ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1982

ТОМ 263 № 2

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

УДК 531.32+517.55 МАТЕМАТИКА

В.В. КОЗЛОВ, В.П. ПАЛАМОДОВ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 16 IX 1981)

1°. Рассмотрим уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad x \in V, \tag{1}$$

в некоторой окрестности V нуля гильбертова пространства H с лагранжианом $L = K(x, \dot x) - U(x)$, где K: $V \times H \to \mathrm{R}$ – аналитическая функция, которая при каждом $x \in V$ является положительно-определенной квадратичной формой по $\dot x$, а $K(0, \dot x) = \|\dot x\|^2$; U – аналитическая функция на V.

Пусть $U'(0) = 0$ ($(\cdot)'$ означает первый дифференциал). Решение $x(t) \not\equiv 0$ уравнения (1) называется асимптотическим, если $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Из постоянства интеграла энергии $K + U$ следует, что тогда $\dot x(t) \to 0$. Если функция U имеет в точке $x = 0$ локальный минимум (хотя бы нестрогий), то асимптотические решения отсутствуют. Представляется правдоподобным обратное утверждение: если положение равновесия $x = 0$ не является локальным минимумом аналитической потенциальной функции U, то асимптотические решения существуют. Без предположения аналитичности это уже не так. Это видно на примере бесконечно дифференцируемой функции $U(x) = \exp(-x^{-2}) \cdot \cos x^{-1}$ (Пенлеве–Уинтнер).

Отметим, что поскольку в (1) время обратимо ($x(-t)$ также является решением), то из наличия асимптотического решения вытекает неустойчивость равновесия в нуле.

2°. Теорема. *Пусть $U(x) = \sum_{k \geqslant m} u_k(x)$, $m \geqslant 2$, где u_k – однородный полином степени k, причем u_m слабо непрерывен и в точке $x = 0$ не имеет минимума.*

Тогда существует решение уравнения (1), асимптотическое к положению равновесия.

Отметим одно из следствий. Поскольку гармоническая функция $U(x) \not\equiv 0$ всегда удовлетворяет условиям теоремы, то равновесие заряда в электростатическом поле всегда неустойчиво.

Случай $m = 2$ теоремы рассматривался еще в работах А.М. Ляпунова [1] и П. Боля [2]. Для нечетных m (когда $\dim H < \infty$) теорема доказана первым из авторов. Ниже приводится доказательство в наиболее сложном случае, когда m четно и больше двух.

3°. Построение формального решения. Введем натуральное число $p = m/2 - 1$ и рассмотрим пространство F формальных рядов вида

$$x(t) = \sum_{j \leqslant i/p} \frac{x_{ij}(\ln t)^j}{t^{i/p}}, \qquad x_{ij} \in H, \qquad i, j = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

Через $t^\nu F$ обозначим пространство рядов вида $t^\nu x(t)$, $x \in F$. Запишем (1) в следующей эквивалентной форме:

$$\ddot x + \Gamma(x, \dot x) + v(x) = 0, \qquad v = u'_m + \sum_{k \geqslant m} v_k, \tag{3}$$

где $\Gamma(x, y)$ – аналитическое отображение из $V \times H$ в H, квадратичное по y, а v_k – полиномиальный оператор в H степени k. Найдем формальное решение $x \in t^{-1/p}F$

уравнения (3). Его коэффициенты x_{ij} будем искать с помощью индукции, возрастающей по i и убывающей по j. Подставляя $x_1(t) = x_{00}t^{-1/p}$ в (3) и собирая члены наивысшей степени по t, мы получим уравнение

$$\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}+1\right)x_{00}+u'_m(x_{00})=0.$$

Пусть e — точка минимума функции u_m на единичной сфере. Согласно условию, минимум отрицателен, следовательно, $u'_m(e) = -ce$, $c > 0$. Поэтому указанное уравнение можно решить, положив $x_{00} = ae$, $a = \left(\frac{p+1}{cp^2}\right)^{1/(m-2)}$. При подстановке $x = x_1$ в (3) мы получим слева ряд по степеням t, не превосходящим числа $-2-2/p$.

Предположим, что для некоторого натурального $N \geqslant 2$ найден ряд

$$x_{N-1} = \sum_{pj \leqslant i < N-1} \frac{x_{ij}(\ln t)^j}{t^{(i+1)/p}}$$

такой, что $y_N \equiv \ddot{x}_{N-1} + \Gamma(x_{N-1}, \dot{x}_{N-1}) + v(x_{N-1})$ принадлежит $t^{-2-1/p}F$ и не содержит степеней t выше $-2-N/p$. Положим $x_N = x_{N-1} + \Delta x$, где

$$\Delta x = \sum_{pj \leqslant N-1} \frac{x_{Nj}(\ln t)^j}{t^{N/p}}.$$

Тогда

$$\ddot{x}_N + \Gamma(x_N, \dot{x}_N) + v(x_N) = z + \Delta\ddot{x} + u''_m(x_1)\Delta x + \ldots,$$

где z — сумма членов известного ряда y_N, содержащих $t^{-2-N/p}$, а многоточие означает члены со степенями t ниже $-2-N/p$. Таким образом, нам следует решить уравнение

$$(4)\qquad \Delta\ddot{x} + u''_m(x_1)\Delta x = -z \equiv \sum_{pj \leqslant N-1} \frac{z_j(\ln t)^j}{t^{2+N/p}}$$

($(\cdot)''$ означает второй дифференциал). Максимальная степень логарифма, встречающаяся в правой части, есть $M = [(N-1)/p]$. Приравнивая члены с этой степенью, приходим к уравнению

$$(5)\qquad \frac{N}{p}\left(\frac{N}{p}+1\right)x_{NM} + u''_m(ae)x_{NM} = z_M.$$

Если число $-\frac{N}{p}\left(\frac{N}{p}+1\right)$ не является собственным значением оператора $u''_m(ae)$, то решение x_{NM} существует. Заметим, что в силу тождества Эйлера

$$(6)\qquad u''_m(ae)e = \frac{(m-1)}{a}u'_m(ae) = -(m-1)\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}+1\right)e = -\frac{p+1}{p}\left(\frac{p+1}{p}+1\right)e.$$

Так как оператор u''_m симметричен, он действует в подпространстве, касательном к единичной сфере в точке e. Поскольку эта точка является минимумом для u_m, все собственные значения u''_m на касательном подпространстве неотрицательны. Это рассуждение вместе с (6) показывает, что при $N \neq p+1$ уравнение (5) разрешимо. Подставляя $\Delta x = x_{NM}(\ln t)^M \; t^{-N/p}$ в уравнение (4), мы удовлетворим его с точностью до степеней логарифма, меньших M. На следующем шаге получим уравнение (5) с неизвестным вектором x_{NM-1} и новой правой частью и т.д. Таким образом, (4) разрешимо за $M+1$ шаг.

Рассмотрим исключенный случай $N = p + 1$. Правая часть (4) не содержит степеней логарифма, так как их не было при $N = 2$ и не могло появиться на предыдущих шагах. Поэтому правую часть (4) можно записать в виде

$$\lambda e t^{-3-1/p} + f t^{-3-1/p},$$

где вектор f ортогонален e. Оставляя лишь второе слагаемое, найдем решение уравнения (5) в подпространстве, ортогональном вектору e, где собственные значения u_m'' неотрицательны. Положив далее $x_{N1} = -\dfrac{\lambda p}{3p+2}e$, найдем, что

$$\left(\frac{x_{N1}\ln t}{t^{(p+1)/p}}\right)^{\cdot\cdot} + u_m''(x_1)\left(\frac{x_{N1}\ln t}{t^{(p+1)/p}}\right) = \frac{\lambda e}{t^{3+1/p}}.$$

Тем самым конструкция формального решения завершена.

4°. Сделав замену аргумента $s = t^{-1}$, перепишем (3) в виде

(7) $\quad s^4\ddot{x} + 2s^3\dot{x} + s^4\Gamma(\dot{x}, \dot{x}) + v(x) = 0,$

где точки означают производную по s. Найдем сходящееся решение этого уравнения в виде $x = x_{2p} + \bar{x}$, где x_{2p} – приближенное решение, построенное в п. 3° на $2p$-м шагу, а $\bar{x}$ – неизвестный сходящийся ряд, принадлежащий подпространству $\bar{F} \subset F$ рядов, не содержащих степеней t больших $-2-1/p$. Запишем (7) в следующей форме:

$$s^2\ddot{\bar{x}} + 2s\dot{\bar{x}} + u_m''(x_{00})\bar{x} = R(s, \bar{x}) \equiv$$
$$\equiv s^{-2}\left[u_m''(x_1)\bar{x} - v(x) + v(x_{2p}) - s^4(\Gamma(\dot{x}, \dot{x}) - \Gamma(\dot{x}_{2p}, \dot{x}_{2p})) - y_{2p+1}\right].$$

Эквивалентная запись

(8) $\quad \bar{x} = BR(s, \bar{x}),$

где B – оператор, обратный к $A = s^2\dfrac{d^2}{ds^2} + 2s\dfrac{d}{ds} + u_m''(x_{00})$ на $\bar{F}$.

Выделим в F подпространство F_r, $0 < r$, образованное рядами y, для которых конечна норма

$$\|y\|_r^1 = \sup_{0 \leq s \leq r}\left(s^{-2-1/p}\|y(s)\| + s^{-1-1/p}\|y'(s)\|\right),$$

и покажем, что при достаточно малом r на некотором шаре в F_r правая часть (8) является сжимающим оператором. Отсюда будет следовать существование решения (8). Фактически оно совпадает с формальным решением, найденным в п. 3°, что доказывает сходимость последнего.

Используем также норму

$$\|y\|_r^0 = \sup_{0 \leq s \leq r} s^{-2-1/p}\|y(s)\|.$$

Оценим величину $\|R(s, \bar{x}) - R(s, \tilde{x})\|_r^0$, предполагая, что ряды $\bar{x}$ и $\tilde{x}$ принадлежат шару радиуса L в F_r, а $L = 2\|s^{-2}y_{2p+1}\|_r^1$. Запишем:

$$R(s, \bar{x}) = t^2(u_m''(x_1) - v'(x_{2p}))\bar{x} - w(x, \bar{x}) - s^2(\Gamma(\dot{x}, \dot{x}) - \Gamma(\dot{x}_{2p}, \dot{x}_{2p})) - t^2 y_{2p+1},$$

где $w(x, \bar{x}) = v(x) - v(x_{2p}) - v'(x_{2p})\bar{x}$. В соответствии с этим разность $R(s, \bar{x}) - R(s, \tilde{x})$ представляется в виде суммы трех слагаемых, первое из которых $t^2(u_m''(x_1) - v'(x_{2p}))(\bar{x} - \tilde{x})$. Имеем

(9) $\quad t^2(u_m''(x_1) - v'(x_{2p})) = u_m''(x_{00}) - u_m''(t^{1/p}x_{2p}) + s^{1/p}v_m'(t^{1/p}x_{2p}) + \ldots,$

причем $t^{1/p}x_{2p}$ есть полином от $s^{1/p}$ и $s\ln s$ со свободным членом, равным x_{00}.

Поскольку $u''_m(y)$ – гладкая функция y, то норма оператора (9) равна $O(r^{1/p} + r\ln r)$. Отсюда следует, что

$$\| t^2(u''_m(x_1) - v'(x_{2p}))(\bar{x} - \tilde{x})\|_r^0 \leqslant C(r^{1/p} + r\ln r)\|\bar{x} - \tilde{x}\|_r^0.$$

Далее рассмотрим оператор $W(y, x) = v(y + x) - v(y) - v'(y)x$ и проведем выкладку

$$W(y, \bar{x}) - W(y, \tilde{x}) = \int_0^1 W'_x(y, \tilde{x} + t(\bar{x} - \tilde{x}))(\bar{x} - \tilde{x})\,dt.$$

Так как оператор $W'_x(y, x)$ гладко зависит от x и обращается в нуль при $x = 0$, то

$$\| W'_x(y, \tilde{x} + t(\bar{x} - \tilde{x}))\| \leqslant C(\|\tilde{x}\| + \|\bar{x}\|)$$

равномерно по $t \in [0, 1]$. Поскольку $w(x, \bar{x}) = W(x_{2p}, \bar{x})$, отсюда вытекает неравенство

$$\sup_{0 \leqslant s \leqslant r} \| t^2(w(x, \bar{x}) - w(x, \tilde{x}))\| \leqslant$$
$$\leqslant C \sup_{0 \leqslant s \leqslant r} (\|t^2\tilde{x}\| + \|t^2\bar{x}\|)\|\bar{x} - \tilde{x}\|_r^0 \leqslant Cr^{1/p}\|\bar{x} - \tilde{x}\|_r^0.$$

Аналогично проверяется неравенство, в котором $x^* = x_{2p} + \tilde{x}$:

$$\| s^2(\Gamma(x, \dot{x}) - \Gamma(x^*, \dot{x}^*))\|_r^0 \leqslant Cr^{2+1/p}\|\bar{x} - \tilde{x}\|_r^1,$$

Суммируя все оценки, получим

$$(10) \quad \| R(s, \bar{x}) - R(s, \tilde{x})\|_r^0 \leqslant C_0(r^{1/p} + r\ln r)\|\bar{x} - \tilde{x}\|_r^1,$$

где константа C_0 не зависит от r.

Лемма. *Существует константа C_1, не зависящая от r, такая, что*

$$(11) \quad \| By\|_r^1 \leqslant C_1\|y\|_r^0.$$

Отсюда и из (10) вытекает, что при достаточно малом r оператор BR является сжимающим в шаре $\{ x \in F_r, \ \|x\|_r^1 \leqslant L\}$. Это доказывает теорему.

5°. Доказательство леммы. Оператор $u''_m(x_{00})$ компактен как второй дифференциал слабо непрерывной функции u_m. Гильбертово пространство H разложим в ортогональную сумму одномерных собственных подпространств этого оператора. Пусть P_λ – проектор на подпространство, отвечающее собственному числу λ. Очевидно, что $P_\lambda A = A_\lambda P_\lambda$, где

$$A_\lambda = s^2\frac{d^2}{ds^2} + 2s\frac{d}{ds} + \lambda.$$

Таким образом, достаточно установить оценку (11) для обыкновенного дифференциального оператора A_λ с постоянной C_1, не зависящей от λ. Как мы установили, одно из собственных чисел равно $-\dfrac{p+1}{p}\left(\dfrac{p+1}{p} + 1\right)$, а все остальные неотрицательны. В первом случае оператор $B_\lambda = A_\lambda^{-1}$ задается формулой

$$B_\lambda x(s) = s^{-(2p+1)/p}\int_0^s \sigma^{(2p+2)/p}\int_0^\sigma \tau^{-(2p+1)/p}x(\tau)\,d\tau\,d\sigma$$

и непосредственно проверяется, что

$$\| B_\lambda x\|_r^1 \leqslant \frac{3p+1}{p}\|x\|_r^0.$$

В случае $\lambda \geqslant 0$ имеем

$$B_\lambda x(s) = s^{t_1} \int_0^s \sigma^{2t_2} \int_0^\sigma \tau^{t_1} x(\tau)\, d\tau\, d\sigma,$$

где $t_{1,2}$ – корни уравнения $t^2 + t + \lambda = 0$. При $0 \leqslant \lambda \leqslant 1/4$ корни вещественны и принадлежат отрезку $[-1, 0]$. При $\lambda > 1/4$, $\operatorname{Re} t_{1,2} = -1/2$. В любом случае оператор B_λ ограничен на F_r и

$$\| B_\lambda x \|_r^1 \leqslant (|t_1| + 1) \| x \|_r^0.$$

Лемма доказана.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
22 IX 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
2. *Bohl P.* – J. reine u. angew.Math., 1904, vol. 127, № 3.

УДК 519.21 МАТЕМАТИКА

А.А. ЛЕВИТСКАЯ

ТЕОРЕМЫ ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НАД ПРОИЗВОЛЬНЫМ КОНЕЧНЫМ КОЛЬЦОМ

(Представлено академиком В.М. Глушковым 9 VII 1981)

Исследуется предельное поведение числа решений ν_n следующей системы уравнений над произвольным кольцом $\mathbf{R}$ мощности m, содержащим левую единицу:

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-s;$$

здесь s – некоторая целочисленная константа произвольного знака, 0 – единица аддитивной группы $\mathbf{R}$, $a_{ij} = a_{ij}^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots, n-s$, $j = 1, 2, \ldots, n$, – независимые в совокупности случайные величины, распределения которых удовлетворяют условию

$$(2) \qquad \frac{l_0}{m(l_0 - 1)} \frac{\ln(c_n n)}{n} = \delta_n \leqslant \mathbf{P}(a_{ij} = z), \qquad i = 1, 2, \ldots, n-s, \; j = 1, 2, \ldots, n, \; z \in \mathbf{R},$$

где l_0 – число, равное наименьшей из мощностей ненулевых левых идеалов $\mathbf{R}$, $c_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$.

Результаты данной статьи, формулируемые ниже в виде теорем, обобщают и дополняют соответствующие результаты работ [1–6].

Пусть далее $|T|$ – мощность некоторого множества T; $\mathbf{R}^r = \underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}}_{r}$ (декартово произведение), элементами $\mathbf{R}^r$ являются r-мерные векторы-столбцы; $\mathcal{M}_r$ – произвольный левый подмодуль модуля $\mathbf{R}^r$.