 99–105.

[57] Люстерник Л. А., Шнирельман Л. *Топологические методы в вариационных задачах и их приложения к дифференциальной геометрии поверхности.* УМН, 1947, т. 2, вып. 1, с. 166–217.

[58] Козлов В. В. *Принцип наименьшего действия и периодические решения в задачах классической механики.* ПММ, 1976, т. 40, вып. 3, с. 399–407.

[59] Харламов М. П. *Понижение порядка в механических системах с симметрией.* Механика твердого тела (респ. межведомст. сборник). Киев: Наукова думка, 1976, вып. 8, с. 4–18.

[60] Пуанкаре А. О геодезических линиях на выпуклых поверхностях. В кн.: Пуанкаре А. *Избр. труды*, т. 2. М.: Наука, 1972, с. 735–774.

[61] Архангельский Ю. А. *Об одном движении гироскопа Ковалевской.* ПММ, 1964, т. 28, вып. 3, с. 521–522.

[62] Милнор Дж., Уоллес А. *Дифференциальная топология.* М.: Мир, 1972.

[63] Вейль Г. *Среднее движение.* УМН, 1976, т. 31, вып. 4, с. 213–219.

[64] Бор Г. *Почти периодические функции.* М.-Л.: Гостехиздат, 1934.

[65] Касселс Дж. В. С. *Введение в теорию диофантовых приближений.* М.: ИЛ, 1961.

[66] Гелбаум В., Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе.* М.: Мир, 1967.

[67] Сретенский Л. Н. *Движение гироскопа Горячева – Чаплыгина.* Изв. АН СССР. ОТН, 1953, №1, с. 109–119.

[68] Bohl P. *Über ein in der Theorie der Sekulären Störungen Vorkommendes Problem.* I. für die Reine und Angcwandte Mathematik, 1909, Bd. 135, H. 3, S. 189–283.

[69] Архангельский Ю. А. *Движение быстрого гироскопа Горячева – Чаплыгина.* Изв. АН СССР. ОТН, 1957, №7, с. 122–124.

[70] Докшевич А. И. *Качественное исследование решения Горячева – Чаплыгина.* Механика твердого тела (респ. межведомств. сборник). Киев: Наукова думка, 1972, вып. 4, с. 3–8.

[71] Харламов П. В., Мозалевская Г. В. *Геометрическое истолкование некоторых движений гироскопа С. В. Ковалевской.* Механика твердого тела (респ. межведомств. сборник). Киев: Наукова думка, 1973, вып. 5 с. 5–24.

[72] Горр Г. В. *Об одном движении тяжелого твердого тела в случае Горячева – Чаплыгина.* ПММ, 1970, т. 34, вып. 6, с. 1139–1143.

[73] Боль П. Г. *Об одном дифференциальном уравнении из теории возмущений.* В кн.: Боль П. Г. *Избр. труды.* Рига, Изд-во АН Латв. ССР, 1961, с. 127–154.

[74] Бурбаки Н. *Алгебра. Модули, кольца, формы.* М.: Наука, 1966.

[75] Пуанкаре А. *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.* М.-Л.: Гостехиздат, 1947.

[76] Poincaré H. *Sur les series trigonometriques.* Comptes Rendus, 1885, v. 101, № 2, p. 1131–1134.

[77] Арнольд В. И. *Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя.* Изв. АН СССР, Сер. матем., 1961, т. 25, № 1, с. 21–86.

[78] Ильин В. А., Позддняк Э. Г. *Основы математического анализа.* М.: Наука, 1967.

[79] Hardy G. H. *Weierstrass's nondifferentiable function.* Trans. Amer. Math. Soc., 1916, v. 17, № 3, p. 301–325.

[80] Нитецки З. *Введение в дифференциальную динамику.* М.: Мир, 1975.

[81] Колмогоров А. Н. *Общая теория динамических систем и классическая механика.* В кн.: *Международный математический конгресс.* Амстердам, 1954. М.: Физматгиз, 1961, с. 185–208.

[82] Чаплыгин С. А. *О катании шара по горизонтальной плоскости.* В кн.: Чаплыгин С. А. *Избр. труды.* М.: Наука, 1976, с. 409–428.

[83] Колмогоров А. Н. *О динамических системах с интегральным инвариантом на торе.* Докл. АН СССР, 1953, т. 93, № 5, с. 763–766.

[84] Шкловер М. Д. *О классических системах на торе с непрерывным спектром.* Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1967, № 10, с. 113–124.

[85] Каток А. Б. *Спектральные свойства динамических систем с интегральным инвариантом на торе.* Функц. анализ и его прил., 1967, т. 1, вып. 4, с. 46–56.

[86] Kolossoff G. *Sur le cas de M. Goriatchoff de la rotation d'ur corps pesant outour d'un point lixe.* Rendiconti del circolo Matcmatico di Palermo, 1902, v. 16, p. 346–348.

[87] Marcolongo R. *Osservazioni intorno alia nota del sig. Kolossoff.* Rendiconti del circolo Matematico di Palermo, 1902, v. 16, p. 349–357.

[88] Докшевич А. И. *Элементарное доказательство теоремы Лиувилля об алгебраических интегралах системы уравнений Эйлера – Пуассона.* Механика твердого тела (респ. межведомств. сборник). Киев: Наукова думка, 1974, вып. 6, с. 48–50.

[89] Докшевич А. И. *Об условиях существования четвертого алгебраического интеграла уравнений Эйлера – Пуассона.* Механика твердого тела (респ. межведомств. сборник). Киев: Наукова думка, 1976, вып. 8, с. 57–64.

[90] Seifert H. *Periodische Bewegungcn mechanischer Systeme.* Math. Z., 1948. Bd. 51, H. 2, S. 197–216.

Приложение

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДУФФИНГА

1. Уравнения Дуффинга. Мы будем рассматривать колебания одномерной системы, возбуждаемой внешней гармонической силой. Они описываются уравнением

$$\ddot{x} + f(x) = \varepsilon \sin \lambda t; \quad \varepsilon,\, \lambda = \text{const}. \tag{1.1}$$

Восстанавливающая сила потенциальна; потенциальная энергия задается формулой

$$V(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi.$$

Будем считать, что $x = 0$ — простой нуль аналитической функции f, причем $f'(0) > 0$. Тогда в окрестности точки $x = 0$ график потенциала V будет иметь вид параболы с ветвями, направленными вверх. Таким образом, $x = 0$ — устойчивое равновесие невозмущенной системы.

Нас будут интересовать два основных примера, рассмотренных впервые Дуффингом в его работе 1918 года [1]:

а) $f = \omega_0^2 x + \alpha x^3$, при $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) говорят о жесткой (мягкой) восстанавливающей силе,

б) $f = \omega_0^2 x \sin x$ (маятник); здесь $V = \omega_0^2 \cos x + \omega_0^2$.

Уравнения второго порядка (1.1) можно представить в виде канонических дифференциальных уравнений Гамильтона:

$$\begin{gathered} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial y}; \quad H = H_0 + \varepsilon H_1, \\ H_0 = \frac{y^2}{2} + V(x), \quad H_1 = x \sin \lambda t. \end{gathered} \tag{1.2}$$

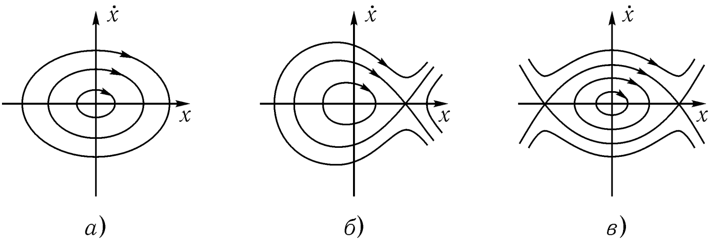

Рис. 1. Фазовые портреты

При $\varepsilon = 0$ будем иметь интегрируемую систему с одной степенью свободы. Различные типы фазовых портретов изображены на рис. 1.

Тип *а* характеризует область колебательных движений (например, при жесткой восстанавливающей силе). В случае *в* имеется пара сдвоенных сепаратрис; соответствующие двоякоасимптотические решения Пуанкаре назвал гетероклиническими (такой фазовый портрет имеет, например, система Дуффинга при мягкой восстанавливающей силе). Петля сепаратрисы в случае *б* является траекторией гомоклинических решений (по Пуанкаре). Фазовый портрет такого типа получится при добавлении квадратичного по x слагаемого в выражение для восстанавливающей силы.

2. Периодические решения. Поиску периодических решений уравнения (1.1) посвящена обширная литература. Обычно для этой цели применяют методы теории возмущений или используют функциональные и вариационные методы. Ссылки на некоторые наиболее известные работы можно найти, например, в книгах [2, 3]. Укажем также некоторые более поздние работы [4]–[8].

Мы будем рассматривать случай, когда параметр ε мал. Для поиска периодических решений уравнения (1.1) можно воспользоваться методом малого параметра, разлагая эти решения в сходящиеся ряды по степеням ε. Представление уравнения (1.1) в виде гамильтоновой системы (1.2) позволяет воспользоваться теорией Пуанкаре рождения пар невырожденных периодических решений, развитой им в главах I и III знаменитых «Новых методов небесной механики» [9].

Прежде всего отметим, что критическим точкам потенциальной энергии при малых значениях ε отвечают невырожденные периодические решения полной системы. Причем, точки локального минимума порождают решения эллиптического типа (их мультипликаторы лежат на единичной окружности), а точки максимума порождают решения гиперболического типа (их мультипликаторы вещественные и отличны от 1). Период таких решений равен $2\pi/\lambda$; они часто называются гармоническими.

Периодические решения в общем случае имеют период $2\pi n/\lambda$ (n целое); при этом система совершает ровно m полных колебаний. Это субгармонические решения типа $\{m, n\}$. Числа m и n можно считать взаимно простыми. Существуют ли субгармоники, сколько их и что можно сказать об их устойчивости при малых $\varepsilon \neq 0$.

Чтобы ответить на эти вопросы, перейдем к переменным действие-угол J, $\varphi \mod 2\pi$ в невозмущенной системе с одной степенью свободы (см., например, [10]). Нас будет интересовать, в основном, колебательная область на фазовой плоскости (возможно, ограниченная сепаратрисами), в которой такие переменные можно ввести в целом:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2\left[H_0 - V(x)\right]}\, dx, \tag{2.1}$$

$$\varphi = \omega(J) \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{2\left[H_0 - V(\xi)\right]}}. \tag{2.2}$$

Из (2.1) получаем, что $H_0 = H_0(J)$,

$$\omega = \frac{dH}{dJ}$$

— частота свободных колебаний невозмущенной системы, координата x находится из (2.2) обращением интеграла. Например, для системы Дуффинга (пример а) переход к переменным действие-угол осуществляется с помощью эллиптических функций.

В новых переменных

$$\begin{aligned} H &= H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \varphi, t), \\ H_1 &= g(J, \varphi) \sin \lambda t. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Функция g — это координата x, представленная в переменных действие-угол. Ее можно разложить в ряд Фурье:

$$g = \sum_{k \in Z} g_k(J) e^{ik\phi}.$$

В невозмущенной задаче резонансные режимы колебаний типа $\{m, n\}$ определяются равенствами

$$\omega(J_0) = \frac{m}{n}\lambda, \quad \varphi = \omega(J_0)t + \varphi_0. \tag{2.4}$$

Первое уравнение определяет возможные резонансные значения переменной действия.

Метод Пуанкаре основан на анализе возмущающей функции $H_1(J, \varphi, t)$ на резонансных решениях (2.4) невозмущенной системы:

$$t \to H_1\big(J_0, \omega(J_0)t + \varphi_0, t\big).$$

Это $2\pi/\lambda$-периодическая функция t. Ее временное среднее

$$\langle H_1 \rangle = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau H_1 \, d\tau$$

будет, очевидно, 2π-периодической функцией начальной фазы φ_0. Ввиду периодичности, функция $\langle H_1 \rangle$ имеет локальные максимумы и минимумы. Нас интересуют невырожденные точки экстремума, в которых отлична от нуля вторая производная. Пуанкаре доказал, что если невозмущенная система невырождена ($d^2 H_0/dJ^2 \neq 0$ при резонансном значении J_0), то каждой невырожденной критической точке φ_0 усредненной возмущающей функции $\langle H_1 \rangle$ отвечают периодические решения (2.4), которые не исчезают при возмущении, а переходят в невырожденные периодические решения полной системы (1.2). Их можно представить в виде рядов по степеням ε, а их мультипликаторы разлагаются в ряды по степеням $\sqrt{\varepsilon}$.

Пуанкаре изучил также вопрос об устойчивости найденных периодических решений в линейном приближении. Оказывается, если

$$\frac{d^2 H_0}{dJ^2}(J_0) > 0,$$

то локальным максимумам и минимумам функции $\langle H_1 \rangle$ отвечают соответственно гиперболические и эллиптические периодические решения. Если же вторая производная функции H_0 отрицательна, то свойства устойчивости меняются местами.

Для возмущающей функции из (2.3), очевидно, $\langle H_1 \rangle = 0$, если $m \neq 1$. Здесь все критические точки вырождены и теория Пуанкаре непосредственно не применима. Пусть $m = 1$. Тогда

$$\langle H_1 \rangle = -\frac{g_n}{2i} e^{in\varphi_0} + \frac{g_{-n}}{2i} e^{-in\varphi_0}. \tag{2.5}$$

Поскольку $g_{-n} = \overline{g}_n$, то $\langle H_1 \rangle$ будет линейной комбинацией $\sin n\varphi_0$ и $\cos n\varphi_0$ с вещественными коэффициентами: если $g_n = -a - bi$, $g_{-n} = -a + bi$, то

$$\langle H_1 \rangle = a \sin n\varphi_0 + b \cos n\varphi_0.$$

Все критические точки этой функции невырожденные, если $g_n \neq 0$ и $n \neq 0$. Действительно, пусть ψ — вырожденная критическая точка. Тогда

$$\frac{d\langle H_1 \rangle}{d\psi} = na \cos n\psi - nb \sin n\psi = 0,$$

$$\frac{d^2\langle H_1 \rangle}{d\psi^2} = -n^2 a \sin n\psi - n^2 b \cos n\psi = 0.$$

Но тогда определитель этой линейной системы $-n^3(a^2 + b^2)$ должен быть равен нулю. Но это не так, согласно нашему предположению.

Таким образом, если $g_n \neq 0$, то 2π-периодическая функция (2.5) имеет на периоде ровно n невырожденных максимумов и n невырожденных минимумов, которые перемежаются между собой. Если невозмущенная система невырождена, то каждая такая точка порождает периодическое решение возмущенной системы типа $\{1, n\}$. На самом деле разные точки локального максимума (минимума) отвечают одной и той же периодической траектории; они соответствуют лишь различным значениям начальной фазы φ_0. Итак, если $g_n \neq 0$, то при малых значениях ε возмущенные уравнения (1.2) имеют два $2\pi n/1$-периодических решения, причем одно из них эллиптическое, а другое — гиперболическое. Гиперболические решения, конечно, неустойчивы по Ляпунову. Достаточные условия устойчивости по Ляпунову эллиптических периодических решений Пуанкаре получены в работе [11] с помощью КАМ-теории. Эти условия выполнены в ситуации общего положения.

Применим эти результаты к уравнениям Дуффинга. Сначала рассмотрим систему из примера *a*. Прежде всего докажем, что при $\alpha \neq 0$ невозмущенная система невырождена. Более точно, знак второй производной d^2H_0/dJ^2 совпадает со знаком коэффициента α в выражении для восстанавливающей силы. Кстати сказать, при $\alpha \neq 0$ эта система тождественно вырождена.

Дифференцируя равенство (2.1) по J, получим формулу для частоты:

$$\omega = \frac{2\pi}{\displaystyle\oint \frac{dx}{\sqrt{2\left[H_0 - V(x)\right]}}}. \tag{2.6}$$

Она имеет простой смысл: в знаменателе стоит выражение для периода колебаний. Период T есть функция от энергии H_0. Дифференцируя (2.6) по J, приходим к соотношению

$$\frac{d^2H_0}{dJ^2} = -\frac{2\pi\omega}{T^2}\frac{dT}{dH_0}.$$

Поскольку $\omega > 0$, то вторая производная имеет знак противоположный знаку dT/dH_0. Воспользуемся результатом работы [12]: если функция

$$\frac{f(x)}{x} \tag{2.7}$$

возрастает или убывает с ростом x, то функция $H_0 \to T(H_0)$ изменяется в противоположном направлении. В нашем случае функция (2.7) есть $\omega_0 + \alpha x^2$. Она возрастает (убывает) при $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$. Утверждение доказано.

Перейдем теперь к анализу возмущения. В рассматриваемой задаче функция g — это координата x, представленная как функция φ с помощью соотношения (2.2). Для системы Дуффинга обращение интеграла (2.2) приводит к выводу, что x — это эллиптический синус Якоби с точностью до несущественного постоянного множителя. Воспользуемся классической формулой

$$\operatorname{sn} u = \frac{2\pi}{kK}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{q^{s-\frac{1}{2}}}{1-q^{2s-1}}\sin(2s-1)\frac{\pi u}{2K}.$$

Здесь использованы стандартные обозначения (см., например, [13]). Отсюда сразу видно, что коэффициенты g_n с нечетными n отличны от нуля при всех значениях переменной действия.

Таким образом, задача о парах периодических решений возмущенной системы сводится к разрешимости алгебраического уравнения (2.4)

$$\omega(J) = \frac{\lambda}{2k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.8}$$

Здесь надо различать случаи жесткой и мягкой восстанавливающей силы. Как уже отмечалось, при $\alpha > 0$ с возрастанием энергии (или, что то же самое, с возрастанием переменной J) период $T = 2\pi/\omega$ монотонно убывает от $2\pi/\omega_0$ до нуля. Следовательно, уравнение (2.8) имеет решения для целых значений $k = 0, 1, \ldots$, удовлетворяющих неравенству

$$2k + 1 < \lambda/\omega_0. \tag{2.9}$$

Если же $\alpha < 0$, то период T монотонно возрастает от значения $2\pi/\omega_0$ до бесконечности. Следовательно, в этом случае неравенство (2.9) заменяется на противоположное

$$2k + 1 > \lambda/\omega_0. \tag{2.10}$$

Здесь при возмущении рождается бесконечно много различных пар невырожденных долгопериодических решений.

В случае жесткой восстанавливающей силы локальным максимумам (минимумам) усредненного возмущения отвечают гиперболические (соответственно, эллиптические) периодические решения. Для мягкой силы свойства устойчивости меняются на противоположные.

Эти выводы полезно сравнить с результатами работы [14], в которой при выполнении неравенств (2.9) или (2.10) доказано существование одного периодического решения с частотой (2.8). Метод Пуанкаре позволяет удвоить количество периодических решений и, что даже более важно, сделать заключение об их устойчивости. Любопытно отметить, что в книге Лефшеца [3] (в которой изложена работа [14] в несколько более общем виде) имеется ссылка на классическое сочинение Пуанкаре [9]. Специалистам по теории колебаний следовало бы более внимательно изучать работы Пуанкаре. Это замечание относится и к работам по синхронизации динамических систем (см., например, [15]): сформулированные в этой теории экстремальные свойства синхронных (резонансных) движений часто оказываются следствием результатов Пуанкаре о рождении периодических решений многомерных гамильтоновых систем.

В задаче о вынужденных колебаниях маятника (пример *б*) функция (2.7), очевидно, убывает и, следовательно, частота $\omega(J)$ убывает с ростом J. В частности, $d^2H_0/dJ^2 < 0$. Можно показать, что в этой задаче ряд Фурье для функции g содержит все гармоники с ненулевыми коэффициентами, и поэтому возмущенная задача имеет бесконечное число пар невырожденных $2\pi n/\lambda$-периодических решений, где $n > \lambda/\omega_0$.

В заключение этого параграфа сделаем важное замечание. Как заметил В. И. Арнольд (см. [16], добавление 9), если для заданных m и n уравнение

$$\omega(J) = \frac{m\lambda}{n}$$

имеет решение, то при малых значениях параметра ε уравнения (1.2) имеют не менее двух различных периодических решений типа $\{m, n\}$. Доказательство основано на применении теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении сильно нерезонансных инвариантных торов и геометрической теоремы Пуанкаре о неподвижных точках отображения кольца. При этом остается неясным вопрос об аналитической зависимости этих решений от параметра ε, а также ничего определенного нельзя сказать об их устойчивости.

Аналогичные соображения использованы в [8] для доказательства существования бесконечного числа периодических решений различных типов при фиксированных конечных значениях параметра ε. В [8] малый параметр вводится искусственно в области, где потенциальная энергия много меньше кинетической. Периодические решения, полученные в работах [4]–[7], составляют половину периодических решений, существование которых установлено в [8] методами гамильтоновой механики.

Другой конструктивный подход к поиску новых периодических решений основан на использовании подходящих канонических замен переменных J, $\varphi \mod 2\pi \to \widetilde{J}$, $\widetilde{\varphi} \mod 2\pi$ (зависящих от ε), после которых гамильтониан принимает вид

$$H = H_0(\widetilde{J}) + \varepsilon H_1(\widetilde{J}) + \varepsilon^2 H_2(\widetilde{J}, \widetilde{\varphi}, t) + o(\varepsilon^2).$$

Ряд Фурье функции H_2, как правило, содержит новые нетривиальные гармоники, и поэтому метод Пуанкаре (после несложной модификации) приводит к появлению новых субгармонических решений. Примеры эффективного использования этой идеи можно найти в книге [16, гл. IV].

3. Расщепление сепаратрис и периодические решения. Предположим, что фазовый портрет невозмущенной системы содержит петлю сепаратрис или пару сдвоенных сепаратрис. Оказывается, при малых значениях $\varepsilon \neq 0$ эти сепаратрисы, как правило, расщепляются (перестают быть сдвоенными), и это явление, обнаруженное Пуанкаре, приводит к появлению областей с квазислучайным поведением траекторий (см. [9, 10, 16]). Как показано в [17], расщепление сепаратрис тесно связано с рождением бесконечного числа пар различных долгопериодических решений, одно из которых эллиптическое, а другое — гиперболическое.

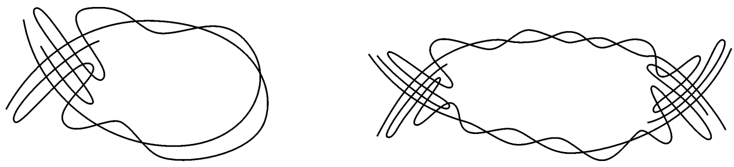

Рис. 2. Расщепление сепаратрис

Пусть

$$t \to x\alpha(t), \quad y\alpha(t), \quad -\infty < t < +\infty \tag{3.1}$$

— двоякоасимптотическое решение невозмущенной задачи. Ввиду автономности, в (3.1) время t можно заменить на $t-\alpha$, α — произвольный вещественный параметр.

Чтобы сформулировать условия расщепления сепаратрис, введем функцию

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \{H_0, H_1\}\big|_{x_\alpha, y_\alpha} dt = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}_\alpha(t-\alpha)\sin\lambda t\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}_\alpha(t)\sin\lambda(t+\alpha)dt. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Видно, что I — $2\pi/\lambda$-периодическая функция от α. Оказывается, если $I(\alpha) \neq 0$, то возмущенные сепаратрисы расщепляются. Более того, если функция $\alpha \to I(\alpha)$ имеет простые нули, то расщепленные сепаратрисы пересекаются, причем трансверсально (см. [16]). Картины трансверсально пересекающихся сепаратрис показаны на рис. 2.

В нашем случае, согласно (3.2),

$$\int\limits_0^{2\pi/\lambda} I(\alpha)d\alpha = 0.$$

Поэтому функция I обязательно имеет нули. Вопрос в том, когда среди них имеются простые нули. Справедлива

Теорема. *Функция* (3.2) *имеет на периоде ровно два простых нуля для всех значений* $\lambda \in R$ *кроме, быть может, счетного множества изолированных точек.*

Действительно, формулу (3.2) можно представить в следующем виде:

$$I(\alpha) = c_1 \sin \lambda\alpha + c_2 \cos \lambda\alpha,$$
$$c_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}_a(t) \cos \lambda t \, dt, \quad c_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}_a(t) \sin \lambda t \, dt. \tag{3.3}$$

Следовательно,

$$c_1(\lambda) - ic_2(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}_\alpha(t) e^{-i\lambda t} dt$$

преобразование Фурье функции $t \to \dot{x}_a(t)$. Поскольку функция $t \to \dot{x}_a(t)$ аналитическая и экспоненциально быстро стремится к нулю при $t \to \pm\infty$ (теорема Ляпунова), то $c_1 - ic_2$ также аналитически зависит от λ (теорема Пэли–Винера).

Покажем, что $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. Действительно, в противном случае по теореме обращения преобразования Фурье

$$\dot{x}_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(c_1(\lambda) - ic_2(\lambda)\big) e^{-i\lambda t} d\lambda$$

будет иметь $x_a(t) \equiv \text{const}$. Однако асимптотические решения не сводятся к равновесиям. Ввиду аналитичности, $c_1^2(a) + c_2^2(a) = 0$ лишь для дискретного набора частот λ. Согласно (3.3), для оставшихся значений λ функция $I(\alpha)$ имеет на периоде два простых нуля. Теорема доказана.

Исключительное множество значений λ, о котором идет речь в теореме, не пусто. Оно содержит точку $\lambda = 0$.

В работе [17] получен следующий результат о рождении изолированных периодических решений вблизи расщепляющихся сепаратрис в гомоклиническом случае. Если функция $I(\alpha)$ имеет простые нули, то возмущенная система допускает бесконечно много невырожденных периодических решений с частотой

$$\omega = \lambda/n, \tag{3.4}$$

где n — любое достаточно большое целое число ($n \geqslant n_0$).

Доказательство этой теоремы основано на проверке выполнения всех условий теоремы Пуанкаре о рождении изолированных резонансных решений, если выполнено неравенство (3.4). При этом начальные фазы порождающих решений стремятся к нулю функции I, когда $n \to \infty$.

В теореме о расщеплении сепаратрис утверждается, что функция $I(\alpha)$ имеет на периоде два простых нуля (в которых $I' \neq 0$). Пусть α_0 — простой нуль и $\varepsilon I'(\alpha_0) > 0$. Тогда периодические решения, о которых идет речь в теореме из работы [17], будут гиперболическими и, следовательно, неустойчивыми. Если же $\varepsilon I'(\alpha_0) < 0$, то получим бесконечное семейство эллиптических периодических решений. С помощью результата работы [11] С. А. Довбыш показал, что при выполнении дополнительного условия

$$\big[5(I'')^2 - 3I'I'''\big](\alpha_0) \neq 0$$

эти эллиптические решения устойчивы по Ляпунову для малых ε [18]. Им же доказано, что найдется такая постоянная $c > 0$, что с возрастанием $|\varepsilon| < c/n$ мультипликаторы μ, μ^{-1} периодического решения Пуанкаре, появляясь из точки $\mu = \mu^{-1} = 1$ при $\varepsilon = 0$, либо монотонно движутся в противоположных направлениях положительной вещественной полуоси (когда $\varepsilon I'(\alpha_0) > 0$), либо обегают единичную окружность на комплексной плоскости, встречаются в точке $\mu = \mu^{-1} = -1$ и затем расходятся в противоположных направлениях отрицательной вещественной полуоси (когда $\varepsilon I'(\alpha_0) < 0$), становясь неустойчивыми. При $|\varepsilon| \geqslant c/n$ монотонный характер движения мультипликаторов может нарушиться.

Важно отметить, что предположение о наличии петли сепаратрисы является существенным. В гетероклиническом случае (например, в системе Дуффинга с мягкой восстанавливающей силой) теорема Пуанкаре может давать лишь периодические решения с частотой (3.4), где n пробегает нечетные числа.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России» (проект № 5581).

Литература

[1] Duffing G. *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung.* Sammlung Vieweg, Braunschweig, 1918.

[2] Сансоне Дж. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Т. II, М.: ИЛ, 1954.

[3] Лефшец С. *Геометрическая теория дифференциальных уравнений.* М.: ИЛ, 1961.

[4] Harvey C. A. *Periodic Solutions of Differential Equation* $\ddot{x} + g(x) = p(t)$ // Contribution to diff. equations. 1963, v. 1, № 4, p. 425–451.

[5] Heinbockel J., Struble R. A. *The existence of periodic solutions of nonlinear oscillators* // Journal SIAM, 1965, v. 13, № 1, p. 6–36.

[6] Morris G. R. *A differential equations for undamped forced nonlinear oscillations.* I, II, III // Proc. Cambr. Phil. Soc., 1955, v. 51, part. 2, p. 297–312; 1958, v. 54, part. 4, p. 426–438; 1965, v. 61, part. 1, p. 133–155.

[7] Morris G. R. *An infinite class of periodic solutions of* $\ddot{x} + 2x^3 = p(t)$ // Proc. Cambr. Phil. Soc., 1965, V. 61, part. 1, p. 157–164.

[8] Довбыш С. А. *Колмогоровские торы в некоторых неинтегрируемых системах, не содержащих малого параметра* // Вестн. Моск. ун-та., Сер. Матем., механ., 1988, № 2, с. 36–39.

[9] Пуанкаре А. *Новые методы небесной механики.* В кн.: Избранные труды, т. 1, М.: Наука, 1972.

[10] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. *Математические аспекты классической и небесной механики.* М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985.

[11] Маркеев А. П., Чуркина Н. И. *О периодических решениях Пуанкаре канонической системы с одной степенью свободы* // Письма в астрон. журнал, 1985, т. 11, № 8, с. 634–639.

[12] Opial Z. *Sur les periodes des solutions de l'equation differentielle* $\ddot{x} + g(x) = 0$ // Ann. Polon. Math., 1961, v. 10, p. 49–72.

[13] Уиттекер Е., Ватсон Г. *Курс современного анализа.* Т. II, М.: Физматгиз, 1962.

[14] Shimizu T. *On differential equations for non-linear oscillations* // Mathematica Japonica, 1951, v. 2, p. 86–96.

[15] Блехман И. И. *Синхронизация в природе и технике.* М.: Наука, 1981.

[16] Козлов В. В. *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике.* Ижевск: Изд-во Удм. гос. ун-та, 1995.

[17] Козлов В. В. *Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы* // УМН, 1986, т. 41, № 5, с. 177–178.

[18] Довбыш С. А. *Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы* // УМН, 1989, т. 44, № 2, с. 229–230.

Козлов Валерий Васильевич

МЕТОДЫ КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Директор А. В. Борисов
Главный редактор И. С. Мамаев
Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная верстка С. В. Высоцкого
Корректор М. А. Ложкина

Подписано к печати 30.10.00. Формат $84 \times 108^1/_{32}$.
Усл. печ. л. 13,44. Уч. изд. л. 13,16.
Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Тираж 1000 экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ № 084 от 03.04.00.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.