НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

В. В. Козлов

1. Рассмотрим систему уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

с аналитическим лагранжианом $L(x, \dot{x})$: $U \times R^n \to R$, U — область в R^n. Для механических систем $L = K(x, \dot{x}) - \Pi(x)$, причем при фиксированных $x \in U$ функция K — положительно определенная квадратичная форма по скоростям $\dot{x} \in R^n$. В механике область U называется пространством положений ($n = \dim U$ — число степеней свободы), а функции K и Π называются соответственно кинетической и потенциальной энергией. Аналитические решения $x(t)$: $R \to U$ уравнений Лагранжа называются движениями. Критические точки потенциальной энергии и только они являются равновесиями ($x(t) \equiv \mathrm{const}$). Если в положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это равновесие устойчиво (теорема Лагранжа). Этот факт справедлив, конечно, не только для аналитических систем. До сих пор неизвестно, является ли условие теоремы Лагранжа необходимым для устойчивости равновесия. Задача обращения теоремы Лагранжа об устойчивости восходит к А. М. Ляпунову [1]. Давно известна следующая

Гипотеза о неустойчивости: Если положение равновесия изолировано и потенциальная энергия в этом положении не имеет локального минимума, то равновесие неустойчиво.

Опубликованное Н. Г. Четаевым [2] доказательство этого утверждения ошибочно. До недавнего времени оно было доказано только в некоторых частных случаях: например, когда равновесие — невырожденная критическая точка потенциальной энергии (А. М. Ляпунов [1]), или когда Π — однородная форма (Н. Г. Четаев [3]). Лишь недавно В. П. Паламодов доказал гипотезу о неустойчивости для двумерных систем ($n = 2$) с «евклидовой» кинетической энергией $K = \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle/2$, где $\langle\,,\,\rangle$ — обычное скалярное произведение в R^2. Я доказываю этот результат для систем с произвольной кинетической энергией.

2. Рассмотрим аналитическую функцию $u(x)$ ($|x| < r$, $u(0) = 0$), для которой $x = 0$ является изолированной критической точкой. Если $u(x)$ не имеет локального минимума, то область $U^- = \{u(x) < 0\}$ не пуста и ее замыкание содержит точку $x = 0$.

Лемма (В. П. Паламодов [4]). *При некотором* $\rho > 0$ *в области* $U_\rho^- = U^- \cap \cap \{|x| < \rho\}$ *существует непрерывное векторное поле* $v(x)$, *обладающее следующими свойствами*:

1) $\langle v, u'_x \rangle \leqslant 0$;

2) v *имеет непрерывные частные производные первого порядка всюду в* U_ρ^-, *кроме точек, лежащих на конечном множестве* Γ *гладких кривых*;

3) *матрица Якоби* v' *удовлетворяет неравенству*

$$\langle v'\xi, \xi \rangle \geqslant c\langle \xi, \xi \rangle, \qquad c > 0.$$

Идея построения такого векторного поля содержится в работе Н. Г. Четаева [3]. Следуя работе [4], введем еще одно векторное поле $w = v - \sigma u'_x$, $\sigma > 0$. При малых σ

$$\langle w'\xi, \xi \rangle = \langle v'\xi, \xi \rangle - \sigma\langle u''\xi, \xi \rangle \geqslant \alpha\langle \xi, \xi \rangle, \qquad \alpha > 0.$$

Кроме того, $\langle w, u' \rangle \leqslant -\sigma\langle u', u' \rangle = -\sigma u'^2$.

Теорема. *Почти все решения* $x(t)$ *системы* $\ddot{x} = -u'_x$, *расположенные на нулевом уровне энергии* $\dot{x}^2/2 + u(x) = 0$, *либо*

А) *за конечное время покидают область* U_ρ^-, *либо*

Б) *стремятся к точке* $x = 0$ *по некоторой последовательности* $\{t_k\}$, $t_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$.

Используя свойство обратимости (одновременное существование решений $x(t)$ и $x(-t)$), получим неустойчивость равновесия $x = 0$. В. П. Паламодов доказал, что все решения уравнения $\ddot{x} = -u'_x$ с отрицательной энергией покидают за конечное время область U_ρ^- [4].

Доказательство теоремы. Почти все движения $x(t)$ обладают следующим свойством: множество значений $t \in R$, при которых $x(t) \in \Gamma$, имеет нулевую меру. Исключительных движений на самом деле не более чем счетно.

Рассмотрим непрерывную функцию $l(t) = \langle w(x(t)), \dot{x}(t)\rangle$. Для почти всех t

$$\dot{l} = \langle w'\dot{x}, \dot{x}\rangle - \langle w, u'\rangle \geqslant \alpha\dot{x}^2 + \sigma u'^2. \tag{1}$$

Следовательно, почти всюду $\dot{l} > 0$ и $l(t)$ монотонно возрастает. Существуют две возможности: либо $l(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, либо функция $l(t)$ ограничена. В первом случае реализуется заключение A, поскольку

$$l^2 \leqslant \langle w, w\rangle \langle \dot{x}, \dot{x}\rangle \leqslant 2 \max_{x \in U_\rho^-} w^2(x) \max_{|x| \leqslant \rho} |u|.$$

Во втором случае $\varliminf_{t\to\infty} \dot{l}(t) = 0$. Из оценки (1) (с учетом изолированности положения равновесия) вытекает заключение Б).

Замечание. На самом деле в случае Б) движение $x(t)$ асимптотическое: $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

3. Из геометрии известно, что всякая аналитическая риманова метрика на плоскости (в частности, кинетическая энергия $K(x, \dot{x})$) подходящим аналитическим обратимым преобразованием $y = y(x)$ ($y(0) = 0$) приводится к виду $\lambda(y)\ \langle \dot{y}, \dot{y}\rangle/2$, где λ — некоторая положительная аналитическая функция [5]. Следовательно, в новых переменных лагранжиан рассматриваемой задачи равен

$$L = \lambda\{\langle \dot{y}, \dot{y}\rangle/2 - W(y)\}, \qquad W = \Pi/\lambda.$$

В канонических переменных y, p уравнения Лагранжа записываются в канонической форме с гамильтонианом

$$H = \{\langle p, p\rangle/2 + V(y)\}/\lambda(y), \qquad V = \Pi\lambda.$$

Поскольку функция V аналитична и $V(0) = 0$, $V'(0) = 0$, то ее критические точки в области $|y| \leqslant \rho$ при малых ρ могут лежать только на уровне $\{V = 0\}$. Но при этом $V' = \lambda\Pi' + \lambda'\Pi = 0$ и $\Pi = 0$. Следовательно, $V' = 0$ только при $y = 0$. Согласно предположениям функция $V(y)$ принимает отрицательные значения сколь угодно близко от нуля.

Неустойчивость равновесия $y = 0$ вытекает теперь из теоремы п. 2 и следующего замечания: траектории двух канонических систем с гамильтонианами F и $H = F/\lambda$ ($\lambda > 0$), расположенные на нулевых уровнях $\{F = 0\}$ и $\{H = 0\}$, совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения.— М.; Л.: ОНТИ, 1935.

[2] Н. Г. Четаев. О неустойчивости равновесия, когда силовая функция не есть максимум.— Уч. зап. Казанск. ун-та, 1938, 98 : 3, с. 43—58.

[3] Н. Г. Четаев. О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть максимум.— ПММ, 1952, **16** : 1, с. 89—93.

[4] В. П. Паламодов. Об устойчивости равновесия в потенциальном поле.— Функц. анализ, 1977, **11** : 4, с. 42—55.

[5] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия.— М.: «Наука», 1979.

Московский Государственный университет

Поступило в Правление общества 1 сентября 1980 г.