1983 г. январь—февраль *т. 38, вып. 1 (229)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.911

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ И НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В ГАМИЛЬТОНОВОЙ МЕХАНИКЕ

В. В. Козлов

Вагнер
Но мир! Но жизнь! Ведь человек дорос,
Чтоб знать ответ на все свои загадки.
Фауст
Что значит знать? Вот, друг мой, в чем вопрос.

И. В. Гёте «Фауст»

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. В 1834 г. Гамильтон представил дифференциальные уравнения классической механики — уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}, \qquad L\colon R^n\{\dot{q}\} \times R^n\{q\} \to R$$

в «канонической» форме:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{1}$$

Здесь $p = \partial L/\partial \dot{q} \in R^n$ — обобщенный импульс, а функция Гамильтона $H = p\dot{q} - L\,|_{p,q}$ — «полная энергия» механической системы. «Его результаты были частично получены еще ранее французскими математиками. Пуассон уже в 1809 г. сделал первый шаг в этом направлении, он ввел в рассмотрение величину

$$\sum_{r=1}^{n} p_r \dot{q}_r - T\ ^{1)},$$

представил ее как функцию переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и получил, таким образом, первую половину системы Гамильтона. Лагранж в 1810 г. ввел специальную систему уравнений (для вариации элементов орбиты) в форме Гамильтона, в которой роль функции H играет функция возмущений. Кроме того, к этой форме уравнений привела и теория нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, ибо, как это показали Пфафф в 1814 г. и Коши (в дополнении к более ранним работам Лагранжа и Монжа) в 1819 г., дифференциальные уравнения характеристик уравнения в частных производных

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \tag{2}$$

где

$$p_s = \frac{\partial z}{\partial x_s},$$

имеют вид

$$\frac{dx_1}{\partial f/\partial p_1} = \frac{dx_2}{\partial f/\partial p_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\partial f/\partial p_n} = \frac{dp_1}{-\partial f/\partial x_1} = \frac{dp_2}{-\partial f/\partial x_2} = \ldots = \frac{dp_n}{-\partial f/\partial x_n}.$$

Исследования Гамильтона были распространены Остроградским (1848—1850) и Донкином (1854) на те случаи, когда кинетический потенциал содержит явно время» (Е. Уиттекер [55]) [2].

---

[1]) T — кинетическая энергия системы.

[2]) «Было бы весьма желательным дать подробный критический анализ исторического развития исследований по этому вопросу. Имеющиеся в литературе ссылки относительно происхождения фундаментальных математических понятий в аналитической динамике почти все ошибочны» (А. Уинтнер [54]).

2. Задача интегрирования гамильтоновых систем (не записанных еще в канонической форме) обсуждалась уже в работах братьев Бернулли, Клеро, Даламбера, Эйлера и, конечно, Лагранжа, связанных с применением идей и принципов Ньютона к различным задачам механики. «Разрешимыми» (интегрируемыми) считались лишь те задачи, которые можно было решить с помощью конечного числа алгебраических операций и «квадратур»— вычислений интегралов известных функций. Однако наиболее актуальные задачи динамики (скажем, задача n тел) оказались «неинтегрируемыми» (точнее, непроинтегрированными). Лишь в самых простых случаях, когда система имела всего одну степень свободы ($n = 1$) или расщеплялась на несколько независимых одномерных систем, интегрирование оказывалось возможным благодаря наличию интегралов типа сохранения полной энергии ($H = \mathrm{const}$).

3. Гамильтон (1834 г.) и Якоби (1837 г.) разработали общий метод интегрирования уравнений динамики, основанный на введении специальных канонических координат.

Идея метода Гамильтона — Якоби восходит к работам Пфаффа, Коши (и к более ранним исследованиям Лагранжа и Монжа) по теории характеристик. Его суть заключается в следующем: преобразование независимых переменных $p,\ q \to P,\ Q$ вида

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \qquad Q = \frac{\partial S}{\partial P}; \qquad S(P,\ q)\colon\ R^{2n} \to R$$

переводит канонические уравнения (1) в канонические уравнения

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}, \qquad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \tag{3}$$

с функцией Гамильтона

$$K(P,\ Q) = H(p,\ q)|_{P,Q}.$$

Если функция K не зависит от Q, то уравнения (3) сразу интегрируются: $P = P_0$, $Q = Q_0 + t\left.\frac{\partial K}{\partial P}\right|_{P_0}$. Таким образом, задача интегрирования канонических уравнений (1) сводится к отысканию «производящей» функции $S(P,\ q)$, удовлетворяющей нелинейному уравнению Гамильтона — Якоби

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q},\ q\right) = K(P),$$

которое является частным случаем уравнения (2).

Если задача решена методом Гамильтона—Якоби, то функции $P_1(p,\ q), \ldots$ $\ldots,\ P_n(p,\ q)$ будут первыми интегралами, которые, как легко проверить, находятся в инволюции, т.е. их скобки Пуассона

$$\{P_i,\ P_j\} = \sum_s \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_s}\frac{\partial P_j}{\partial p_s} - \frac{\partial P_i}{\partial p_s}\frac{\partial P_j}{\partial q_s}\right)$$

тождественно равны нулю. Эта идея была развита Буром [63] и Лиувиллем [71] в 1855 году. С помощью метода Гамильтона — Якоби было доказано, что гамильтоновы уравнения с n степенями свободы можно проинтегрировать, если известны n независимых интегралов в инволюции. По существу, это — инвариантная формулировка метода Гамильтона — Якоби. В рамках этого круга идей в работах Якоби, Лиувилля, Ковалевской, Клебша и других авторов был решен ряд новых задач динамики, некоторые из которых весьма нетривиальны. В более поздних работах внимание сосредоточилось на качественном исследовании движения гамильтоновых систем, решаемых методом Гамильтона — Якоби, в первую очередь — методом разделения переменных. В научном обиходе появляются специфические для интегрируемых систем переменные «действие-угол». Они «были введены Делоне (см. [66]) для исследования проблем астрономических возмущений в небесной механике. Позднее они оказались чрезвычайно удобными для старой формы квантовой механики, так как квантование Бора — Зоммерфельда состояло в том, что каждая переменная-действие полагалась равной целому кратному постоянной Планка» (Дж. Л. Синг [52]). Впервые условия квантования были сформулированы для систем с разделенными переменными [11], но постепенно стало ясно, что и в самом общем случае совместные уровни полного набора интегралов в инволюции в компактном случае гомеоморфны многомерным торам, что движение по ним в соответствующих переменных «угол» происходит по условно-периодическому закону и что переменные «действие» представляют собой интегралы $\frac{1}{2\pi}\oint p\,dq$ по независимым циклам, по-разному охватывающим тор (см., например, [57], [54]; современные изложения — в книгах [7], [16]). Системы с полным набором интегралов в инволюции теперь принято называть вполне интегрируемыми.

4. С другой стороны, усилия Клеро, Лагранжа, Пуассона, Лапласа, Гаусса, направленные на приближенное решение прикладных задач небесной механики, привели в конце концов к созданию теории возмущений. Решения уравнений движения предлагается искать в виде рядов по степеням малого параметра (например, в Солнечной системе таким параметром является отношение массы Юпитера к массе Солнца). Впоследствии Делоне, Гильден, Линдштедт модифицировали теорию возмущений с помощью метода Гамильтона — Якоби. Пусть $H = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \ldots (\varepsilon \ll 1)$ и «невозмущенная» задача с гамильтонианом H_0 интегрируема. Предлагается искать производящую функцию S в виде ряда $S_0 + \varepsilon S_1 + \ldots$, удовлетворяющего уравнению

$$(4)\qquad H_0\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) + \varepsilon H_1\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) + \ldots = K_0(P) + \varepsilon K_1(P) + \ldots,$$

где функции K_i пока неизвестны. Функции S_0 и K_0, согласно предположению, могут быть найдены из уравнения (4) при $\varepsilon = 0$. Функции K_i и S_i при $i \geqslant 1$ находятся последовательно; возникающий произвол в их определении можно исключить с помощью условия отсутствия так называемых «вековых» членов.

Таким образом, возмущенную задачу можно считать «решенной», если ряды теории возмущений корректно определены и являются сходящимися. Из их сходимости вытекал бы ряд важных следствий (в частности, вечная устойчивость Солнечной системы). Забегая вперед, скажем о разочаровывающем результате Пуанкаре: в общем случае из-за наличия так называемых малых делителей ряды теории возмущений расходятся. Более того, расходятся ряды усовершенствованной теории возмущений, предложенной Пуанкаре и Болином, в которой решения разлагаются в ряды не по степеням ε, а по степеням $\sqrt{\varepsilon}$. Заметим, что если ряды теории возмущений сходятся, то уравнения движения имеют полный набор интегралов в инволюции, которые можно представить в виде сходящихся степенных рядов по ε (или $\sqrt{\varepsilon}$).

Уиттекер, Черри и Биркгоф получили впоследствии (1916—1927 г.г.) аналогичные результаты для гамильтоновых систем в окрестности положений равновесия и периодических траекторий. Они показали, что в общем случае существует каноническое преобразование, задаваемое формальными степенными рядами, после которого уравнение Гамильтона просто интегрируется. Гамильтоновы системы со сходящимся преобразованием Биркгофа иногда называются «интегрируемыми по Биркгофу». В этом случае также существует полный набор независимых коммутирующих интегралов специального вида.

5. Как мы видим, каждое новое поколение по-своему интерпретирует существо проблемы интегрирования гамильтоновых систем. Однако общим моментом различных подходов к этой проблеме является наличие у гамильтоновой системы независимых интегралов — «законов сохранения». К сожалению, в типичной ситуации интегралы не только не удается найти, но они вовсе не существуют, так как траектории гамильтоновых систем, вообще говоря, не ложатся на интегральные многообразия малого числа измерений.

Первые строгие результаты о неинтегрируемости гамильтоновых систем принадлежат Пуанкаре. В работе [47] 1890 г. он доказал несуществование аналитических интегралов, которые можно представить в виде сходящихся рядов по степеням малого параметра. Отсюда, в частности, вытекает расходимость рядов различных вариантов теории возмущений. Пуанкаре указал также явления качественного характера в поведении фазовых траекторий, препятствующие появлению новых интегралов. Среди них—рождение изолированных периодических решений и расщепление асимптотических поверхностей. Пуанкаре применил свои общие методы к различным вариантам задачи n тел. Оказалось, что кроме известных классических законов сохранения, уравнения движения не имеют новых аналитических интегралов, аналитических по массам планет. Пока еще не доказана неинтегрируемость задачи n тел при фиксированных значениях их масс [1]).

Еще раньше, в 1887 г. Брунс доказал отсутствие новых алгебраических интегралов в задаче трех тел (при всех значениях масс точек). Впоследствии аналогичные результаты получены Гюссоном (1906 г.) и другими авторами в динамике твердого тела с неподвижной точкой. Можно, однако, согласиться с Уинтнером ([54], § 129), что эти «изящные отрицательные результаты не имеют какого-либо значения в динамике» ввиду их неинвариантности относительно замен переменных.

Правда, в практически всех проинтегрированных задачах первые интегралы оказались либо рациональными функциями, либо просто полиномами. При этом решения, как функции комплексного времени, часто оказываются мероморфными. В качестве примеров можно указать задачу Якоби о движении точки по трехосному эллипсоиду, волчок Ковалевской, случай Клебша в задаче о движении твердого тела в идеальной жидкости. Более того, исследования Ковалевской и Ляпунова по классической задаче о вращении тяжелого волчка показали, что общее решение уравнений движения представляется однозначными функциями времени только в тех случаях, когда существует дополнительный полиномиальный интеграл. В связи с этим возникла интересная задача о соотношении между существованием однозначных голоморфных интегралов и ветвлением решений в комплексной плоскости времени. Ее постановка восходит к Пенлеве.

В 1941—1954 г.г. К. Зигель исследовал вопрос об интегрируемости гамильтоновых систем вблизи устойчивых положений равновесия. Он доказал, что в типичной ситуации уравнения Гамильтона не имеют полного набора аналитических интегралов и преобразование Биркгофа расходится. Доказательство Зигеля расходимости преобразования Биркгофа в идейном отноше-

[1]) Здесь следует сделать две оговорки. Во-первых, из исследований В. М. Алексеева по финальным движениям в задаче трех тел вытекает неинтегрируемость ограниченной задачи трех тел, когда из фиксированных масс две равны [1]. Во-вторых, речь идет о существовании интегралов во всем фазовом пространстве задачи. Полный набор интегралов локально существует всегда и, следовательно, может существовать в больших областях, где движения не обладают свойством возвращаемости. По-видимому, примером является область положительной энергии в задаче многих тел (гипотеза В. М. Алексеева).

нии восходит к исследованиям Пуанкаре: оно основано на тщательном анализе семейств невырожденных долгопериодических решений.

После работ А. Пуанкаре в XX в. сложилось отчетливое понимание того, что невозможность продолжить локально существующие интегралы до интегралов «в целом» связана со сложным поведением фазовых траекторий на уровнях тех интегралов (вроде интеграла энергии), которые известны, но имеются в недостаточном числе. Попросту говоря, на интегральном уровне должны существовать траектории, всюду плотные в некоторой области на нем (см. обсуждение этих вопросов, например, в [52] и [54]). Системы, обладающие m, но не $m+1$, интегралами «в целом», Леви-Чивита предложил называть m-импримитивными. Непосредственное приложение к проблеме интегрируемости идея сложного поведения фазовых траекторий нашла в упоминавшихся работах В. М. Алексеева.

6. В последнее время реализованы некоторые возможности метода Пуанкаре, которые позволили доказать неинтегрируемость ряда важных задач гамильтоновой механики, а также найдены новые явления качественного характера, препятствующие интегрируемости. В итоге сложилась самостоятельная часть теории гамильтоновых систем. Этой работой автору хотелось продолжить традицию «достаточно популярного изложения доказательств основных ее результатов», о которой писал В. М. Алексеев в предисловии к книге Ю. Мозера [41].

В работе над статьей автору помогли многочисленные беседы с Я. В. Татариновым и С. В. Болотиным. Кроме того, Я. В. Татаринов прочитал рукопись и сделал ряд полезных замечаний. Автор выражает им искреннюю благодарность.

ГЛАВА I
ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

Существуют различные подходы к изложению гамильтоновой механики. С ними можно познакомиться по книгам [3], [7], [55], [61]. В этой главе мы напомним определения основных объектов гамильтоновой механики, а также рассмотрим несколько конкретных гамильтоновых систем, которые в качестве примеров неоднократно будут использованы нами в дальнейшем.

§ 1. Уравнения Гамильтона

1. Пусть M — четномерное многообразие. Множество всех бесконечно дифференцируемых функций $f\colon M \to R$ обозначим $C^\infty(M)$. Симплектической (канонической) структурой Σ на M называется билинейное отображение $\{,\}: C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (кососимметричность),

2) $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$ (правило Лейбница),

3) $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$ (тождество Якоби),

4) если точка $m \in M$ не является критической для функции f, то существует гладкая функция g такая, что $\{f, g\}(m) \neq 0$ (невырожденность).[1]

Пара (M, Σ) называется симплектическим (каноническим) многообразием. Функция $\{f, g\}$ называется скобкой Пуассона функций f и g. Скобка Пуассона превращает линейное пространство $C^\infty(M)$ в бесконечномерную алгебру Ли над полем R. Ее центр состоит лишь из постоянных функций.

---

[1]) Идея аксиоматического определения скобки восходит, по всей видимости, к Дираку [15].

Теорема (Дарбу). *В малой окрестности любой точки на M существуют локальные координаты $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ $(2n = \dim M)$ такие, что*

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right).$$

Координаты x, y называются симплектическими (каноническими). Доказательство теоремы Дарбу можно найти в книгах [7], [51].

2. Пусть $H\colon M \to R$ — гладкая функция. Гамильтоновой системой на (M, Σ) с функцией Гамильтона H называется дифференциальное уравнение

$$\dot{F} = \{F, H\} \quad \forall F \in C^\infty(M). \tag{1.1}$$

Его решения — гладкие отображения $m\colon \Delta \to M$ (Δ — интервал в R) такие, что

$$\frac{dF(m(t))}{dt} = \{F, H\}(m(t)) \quad \forall t \in \Delta.$$

В симплектических координатах x, y уравнение (1.1) эквивалентно $2n$ каноническим уравнениям Гамильтона:

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = \{y_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Эти уравнения можно записать в более компактной форме, если ввести кососимметричную матрицу

$$\mathfrak{J} = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{Vmatrix},$$

где E — единичная матрица размером $n \times n$. Если $(x, y) = z$, то

$$\dot{z} = \mathfrak{J} \frac{\partial H}{\partial z}. \tag{1.2}$$

Многообразие M называется пространством состояний или фазовым пространством гамильтоновой системы (1.1), а $(\dim M)/2$ — числом ее степеней свободы.

3. Диффеоморфизм $\varphi\colon M \to M$ называется каноническим, если он сохраняет скобку Пуассона: $\{f, g\}(m) = \{f, g\}(\varphi(m))$. Канонические диффеоморфизмы симплектического многообразия (M, Σ) образуют, конечно, группу.[1] Фазовый поток g_H^t любой гамильтоновой системы на M является однопараметрической подгруппой канонических диффеоморфизмов M.

В локальных симплектических координатах условие каноничности отображения $\varphi\colon x, y \to X, Y$ можно представить в любом из следующих двух эквивалентных условий:

1) для каждого замкнутого контура γ

$$\oint_\gamma y\,dx = \oint_\Gamma Y\,dX \left(= \oint_\gamma Y(x, y)\,dX(x, y) \right),$$

где Γ — образ контура γ при отображении φ,

2) $J^* \mathfrak{J} J = \mathfrak{J}$, J — матрица Якоби отображения φ.

---

[1]) «...всякий раз, когда вам приходится иметь дело с некоторым объектом Σ, наделенным структурой, попытайтесь определить группу его автоморфизмов... Вы можете рассчитывать на то, что на этом пути вам удастся глубоко проникнуть во внутреннее строение объекта Σ» (Г. Вейль «Симметрия».)

В новых координатах $(X, Y) = Z$ уравнения (1.2) снова будут иметь гамильтонов вид

$$\dot{Z} = \mathfrak{J} \frac{\partial K(Z)}{\partial Z},$$

причем $K(Z) = H(z)$.

Симплектическую структуру на M можно задать с помощью симплектического атласа — набора совместных друг с другом карт, причем переход от карты к карте является гладким каноническим отображением. Пусть, например, $M = T^*N$ — кокасательное расслоение гладкого многообразия N. Симплектическая структура на T^*N задается набором локальных координат x, y, где x — локальные координаты на N, y — компоненты линейных дифференциальных форм из T^*_xN в базисе dx.

Канонические диффеоморфизмы полезно изучать с помощью аппарата производящих функций. Пусть, например, $\det \| \partial X/\partial x \| \neq 0$. В этом случае можно разрешить (по крайней мере локально) уравнение $X = X(x, y)$ относительно x и считать X, y «независимыми» координатами. Тогда $x = x(X, y)$, $Y = Y(X, y)$. Если мы положим

$$S = \int\limits_{X_0,\, y_0}^{X,\, y} x\, dy + Y\, dX$$

(значения интеграла не зависят от пути интегрирования), то

$$x = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial S}{\partial X}.$$

Функция $S(X, y)$ называется производящей функцией канонического отображения φ. Если, например, φ — тождественное отображение, то $S = Xy$.

4. Предположим, что гладкие функции H и F коммутируют (находятся «в инволюции»): $\{H, F\} = 0$. Тогда F — первый интеграл канонической системы с гамильтонианом H и наоборот. Фазовые потоки g_H^t и g_F^s этих систем тоже коммутируют на M.

Так как

$$\{\{F, G\}, H\} = \{\{F, H\}, G\} - \{\{G, H\}, F\},$$

то интегралы любой гамильтоновой системы образуют подалгебру в алгебре Ли всех гладких функций на M (теорема Пуассона).

5. Натуральная механическая система — это тройка (N, T, V), где N — гладкое многообразие (пространство положений), T — риманова метрика на N (кинетическая энергия), V — гладкая функция на N (потенциал силового поля). Движения такой системы — гладкие отображения $q(t)$: $R \to N$, являющиеся экстремалями функционала действия:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}(t), q(t))\, dt,$$

где $\dot{q}(t)$ — касательный вектор к N в точке $q(t)$, $L = T + V$ — функция Лагранжа. Изменение со временем локальных координат q на N описывается уравнением Эйлера — Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}.$$

Рассмотрим естественное отображение $TN \to T^*N$, порожденное римановой метрикой: $(q, \dot{q}) \to (q, p)$, где

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}.$$

Очевидно, что p — линейная форма на T_qN. Поскольку квадратичная форма T положительно определена, то линейное отображение $\dot{q} \to p$ — изоморфизм линейных пространств T_qN и T_q^*N.

Рассмотрим полную энергию системы H: $T^*N \to R$, определенную формулой

$$H(p,\ q) = p\dot{q} - L|_{\dot{q}\to p} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\dot{q} - T - V = T - V|_{p,q}.$$

Теорема (Пуассон — Гамильтон). *Функции $p(t)$ и $q(t)$ удовлетворяют каноническим уравнениям*

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Аналогичная конструкция справедлива и для более общих «полунатуральных» систем, когда функция Лагранжа содержит дополнительные члены, линейные по скоростям.

Часто приходится рассматривать неавтономные гамильтоновы системы, когда функция Гамильтона явно зависит от времени.

§ 2. Движение твердого тела

1. Вращение твердого тела в трехмерном евклидовом пространстве во многих задачах механики описывается уравнениями следующего вида:

$$\dot{M} = M \times \omega + e \times u, \quad \dot{e} = e \times \omega, \tag{2.1}$$

где $\omega = \partial H/\partial M$, $u = \partial H/\partial e$, $H(M,\ e)$ — некоторая известная функция в $R^6 = R^3\{M\} \times R^3\{e\}$. Векторы ω и M называются угловой скоростью и кинетическим моментом тела. Физический смысл векторов e и u зависит от конкретной постановки задачи.

Рассмотрим, например, вращение тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. В этом случае e — единичный вектор вертикали, а $u = \varepsilon r$ — произведение веса тела на радиус-вектор центра масс. Функция H — полная энергия — имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2}\langle M,\ J^{-1}M\rangle + \varepsilon\langle r,\ e\rangle,$$

где J^{-1} — положительно определенный самосопряженный оператор. Уравнения (2.1) обычно записывают в следующем виде:

$$J\dot{\omega} = J\omega \times \omega + \varepsilon e \times r, \quad \dot{e} = e \times \omega.$$

Они называются уравнениями Эйлера — Пуассона ([3], [14]). Так как оператор J самосопряжен, то в некотором ортогональном репере ξ_1, ξ_2, ξ_3, связанном с телом, матрицу этого оператора (которую тоже обозначим J) можно привести к диагональному виду: $J = \mathrm{diag}\,(J_1,\ J_2,\ J_3)$. Собственные направления оператора J называются осями инерции, а собственные значения — числа J_1, J_2, J_3 — главными моментами инерции тела. Эта задача содержит шесть параметров J_1, J_2, J_3 и εr_1, εr_2, εr_3 (r_s — координаты центра масс относительно осей инерции).

В задаче о движении твердого тела в безграничной идеальной жидкости H является положительно определенной квадратичной формой

$$\langle AM,\ M\rangle/2 + \langle BM,\ e\rangle + \langle Ce,\ e\rangle/2.$$

Векторы e и u обычно называются импульсивной силой и импульсивным моментом, а уравнения (2.1) носят имя Кирхгофа. Матрицы A, B, C симметричны; без ущерба общности можно считать, что $A = \mathrm{diag}\,(a_1, a_2, a_3)$. Таким образом, в общем случае квадратичная форма H содержит 15 параметров. Если твердое тело имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии (как, скажем, трехосный эллипсоид), то $B=0$, а $C=\mathrm{diag}\,(c_1, c_2, c_3)$.

2. Уравнения (2.1) имеют три интеграла: $F_1 = H$, $F_2 = \langle M, e\rangle$, $F_3 = \langle e, e\rangle$. В задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, очевидно, $F_3 = 1$. Интегральные уровни $I_{23} = \{F_2 = f_2, F_3 = f_3 > 0\} \subset R^6$ диффеоморфны (ко)касательному расслоению двумерной сферы.

Определим в $R^6\{M, e\}$ скобку $\{,\}$, полагая

$$(2.2)\quad \{M_1, M_2\} = -M_3, \ \ldots, \ \{M_1, e_1\} = 0, \ \{M_1, e_2\} = -e_3,$$
$$\{M_1, e_3\} = e_2, \ \ldots, \ \{e_i, e_j\} = 0.$$

Считая операцию $\{,\}$ билинейной, кососимметричной и подчиняющейся правилу Лейбница, по формулам (2.2) можно вычислить «скобку Пуассона» любых двух гладких функций, заданных в R^6. Скобка (2.2) удовлетворяет тождеству Якоби. Уравнения (2.1) можно представить в следующем гамильтоновом виде:

$$\dot M_s = \{M_s, H\}, \quad \dot e_s = \{e_s, H\} \qquad (1 \leqslant s \leqslant 3).$$

Однако так определенная скобка $\{,\}$ вырождена: любая гладкая функция коммутирует с интегралами F_2 и F_3. Это обстоятельство позволяет сузить скобку $\{,\}$ на интегральные уровни I_{23}. Пусть $x \in I_{23}$ и f, g — гладкие функции на I_{23}. Продолжим их до гладких функций F, G во всем $R^6\,\{M, e\}$ и положим

$$\{f, g\}_*(x) = \{F, G\}(x).$$

Это определение корректно (не зависит от способа продолжения), и скобка $\{,\}_*$, удовлетворяя условию невырожденности, задает симплектическую структуру на I_{23}.

Теорема 1. *Уравнения* (2.1) *на* I_{23} *можно представить в виде уравнения Гамильтона* $\dot f = \{f, h\}_*$, *где* h — *сужение функции* H *на* I_{23} [45].

Особенно просто эта конструкция выглядит в случае, когда $f_2 = 0$. Положим $M = p \times e$. Если $f_3 > 0$ и $f_2 = \langle M, e\rangle = 0$, то вектор p существует и единственен с точностью до сдвигов вдоль вектора e. Пусть $K(p, e) = H(p \times e, e)$.

Теорема 2 [33]. *Функции* $p(t)$ *и* $e(t)$ *удовлетворяют каноническим уравнениям*

$$\dot p = -\frac{\partial K}{\partial e}, \quad \dot e = \frac{\partial K}{\partial p}.$$

В $R^6\,\{p, e\}$ имеется «стандартная» симплектическая структура, порожденная скобкой Пуассона: $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{e_i, e_j\} = 0$, $\{p_i, e_j\} = \delta_{ij}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 3)$. В этой структуре для скобок Пуассона функций M_i, e_j справедливы формулы (2.2). Векторы e, p и M допускают простую интерпретацию: e — радиус-вектор точки в трехмерном пространстве, p — ее импульс, а M — кинетический момент (взятый с противоположным знаком). Подчеркнем, что координаты $(e_1, e_2, e_3) = e$ являются «избыточными». В случае $f_2 \neq 0$ замену переменных $M = p \times e$ надо слегка «подправить».

Доказательство теоремы 2. Вычислим сначала

$$\dot e = \frac{\partial K'}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial p} = e \times \omega.$$

Так как $M = p \times e$, то

$$\dot M = \dot p \times e + p \times \dot e = -\frac{\partial K}{\partial e} \times e + p \times (e \times \omega),$$

$$\frac{\partial K}{\partial e} = \frac{\partial H}{\partial e} + \frac{\partial H}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial e} = u + \omega \times p.$$

Значит,

$$\dot{M} = -u \times e + e \times (\omega \times p) + p \times (e \times \omega) = M \times \omega + e \times u.$$

Что и требовалось.

3. Введем на I_{23} специальные канонические координаты L, G; l, g mod 2π (рис. 1), удобные для дальнейшего. Ограничимся для простоты случаем, когда постоянная $f_2 = 0$. Рассмотрим в $R^3\{e\}$ сферу $\langle e, e\rangle = f_3 > 0$. Введем линию узлов — пересечение плоскостей, проходящих через точку $e = 0$ и перпендикулярных векторам M и ξ_3. Пусть l и g — углы между векторами ξ_1 и ξ_y и между ξ_y и e (ξ_y — «направляющий» вектор линии узлов).

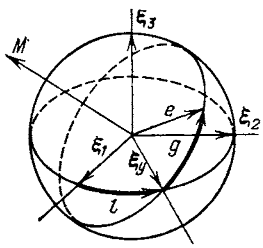

Рис. 1.

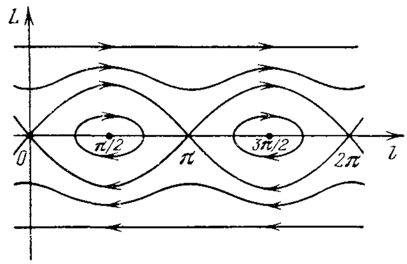

Рис. 2.

Положим, наконец, $L = \langle M, \xi_3\rangle$ и $G = |M|$. Гамильтониан $K\colon I_{23} \to R$ можно представить в виде функции от L, G, l, g, 2π-периодической по l и g.

Теорема 3 [62]. *Функции $L, G, l, g\,|_t$ удовлетворяют каноническим уравнениям*

$$\dot{L} = -\frac{\partial K}{\partial l}, \quad \dot{l} = \frac{\partial K}{\partial L}, \quad \dot{G} = -\frac{\partial K}{\partial g}, \quad \dot{g} = \frac{\partial K}{\partial G}.$$

Доказательство этой теоремы, основанное на простых формулах векторного анализа, мы опускаем.

Пусть $e = \sum e_i \xi_i$. Тогда

$$e_1/\sqrt{f_3} = \cos l \cos g - \frac{L}{G} \sin l \sin g, \quad e_2/\sqrt{f_3} = \sin l \cos g + \frac{L}{G} \cos l \sin g,$$

$$e_3/\sqrt{f_3} = \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2} \sin g.$$

Когда постоянная $f_2 \neq 0$, эти формулы слегка усложняются (подробности можно найти в работе [32]).

4. Случай, когда полная энергия H сводится к одной квадратичной форме $\langle M, J^{-1}M\rangle/2$, называется задачей Эйлера. Он реализуется, например, при вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки при условии совпадения центра масс с точкой подвеса. Пусть ω_1, ω_2, ω_3 — проекции вектора угловой скорости ω на собственные направления оператора J. Тогда

$$J_1\omega_1 = \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \quad J_2\omega_2 = \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \quad J_3\omega_3 = L.$$

Следовательно,

$$H = \frac{1}{2} \langle J\omega, \omega\rangle = \frac{G^2 - L^2}{2} \left(\frac{\sin^2 l}{J_1} + \frac{\cos^2 l}{J_2}\right) + \frac{L^2}{2J_3}. \tag{2.3}$$

Такой же вид имеет гамильтониан задачи Эйлера и при ненулевых значениях постоянной f_2. Так как G — первый интеграл, то интегрирование уравнений движения сводится к решению одномерной гамильтоновой системы с функцией Гамильтона (2.3), в которой переменная $G = G_0$ является параметром. Фазовый портрет этой системы изображен на рис. 2 (в предполонии, что $J_1 < J_2 < J_3$). Фазовые траектории заключены в кольце $C = \{L, l: |L| \leqslant G_0, l \bmod 2\pi\}$. Это кольцо можно считать сечением трехмерного уровня интеграла модуля кинетического момента $\{G = G_0\} \subset I_{23}$ плоскостью $g = 0$. Так как $\dot{g} \neq 0$ при $G_0 \neq 0$, то любая траектория пересекает кольцо C. Таким образом, возникает естественное отображение кольца C на себя. Оно сохраняет площадь $dL\,dl$ и вращает границы кольца в противоположных направлениях. Неподвижным точкам этого отображения соответствуют периодические решения — постоянные вращения твердого тела вокруг осей инерции. Вращения вокруг средней оси (с моментом инерции J_2) неустойчивы.

§ 3. Колебания маятника

1. Пусть точка подвеса математического маятника длины l совершает колебание по периодическому закону $\varepsilon\xi(t)$, $\varepsilon = \text{const}$. Если x — угол отклонения маятника от вертикали, то кинетическая энергия

$$T = \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}(l^2\dot{x}^2 + \varepsilon^2\dot{\xi}^2 + 2\varepsilon l\dot{x}\dot{\xi}\sin x).$$

Пусть g — величина ускорения свободного падения. Тогда потенциальная энергия маятника равна

$$U = -g(l\cos x + \varepsilon\xi(t)).$$

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}, \qquad L = T - U,$$

имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + \omega^2(1 + \varepsilon f(t))\sin x = 0, \tag{3.1}$$

где $\omega^2 = g/l$, $f = \ddot{\xi}/g$ — периодическая функция времени.

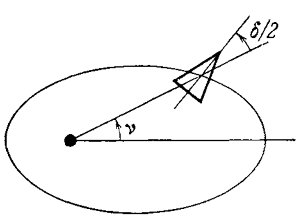

Рис. 3.

Это уравнение, конечно, гамильтоново: канонические координаты суть $x \bmod 2\pi$, $p = \dot{x}$, а функция Гамильтона

$$H = \frac{p^2}{2} - \omega^2(1 + \varepsilon f)\cos x. \tag{3.2}$$

Пространство положений — окружность $S^1\{x \bmod 2\pi\}$, фазовое пространство — цилиндр $S^1 \times R\{p\}$.

При $\varepsilon = 0$ будем иметь интегрируемую задачу с одной степенью свободы (математический маятник постоянной длины).

2. Во многих задачах механики встречаются уравнения, похожие на уравнение (3.1). Рассмотрим, например, плоские колебания спутника на эллиптической орбите. Уравнение колебаний можно представить в следующем виде [8]:

$$(1 + e\cos\nu)\frac{d^2\delta}{d\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{d\delta}{d\nu} + \mu\sin\delta = 4e\sin\nu. \tag{3.3}$$

Здесь e — эксцентриситет орбиты, μ — параметр, характеризующий распределение массы спутника. Смысл переменных δ и ν ясен из рис. 3. Это уравнение можно представить в гамильтоновой форме (А. А. Буров):

$$\frac{dp}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \delta}, \quad \frac{d\delta}{d\nu} = \frac{\partial H}{\partial p},$$

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{p}{1 + e\cos\nu} - 2(1 + e\cos\nu)\right]^2 - (1 + e\cos\nu)\mu\cos\delta.$$

При движении спутника по почти круговым орбитам ($e \ll 1$) уравнение (3.3) близко к уравнению колебаний обычного маятника.

§ 4. Ограниченная задача трех тел

Предположим, что Солнце $\mathscr{S}$ и Юпитер $\mathscr{Y}$ вращаются вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Единицы длины, времени и массы выберем так, чтобы угловая скорость вращения, сумма масс $\mathscr{S}$ и $\mathscr{Y}$, а также гравитационная постоянная были равны единице. Нетрудно понять, что при этом расстояние $\mathscr{S}\mathscr{Y}$ тоже равно 1.

Уравнения движения астероида $\mathscr{A}$ в подвижной системе координат можно записать в виде двух уравнений

$$\ddot{x}-2\dot{y}=\frac{\partial V}{\partial x},\quad \ddot{y}+2\dot{x}=\frac{\partial V}{\partial y}, \tag{4.1}$$

где $V=(x^2+y^2)/2+(1-\mu)/\rho_1+\mu/\rho_2$, μ — масса Юпитера, ρ_1 и ρ_2 — расстояния от астероида $\mathscr{A}$ до $\mathscr{S}$ и $\mathscr{Y}$. Уравнения (4.1) имеют интеграл

$$H=\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2}-V(x,\ y),$$

называемый интегралом Якоби. Эти уравнения можно представить в канонической форме; функцией Гамильтона является полная энергия астероида H. Хорошо известно, что система (4.1) имеет пять положений равновесия L_1-L_5, которые называются точками либрации. Равновесия L_1-L_3, расположенные на линии Солнце — Юпитер, обнаружены Эйлером. Они всегда неустойчивы. Оставшиеся два равновесия L_4 и L_5 (открытые Лагранжем) дополняют точки $\mathscr{S}$ и $\mathscr{Y}$ до вершин равносторонних треугольников. Равновесия L_4, L_5 устойчивы в линейном приближении, если выполнено условие $\mu(1-\mu)<1/27$. Задача об их устойчивости в смысле определения Ляпунова оказалась значительно сложнее. С помощью теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений различными авторами установлено, что треугольные точки либрации устойчивы при всех μ (удовлетворяющих условию устойчивости в линейном приближении), кроме двух значений $\mu_1=0{,}0242938\ldots$ и $\mu_2=0{,}013560\ldots$ Если $\mu=\mu_1(\mu_2)$, то частоты линейных колебаний находятся в резонансе $1:2(1:3)$. А. П. Маркеев доказал неустойчивость в смысле Ляпунова треугольных точек либрации при этих исключительных значениях параметра [37].

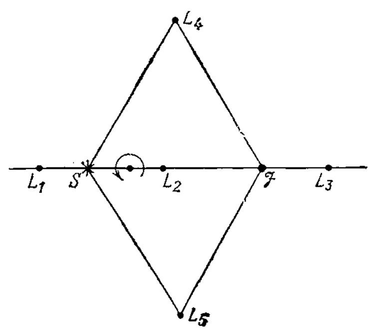

Рис. 4.

§ 5. Некоторые задачи математической физики

1. Из гидромеханики известно [36], что движение n точечных (цилиндрических) вихрей на плоскости (в пространстве) описывается следующей системой $2n$ дифференциальных уравнений:

$$\left\{\begin{aligned} &\Gamma_s\dot{x}_s=-\frac{\partial H}{\partial y_s},\quad \Gamma_s\dot{y}_s=\frac{\partial H}{\partial x_s}\qquad (1\leqslant s\leqslant n),\\ &H=-\frac{1}{\pi}\sum_{s\neq k}\Gamma_s\Gamma_k\ln\left((x_s-x_k)^2+(y_s-y_k)^2\right). \end{aligned}\right. \tag{5.1}$$

Здесь $(x_s,\ y_s)$ — декартовы координаты s-го вихря интенсивности Γ_s. Предполагается, что все Γ_s отличны от нуля. Уравнения (5.1) канонические: симплектическая структура в $R^{2n}\{x, y\}$ задается скобкой Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_s \frac{1}{\Gamma_s}\left(\frac{\partial f}{\partial y_s}\frac{\partial g}{\partial x_s} - \frac{\partial f}{\partial x_s}\frac{\partial g}{\partial y_s}\right).$$

Кроме функции Гамильтона H они имеют еще три независимых интеграла:

$$P_x = \sum \Gamma_s x_s,\quad P_y = \sum \Gamma_s y_s,\quad M = \frac{1}{2}\sum \Gamma_s (x_s^2 + y_s^2).$$

Легко проверить равенства

$$\{P_x, P_y\} = -\sum \Gamma_k = \mathrm{const},\quad \{P_x, M\} = -P_y,\quad \{P_y, M\} = P_x.$$

Если сумма интенсивностей системы вихрей равна нулю, то функции P_x и P_y коммутируют.

2. В работе Контопулоса [64], посвященной изучению галактических моделей, рассмотрены некоторые гамильтоновы системы в окрестности положения равновесия, допускающие резонансные соотношения между частотами. Простейшая система такого вида с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1^2 x_2 - \frac{2}{3}x_2^3\right)$$

была детально исследована Хеноном и Хейлесом с помощью численных рассчетов [69]. В этой задаче частоты малых колебаний равны между собой. В работе Густавсона [68] имеется интересное обсуждение численных результатов Хенона — Хейлеса в связи с построением формальных интегралов гамильтоновых систем.

3. Изучение однородной двухкомпонентной модели уравнений Янга — Миллса связано с исследованием гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_1^2 q_2^2$$

(см. [16], [17]).

ГЛАВА II
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Дифференциальные уравнения, в том числе уравнения Гамильтона, принято разделять на интегрируемые и неинтегрируемые. «Если, однако, мы попытаемся сформулировать точное определение интегрируемости, то оказываются возможными многие различные определения, каждому из которых присущ известный теоретический интерес» [1]). В этой главе мы дадим краткий перечень различных подходов к интегрируемости гамильтоновых систем, «не забывая при этом указания Пуанкаре, что система дифференциальных уравнений может быть только более или менее интегрируемой» [1]).

§ 1. Квадратуры

1. Интегрирование в квадратурах — это отыскание решений с помощью «алгебраических» операций (включая обращение функций) и «квадратур» — вычисления интегралов известных функций. Это определение интегрируемости формально носит локальный характер. Решение в квадратурах дифференциального уравнения на многообразии означает его интегрирование в любых локальных координатах. Мы считаем, что переход от одних локальных координат к другим является «алгебраической» операцией. Следующее утвержде-

---

[1]) Дж. Биркгоф «Динамические системы».

ние связывает интегрирование гамильтоновой системы в квадратурах с существованием достаточно большого набора ее первых интегралов.

Теорема 1. *Пусть M — симплектическое многообразие. Предположим, что система с гамильтонианом $H : M \times R \to R$ имеет $n = \dim M/2$ первых интегралов $F_1, \ldots, F_n : M \times R \to R$ $(F'_t + \{F, H\} = 0)$ таких, что $\{F_i, F_j\} = \sum c_{ij}^k F_k$, $c_{ij}^k = \mathrm{const}$. Если*

1) *на множестве $M_f = \{(x, t) \in M \times R : F_i(x, t) = f_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ функции $F_1, \ldots, F_n$ независимы,*

2) $\sum c_{ij}^k f_k = 0$ *для всех $i, j = 1, \ldots, n$,*

3) *алгебра Ли $\mathfrak{A}$ линейных комбинаций $\sum \lambda_s F_s$, $\lambda_s \in R$, разрешима, то решения гамильтоновой системы, лежащие на M_f, можно найти в квадратурах* [30].

Следствие. *Если гамильтонова система с n степенями свободы имеет n независимых интегралов в инволюции (алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна), то ее можно проинтегрировать в квадратурах.*

Это утверждение было сначало доказано Буром для автономных канонических уравнений [63] и затем обобщено Лиувиллем на неавтономный случай [71]. Пусть функции H и $F_1, \ldots, F_n$ не зависят от времени. Тогда H — тоже первый интеграл, например $H = F_1$. Теорема об интегрируемости в квадратурах справедлива, конечно, и в этом случае (условие $\{H, F_i\} = 0$ можно заменить более слабым условием $\{H, F_i\} = \lambda_i H$, $\lambda_i = \mathrm{const}$; $1 \leqslant i \leqslant n$).

Доказательство теоремы 1 базируется на одном вспомогательном утверждении, принадлежащем С. Ли.

Лемма. *Пусть n векторных полей $X_1, \ldots, X_n$ линейно независимы в малой области $U \subset R^n\{x\}$, порождают разрешимую алгебру Ли относительно операции коммутирования и $[X_1, X_i] = \lambda_i X_1$. Тогда дифференциальное уравнение $\dot{x} = X_1(x)$ интегрируется в квадратурах в области U* (см. [58], [60]).

Мы докажем это утверждение в самом простом случае, когда $n = 2$. В общем случае доказательство аналогично. Уравнение $\dot{x} = X_1(x)$, $x \in U$, будет проинтегрировано, если нам удастся найти его первый интеграл $F(x)$ такой, что $F'(x) \neq 0$ в области U. Заметим, что в силу теоремы о выпрямлении такая функция заведомо существует (по крайней мере локально). Если $X_1F = 0$, то X_2F — снова интеграл, поскольку $X_1(X_2F) = X_2(X_1F) + \lambda_2 X_1 F = 0$. Очевидно, что $X_2F = f(F)$, где $f(y)$ — некоторая гладкая функция, $f \neq 0$. Положим

$$G(F) = \int_0^F \frac{dF}{f(F)}.$$

Так как $X_1G = 0$, а $X_2G = G'X_2F = X_2F/f(F) = 1$, то решение системы уравнений

$$X_1F = a_{11}\frac{\partial F}{\partial x_1} + a_{12}\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0,$$

$$X_2F = a_{21}\frac{\partial F}{\partial x_1} + a_{22}\frac{\partial F}{\partial x_2} = 1$$

существует. Вычисляя F'_{x_1} и F'_{x_2}, мы найдем функцию F с помощью дополнительного интегрирования. Поскольку $X_2F = 1$, то $F' \neq 0$. Что и требовалось.

Для доказательства теоремы 1 (в автономном случае) рассмотрим n гамильтоновых векторных полей $\mathfrak{I}F'_i$. Согласно условиям 1—2 они касаются многообразия $M_f = \{x : F_i(x) = f_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ и независимы всюду на M_f. Так как $\{F_i, F_j\} = \sum c_{ij}^k F_k$, то, очевидно, $[\mathfrak{I}F'_i, \mathfrak{I}F'_j] = \mathfrak{I}\{F_i, F_j\}' = \sum c_{ij}^k \mathfrak{I}F'_k$. Следовательно, касательные векторные поля $\mathfrak{I}F'_i$ образуют разрешимую алгебру, причем $[\Im H', \Im F_i'] = \lambda_i \Im H'$. Утверждение теоремы 1 вытекает теперь из леммы С. Ли.

Неавтономный случай можно вывести из автономного с помощью следующей общей конструкции. Уравнения Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x, y, t)}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H(x, y, t)}{\partial x}$$

можно представить в виде канонической системы в расширенном пространстве переменных x, y, h, t с функцией Гамильтона $K(x, y, h, t) = H(x, y, t) - h$:

$$\dot{x} = \frac{\partial K}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial K}{\partial x}, \quad \dot{h} = \frac{\partial K}{\partial t}, \quad \dot{t} = -\frac{\partial K}{\partial h}.$$

Если обозначить скобку Пуассона в расширенном симплектическом пространстве $R^{2n}\{x, y\} \times R^2\{t, h\}$ через $\{,\}_*$, то

$$\{F_i(x, y, t), F_j(x, y, t)\}_* = \{F_i, F_j\} = \sum c_{ij}^k F_k,$$

$$\{F_i(x, y, t), K(x, y, h, t)\}_* = \{F_i, H - h\}_* = \frac{\partial F_i}{\partial t} + \{F_i, H\} = 0.$$

Остается заметить, что функции $F_1, \ldots, F_n$ и K независимы.

2. В качестве простого примера рассмотрим задачу о движении по прямой трех точек, притягивающихся с силой, обратно пропорциональной кубу расстояния между ними. Пусть m_i — массы, x_i — координаты, а $p_i = m_i \dot{x}_i$ — импульсы точек. Потенциальная энергия взаимодействия равна

$$U = \sum_{i<j} \frac{a_{ij}}{(x_i - x_j)^2}, \qquad a_{ij} = \mathrm{const}.$$

Функции $F_1 = \sum p_i^2/2m_i + U$, $F_2 = \sum p_i x_i$, $F_3 = \sum p_i$ независимы и $\{F_1, F_3\} = 0$, $\{F_2, F_3\} = -F_3$, $\{F_1, F_2\} = 2F_1$. Так как соответствующая алгебра $\mathfrak{A}$ разрешима, то движения, лежащие на нулевых уровнях полной энергии и импульса, можно найти в квадратурах. Эту возможность нетрудно реализовать непосредственно. Заметим, что в случае равных масс m_i и коэффициентов a_{ij} $(i < j)$ можно найти полный набор интегралов в инволюции.

3. Пусть M — симплектическое многообразие и $F_1, \ldots, F_n$ — независимые функции на M, порождающие конечномерную подалгебру алгебры Ли $C^\infty(M)$ (т. е. $\{F_i, F_j\} = \sum c_{ij}^k F_k$, $c_{ij}^k = \mathrm{const}$). В каждой точке $x \in M$ векторы $\sum \lambda_i \Im F_i'$, $\lambda_i \in R$, образуют n-мерное линейное подпространство $\Pi(x)$ в $T_x M$. Распределение плоскостей $\Pi(x)$ «инволютивно» (если $X, Y \in \Pi$, то $[X, Y] \in \Pi$). Следовательно, по теореме Фробениуса, через каждую точку $x \in M$ проходит максимальное интегральное многообразие N_x распределения Π. Многообразия N_x могут быть погружены в M весьма сложным образом; в частности, они не обязательно замкнуты. Если $n = \dim M/2$, то среди интегральных многообразий распределения Π есть замкнутые поверхности $M_f = \{x \in M : F_i(x) = f_i, \Sigma c_{ij}^k f_k = 0\}$. Если $x \in M_f$, то N_x совпадает с одной из связных компонент M_f. В частном случае, когда функции $F_1, \ldots, F_n$ попарно коммутируют, все M расслоено на замкнутые многообразия M_f.

§ 2. Полная интегрируемость

Теорема 1. *Пусть гладкие функции $F_1, \ldots, F_n : M \to R$ находятся в инволюции: $\{F_i, F_j\} = 0$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ и $\dim M = 2n$. Если*

1) *они независимы на M_f,*

2) *поля $\Im F_i'$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ нестеснены на M_f,*

то

1) *каждая связная компонента M_f диффеоморфна $R^k \times T^{n-k}$(T^1 — окружность)*,

2) *на $R^k \times T^{n-k}$ существуют координаты $y_1, \ldots, y_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k}$* mod 2π *такие, что в этих координатах уравнение Гамильтона $\dot{x} = \Im F_i'$ имеет следующий вид*:

$$\dot{y}_m = c_{mi}, \quad \dot{\varphi}_s = \omega_{si} \quad (c, \ \omega = \mathrm{const}).$$

Доказательство этой теоремы теперь слишком хорошо известно, чтобы его здесь приводить (см. [7], [16]). Гамильтонову систему с каждой функцией Гамильтона $F_1, \ldots, F_n$ называют вполне интегрируемой.

Наиболее интересен случай, когда M_f компактно. Тогда $k = 0$ и, следовательно, $M_f \simeq T^n$. Равномерное движение на $T^n\{\varphi \bmod 2\pi\}$ по закону $\varphi_i = \varphi_i^0 + \omega_i t$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ называется условно-периодическим. Числа $\omega_1, \ldots$ $\ldots, \omega_n$ — его частоты. Тор с набором частот $\omega_1, \ldots, \omega_n$ называется нерезонансным, если из равенства $\sum k_i \omega_i = 0$ с целыми $k_1, \ldots, k_n$ вытекает, что все $k_i = 0$. На нерезонансных торах фазовые траектории всюду плотны. В резонансном случае они заполняют торы меньшего числа измерений.

Малые окрестности инвариантных торов $M_f \simeq T^n$ в M диффеоморфны прямому произведению $D \times T^n$, где D — малая область R^n. Оказывается, в $D \times T^n$ всегда можно ввести симплектические координаты I, φ ($I \in D$, $\varphi \in T^n$) так, чтобы в этих переменных функция Гамильтона вполне интегрируемой системы зависела только от I (см. [7]). При этом

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I).$$

Следовательно, $I = I_0$, $\omega(I) = \omega(I_0) = \mathrm{const}$. Переменные I, «нумерующие» инвариантные торы в $D \times T^n$, называются переменными «действие», а равномерно меняющиеся координаты φ — переменными «угол». Гамильтонова система называется невырожденной (в области $D \times T^n$), если

$$\left|\frac{\partial \omega}{\partial I}\right| = \left|\frac{\partial^2 H}{\partial I^2}\right| \neq 0$$

в области D. В этом случае почти все (в смысле меры Лебега) инвариантные торы нерезонансны, а резонансные торы всюду плотны в $D \times T^n$.

Система называется собственно вырожденной, если

$$\left|\frac{\partial \omega}{\partial I}\right| \equiv 0.$$

Причина вырождения может быть в том, что число первых интегралов, определенных во всем фазовом пространстве, больше n (но не все они, разумеется, находятся в инволюции). Так обстоит дело, например, в задаче Кеплера и в задаче Эйлера. Эта ситуация описывается обобщениями теоремы Лиувилля. Обозначим $F_1, \ldots, F_{n+k}$ независимые первые интегралы системы с гамильтонианом H, и пусть по-прежнему $M_f = \{F_i = f_i\}$. Считаем M_f связным и компактным.

Теорема об обобщенных переменных действие-угол (Н. Н. Нехорошев [43]). *Пусть первые $n - k$ функций F_i находятся в инволюции со всеми. Тогда в окрестности M_f существуют канонические координаты I, p, φ* mod 2π, *q такие, что*

$$I_s = I_s(F_1, \ldots, F_{n-k}),$$

а p, q зависят от всех F_i.

Теорема о конечномерной алгебре интегралов. *Пусть F_i порождают конечномерную алгебру интегралов, т. е. $\{F_i, F_j\} =$*

$= \sum c_{ij}^k F_k$ *и при этом ранг матрицы скобок Пуассона*

$$\| \{F_i, F_j\} \|$$

равен $2k$. *Тогда многообразия* M_f *в общем случае являются* $(n - k)$-*мерными торами.*

В работе А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [39], где доказана и применена эта теорема, содержится также гипотеза о том, что предположение о конечномерности алгебры интегралов можно снять. Действительно, вскоре А. В. Стрельцов обобщил предыдущие два результата и показал, что если $\{F_i, F_j\} = f_{ij}(F_1, \ldots, F_{n+k})$ и ранг $\| \{F_i, F_j\} \|$ равен $2k$, то в окрестности M_f существуют первые интегралы G_i, удовлетворяющие обобщению Н. Н. Нехорошева. Этот результат аннонсирован в [40]. Как отметил Я. В. Татаринов (не опубликовано), все эти обобщения теоремы Лиувилля подпадают под следующее наблюдение: часть интегралов (в количестве $2k$) высекают канонические подмногообразия в M, имеющие размерность $2(n - k)$; на каждом из них можно задать собственную скобку Пуассона, например по формулам Дирака [15]; тогда сужения остальных $n - k$ интегралов на эти подмногообразия удовлетворяют обычной теореме Лиувилля.

§ 3. Примеры вполне интегрируемых систем

1. Уравнения вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки гамильтоновы на интегральных многообразиях $I_{23} = \{F_2 = f_2, F_3 = 1\}$. Один интеграл всегда существует: это интеграл энергии. Таким образом, для полной интегрируемости уравнений на I_{23} достаточно знать еще один независимый интеграл. Перечислим известные случаи интегрируемости. Как уже отмечалось, задача о тяжелом волчке содержит 6 параметров: три собственных значения оператора инерции J_1, J_2, J_3 и три координаты центра масс r_1, r_2, r_3 относительно его собственных осей.

1) Случай Эйлера (1750 г.): $r_1 = r_2 = r_3 = 0$. Новый интеграл — $M^2 = \langle J\omega, J\omega\rangle$.

2) Случай Лагранжа (1788 г.): $J_1 = J_2$, $r_1 = r_2 = 0$. Новый интеграл — $M_3 = J_3\omega_3$.

3) Случай Ковалевской (1889 г.): $J_1 = J_2 = 2J_3$, $r_3 = 0$. Интеграл, найденный Ковалевской,—

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2 - \nu e_1)^2 + (2\omega_1\omega_2 - \nu e_2)^2,$$

где $\nu = \varepsilon r/J_3$, $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

4) Случай Горячева — Чаплыгина (1900 г.): $J_1 = J_2 = 4J_3$, $r_3 = 0$ и постоянная $f_2 = \langle M, e\rangle = 0$. В отличие от случаев 1)—3), мы имеем здесь интегрируемый случай на одном интегральном уровне I_{23}.

Отметим, что все перечисленные интегрируемые случаи образуют в шестимерном пространстве параметров J_i, r_j многообразия одной и той же коразмерности, равной трем.

2. Уравнения движения в первых двух случаях подробно изучены с разных точек зрения в классических работах Эйлера, Пуансо, Лагранжа, Пуассона, Якоби. Случай Ковалевской нетривиален во многих отношениях. Он был найден Ковалевской из условия мероморфности решений уравнений Эйлера — Пуассона в комплексной плоскости времени. Недавно А. М. Переломов получил интеграл Ковалевской с помощью представления Лакса [73]. Случай Горячева — Чаплыгина намного проще: его можно проинтегрировать с помощью разделения переменных. Покажем это.

В специальных канонических переменных L, G, l, g функция Гамильтона имеет следующий вид:

$$H=\frac{G^2+3L^2}{8J_3}+\mu\left(\frac{L}{G}\cos l\sin g+\sin l\cos g\right),\quad \mu=\varepsilon r.$$

Рассмотрим каноническое преобразование

$$L=-p_1-p_2,\ G=p_2-p_1,\ q_1=-l-g,\ q_2=g-l.$$

В новых симплектических координатах p, q

$$H=\frac{p_1^3-p_2^3}{2J_3(p_1-p_2)}-\mu\left(\frac{p_1\sin q_1}{p_1-p_2}+\frac{p_2\sin q_2}{p_1-p_2}\right).$$

Полагая это выражение равным h и умножая на p_1-p_2, мы видим, что оно разделяется:

$$hp_1-p_1^3/2J_3+\mu p_1\sin q_1=hp_2-p_2^3/2J_3-\mu p_2\sin q_2.$$

Положим

$$p_1^3/2J_3-\mu p_1\sin q_1-Hp_1=\Gamma,\quad p_2^3/2J_3+\mu p_2\sin q_2-Hp_2=\Gamma. \tag{3.1}$$

Функция Γ является первым интегралом уравнений движения. В специальных канонических переменных она имеет следующий вид:

$$\Gamma=\frac{L(L^2-G^2)}{8J_3}+\frac{L^2-G^2}{2G}\mu\sin l\cos g,$$

а в традиционных переменных Эйлера — Пуассона ω, e —

$$\Gamma=-2J_3^2\gamma,\ \gamma=\omega_3(\omega_1^2+\omega_2^2)+\nu\omega_1e_3\ (\nu=\mu/J_3).$$

Выпишем замкнутую систему уравнений для изменения переменных p_1, p_2:

$$\dot p_1=-\frac{\partial H}{\partial q_1}=-\frac{\mu p_1}{p_1-p_2}\cos q_1,\ \dot p_2=-\frac{\partial H}{\partial q_2}=-\frac{\mu p_2}{p_1-p_2}\cos q_2,$$

или, учитывая соотношения (3.1),

$$\dot p_1=\frac{\pm\sqrt{\Phi(p_1)}}{p_1-p_2},\quad \dot p_2=\frac{\pm\sqrt{\Phi(p_2)}}{p_1-p_2}, \tag{3.2}$$

где $\Phi(z)=\mu^2z^2-(\Gamma+Hz-z^3/2J_3)^2$ — многочлен шестой степени. Решения этих уравнений выражаются через гиперэллиптические функции времени. Переменные p_1 и p_2 изменяются в непересекающихся интервалах $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$, где a_i и b_i — соседние корни многочлена $\Phi(z)$, между которыми он принимает положительные значения.

Введем угловые переменные φ_1, φ_2 mod 2π по формулам

$$\varphi_i=\frac{\pi}{\tau_i}\int_{a_i}^{p_i}\frac{dz}{\pm\sqrt{\Phi(z)}},\quad \tau_i=\int_{a_i}^{b_i}\frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}. \tag{3.3}$$

В новых переменных уравнения (3.2) примут следующий вид:

$$\dot\varphi_i=\frac{\pi}{2\tau_i(p_1(\varphi_1)-p_2(\varphi_2))}\quad (i=1,2), \tag{3.4}$$

где $p_i(z)$ — действительные гиперэллиптические функции с периодом 2π, определяемые соотношениями (3.3).

Поскольку траектории уравнений (3.4) на $T^2\{\varphi \bmod 2\pi\}$ — прямые линии, то отношение частот соответствующих условно-периодических движений равно τ_1/τ_2 — отношению периодов гиперэллиптического интеграла

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}.$$

Этот замечательный факт имеет место и для уравнений задачи Ковалевской. Подробности можно найти в работе [32].

3. Задача о движении твердого тела в идеальной жидкости намного богаче интегрируемыми случаями (см. [53]). Укажем два из них; они открыты Клебшем (1871 г.) и Стекловым (1893 г.). В случае Клебша предполагается, что $B=0$, $C=\operatorname{diag}(c_1, c_2, c_3)$ и

$$a_1^{-1}(c_2-c_3)+a_2^{-1}(c_3-c_1)+a_3^{-1}(c_1-c_2)=0.$$

Дополнительный интеграл уравнений Кирхгофа имеет вид

$$M_1^2+M_2^2+M_3^2-a_1e_1^2-a_2e_2^2-a_3e_3^2.$$

В случае Стеклова $B=\operatorname{diag}(b_1, b_2, b_3)$, $C=\operatorname{diag}(c_1, c_2, c_3)$, причем

$$b_j=\mu(a_1a_2a_3)a_j^{-1}+\nu,\quad c_1=\mu^2a_1(a_2-a_3)^2+\nu',\ \ldots,\ (\mu,\ \nu,\ \nu'=\mathrm{const}).$$

Дополнительный интеграл —

$$\sum_j (M_j^2-2\mu(a_j+\nu)M_je_j)+\mu^2((a_2-a_3)^2+\nu'')e_1^2+\ldots$$

Параметры ν, ν', ν'' — несущественные: их появление связано с наличием классических интегралов Кирхгофа F_2 и F_3.

4. Задача о движении n точечных вихрей по плоскости вполне интегрируема при $n\leqslant 3$. Случай $n=1$ тривиален, при $n=2$ независимыми коммутирующими интегралами являются, например, функции H и M, при $n=3$ — функции H, M и $P_x^2+P_y^2$. В задаче четырех вихрей независимых интегралов ровно столько, сколько степеней свободы. Однако они не все коммутируют.

Рассмотрим подробнее частный случай, когда сумма интенсивностей Γ_s равна нулю. Тогда интегралы P_x и P_y находятся в инволюции. Если их постоянные равны нулю, то уравнения движения четырех вихрей оказываются интегрируемыми по Лиувиллю. Идея решения основана на применении подходящего линейного канонического преобразования, хорошо известного в небесной механике в связи с «исключением» движения центра масс задачи n тел. Пусть, для определенности, $\Gamma_1=\Gamma_2=-\Gamma_3=-\Gamma_4=-1$. Рассмотрим линейное каноническое преобразование $x, y\to\alpha, \beta$ согласно формулам

$$\begin{aligned}
x_1&=-\beta_4, & y_1&=-\alpha_3-\alpha_4+\beta_2,\\
x_2&=\beta_3-\beta_4, & y_2&=\alpha_3-\beta_1+\beta_2,\\
x_3&=\alpha_1+\alpha\ -\beta_4, & y_3&=\beta_2,\\
x_4&=-\alpha_1+\beta_3-\beta_4, & y_4&=-\beta_1+\beta_2.
\end{aligned}$$

В новых координатах $P_x=\alpha_2$, $P_y=\alpha_4$. Следовательно, функция Гамильтона H не зависит от сопряженных переменных β_2 и β_4. Таким образом, число степеней свободы понижено на две единицы: получено зависящее от двух параметров α_2 и α_4 семейство гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Симплектическими координатами являются переменные α_1, α_3, β_1, β_3. При $\alpha_2=\alpha_4=0$ функция M является интегралом «приведенной» системы. Следовательно, эта гамильтонова система с двумя степенями свободы вполне интегрируема. В частности, функции α_1, α_3, β_1, $\beta_3|_t$ можно найти с помощью квадратур. Оставшиеся «циклические» координаты β_2 и β_4 ввиду формул

$$\dot\beta_2 = \frac{\partial K}{\partial \alpha_2},\quad \dot\beta_4 = \frac{\partial K}{\partial \alpha_4};\quad K(\alpha,\ \beta) = H(x,\ y)|_{\alpha,\beta}$$

находятся простым интегрированием. Насколько известно автору, эта возможность не реализована.

5. Другие интересные примеры вполне интегрируемых систем можно найти, например, в работе Ю. Мозера [42]. Там же обсуждаются некоторые современные методы интегрирования уравнений Гамильтона.

§ 4. Теория возмущений

1. Пусть прямое произведение $M = D \times T^n\ \{\varphi \bmod 2\pi\}$, D— область в $R^n\{I\}$, снабжено стандартной симплектической структурой и $H(I,\ \varphi,\ \varepsilon): M \times (-\varepsilon_0,\ \varepsilon_0) \to R$ — аналитическая функция такая, что $H(I,\ \varphi,\ 0) = H_0(I)$. Канонические уравнения с гамильтонианом H_0 немедленно интегрируются:

$$\dot I = -\frac{\partial H_0}{\partial \varphi} = 0,\quad \dot\varphi = \frac{\partial H_0}{\partial I} = \omega(I) \Rightarrow I = I^0,\quad \varphi = \varphi^0 + \omega(I^0)\,t.$$

Согласно А. Пуанкаре, исследование полной системы

$$\dot I = -\frac{\partial H}{\partial \varphi},\quad \dot\varphi = \frac{\partial H}{\partial I};\quad H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I,\ \varphi) + \ldots \tag{4.1}$$

при малых значениях параметра ε является основной проблемой динамики [48].

Идея классической теории возмущений состоит в следующем: ищется каноническое преобразование $I,\ \varphi \to J,\ \psi$, аналитически зависящее от параметра ε,

$$I = \frac{\partial S}{\partial \varphi},\quad \psi = \frac{\partial S}{\partial J},\quad S(J,\ \varphi,\ \varepsilon) = S_0 + \varepsilon S_1 + \ldots,$$

такое, что

1) $S_0 = J\varphi$ (оно мало отличается от тождественного),
2) функции $S_k(J,\ \varphi)$ периодичны по φ с периодом 2π при всех $k \geqslant 1$,
3) в новых переменных $H = K(J,\ \varepsilon)$.

Следовательно, любая 2π-периодическая по φ функция $f(I,\ \varphi,\ \varepsilon)$ в новых канонических переменных J, ψ снова будет 2π-периодична по ψ.

Если такое преобразование удастся найти, то уравнения Гамильтона (4.1) будут полностью проинтегрированы. При этом n функций $J_s = J_s(I,\ \varphi,\ \varepsilon)$, $J_s(I,\ \varphi,\ 0) = I_s$ $(1 \leqslant s \leqslant n)$ составят полный набор независиых интегралов в инволюции.

2. Функция $S_1(J,\ \varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\left\langle \frac{\partial H_0}{\partial J},\ \frac{\partial S_1}{\partial \varphi}\right\rangle + H_1(J,\ \varphi) = K_1(J), \tag{4.2}$$

где $K_1(J)$ — пока неизвестная функция. Разложим «возмущающую» функцию H_1 в кратный ряд Фурье:

$$H_1 = \sum_{m \in Z^n} H_m(J) \exp i\langle m,\ \varphi\rangle.$$

Если уравнение (4.2) имеет решение, периодическое по φ, то

$$K_1(J) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} H_1(J,\ \varphi)\,d\varphi.$$

Пусть

$$S_1 = \sum_{m \neq 0} S_m(J) \exp i\langle m,\ \varphi\rangle.$$

Тогда
$$S_m(J) = \frac{H_m(J)}{i\langle m,\ \omega(J)\rangle}.$$

В дальнейшем анализе важную роль играет вековое множество $\mathfrak{B} \subset D$ — множество точек $J \in D$, для которых
$$\sum_{m \neq 0} \left| \frac{H_m(J)}{\langle m,\ \omega(J)\rangle} \right|^2 = \infty.$$
В частности, множеству $\mathfrak{B}$ принадлежат точки $J \in D$ такие, что $\langle m, \omega(J)\rangle = 0$, $m \neq 0$ и $H_m(J) \neq 0$. Согласно неравенству Бесселя
$$\sum_{m \in Z^n} S_m^2 < \infty$$
производящая функция S_1 не определена на множестве $\mathfrak{B} \times T^n \subset D \times T^n$.

По существу, вековое множество — это множество тех торов невозмущенной интегрируемой задачи, которые распадаются при добавлении возмущения порядка ε. В типичной ситуации $\mathfrak{B}$ всюду плотно в D, и с этим связана хорошо известная трудность — появление «малых делителей», препятствующих не только сходимости, но даже формальному построению рядов классической схемы теории возмущений.

3. Теорема 1. *Предположим, что уравнения* (4.1) *имеют n первых аналитических интегралов*
$$F_i : D \times T^n \times (-\varkappa,\ \varkappa) \to R$$
таких, что

1) *при всех значениях ε функции $F_1, \ldots, F_n$ находятся в инволюции,*
2) $F_i(I,\ \varphi,\ 0) = f_i(I)$, $1 \leqslant i \leqslant n$,
3) *якобиан*
$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(I_1, \ldots, I_n)} \neq 0$$
в области D. Тогда на множестве $G \times T^n \times (-\alpha, \alpha)$, G — компактная подобласть D, α мало, существует аналитическая производящая функция $S(J, \varphi, \varepsilon)$, удовлетворяющая условиям 1) — 3) *из п.* 1.

Если уравнения (4.1) имеют интегралы, формально аналитические по ε (формальные ряды по степеням ε с аналитическими в $D \times T^n$ коэффициентами) и удовлетворяющие условиям теоремы, то можно (по крайней мере формально) построить ряды теории возмущений, определенные при $(J,\ \varphi) \in D \times T^n$. Докажем это.

Пусть $F_s(I,\ \varphi,\ \varepsilon) = f_s(I) + \sum \varepsilon^k F_{sk}(I,\ \varphi)$. Рассмотрим систему уравнений
$$F_s\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi},\ \varphi,\ \varepsilon\right) = f_s(J) + \sum_{k \geqslant 1} \varepsilon^k f_{sk}(J) \quad (1 \leqslant s \leqslant n) \tag{4.3}$$
пока с неизвестными аналитическими функциями f_{sk}: $D \to R$. При $\varepsilon = 0$ уравнения (4.3) будут выполнены, если положить $S_0 = J\varphi$. Так как $F_s(I, \varphi, 0) = f_s(I)$ и якобиан
$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(I_1, \ldots, I_n)} \neq 0,$$
то при заданных f_{sk} определен формальный ряд
$$I(\varphi,\ \varepsilon) = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = J + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + \ldots, \tag{4.4}$$
удовлетворяющий (4.3). Утверждается, что дифференциальная форма $I(\varphi,\ \varepsilon) d\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} d\varphi$ точна. Для доказательства нам потребуется простая

Лемма. *Пусть в $R^{2n}\{p, q\}$ задана система уравнений*

$$F_s(p, q) = c_s, \quad 1 \leqslant s \leqslant n,$$

и $p_s = f_s(q, c_1, \ldots, c_n)$ — ее решение. Если функции $F_1, \ldots, F_n$ коммутируют (в стандартной симплектической структуре R^{2n}), то при фиксированных значениях c форма $\sum f_s(q, c) dq_s$ — полный дифференциал.

Доказательство. Функции $G_s(p, q) = p_s - f_s(q, F_1(p, q), \ldots, F_n(p, q))$, очевидно, постоянны. Так как функции $F_1, \ldots, F_n$ коммутируют, то

$$\{G_s, G_m\} = \frac{\partial f_m}{\partial q_s} - \frac{\partial f_s}{\partial q_m} = 0.$$

Что и требовалось.

При произвольном выборе $f_{sk}(J)$ функции $S_k(J, \varphi)$ будут многозначны на T^n. Эту многозначность можно устранить, подбирая нужным образом f_{sk}. Пусть сначала $k = 1$. Из уравнения (4.3) получим, что

$$\left\langle \frac{\partial f_s}{\partial J}, \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \right\rangle = f_{s1}(J) - F_{s1}(J, \varphi). \tag{4.5}$$

Если положить

$$f_{s1} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} F_{s1}(J, \varphi)\, d\varphi,$$

то из (4.5) получим периодическое решение S_1. При $k \geqslant 1$ для определения S_k и f_{sk} будем иметь уравнение вида (4.5), в правую часть которого входят функции S_m и f_{sm} $(m < k)$, которые уже известны.

В новых канонических переменных J, ψ функции $F_1, \ldots, F_n$ зависят лишь от J и ε. Поскольку эти функции — первые интегралы гамильтоновой системы (4.1) и независимы, то то же самое справедливо для $J_1, \ldots, J_n$. Следовательно, функция Гамильтона H не зависит от углов ψ:

$$\frac{\partial H}{\partial \psi} = -\dot{J} = 0.$$

Теорема доказана.

§ 5. Нормальные формы

1. Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{z} = \Im H', \quad z = (p, q) \in R^{2n}$$

в окрестности точки $z = 0$. Пусть вещественно-аналитическая функция H представлена сходящимся степенным рядом от z, начинающимся с членов второго порядка: $H = \sum\limits_{k \geqslant 2} H_k$. Точка $z = 0$ является, очевидно, положением равновесия.

Особый интерес представляет случай, когда собственные значения линеаризованной системы $\dot{z} = \Im H_2'$ чисто мнимы и различны. Хорошо известно [18], что тогда существует линейное каноническое преобразование координат $p, q \to x, y$, приводящее квадратичную форму H_2 к виду

$$\frac{1}{2} \sum_s \alpha_s (x_s^2 + y_s^2). \tag{5.1}$$

Собственными числами являются как раз $\pm i\alpha_1, \ldots, \pm i\alpha_n$.

Теорема 1 (Дж. Биркгоф). *Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ независимы над полем рациональных чисел, то существует формальное каноническое преобразование $x, y \to \xi, \eta$ (задаваемое формальным степенным рядом $S(x, \eta) = x\eta +$*

$+\sum\limits_{m\geqslant 3} S_m(x, \eta) : \xi = S'_\eta,\ y = S'_x)$, *которое переводит* $H(x, y)$ *в гамильтониан* $K(\rho)$ *—формальный степенной ряд от* $\rho_s = \xi_s^2 + \eta_s^2$ [9].

Если ряд $\sum S_m$ сходится, то уравнения с функцией Гамильтона H полностью интегрируются: $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — степенные ряды по x, y — образуют полный набор независимых интегралов в инволюции. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2 (Рюссман). *Если система с гамильтонианом* $H = \sum\limits_{k\geqslant 2} H_k$ *имеет* n *аналитических интегралов в инволюции*

$$G_m = \frac{1}{2}\sum \varkappa_{ms}(x_s^2 + y_s^2) + \sum_{k\geqslant 3} G_{mk}$$

и $\det \| \varkappa_{ms} \| \neq 0$, *то преобразование Биркгофа сходится* [74].

Нормализация гамильтоновой системы в окрестности устойчивого равновесия тесно связана с классической схемой теории возмущений. Действительно, вводя с помощью подстановки $x \to \varepsilon x$, $y \to \varepsilon y$ малый параметр ε и переходя к полярным координатам I, φ по формулам

$$x_s = \sqrt{2I_s}\sin\varphi_s, \quad y_s = \sqrt{2I_s}\cos\varphi_s,$$

получим гамильтонову систему

$$\dot{I}_s = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_s}, \quad \dot{\varphi}_s = \frac{\partial H}{\partial I_s}$$

с функцией Гамильтона $H = \sum\limits_{m\geqslant 0} \varepsilon^m H_m^*(I, \varphi)$, $H_0^* = \sum \alpha_s I_s$,

$$H_m^* = H_{m+2}(x, y)\,|_{I,\varphi},$$

2π-периодической по φ. Если частоты $\alpha_s = \dfrac{\partial H_0}{\partial I_s}$ рационально независимы, то существуют формальные ряды классической теории возмущений, которым соответствует как раз преобразование Биркгофа. Теорему Рюссмана можно вывести с помощью этого же приема из теоремы 1 § 4.

2. В приложениях функция H обычно зависит еще от некоторых параметров $\varepsilon \in D$ (D — область в R^m). Будем считать функцию $H(z, \varepsilon)$ аналитической по z, ε и $H'(0, \varepsilon) = 0$ для всех ε. Если при всех ε собственные числа линеаризованной системы чисто мнимы и различны, то подходящим линейным симплектическим преобразованием, аналитическим по ε, форму H_2 можно привести к «нормальному» виду (5.1). Коэффициенты α_s будут, конечно, аналитичны по ε. Следующая теорема является незначительным усилением результата Рюссмана.

Теорема 3. *Пусть существуют* n *интегралов в инволюции*

$$G_m(x, y, \varepsilon) = \frac{1}{2}\sum \varkappa_{ms}(\varepsilon)(x_s^2 + y_s^2) + \sum_{k\geqslant 3} G_{mk}(x, y, \varepsilon),$$

аналитических по ε, *таких, что* $\det \| \varkappa_{ms}(\varepsilon) \| \neq 0$ *при всех* $\varepsilon \in D$. *Тогда существует аналитическое каноническое преобразование* $x, y \to \xi, \eta$, *аналитическое по* ε, *которое переводит* $H(x, y, \varepsilon)$ *в гамильтониан* $K(\rho_1, \ldots, \rho_n, \varepsilon)$, $\rho_s^2 = \xi_s^2 + \eta_s^2$.

Если ряды $\sum G_{mk}$ формальные (не обязательно сходящиеся), то можно найти формальное каноническое преобразование, «нормализующее» гамильтониан H. В частности, в условиях теоремы, преобразование Биркгофа существует и при рационально зависимых наборах частот $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Преобразование к нормальной форме можно производить не только в окрестности положений равновесия, но и, например, в окрестности периодических траекторий. Все сказанное выше с необходимыми изменениями справедливо и в этом случае.

ГЛАВА III

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ К ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ НАТУРАЛЬНЫХ СИСТЕМ

§ 1. Топология пространства положений интегрируемой системы

1. Рассмотрим натуральную механическую систему с двумя степенями свободы (см. § 1 гл. I). Будем предполагать, что ее пространство положений M — компактная ориентируемая аналитическая поверхность. Хорошо известно топологическое строение таких поверхностей — это сферы с некоторым числом приклеенных ручек $\varkappa$. Число $\varkappa$ — топологический инвариант поверхности — называется ее родом.

Движения натуральной системы описываются уравнениями Гамильтона в кокасательном расслоении T^*M, которое является ее фазовым пространством. Расслоение T^*M имеет естественную структуру четырехмерного аналитического многообразия. Будем считать, что функция Гамильтона $H : T^*M \to R$ всюду аналитична. Так как $H = T(p, q) + U(q)$ и $T(p, q)$ при всех $q \in M$ является квадратичной формой по $p \in T_q^*M$, то функции $T(p, q)$ (кинетическая энергия) и $U(q)$ (потенциальная энергия) аналитичны соответственно на T^*M и M. Решения канонических уравнений

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{1.1}$$

являются аналитическими отображениями из $R\{t\}$ в T^*M. На их траекториях полная энергия $H = T + U$, конечно, постоянна.

Теорема 1. *Если род поверхности M отличен от* 0 *и* 1 (*т. е. M не гомеоморфна сфере S^2 и тору T^2*), *то уравнения* (1.1) *не имеют первого интеграла, аналитического на T^*M и независимого* [1]) *от интеграла энергии* [31].

Хорошо известны многочисленные примеры интегрируемых систем, конфигурационные пространства которых гомеоморфны S^2 и T^2 (скажем, движение материальной точки по инерции по «стандартным» сфере и тору).

В бесконечно дифференцируемом случае теорема 1, вообще говоря, не справедлива: для любой гладкой поверхности M можно указать «натуральный» гамильтониан $H = T + U$ такой, что уравнения Гамильтона (1.1) на T^*M имеют дополнительный бесконечно дифференцируемый интеграл, независимый (точнее, не всюду зависимый) с функцией H. Действительно, рассмотрим стандартную сферу S^2 в R^3, и пусть поверхность M получается из S^2 приклеиванием любого числа ручек к некоторой малой области N на S^2. Пусть H — функция Гамильтона задачи о движении точки по инерции ($U \equiv 0$) по поверхности M, вложенной в R^3. Вне малой области N точка будет двигаться, очевидно, по большим кругам сферы S^2. Следовательно, в фазовом пространстве T^*M существует инвариантная область, диффеоморфная прямому произведению $D \times T^2$, расслоенная на двумерные инвариантные торы. Точки из области D «нумеруют» эти торы. Пусть $f : D \to R$ — гладкая функция, обращающаяся в нуль вне некоторой подобласти G, целиком лежащей в D. Функции f соответствует гладкая функция F на $D \times T^2$, постоянная на инвариантных торах из $D \times T^2$. Она продолжается до глад-

---

[1]) Аналитические функции считаются независимыми, если они независимы в какой-то точке (тогда они независимы почти всюду).

кой функции на всем T^*M, если положить $F = 0$ вне множества $G \times T^2$. Очевидно, что F — первый интеграл канонических уравнений (1.1) и функции H и F (при подходящем выборе f) не всюду зависимы.

2. Теорема 1 является следствием более сильного утверждения, устанавливающего неинтегрируемость уравнений движения при фиксированных достаточно больших значениях полной энергии. Точная формулировка состоит в следующем. При всех значениях $h > \max_M U$ уровень полной энергии $I_h = \{x \in T^*M\colon T + U = h\}$ является трехмерным аналитическим многообразием, имеющим естественную структуру расслоенного пространства с базой расслоения M и слоем S^1. Локальными координатами на I_h являются q, φ, где q — координаты на M, а φ — угловая переменная на «слое» $S_q^1 = \{p \in T_q^*M : T(p,\ q) + U(q) = h\}$ — окружности в кокасательной плоскости. Так как исходное гамильтоново векторное поле $\mathfrak{J}H'$ касается I_h, то на I_h возникает некоторая аналитическая система дифференциальных уравнений. Справедлива

Теорема 2. *Если род поверхности M не равен 0 и 1, то при всех $h > \max_M U$ поток на I_h не имеет непостоянного аналитического интеграла.*

3. В бесконечно дифференцируемом случае в предположениях теорем 1, 2 можно утверждать отсутствие новых гладких интегралов, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям.

Теорема 3. *Если род гладкой поверхности M отличен от 0 и 1, то при всех $h > \max_M U$ фазовый поток на I_h не имеет бесконечно дифференцируемого первого интеграла $f(q,\ \varphi)\colon I_h \to R$, который*

α) *имеет конечное число критических значений и при этом*

β) *точки $q \in M$, для которых множества $\{f(q,\ \varphi) = c\}$ конечны или совпадают со всем слоем S_q', всюду плотны на M.*

В аналитическом случае условия α), β) выполняются автоматически. При этом свойство β), очевидно, имеет место для всех $q \in M$. Свойство α) нетривиально; его доказательство можно найти в работе [75].

Более общо, если компактная ориентируемая гладкая поверхность M негомеоморфна сфере и тору, то уравнения движения не имеют нового интеграла $F(p,\ q)$, являющегося бесконечно дифференцируемой функцией на T^*M, аналитической при фиксированных $q \in M$ на кокасательных плоскостях T_q^*M и имеющей конечное число различных критических значений. Полиномиальные по скоростям функции представляют распространенный пример интегралов, аналитических по импульсам p. Количество различных критических значений гладкой функции на компактном многообразии конечно, если, например, все критические точки изолированы или критические точки образуют невырожденные критические многообразия.

Пример п. 1 не противоречит теореме 3: свойство β) заведомо не имеет места для точек $q \in M$, достаточно удаленных от «особой» области N.

4. Теоремы 1—3 будут справедливы и в случае неориентируемых компактных поверхностей, если дополнительно исключить проективную плоскость RP^2 и бутылку Клейна K. Действительно, стандартное регулярное двулистное накрытие $N \to M$, где N — ориентированная поверхность, индуцирует некоторую натуральную механическую систему на N, которая обладает дополнительным интегралом, если новый интеграл есть у системы на M. Остается заметить, что когда M негомеоморфна RP^2 и K, то род поверхности N больше 1.

§ 2. Доказательство теоремы о неинтегрируемости

1. Согласно принципу наименьшего действия Мопертюи, траектории движений механической системы, лежащие на интегральных уровнях I_h с запасом полной энергии $h > \max_M U$, являются геодезическими линиями риманова пространства $(M,\ ds)$, где метрика ds определяется по формуле $(ds)^2 = 2(h - U)T(dt)^2$.

Зафиксируем точку $q \in M$, удовлетворяющую условию β). Поскольку $(M,\ ds)$ — гладкое двумерное компактное ориентируемое риманово многообразие, негомеоморфное сфере, то по теореме Е. В. Гайдукова [12] для любого нетривиального класса свободно гомотопных путей на M существуют геодезические полутраектории Γ, выходящие из точки q и асимптотически приближающиеся к некоторой замкнутой геодезической из данного гомотопического класса. Геодезическая Γ сама может быть замкнутой кривой. Геодезические полутраектории Γ будем называть в дальнейшем Γ_q-геодезическими.

Предположим, что пониженная система имеет на I_h бесконечно дифференцируемый первый интеграл $F(q,\ \varphi)$. Любой его некритический уровень есть объединение некоторого числа двумерных инвариантных торов. Рассмотрим в кокасательной плоскости T_q^*M окружность S_q^1, состоящую из векторов p таких, что $T(p,\ q) + U(q) = h$. Каждому вектору $p \in S_q^1$ соответствует единственное движение $q(t)$, $p(t)$ с начальными условиями $q(0) = q$, $p(0) = p$. На этом движении функция F постоянна. Импульс p назовем критическим, если соответствующее значение интеграла F является критическим. Покажем, что существует бесконечно много различных критических импульсов. Если число критических импульсов конечно, то окружность S_q^1 разбивается на конечное число открытых секторов $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ таких, что любой импульс $p \in \Delta_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, является некритическим.

Каждому $p \in \Delta_i$ можно поставить в соответствие единственный инвариантный тор T_p^2, на котором лежит решение $q(t)$, $p(t)$ уравнений Гамильтона (1.1) с начальным условием $q(0) = q$, $p(0) = p$. Поскольку среди значений функции F при $p \in \Delta_i$ нет критических, то естественное отображение

$$f_i\colon\ \Delta_i \times T^2 \to D_i = \bigcup_{p \in \Delta_i} T_p^2$$

является непрерывным. Пусть $\pi\colon T^*M \to M$ — проекция кокасательного расслоения T^*M на M. Положим $X_i = \pi(D_i) \subset M$. Непрерывное отображение $\pi \circ f_i\colon \Delta_i \times T^2 \to X_i$ индуцирует гомоморфизм групп гомологий $g_i\colon H_1(\Delta_i \times T^2) \to H_1(X_i)$. Так как $X_i \subset M$, то существует естественный гомоморфизм $\varphi_i\colon H_1(X_i) \to H_1(M)$. Обозначим через G_i подгруппу группы $H_1(M)$, которая является образом группы $H_1(\Delta_i \times T^2)$ при гомоморфизме $\varphi_i \circ g_i\colon H_1(\Delta_i \times T^2) \to H_1(M)$. Элементы группы $H_1(M)$ являются классами гомологичных циклов, и в каждом классе есть связный цикл. Свободно гомотопные циклы, очевидно, гомологичны. Γ_q-геодезические, отвечающие некритическим начальным импульсам, конечно, замкнуты. При некоторых критических начальных импульсах Γ_q-геодезические могут оказаться незамкнутыми. Эти геодезические «наматываются» на некоторые циклы γ, порождающие одномерные подгруппы $\{n\gamma,\ n \in Z\} \subset H_1(M)$. Согласно предположению, число критических импульсов конечно. Следовательно, число таких подгрупп тоже конечно. Обозначим их $N_1, \ldots, N_m$. Если $\alpha \in H_1(M)$ не лежит в объединении $N_1 \cup \ldots \cup N_m$, то в классе гомологичных циклов α содержится некоторая из замкнутых Γ_q-геодезических. Поскольку при отображении $\pi \circ f_i$ в Γ_q-геодезические переходят некоторые замкнутые кривые в областях $\Delta_1 \times T^2, \ldots, \Delta_n \times T^2$, то множество $H_1(M) \setminus \bigcup N_i$ целиком покрыто подгруппами $G_1, \ldots, G_n$. Так как $H_1(\Delta_i \times T^2) \approx H_1(T^2) \approx Z^2$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то G_i — коммутативные подгруппы, ранг которых не превосходит двух. Хорошо известно, что если род поверхности M равен $\varkappa$, то $H_1(M) \approx Z^{2\varkappa}$. Поскольку M негомеоморфно сфере и тору, то $2\varkappa \geqslant 4$, и из соображений размерности следует, что $H_1(M)$ нельзя покрыть конечным числом одномерных и двумерных подгрупп. Полученное противоречие доказывает бесконечность количества критических импульсов.

Согласно условию α) число различных критических значений функции $F\colon I_h \to R$ конечно. Следовательно, при зафиксированном выше значении $q \in M$ функция $F(q, \varphi)$, $\varphi \in S^1_q$, бесконечно много раз принимает одно и то же значение. Но тогда, по условию β), функция $F(q, \varphi)$ постоянна на S^1_q (т. е. от φ не зависит). Поверхность M связна и компактна, значит, любые две ее точки можно соединить кратчайшей геодезической [38]. Поскольку функция F постоянна вдоль каждого движения, то она принимает одно и то же значение во всех точках $q \in M$, удовлетворяющих условию β). Так как согласно предположению множество таких точек всюду плотно на M, то по непрерывности функция $F = \mathrm{const}$.

Теорема доказана.

2. Другое доказательство теоремы 1, основанное на введении в M комплексно-аналитической структуры, содержится в работе В. Н. Колокольцова [34]. Там же описаны двумерные системы с квадратичным по скорости первым интегралом.

§ 3. Нерешенные задачи

1. Налагает ли существование новых аналитических интегралов ограничения на топологию аналитического многообразия M в случае, когда $\dim M > 2$? В частности, любое ли многомерное аналитическое многообразие может быть пространством положений вполне интегрируемой аналитической натуральной механической системы?

Заметим, что на многообразии T^*M с естественной канонической структурой всегда есть вполне интегрируемые (не натуральные) гамильтоновы системы. Действительно, n независимых аналитических функций $f_s\colon M \to R$ $(1 \leqslant s \leqslant n,\ n = \dim M)$ независимы как функции на T^*M и находятся в инволюции. По-видимому, это свойство имеет место для произвольных (или, по крайней мере, компактных) аналитических симплектических многообразий.

2. Пусть k — гауссова кривизна римановой метрики Мопертюи $(ds)^2 = 2(h - U)T(dt)^2$ на M. Согласно формуле Гаусса — Бонне

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_M k\,d\sigma = \chi(M),$$

где $\chi(M)$ — эйлерова характеристика компактной поверхности M. Если род M больше 1, то $\chi(M) < 0$ и, следовательно, средняя кривизна отрицательна. Если кривизна отрицательна всюду, то динамическая система на I_h будет Y-системой, и, следовательно, эргодической на I_h [2]. Этот результат справедлив и в многомерном случае (нужно только потребовать отрицательность кривизны по всем двумерным направлениям). При этом дифференциальные уравнения движения на I_h не имеют даже непрерывных интегралов, поскольку почти все траектории всюду плотны на I_h. Конечно, кривизна отрицательная в среднем далеко не всегда будет отрицательной всюду. Было бы интересным изучить связь полной интегрируемости натуральной системы с геометрическими (а не только с более грубыми топологическими) свойствами риманова пространства (M, ds).

«...траектории задачи трех тел [1]) сопоставимы не с геодезическими линиями на поверхностях отрицательной кривизны, а, наоборот, с геодезическими линиями на выпуклых поверхностях... к сожалению, эта задача значительно сложнее... Вследствие этого я был вынужден ограничиться некоторыми частными результатами...» (А. Пуанкаре [49]).

[1]) И многих других задач классической механики.

ГЛАВА IV

НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ, МАЛО ОТЛИЧАЮЩИХСЯ ОТ ИНТЕГРИРУЕМЫХ

В этой главе исследуется интегрируемость «основной задачи» динамики:

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I}; \quad H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi) + \ldots \tag{1}$$

§ 1. Метод Пуанкаре

1. Введем в рассмотрение множество Пуанкаре $\mathfrak{P}$, родственное вековому множеству $\mathfrak{B}$ (которое мы определили в § 4 гл. II). Пусть

$$H_1 = \sum_{m \in Z^n} H_m(I) e^{i\langle m, \varphi\rangle}.$$

Множество Пуанкаре $\mathfrak{P}$ — это множество значений $I \in D$, для кототорых существуют $n-1$ линейно независимых векторов $k_1, \ldots, k_{n-1} \in Z^n$ таких, что

1) $\langle k_s, \omega(I)\rangle = 0, \; 1 \leqslant s \leqslant n-1$,

2) $H_{k_s}(I) \neq 0$.

В случае двух степеней свободы, очевидно, $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{B}$.

Обозначим через $\mathfrak{A}(V)$ класс функций, аналитических в области $V \subset R^u$. Множество $M \subset V$ назовем ключевым (или множеством единственности) для класса $\mathfrak{A}(V)$, если любая аналитическая функция, равная нулю на M, тождественно обращается в нуль всюду в V. Таким образом, если аналитические функции совпадают на M, то они совпадают на всем V. Например, множество точек интервала $\Delta \subset R$ является ключевым для класса $\mathfrak{A}(\Delta)$ в том и только в том случае, когда оно имеет предельную точку внутри Δ. Достаточность этого условия очевидна, необходимость вытекает из теоремы Вейерштрасса о бесконечном произведении. Отметим, что если M — множество единственности для класса функций $C^\infty(V)$, то M плотно в V.

Теорема 1. *Предположим, что невозмущенная система невырождена:* $\det \| \partial^2 H_0/\partial I^2 \| \neq 0$ *в области* D. *Пусть* $I^0 \in D$ — *некритическая точка функции* H_0 *и в любой ее окрестности* U *множество Пуанкаре* $\mathfrak{P}$ *является ключевым для класса* $\mathfrak{A}(U)$. *Тогда уравнения Гамильтона* (1) *не имеют независимого от функции* H *интеграла* F, *который можно представить в виде формального степенного ряда* $\sum_{s \geqslant 0} F_s(I, \varphi)\varepsilon^s$ *с аналитическими в области* $D \times T^n$ *коэффициентами* (*ср. с* [48], [25]).

Формальный ряд $\sum f_s \varepsilon^s$ мы считаем равным нулю, если все $f_s = 0$. Ряд $F = \sum_{k \geqslant 0} F_k \varepsilon^k$ — формальный интеграл канонических уравнений с гамильтонианом $H = \sum_{m \geqslant 0} H_m \varepsilon^m$, если

$$\{H, F\} = \sum_{s \geqslant 0} \Big(\sum_{k+m=s} \{H_m, F_k\} \Big) \varepsilon^s = 0.$$

Два ряда $\sum f_s \varepsilon^s$ и $\sum g_s \varepsilon^s$ считаются зависимыми, когда все миноры второго порядка их матрицы Якоби тождественно обращаются в нуль как формальные ряды по степеням ε.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится

Лемма 1. *Пусть функции* $F_s: D \times T^n \to R$ *непрерывно дифференцируемы и ряд* $\sum_{s \geqslant 0} F_s(I, \varphi)\varepsilon^s$ — *формальный интеграл уравнений* (1) *с невырожденной функцией* H_0. *Тогда*

1) $F_0(I, \varphi)$ *не зависит от* φ,

2) *функции* H_0 *и* F_0 *зависимы на множестве* $\mathfrak{P}$.

Доказательство. Условие $\{H, F\} = 0$ эквивалентно серии уравнений

$$(1.1)\qquad \{H_0, F_0\} = 0, \quad \{H_0, F_1\} + \{H_1, F_0\} = 0, \ \ldots$$

Из первого уравнения следует, что F_0 — интеграл невозмущенных уравнений с функцией Гамильтона H_0. Пусть тор $I = I^*$ нерезонансный. Тогда $F_0(I^*, \varphi)$ не зависит от φ, так как любая траектория заполняет нерезонансный тор всюду плотно. Для завершения доказательства заключения 1) остается учесть непрерывность функции F_0 и всюду плотность множества нерезонансных торов невырожденной интегрируемой системы.

Пусть Φ_0, Φ_1: $D \times T^n \to R$ — непрерывно дифференцируемые функции и Φ_0 не зависит от φ. Тогда

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \{\Phi_0, \Phi_1\} e^{-i\langle m, \varphi\rangle} d\varphi = i \left\langle \frac{\partial \Phi_0}{\partial I}, m \right\rangle \Phi_m(I),$$

где

$$\Phi_m(I) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \Phi_1(I, \varphi) e^{i\langle m, \varphi\rangle} d\varphi.$$

С учетом этого замечания из второго уравнения (1.1) получим серию равенств:

$$\left\langle m, \frac{\partial H_0}{\partial I} \right\rangle F_m(I) = \left\langle m, \frac{\partial F_0}{\partial I} \right\rangle H_m(I), \qquad m \in Z^n.$$

Пусть $I \in \mathfrak{P}$. Тогда в этой точке векторы $\partial H_0/\partial I$ и $\partial F_0/\partial I$, очевидно, зависимы.

Доказательство теоремы 1. Так как в точке $I^0 \in D$ среди производных $\partial H_0/\partial I_1, \ldots, \partial H_0/\partial I_n$ есть отличная от нуля, то в малой окрестности U этой точки в качестве локальных координат можно взять $H_0, I_2, \ldots, I_n$ (если $\partial H_0/\partial I_1 \not\equiv 0$).

Согласно лемме 1, функции H_0 и F_0 зависимы на множестве Пуанкаре. Поскольку миноры матрицы Якоби

$$\frac{\partial (H_0, F_0)}{\partial (I_1, \ldots, I_n)}$$

аналитичны в U и множество $\mathfrak{P} \cap U$ является ключевым, то функции H_0 и F_0 зависимы во всей области U и, следовательно, в новых координатах $F_0 = F_0(H_0)$.

Так как $F - F_0(H) = \varepsilon\Phi$, то Φ — формальный интеграл канонических уравнений (1). Пусть $\Phi = \sum\limits_{s\geqslant 0} \Phi_s \varepsilon^s$. Тогда, согласно лемме 1, функция Φ_0 не зависит от угловых переменных φ и Φ_0 зависима с H_0 в области U. Следовательно, $\Phi_0 = \Phi_0(H_0)$ и снова $\Phi - \Phi_0(H) = \varepsilon\Psi$. Но тогда $F = F_0(H) + \varepsilon\Phi_0(H) + \varepsilon^2\Psi$. Повторяя эту операцию нужное число раз, мы получим, что разложение всех миноров второго порядка матрицы Якоби

$$\frac{\partial (H, F)}{\partial (I, \varphi)}$$

в ряд по степеням ε начинается с членов сколь угодно высокого порядка. Отсюда вытекает зависимость функций H и F.

2. Теорема 2. *Пусть функция* H_0 *невырождена в области* D *и множество Пуанкаре* $\mathfrak{P}$ *всюду плотно в* D. *Тогда уравнения* (1) *не имеют независимого от* H *формального интеграла* $\sum F_s\varepsilon^s$ *с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами* F_s: $D \times T^n \to R$.

Это утверждение просто доказывается методом п. 1.

3. Рассмотрим теперь неавтономную каноническую систему уравнений

$$(1.2)\qquad \dot I = -\frac{\partial H}{\partial \varphi},\quad \dot\varphi = \frac{\partial H}{\partial I};\quad H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, t) + \ldots$$

Функция Гамильтона H предполагается аналитической и 2π-периодической по φ и t.

Уравнения (1.2) возникают, например, при изучении автономной системы (1), когда в качестве нового времени берется одна из угловых координат φ. Пусть, например, $\partial H/\partial I_1 \neq 0$. Тогда (по крайней мере локально) мы можем решить уравнение $H(I, \varphi, t, \varepsilon) = h$ относительно I_1 и получить, что

$$I_1 = -K(I_2, \ldots, I_n, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \tau, \varepsilon, h),\quad \tau = \varphi_1.$$

Поскольку $\dot\varphi_1 \neq 0$, то решения $I_s(t)$, $\varphi_s(t)$ ($s \geqslant 2$) исходных уравнений можно считать функцией τ. По теореме Уиттекера [7], [55], функции $I_s(\tau)$, $\varphi_s(\tau)$ ($2 \leqslant s \leqslant n$) удовлетворяют каноническим уравнениям

$$\frac{dI_s}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial \varphi_s},\quad \frac{d\varphi_s}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial I_s}.$$

Эти уравнения имеют вид (1.2).

Полезно снова ввести множество Пуанкаре $\mathfrak{P}_*$ как множество точек $I \in D$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) существуют n линейно независимых векторов $k_s \in Z^n$ и n целых чисел m_s таких, что $\langle k_s, \omega(I)\rangle + m_s = 0$, $1 \leqslant s \leqslant n$,

2) коэффициенты Фурье $H_{k_s m_s}(I)$ разложения возмущающей функции

$$H_1 = \sum_{(k,\, m)\in Z^{n+1}} H_{km}(I)\, e^{i(\langle k, \varphi\rangle + mt)}$$

отличны от нуля.

Отметим, что если уравнения (1.2) являются уравнениями Уиттекера, полученными из автономных уравнений (1) понижением порядка, то множество Пуанкаре $\mathfrak{P}_*$ приведенной системы является проекцией на плоскость $R^{n-1}\{I_2, \ldots, I_n\}$ пересечения множества Пуанкаре $\mathfrak{P}$ исходной системы с поверхностью уровня $H_0(I_1, \ldots, I_n) = h$.

Теорема 3. *Если функция H_0 невырождена в области D и множество $\mathfrak{P}_*$ — ключевое для класса $\mathfrak{A}(D)$, то уравнения* (1.2) *не имеют формального интеграла*

$$\sum_{s\geqslant 0} F_s(I, \varphi, t)\, \varepsilon^s$$

с аналитическими коэффициентами $F_s\colon D \times T^{n+1} \to R$ [25].

Доказательство теоремы 3 основано на последовательном применении вспомогательного утверждения, аналогичного лемме 1 из п. 1.

Лемма 2. *Пусть $F_s\colon D \times T^{n+1} \to R$ — непрерывно дифференцируемые функции и ряд $\sum F_s\varepsilon^s$ — формальный интеграл канонических уравнений* (1.2) *с невырожденной функцией H_0. Тогда*

1) *$F_0(I, \varphi, t)$ не зависит от φ и t,*

2) *$dF_0 = 0$ на множестве $\mathfrak{P}_*$.*

Если множество Пуанкаре $\mathfrak{P}_*$ всюду плотно в области D, то уравнения (1.2) не имеют, очевидно, формального интеграла с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами.

Интересно отметить, что при $n = 1$ из теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений [4] вытекает существование аналитического по ε первого интеграла с непостоянными непрерывными коэффициентами. Напротив, в многомерном случае, для системы общего вида, по-видимому, невозможен даже непрерывный интеграл (см. [6]).

§ 2. Рождение изолированных периодических решений — препятствие к интегрируемости

1. Напомним некоторые факты из теории периодических решений дифференциальных уравнений. Рассмотрим автономную систему $\dot{x} = f(x)$; пусть $x(t, y)$ — ее решение с начальным условием $x(0, y) = y$. Предположим, что эта система имеет ω-периодическое решение $x(t, x_0)$. Матрица

$$X(t) = \left\| \frac{\partial x}{\partial y}\bigg|_{x_0} \right\|$$

является фундаментальной матрицей линейной системы в вариациях

$$\dot{\xi} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t, x_0))\,\xi.$$

Очевидно, $X(0) = E$. Матрица $X(\omega)$ называется матрицей монодромии ω-периодического решения $x(t, x_0)$. Ее собственные значения λ называются мультипликаторами, а числа α, определяемые равенством $\lambda = \exp(\alpha\omega)$,— характеристическими показателями. Мультипликаторы λ могут быть комплексными, поэтому характеристические числа α определены неоднозначно. Поскольку $(X(\omega) - E)f(x_0) = 0$, а $f(x_0) \neq 0$, то в автономном случае один из мультипликаторов λ всегда равен 1. Согласно теореме Пуанкаре — Ляпунова [7], характеристические показатели автономной гамильтоновой системы попарно равны по величине и противоположны по знаку. При этом два из них всегда равны нулю. В случае двух степеней свободы оставшиеся характеристические показатели либо оба действительны, либо оба чисто мнимы. Если они отличны от нуля, то периодическое решение называется невырожденным или изолированным: на соответствующем трехмерном уровне интеграла энергии в малой окрестности периодической траектории нет других периодических решений с периодом, близким к ω. Невырожденное решение с действительными показателями называется гиперболическим, а с чисто мнимыми — эллиптическим. Гиперболическое периодическое решение неустойчиво, а эллиптическое — устойчиво в первом приближении.

Предположим, что гамильтонова система с двумя степенями свободы $\dot{z} = \mathfrak{J}H'$ имеет кроме интеграла $H(z)$ дополнительный интеграл $F(z)$.

Т е о р е м а 1 (А. Пуанкаре). *Если точка ζ находится на траектории невырожденного периодического решения, то функции $H(z)$ и $F(z)$ зависимы в точке ζ* [48].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $F(z)$ — первый интеграл, то $F(z(t, \zeta)) = F(\zeta)$ для всех $t \in R$. Дифференцируя это тождество по ζ, получим равенство

$$\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\partial F}{\partial \zeta}. \tag{2.1}$$

Поскольку $z(t, \zeta)$ — периодическое решение с периодом ω, то при $t = \omega$ из (2.1) получим равенство

$$(X(\omega) - E)\frac{\partial F}{\partial \zeta} = 0. \tag{2.2}$$

Аналогично

$$(X(\omega) - E)\frac{\partial H}{\partial \zeta} = 0. \tag{2.3}$$

Так как система автономна, то

$$(X(\omega) - E)\,\mathfrak{J}\frac{\partial H}{\partial \zeta} = 0. \tag{2.4}$$

Поскольку периодическое решение $z(t, \zeta)$ — невырожденное, то из (2.2) — (2.4) заключаем, что векторы $F'(\zeta)$, $H'(\zeta)$ и $\Im H'(\zeta)$ линейно зависимы:

$$(2.5)\qquad \lambda_1 F' + \lambda_2 H' + \lambda_3 \Im H' = 0, \quad \sum |\lambda_i| \neq 0.$$

Очевидны равенства $\langle F', \Im H'\rangle = 0$ и $\langle H', \Im H'\rangle = 0$. Умножая (2.5) скалярно на $\Im H'$, будем иметь $\lambda_3\langle \Im H', \Im H'\rangle = 0$, откуда $\lambda_3 = 0$. Но тогда из (2.5) вытекает зависимость функций H и F в точке ζ. Что и требовалось.

Теорема Пуанкаре дает нам метод доказательства неинтегрируемости: если траектории невырожденных периодических решений заполняют фазовое пространство всюду плотно или хотя бы это множество обладает ключевым свойством, то гамильтонова система не имеет дополнительного аналитического интеграла. По-видимому, в гамильтоновых системах общего положения периодические траектории действительно всюду плотны (А. Пуанкаре [48], п. 36). Это пока не доказано. Отметим в связи с гипотезой Пуанкаре следующий результат, касающийся геодезических потоков на римановых многообразиях отрицательной кривизны: все периодические решения имеют гиперболический тип и множество их траекторий всюду плотно заполняет фазовое пространство [2].

Для гамильтоновых систем, мало отличающихся от интегрируемых, можно доказать существование большого числа невырожденных периодических решений и из этого факта вывести результаты § 1.

2. Пусть для $I = I^0$ частоты ω_1 и ω_2 невозмущенной интегрируемой задачи соизмеримы, причем $\omega_1 \neq 0$. Тогда возмущающая функция $H_1(I^0, \omega_1 t, \omega_2 t + \lambda)$ периодична по t с некоторым периодом T. Рассмотрим ее среднее значение

$$\overline{H}_1(I^0, \lambda) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\int_0^s H_1(I^0, \omega_1 t, \omega_2 t + \lambda)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T H_1\,dt.$$

Теорема 2 (А. Пуанкаре). *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) $\det \| \partial^2 H_0/\partial I^2 \| \neq 0$ в точке $I = I^0$,

2) *при некотором* $\lambda = \lambda^*$ *производная* $\partial \overline{H}_1/\partial\lambda = 0$, *а* $\partial^2\overline{H}_1/\partial\lambda^2 \neq 0$. *Тогда при малых* $\varepsilon \neq 0$ *существует периодическое решение возмущенной гамильтоновой системы* (1), *период которого равен* T; *оно аналитически зависит от параметра* ε *и при* $\varepsilon = 0$ *совпадает с периодическим решением невозмущенной системы*

$$I = I^0, \quad \varphi_1 = \omega_1 t, \quad \varphi_2 = \omega_2 t + \lambda^*.$$

Два характеристических показателя $\pm\alpha$ *этого решения можно разложить в сходящийся ряд по степеням* $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\alpha = \alpha_1\sqrt{\varepsilon} + \alpha_2\varepsilon + \alpha_3\varepsilon\sqrt{\varepsilon} + \ldots,$$

причем

$$\omega_1^2\alpha_1^2 = \frac{\partial^2\overline{H}_1}{\partial\lambda^2}(\lambda^*)\left(\omega_1^2\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_2^2} - 2\omega_1\omega_2\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_1\,\partial I_2} + \omega_2^2\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_1^2}\right).$$

С доказательством можно познакомиться по книгам [48], [32].

Функция $\overline{H}_1(I^0, \lambda)$ периодична по λ с периодом 2π. Значит, существуют по крайней мере два значения λ, при которых $d\overline{H}_1 = 0$. В общем случае эти критические точки невырождены. При этом локальных минимумов (где $\partial^2\overline{H}_1/\partial\lambda^2 > 0$) ровно столько, сколько локальных максимумов (где $\partial^2\overline{H}_1/\partial\lambda^2 < 0$). В типичной ситуации при $I = I^0$ квадратичная форма

$$(2.6)\qquad \omega_1^2\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_2^2} - 2\omega_1\omega_2\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_1\,\partial I_2} + \omega_2^2\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_1^2} \neq 0.$$

Кстати сказать, что условие геометрически означает отсутствие перегибов у кривой $H_0(I) = h$ в точке $I = I^0$. Таким образом, уравнение $dH_1 = 0$ будет иметь столько корней, для которых $\alpha_1^2 < 0$, сколько корней, для которых $\alpha_1^2 > 0$. Это равносильно тому, что при малых значениях $\varepsilon \neq 0$ возмущенная система будет иметь ровно столько периодических решений эллиптического типа, сколько она имеет решений гиперболического типа. В этой ситуации обычно говорят, что при распаде невозмущенного инвариантного тора $I = I^0$ рождаются пары изолированных периодических решений. Согласно результатам КАМ-теории, траектории типичных эллиптических периодических решений «окружены» инвариантными торами. Гиперболические периодические решения имеют две инвариантные поверхности (сепаратрисы), заполненные решениями, асимптотически приближающимися к периодической траектории при $t \to \pm\infty$. Различные асимптотические поверхности могут пересекаться, образуя в пересечении довольно запутанную сеть (см. рис. 5). Поведение асимптотических поверхностей будет подробно обсуждаться в следующей главе.

Рис. 5.

3. Принципиальной основой доказательства неинтегрируемости возмущенных уравнений является лемма 1 из § 1: если $F = F_0(I, \varphi) + \varepsilon F_1(I, \varphi) + \ldots$ — первый интеграл канонических уравнений (1), то F_0 не зависит от φ и функции H_0 и F_0 зависимы на множестве Пуанкаре $\mathfrak{W}$. Первая часть леммы вытекает из невырожденности невозмущенной задачи. Используя теорему Пуанкаре из п. 1, мы докажем зависимость функций H_0 и F_0 на множестве $\mathfrak{P}$ невозмущенных торов $I = I^0$, которые удовлетворяют условиям теоремы 2 и неравенству (2.6).

Действительно, периодические решения $\Gamma(\varepsilon)$, рождающиеся из семейства периодических решений, расположенных на резонансном торе $I^0 \in \mathfrak{P}$, не вырождены. Поэтому, как доказано в п. 1, функции H и F зависимы во всех точках траектории $\Gamma(\varepsilon)$. Устремим ε к нулю. Периодическое решение $\Gamma(\varepsilon)$ перейдет в одно из периодических решений $\Gamma(0)$ невозмущенной задачи, лежащее на торе $I = I^0$, а функции H и F станут равными H_0 и F_0. По непрерывности они будут зависимы во всех точках траектории $\Gamma(0)$. Следовательно, ранг матрицы Якоби

$$\frac{\partial(H_0, F_0)}{\partial(I, \varphi)}$$

равен 1 в точках $(I, \varphi) \in \Gamma(0)$. В частности, в этих точках

$$\frac{\partial(H_0, F_0)}{\partial(I_1, I_2)} = 0.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что функции H_0 и F_0 не зависят от φ.

Отметим, что всегда $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{W}$, однако в типичных случаях множества $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{W}$ совпадают. Кроме того, в приведенных выше рассуждениях интеграл F предполагался аналитическим по ε, а в § 1 было доказано отсутствие интегралов, формально-аналитических по параметру ε. Однако нашей целью было прояснение геометрии аналитических вычислений § 1.

При малых значениях параметра $\varepsilon \neq 0$ теорема 2 гарантирует существование большого, но конечного, числа различных изолированных периодических решений. Поэтому из этой теоремы нельзя вывести неинтегрируемость возмущенной системы при фиксированных значениях $\varepsilon \neq 0$. Правда, в случае двух степеней свободы, который мы как раз рассматриваем, справедливо следующее утверждение: если невозмущенная система невырождена, то при фиксированных малых значениях $\varepsilon \neq 0$ возмущенная гамильтонова система имеет бесконечно много различных периодических решений. К сожалению, ничего нельзя сказать об их изолированности. Этот результат выводится из теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений и последней геометрической теоремы А. Пуанкаре [50].

§ 3. Приложения метода Пуанкаре

1. Обратимся к ограниченной задаче трех тел, рассмотренной нами в § 4 гл. I. Предположим сначала, что масса Юпитера μ равна нулю. Тогда в «неподвижном» пространстве астероид будет вращаться вокруг Солнца единичной массы по кеплеровским орбитам. Пусть орбиты — эллипсы. Тогда удобно перейти от прямоугольных координат к каноническим элементам Делоне L, G, l, g: если a и e — большая полуось и эксцентриситет орбиты, то $L = \sqrt{a}$, $G = \sqrt{a(1-e^2)}$, g — долгота перигелия, а l — угол, определяющий положение астероида на орбите,— эксцентрическая аномалия [48], [59]. Оказывается, в новых координатах уравнения движения астероида будут каноническими с функцией Гамильтона $F_0 = -1/2L^2$. Если $\mu \neq 0$, то полный гамильтониан F можно разложить в ряд по возрастающим степеням μ: $F = F_0 + \mu F_1 + \ldots$ Поскольку в подвижной системе координат, связанной с Солнцем и Юпитером, кеплеровские орбиты вращаются с единичной угловой скоростью, то функция Гамильтона F зависит от L, G, l и $g - t$. Положим $x_1 = L$, $x_2 = G$, $y_1 = l$, $y_2 = g - t$ и $H = F - G$. Функция H теперь зависит лишь от x_i, y_i, причем относительно угловых переменных y_1, y_2 она 2π-периодична. В итоге мы представили уравнения движения астероида в виде следующей гамильтоновой системы:

$$(3.1)\quad \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i},\quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i};\quad H = H_0 + \mu H_1 + \ldots,\quad H_0 = -\frac{1}{2x_1^2} - x_2.$$

Разложение возмущающей функции в кратный тригонометрический ряд по углам y_1 и y_2 было изучено еще Леверье (см., например, [59]). Оно имеет следующий вид:

$$H_1 = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} H_{uv} \cos[uy_1 - v(y_1 + y_2)].$$

Коэффициенты H_{uv}, зависящие от x_1 и x_2, вообще говоря, отличны от нуля.

Множество Пуанкаре $\mathfrak{P}$ этой задачи состоит из прямых, параллельных оси x_2: $u/x_1^3 - v = 0$, $H_{uv} \neq 0$. Оно всюду плотно заполняет полуплоскость $x_1 > 0$. Однако применить теорему Пуанкаре об отсутствии новых аналитических интегралов непосредственно нельзя из-за вырождения невозмущенной задачи: $\det \|\partial^2 H_0/\partial x^2\| = 0$. Эта трудность преодолевается тем, что канонические уравнения с гамильтонианами H и $\exp H$ имеют одни и те же траектории (но не решения). Следовательно, эти уравнения интегрируемы или неинтегрируемы одновременно. Остается заметить, что $\exp H = \exp H_0 + \mu(\exp H_0)H_1 + \ldots$ и $\det \|\partial^2 \exp H_0/\partial x^2\| \neq 0$. Итак, мы получили, что уравнения ограниченной задачи трех тел в форме (3.1) не имеют независимого от функции H формально-аналитического по параметру μ интеграла $\Phi = \sum \Phi_s \mu^s$, коэффициенты которого — гладкие функции на множестве $D \times T^2$ $\{y \bmod 2\pi\}$, где D — произвольная область в полуплоскости $x_1 > 0$.

К автономной гамильтоновой системе (3.1) можно применить процедуру понижения порядка по Уиттекеру. Зафиксируем постоянную энергии $h < 0$ и разрешим уравнение $H(x, y, \mu) = h$ относительно x_2. Мы найдем, что

$$-x_2 = K(x_1, y_1, y_2, h, \mu) = K_0 + \mu K_1 + \ldots, \qquad K_0 = \frac{1}{2x_1^2}.$$

Если выбрать в качестве нового времени переменную $y_2 = \tau$, то функции $x_1 = x(\tau)$ и $y_1 = y(\tau)$ будут удовлетворять уравнениям Уиттекера

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial y}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial x}. \tag{3.2}$$

Для этих уравнений множество Пуанкаре $\mathfrak{B}_*$ также будет всюду плотно на полупрямой $x > 0$. Поскольку невозмущенная система невырождена ($d^2K_0/dx^2 \neq 0$), то выполнены все условия теоремы 3 из § 1. Таким образом, мы можем заключить, что уравнения (3.2) при всех значениях полной энергии $h < 0$ не имеют первого интеграла $\sum \Phi_s\mu^s$ с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами в области $\Delta \times T^2\{y, \tau \bmod 2\pi\}$, Δ — произвольный интервал полупрямой $x > 0$.

Отметим, что уравнения (3.1), (3.2) имеют дополнительный интеграл в виде сходящегося ряда по степеням μ с непрерывными (но не дифференцируемыми) коэффициентами.

2. «Перейдем к другой задаче, а именно задаче о движении тяжелого тела вокруг неподвижной точки ... можно спросить, препятствуют ли существованию однозначного интеграла, отличного от интегралов живых сил и площадей, соображения, изложенные в этой главе» (А. Пуанкаре, [48], п. 86).

Группе симметрий, состоящей из поворотов тела вокруг вертикальной прямой, соответствует линейный интеграл $F_2 = \langle M, e\rangle$: проекция кинетического момента на вертикаль постоянна. Фиксируя эту постоянную, понизим число степеней свободы до двух: на четырехмерных интегральных уровнях $I_{23} = \{\langle M, e\rangle = f_2, \langle e, e\rangle = 1\}$ возникает гамильтонова система с двумя степенями свободы. Ее функция Гамильтона — полная энергии тела с фиксированным значением проекции $\langle M, e\rangle$ — равна $H_0 + \varepsilon H_1$, где H_0 — кинетическая энергия (функция Гамильтона интегрируемой задачи Эйлера о движении тела по инерции), а εH_1 — потенциальная энергия тела в однородном поле силы тяжести (ε — произведение веса тела на расстояние от центра масс до точки подвеса). Будем считать параметр ε малым. Это эквивалентно изучению быстрых вращений тела в умеренном силовом поле. В невозмущенной интегрируемой задаче Эйлера можно ввести переменные действие-угол I, φ. Формулы перехода от специальных канонических переменных L, G, l, g к переменным действие-угол I, φ можно найти, например, в работе [32]. В новых переменных $H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi)$. Переменные действие I_1, I_2 могут изменяться в области $\Delta = \{|I_1| \leqslant I_2, I_2 \geqslant 0\}$. Гамильтониан $H_0(I_1, I_2)$ — однородная функция степени 2, аналитическая в каждой из четырех связных подобластей Δ, на которые делят область три прямые π_1, π_2 и $I_1 = 0$. Уравнение прямых π_1 и π_2 есть $2H_0/I_2^2 = J_2^{-1}$. Они симметричны относительно вертикальной оси и стремятся к прямой $I_1 = 0$, когда $J_2 \to J_1$, и к паре прямых $|I_1| = I_2$, когда $J_2 \to J_3$ (напомним, что J_1, J_2, J_3 — главные моменты инерции тела и $J_1 \geqslant J_2 \geqslant J_3$). Линии уровня функции H_0 изображены на рис. 6. Разложение возмущающей функции H_1 в кратный ряд Фурье по угловым переменным φ_1 и φ_2 фактически содержится в работе Якоби [70]:

$$\sum_{m \in Z} H_{m,1} e^{i(m\varphi_1+\varphi_2)} + \sum_{m \in Z} H_{m,-1} e^{i(m\varphi_1-\varphi_2)} + \sum_{m \in Z} H_{m,0} e^{im\varphi_1}.$$

Отсюда следует, в частности, что в этой задаче множества $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$ и $\mathfrak{P}$ совпадают. Когда главные моменты инерции подчинены неравенству $J_1 > J_2 > J_3$, вековое множество состоит из бесконечного числа прямых, проходящих через точку $I = 0$ и накапливающихся у пары прямых π_1 и π_2. Можно показать, что функция H_0 невырождена в области Δ. Если функция H была бы аналитичной по I во всей области Δ, то можно было бы применить результаты § 1: точки I^0, лежащие на прямых π_1 и π_2, удовлетворяли бы условиям теоремы 1. Трудность, связанную с аналитическими особенностями функции Гамильтона в переменных действие-угол, можно преодолеть, рассматривая задачу о дополнительном интеграле, аналитическом на всем интегральном уровне I_{23}. С помощью метода Пуанкаре доказывается

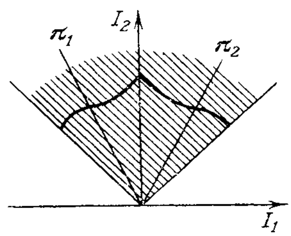

Рис. 6.

Теорема 1. *Если тяжелое твердое тело динамически несимметрично, то уравнения вращения не имеют независимого от функции $H_0 + \varepsilon H_1$ формального интеграла $\sum F_s \varepsilon^s$ с аналитическими на уровне I_{23} коэффициентами* [26].

Это утверждение дает отрицательный ответ на вопрос, поставленный Пуанкаре в [48] (п. 86).

ГЛАВА V

РАСЩЕПЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1. Условия расщепления

1. Пусть V — гладкое n-мерное пространство положений гамильтоновой системы, T^*V — ее фазовое пространство, H: $T^*V \times R\{t\} \to R$ — функция Гамильтона. В расширенном фазовом пространстве $M = T^*V \times R^2\{E, t\}$ уравнения движения снова гамильтоновы:

$$(1.1) \qquad \dot{x} = \frac{\partial K}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial K}{\partial x}, \quad \dot{E} = \frac{\partial K}{\partial t}, \quad \dot{t} = -\frac{\partial K}{\partial E},$$

где $K = H(y, x, t) - E$, $x \in V$, $y \in T_x^*V$.

Гладкая поверхность $\Lambda^{n+1} \subset M$ называется лагранжевой, если для любого стягиваемого в точку замкнутого контура γ

$$\oint_\gamma y\, dx - E\, dt$$

($E = H(y, x, t)$ на поверхности Λ^{n+1}) равен нулю. Лагранжевы поверхности инвариантны относительно действия фазового потока системы (1.1) [16]. В автономном случае лагранжевы поверхности $\Lambda^n \subset T^*V$ задаются условием

$$\oint_\gamma y\, dx = 0 \qquad (\gamma \subset \Lambda^n, \ \partial\gamma = 0).$$

Если лагранжева поверхность Λ^{n+1} однозначно проектируется на $D \times R\{t\}$, $D \subset V$, то ее можно представить в виде графика

$$y = \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}, \qquad H(y, x, t) = -\frac{\partial S(x, t)}{\partial t},$$

где S: $D \times R \to R$ — некоторая гладкая функция. В автономном случае Λ^n задается графиком

$$y = \frac{\partial S}{\partial x}, \qquad x \in D.$$

Функция $S(x, t)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x, t\right)=0.$$

В этом параграфе мы будем иметь дело с лагранжевыми поверхностями, составленными из асимптотических траекторий. Такие поверхности естественно назвать асимптотическими.

2. Предположим, что функция Гамильтона 2π-периодична по t и зависит еще от некоторого параметра ε: $H=H(y, x, t, \varepsilon)$. Пусть при $\varepsilon=0$ функция $H(y, x, t, 0)=H_0(y, x)$ не содержит времени и удовлетворяет следующим условиям:

1) Существуют две критических точки y_-, x_- и y_+, x_+ функции $H_0(y, x)$, в которых собственные значения линеаризованной гамильтоновой системы

$$\dot{y}=-\frac{\partial H_0}{\partial x}, \quad \dot{x}=\frac{\partial H_0}{\partial y}$$

действительны и отличны от нуля. В частности, 2π-периодические решения $x_\pm(t)=x_\pm$, $y_\pm(t)=y_\pm$ имеют гиперболический тип.

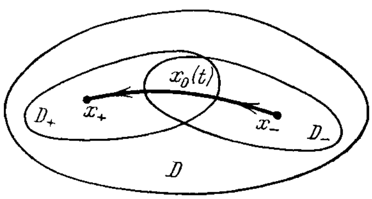

Рис. 7.

2) Если $\Lambda^+(\Lambda^-)$ — устойчивое (неустойчивое) асимптотическое многообразие в T^*V, проходящее через точку x_+, $y_+(x_-, y_-)$, то $\Lambda^+=\Lambda^-$. Отсюда вытекает, в частности, что $H_0(y_+, x_+)=H_0(y_-, x_-)$.

3) Существует область $D\subset V$, содержащая точки $x_\pm$, такая, что в $T^*D\subset T^*V$ уравнение поверхностей $\Lambda^+=\Lambda^-$ можно представить в следующем виде: $y=\partial S_0/\partial x$, где S_0 — некоторая аналитическая функция в области D. Полезно рассмотреть дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=\frac{\partial H_0}{\partial y}\bigg|_{y(x)}, \quad y=\frac{\partial S_0}{\partial x}. \tag{1.2}$$

В малой окрестности точки $x_\pm$ его решения стремятся при $t\to\pm\infty$ к точке $x_\pm$.

4) Уравнение (1.2) имеет в области D двоякоасимптотическое решение: $x_0(t)\to x_\pm$ при $t\to\pm\infty$ (рис. 7).

Гамильтонову систему с функцией Гамильтона $H_0(y, x)$ следует рассматривать как невозмущенную. В приложениях она чаще всего бывает вполне интегрируемой. Пусть D_+ (D_-) — подобласть D, содержащая точку x_+ (x_-) и не содержащая x_- (x_+). При малых значениях ε асимптотические поверхности Λ^+ и Λ^- не исчезнут, а перейдут в «возмущенные» поверхности Λ^+_ε и Λ^-_ε. Более точно, в области $D_\pm\times R\{t\}$ уравнение асимптотической поверхности $\Lambda^\pm_\varepsilon$ можно представить в следующем виде:

$$y=\frac{\partial S^\pm}{\partial x},$$

где $S^\pm(x, t, \varepsilon)$ — 2π-периодическая по t функция, которая определена и аналитична при $x\in D_\pm$ и малых значениях ε (А. Пуанкаре, [48]). Функция $S^\pm$ должна, конечно, удовлетворять уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S^\pm}{\partial t}+H\left(\frac{\partial S^\pm}{\partial x}, x, t, \varepsilon\right)=0. \tag{1.3}$$

Согласно предположению, при $\varepsilon=0$ поверхности Λ^+_0 и Λ^-_0 совпадают. Однако, как заметил впервые А. Пуанкаре [47], в общем случае при малых значениях параметра $\varepsilon\neq 0$ поверхности Λ^+_ε и Λ^-_ε, рассматриваемые как множества точек в $T^*(D_+ \cap D_-) \times R$, уже не будут совпадать. Это явление называется расщеплением асимптотических поверхностей. Очевидно, что Λ_ε^+ совпадает с Λ_ε^- тогда и только тогда, когда уравнение (1.3) имеет решение $S(x, t, \varepsilon)$, аналитическое по x во всей области D.

3. Теорема 1 (А. Пуанкаре). *Если* $H_1(y_+, x_+, t) = H_1(y_-, x_-, t)$ *и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, H_1\}(y(x_0(t)), x_0(t), t)\,dt \neq 0, \tag{1.4}$$

то при малых значениях параметра $\varepsilon \neq 0$ *возмущенные асимптотические поверхности* Λ_ε^+ *и* Λ_ε^- *не совпадают* [47].

Доказательство. Предположим, что уравнение (1.3) имеет аналитическое решение $S(x, t, \varepsilon)$, которое при малых значениях ε можно представить в виде сходящегося степенного ряда

$$S = S_0(x, t) + \varepsilon S_1(x, t) + \ldots$$

Функция $S_0(x, t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + H_0\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}, x\right) = 0.$$

Откуда $S_0 = -ht + W(x)$, где $h = H_0(y_\pm, x_\pm)$, а $W(x)$ — решение уравнения

$$H_0\left(\frac{\partial W}{\partial x}, x\right) = h.$$

Ясно, что $W(x)$ совпадает с функцией $S_0(x)$ из п. 2.

Пусть $H = H_0(y, x) + \varepsilon H_1(y, x, t) + \ldots$ Тогда из (1.3) мы получим квазилинейное дифференциальное уравнение для S_1:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \left.\frac{\partial H_0}{\partial x}\right|_{y(x)} \frac{\partial S_1}{\partial x} + H_1(y(x), x, t) = 0. \tag{1.5}$$

Так как уравнение (1.2) автономное, то оно вместе с решением $x_0(t)$ имеет семейство решений $x_0(t + \alpha)$, $\alpha \in R$. Из (1.5) следует, что на этих решениях

$$S_1(x_0(t+\alpha), t) = S_1(x_0(\alpha), 0) - \int_0^t H_1(y(x_0(t+\alpha)), x_0(t+\alpha), t)\,dt. \tag{1.6}$$

Без ущерба общности можно считать, что $H_1(y_\pm, x_\pm, t) = 0$ для всех t. Если это не так, то вместо возмущающей функции H_1 следует взять функцию $H_1 - H_1(y_\pm, x_\pm, t)$. При этом скобка Пуассона $\{H_0, H_1\}$ не изменится.

Поскольку разложение Тейлора функции H_1 в окрестности точек $x_\pm$, $y_\pm$ начинается с линейных членов по $x - x_\pm$, $y - y_\pm$ и функции $x_0(t) - x_\pm$, $y(x_0(t)) - y_\pm$ экспоненциального быстро стремятся к нулю при $t \to \pm\infty$, то интеграл

$$J(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(y_0(t+\alpha), x_0(t+\alpha), t)\,dt \tag{1.7}$$

сходится. Из уравнения (1.5) следует также, что функция $S_1(x, t)$ в точках $x_\pm$ не зависит от t. Согласно (1.6), интеграл $J(\alpha)$ равен $S_1(x_+) - S_1(x_-)$ и поэтому не зависит от α. Для завершения доказательства осталось вычислить производную

$$\left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_s}\dot{x}_s + \frac{\partial H_1}{\partial y_s}\dot{y}_s\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, H_1\}\,dt = 0.$$

Замечание. Другое доказательство теоремы Пуанкаре можно найти в работе [6].

4. В автономном случае условие расщепления асимптотических поверхностей, расположенных на некотором фиксированном уровне энергии, можно представить в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{F_0, H_1\}\, dt \neq 0, \tag{1.8}$$

где F_0 — интеграл невозмущенной системы. Если в точках неустойчивых периодических траекторий $dF_0 = 0$, то интеграл (1.8) заведомо сходится.

§ 2. Расщепление асимптотических поверхностей — препятствие к интегрируемости

1. Рассмотрим гамильтонову систему с гамильтонианом $H(z, t, \varepsilon) = H_0(z) + \varepsilon H_1(z, t) + O(\varepsilon^2)$ в предположениях § 1. В частности, невозмущенная система имеет два гиперболических положения равновесия $z_\pm$, соединенных двоякоасимптотическим решением $t \to z_0(t)$, $t \in R$.

Теорема 1 (С. В. Болотин). *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \{H_0\{H_0, H_1\}\}(z_0(t), t)\, dt \neq 0,$

2) *при малых ε возмущенная система имеет двоякоасимптотическое решение $t \to z_\varepsilon(t)$, близкое к $t \to z_0(t)$.*

Тогда при малых фиксированных значениях $\varepsilon \neq 0$ в любой окрестности замыкания траектории $z_\varepsilon(t)$ уравнения Гамильтона $\dot{z} = \Im H'$ не имеют полного набора независимых интегралов в инволюции.

Замечание. Условие 1) можно заменить на следующее: при некотором $m \geqslant 2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\{H_0, \ldots \{H_0}_{m}, H_1\}\}(z_0(t), t)\, dt \neq 0.$$

Если выполнено условие 1), то асимптотические поверхности заведомо не совпадают. Условие 2) выполнено, конечно, не всегда. Приведем достаточное условие существования семейства двоякоасимптотических траекторий:

Пусть $H_0 = F_1, \ldots, F_n$ — коммутирующие интегралы невозмущенной задачи, независимые на $\Lambda_0^+ = \Lambda_0^-$. Если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{F_i, H_1\}(z_0(t), t)\, dt = 0,$$

$$\det \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \{F_i\{F_j, H_1\}\}(z_0(t), t)\, dt \right\| \neq 0,$$

то существует аналитическое по ε семейство асимптотических решений $t \to z_\varepsilon(t)$. Это утверждение просто выводится из теоремы о неявной функции.

Если мы исследуем задачу о существовании независимых инволютивных интегралов $F_i(z, t, \varepsilon)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, аналитических (или формально аналитических) по параметру ε, то условие 2) можно отбросить. В частности, если выполнено условие 1), то ряды теории возмущений расходятся в окрестности расщепленных асимптотических поверхностей (А. Пуанкаре [47]).

2. Методом нормальных форм Биркгофа в окрестности неустойчивых периодических решений $z_\pm + O(\varepsilon)$ можно найти 2π-периодическую по t формальную каноническую замену переменных $z \to u$, приводящую функцию Гамильтона $H(z, t, \varepsilon)$ к функции $H^\pm(u, \varepsilon)$, не зависящей от t. Из-за соизмеримости характеристических показателей это преобразование Биркгофа может расходиться. Однако в случае одной степени свободы ($n = 1$) формальные ряды замены переменных $z \to u$ всегда сходятся и аналитически зависят от параметра ε (Ю. Мозер [72]).

Теорема 2. *Предположим, что преобразование Биркгофа сходится и аналитически зависит от ε. Если выполнено условие* 1) *теоремы* 1, *то при малых $\varepsilon \neq 0$ уравнения Гамильтона не имеют полного набора независимых аналитических интегралов в инволюции.*

В частности, при $n = 1$ достаточным условием неинтегрируемости является условие 1) (С. Л. Зиглин [22]).

Доказательство теоремы 2. Определим на поверхности $\Lambda_0^\pm$ функцию $R^\pm$ по формуле

$$R^+(z) = -\int_0^\infty \{H_0\{H_0, H_1\}\}(z(t), t)\,dt, \quad R^-(z) = \int_{-\infty}^0 \{H_0\{H_0, H_1\}\}(z(t), t)\,dt,$$

где $t \to z(t)$ — асимптотическое движение невозмущенной системы с начальным условием $z(0) = z$.

Лемма 1. *Функции $R^\pm$ определяются функцией H_0, семейством поверхностей $\Lambda_\varepsilon^\pm$ и канонической структурой.*

Действительно, согласно результатам предыдущего параграфа, функции

$$S^+(z) = -\varepsilon \int_0^{+\infty} (H_1(z(t), t) - H_1(z_+, t))\,dt,$$

$$S^-(z) = \varepsilon \int_{-\infty}^0 (H_1(z(t), t) - H_1(z_-, t))\,dt$$

являются производящими функциями лагранжевых поверхностей $\Lambda_\varepsilon^\pm$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$. Но $\varepsilon R^\pm = \{H_0\{H_0, S^\pm\}\}$. Что и требовалось.

Композиция преобразования Биркгофа со степенями отображения за период позволяет продолжить функции $H^\pm$ с окрестностей критических точек $u_\pm(\varepsilon)$ на некоторые окрестности $W_\pm$ асимптотических поверхностей $\Lambda_\varepsilon^\pm$. Так как возможное расщепление поверхностей Λ_ε^+ и Λ_ε^- имеет порядок ε, то при малых ε окрестности W_+ и W_- пересекаются.

Лемма 2. $\{H^+, H^-\} \not\equiv 0$ *при* $\varepsilon \neq 0$.

Доказательство. Положим $H^\pm(u, \varepsilon) = H_0^\pm(u) + \varepsilon H_1^\pm(u) + O(\varepsilon^2)$. Так как $H_0^\pm(u) = H_0(u)$, то

$$\{H^+, H^-\} = \varepsilon\{H_0, H_1^- - H_1^+\} + O(\varepsilon^2).$$

Поскольку Λ_0^- — инвариантное асимптотическое многообразие гамильтоновой системы $\dot{u} = \Im H_0'$, то согласно лемме 1

$$\{H_0, H_1^-\}(u) = \int_{-\infty}^0 \{H_0\{H_0, H_1^-\}\}(u_0(t))\,dt = R^-(u), \qquad u \in \Lambda_0^-.$$

Аналогично

$$\{H_0, H_1^+\}(u) = \int_0^{+\infty} \{H_0\{H_0, H_1^+\}\}(u_0(t))\,dt - R^+(u), \qquad u \in \Lambda_0^*.$$

Следовательно,

$$\{H^+, H^-\} = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \{H_0\{H_0, H_1\}\}(z_0(t), t)\,dt + O(\varepsilon^2).$$

Согласно условию 1), при малых $\varepsilon \neq 0$ скобка Пуассона $\{H^+, H^-\} \not\equiv 0$.

В новых переменных u интегралы $F_1, \ldots, F_n$ не зависят от t. Пусть при $\varepsilon \neq 0$ в некоторой точке $W_+ \cap W_-$ интегралы $F_1, \ldots, F_n$ независимы. Поскольку $\{H^\pm, F_i\} \equiv 0$, то вектор $\Im H^{\pm\prime}$ есть линейная комбинация векторов $\Im F_i'$. Так как $\{F_i, F_j\} \equiv 0$, то, очевидно, в этой точке $\{H^+, H^-\} = 0$. Для завершения доказательства осталось заметить, что на всюду плотном множестве аналитическая функция $\{H^+, H^-\}$ отлична от нуля.

3. Т е о р е м а 3. *Пусть $n = 1$. Если*

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, H_1\}(z_0(t), t)\,dt \neq 0,$

2) *при малых ε возмущенная система имеет двоякоасимптотическое решение $t \to z_\varepsilon(t)$, близкое к $t \to z_0(t)$, то при малых значениях $\varepsilon \neq 0$ гамильтонова система $\dot z = \Im H'$ не имеет дополнительного аналитического интеграла* [65].

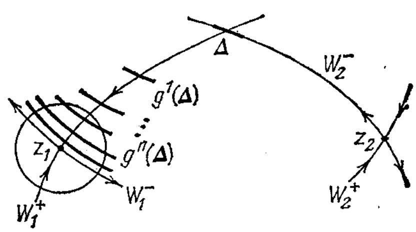

Рис. 8.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отображение за период g сечения $t = t_0$ на себя. При малых ε это отображение имеет две неподвижные гиперболические точки z_1 и z_2 с инвариантными сепаратрисами $W_1^\pm$ и $W_2^\pm$. Согласно условиям теоремы, при $\varepsilon \neq 0$ сепаратрисы W_1^+ и W_2^- пересекаются и не совпадают. Пусть V — малая окрестность точки z_1 и Δ — малый отрезок сепаратрисы W_2^-, пересекающийся с W_1^+. При достаточно большом n отрезок $g^n(\Delta)$ будет целиком лежать в области V, снова пересекаясь с W_1^+. Согласно теореме Гробмана — Хартмана [44], в области V отображение g топологически сопряжено линейному гиперболическому повороту. Следовательно, при $n \to \infty$ отрезки $g^n(\Delta)$ будут «растягиваться» вдоль сепаратрисы W_1^-, неограниченно к ней приближаясь. Очевидно, что объединение

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} g^n(\Delta) \tag{2.1}$$

будет ключевым множеством для класса функций, аналитических в сечении $t = t_0$.

Предположим теперь, что уравнение Гамильтона имеет аналитический интеграл $f(z, t)$. Функция $f(z, t_0)$ инвариантна относительно отображения g и постоянна на сепаратрисе W_2^- (так как последовательность точек $g^n(z)$, $z \in W_2^-$, при $n \to -\infty$ сходится к точке z_2). Следовательно, аналитическая функция $f(z, t_0)$ постоянна на множестве (2.1), и поэтому она постоянна при любом t_0.

З а м е ч а н и е. А. Пуанкаре разделил двоякоасимптотические решения на два типа: гомоклинные (когда $z_+ = z_-$) и гетероклинные (когда $z_+ \neq z_-$). Если $n = 1$, то при малых ε возмущенная задача всегда имеет гомоклинные решения (если, конечно, они были при $\varepsilon = 0$) [47].

§ 3. Некоторые приложения

1. Рассмотрим вначале наиболее простую задачу о колебаниях маятника с вибрирующей точкой подвеса. Функция Гамильтона H равна $H_0+\varepsilon H_1$, где

$$H_0=p^2/2-\omega^2\cos x,\quad H_1=-\omega^2 f(t)\cos x,$$

а $f(t)$ — 2π-периодическая функция времени. Когда $\varepsilon=0$, то верхнее положение маятника — неустойчивое равновесие. Невозмущенная задача имеет два семейства гомоклинных решений:

$$\cos x_0=\frac{2e^{\pm\omega(t-t_0)}}{e^{\pm 2\omega(t-t_0)}+1},\qquad x_0\to\pm\pi \text{ при } t\to\pm\infty. \tag{3.1}$$

Так как $\{H_0, H_1\}=-\omega^2 f(t)\dot{x}\sin x$, то интеграл (1.8) с точностью до постоянного множителя равен

$$\int_{-\infty}^{\infty}\dot{f}(t)\cos x_0\,dt.$$

Пусть $f(t)=\sum f_n e^{int}$. Тогда интеграл (1.8) можно представить в виде ряда

$$\sum_{n\in Z}2inf_nJ_ne^{int_0},\qquad J_n=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pm\omega t}e^{int}}{e^{\pm 2\omega t}+1}\,dt.$$

Интегралы J_n нетрудно вычислить с помощью вычетов:

$$J_n=\frac{-ie^{-n\pi/2\omega}}{2\omega\,(1+e^{\mp n\pi/\omega})}\neq 0.$$

Следовательно, если $f(t)\neq\mathrm{const}$ (т. е. $f_n\neq 0$ при некотором $n\neq 0$), то интеграл (1.8) отличен от нуля хотя бы на одном двоякоасимптотическом решении из семейства (3.1). Таким образом, если $f(t)\neq\mathrm{const}$, то согласно результатам § 2, рассматриваемая задача при достаточно малых (но фиксированных) значениях параметра $\varepsilon\neq 0$ не имеет первого аналитического интеграла $F(p, x, t)$, 2π-периодического по x и t.

2. В задаче о быстром вращении несимметричного твердого тела функция Гамильтона $H=H_0+\varepsilon H_1$, где

$$H_0=\frac{1}{2}\langle AM, M\rangle,\qquad H_1=r_1e_1+r_2e_2+r_3e_3;\qquad A=\mathrm{diag}\,(a_1, a_2, a_3).$$

Числа a_1, a_2, a_3 обратны главным моментам инерции тела. При $\varepsilon=0$ будем иметь интегрируемый случай Эйлера. В этой «невозмущенной» задаче на всех некритических трехмерных уровнях $I_{123}=\{F_1=H_0=f_1>0,\ F_2=f_2,\ F_3=1\}$ существуют два неустойчивых периодических решения: если $a_1<a_2<a_3$, то

$$\begin{cases} M_1=M_3=0,\quad M_2=M_2^0=\pm\sqrt{2f_1/a_2},\quad e_2=e_2^0=\pm f_2/M_2^0,\\ e_1=\alpha\cos(a_2M_2^0)\,t,\quad e_3=\alpha\sin(a_2M_2^0)\,t;\quad \alpha^2=1-(f_2/M_2^0)^2. \end{cases} \tag{3.2}$$

Из неравенства $\langle M, e\rangle^2\leqslant\langle M, M\rangle\langle e, e\rangle$ и независимости функций F_1, F_2, F_3 на I_{123} вытекает, что $\alpha^2>0$. Устойчивые и неустойчивые асимптотические поверхности периодических решений (3.2) можно представить как пересечения многообразия I_{123} гиперплоскостями $M_1\sqrt{a_2-a_1}\pm M_3\sqrt{a_3-a_2}=0$. В задаче Эйлера асимптотические поверхности «сдвоены»: они сплошь заполнены двоякоасимптотическими траекториями, которые при $t\to\pm\infty$ неограниченно приближаются к периодическим траекториям (3.2). Расщепление этих поверхностей изучено в работах [28], [22]. Оказалось, что при возмущении асимптотические поверхности расщепляются всегда, кроме «случая Гесса — Аппельрота»:

$$(3.3) \qquad r_2 = 0, \quad r_1\sqrt{a_3 - a_2} \pm r_3\sqrt{a_2 - a_1} = 0.$$

В этом случае одна пара сепаратрис не расщепляется, а другая — расщепляется (рис. 9). Причина нерасщепления состоит в том, что при выполнении условия (3.3) возмущенная задача при всех значениях параметра ε имеет «частный» интеграл $F = M_1\sqrt{a_2 - a_1} \pm M_3\sqrt{a_3 - a_2}$ ($\dot{F} = 0$, когда $F = 0$). Можно показать, что замкнутые инвариантные поверхности $\{H = f_1,\ F_2 = f_2,\ F_3 = 1,\ F = 0\}$ при малых значениях ε будут как раз парой сдвоенных сепаратрис возмущенной задачи (см. [28]).

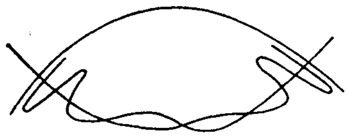

Рис. 9.

В задаче о быстром вращении тяжелого несимметричного волчка расщепленные сепаратрисы пересекаются по-видимому, не всегда. Однако здесь применима теорема 2 из § 2, с помощью которой можно установить отсутствие дополнительного аналитического интеграла возмущенной задачи при малых, но фиксированных, значениях параметра $\varepsilon \neq 0$ (С. Л. Зиглин [22]).

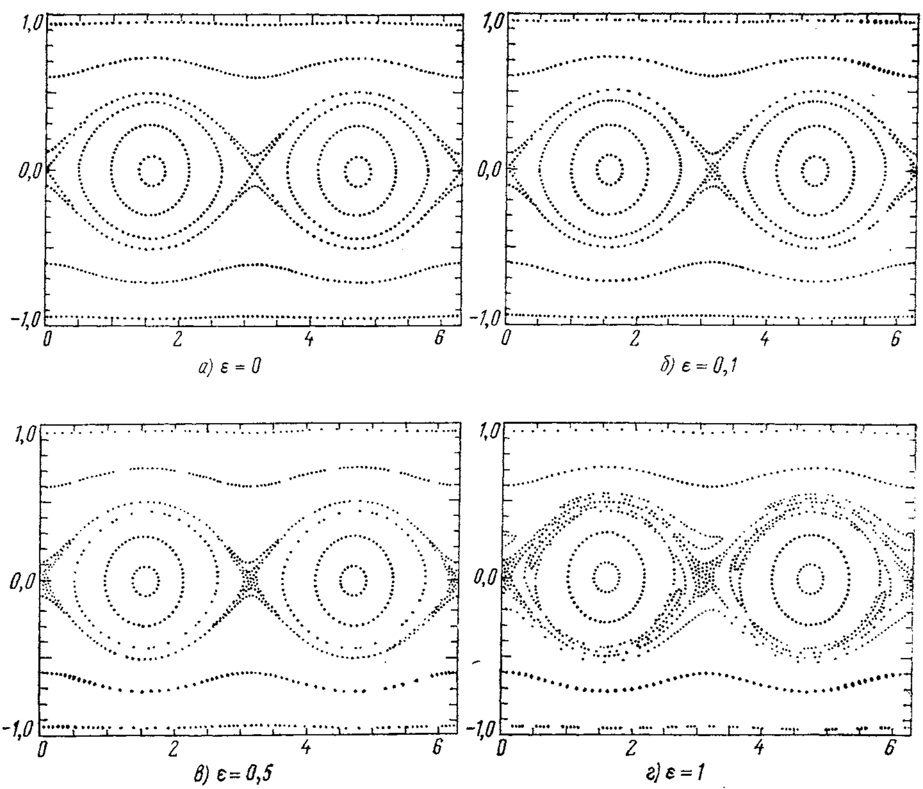

Рис. 10.

Поведение решений возмущенной задачи исследовалось численно в работе [67]. На рис. 10 показаны результаты вычислений при разных значениях возмущающего параметра ε. Хорошо видно, что картина инвариантных кривых невозмущенной задачи начинает разрушаться как раз в окрестности сепаратрис.

3. Рассмотрим теперь уравнения Кирхгофа

$$(3.4)\qquad \begin{cases} \dot M = M\times\omega + e\times u, \quad \dot e = e\times\omega; \quad \omega = \dfrac{\partial H}{\partial M}, \quad u = \dfrac{\partial H}{\partial e} \\ H = \dfrac{1}{2}\langle AM, M\rangle + \langle BM, e\rangle + \dfrac{1}{2}\langle Ce, e\rangle, \end{cases}$$

описывающие вращение твердого тела в идеальной жидкости. Матрица $A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3)$ диагональна, а матрицы B и C симметричны.

Теорема 1. *Пусть среди чисел a_1, a_2, a_3 нет равных. Если уравнения Кирхгофа имеют дополнительный интеграл, независимый от функций $F_1 = H$, $F_2 = \langle M, e\rangle$, $F_3 = \langle e, e\rangle$ и аналитический в $R^6\{M, e\}$, то матрица $B = \operatorname{diag}(b_1, b_2, b_3)$ и*

$$(3.5)\qquad a_1^{-1}(b_2 - b_3) + a_2^{-1}(b_3 - b_1) + a_3^{-1}(b_1 - b_2) = 0.$$

Если $B = 0$, то независимый аналитический интеграл существует лишь в случае, когда $C = \operatorname{diag}(c_1, c_2, c_3)$ и

$$(3.6)\qquad a_1^{-1}(c_2 - c_3) + a_2^{-1}(c_3 - c_1) + a_3^{-1}(c_1 - c_2) = 0.$$

Матрица B в интегрируемом случае Стеклова определяется как раз условием (3.5). Условие (3.6) дает интегрируемый случай Клебша. Интересно отметить совпадение вида условий (3.5) и (3.6).

Следствие. *В общем случае уравнения Кирхгофа неинтегрируемы.*

Доказательство теоремы 1 основано на явлении расщепления сепаратрис. Введем в уравнения (3.4) малый параметр ε, заменяя e на εe. На фиксированном интегральном уровне $I_{23} = \{F_2 = f_2,\ F_3 = f_3 > 0\}$ уравнения (3.4) будут гамильтоновыми с функцией Гамильтона $H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2$, где H_0, H_1, H_2 — сужение функций $\langle AM, M\rangle/2$, $\langle BM, e\rangle$, $\langle Ce, e\rangle/2$ на I_{23}. Это эквивалентно случаю, когда постоянная энергии f_1 много больше f_2 и f_3. При $\varepsilon = 0$ будем снова иметь интегрируемую задачу Эйлера о движении свободного твердого тела по инерции.

Пусть F_0 — аналитический интеграл задачи Эйлера. Если несобственный интеграл

$$(3.7)\qquad J = \int_{-\infty}^{\infty} \{F_0, H_1\}\, dt,$$

вычисленный вдоль решений невозмущенной задачи, асимптотических к периодическим решениям (3.2), не постоянен на сепаратрисах задачи Эйлера, то, согласно теореме 2 § 2, при малых $\varepsilon \neq 0$ уравнения Кирхгофа не имеют на I_{123} непостоянного аналитического интеграла.

Доказательство теоремы 1, таким образом, сводится к проверке непостоянства интеграла (3.7), в котором удобно положить $F_0 = \langle M, M\rangle/2$. Когда матрица $B = 0$, то в формуле (3.7) вместо H_1 следует взять, конечно, H_2. Если $F_0 = \langle M, M\rangle/2$, то интеграл J будет существовать лишь в смысле главного значения. В этом случае можно положить, например, $F_0 = (\langle M, M\rangle - a_2^{-1}\langle AM, M\rangle)/2$.

В качестве примера мы получим условие Стеклова (3.5) в наиболее простом случае, когда $B = \operatorname{diag}(b_1, b_2, b_3)$. Так как

$$\{F_0, H_1\} = (b_3 - b_2)(M_1M_2e_3 + M_1M_3e_2) + \\ + (b_1 - b_3)(M_2M_3e_1 + M_1M_2e_3) + (b_2 - b_1)(M_1M_3e_2 + M_2M_3e_1),$$

то

$$J = (b_3 - b_2)(J_{123} + J_{132}) + (b_1 - b_3)(J_{231} + J_{123}) + (b_2 - b_1)(J_{132} + J_{231}),$$

где

$$J_{ijk}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} M_iM_je_k\,dt.$$

Интегралы J_{ijk} удовлетворяют следующим линейным уравнениям:

$$(3.8)\qquad \begin{cases} a_3J_{132}-a_2J_{123}+(a_3-a_2)\,J_{231}=0,\\ a_1J_{123}-a_3J_{231}+(a_1-a_3)\,J_{132}=0,\\ a_2J_{231}-a_1J_{132}+(a_2-a_1)\,J_{123}=0.\end{cases}$$

Получим, например, первое соотношение. Из уравнений Кирхгофа при $\varepsilon=0$ следует, что

$$(M_1e_1)^{\cdot}=a_3M_1M_3e-a_2M_1M_2e_3+(a_3-a_2)\,M_2M_3e_1.$$

Так как $M_1\to 0$ при $t\to\pm\infty$, то

$$a_3J_{132}-a_2J_{123}+(a_3-a_2)\,I_{231}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(M_1e_1)^{\cdot}\,dt=0.$$

Если $a_2a_3-a_1a_2-a_1a_3\neq 0$, то из уравнений (3.8) получим два равенства

$$J_{132}=\frac{a_1a_3-a_1a_2-a_2a_3}{a_2a_3-a_1a_2-a_1a_3}J_{231},\qquad J_{123}=\frac{a_1a_2-a_1a_3-a_2a_3}{a_2a_3-a_1a_2-a_1a_3}J_{231}.$$

Интеграл J_{231} можно вычислить с помощью вычетов и убедиться в том, что он отличен от нуля (Д. А. Онищенко). Если не выполнено условие (3.5), то в силу очевидного равенства

$$J\,(a_1a_2+a_1a_3-a_2a_3)/2a_1a_2a_3J_{231}=a_1^{-1}(b_3-b_2)+a_2^{-1}(b_1-b_3)+a_3^{-1}(b_2-b_1)$$

интеграл $J\neq 0$, следовательно, возмущенные сепаратрисы расщепляются. В случае, когда $a_2a_3-a_1a_2-a_1a_3=0$, интеграл J пропорционален интегралу J_{123} или J_{132}. Из соображений симметрии и сохранения меры на I_{123}, порожденной стандартной мерой в R^6, вытекает пересечение возмущенных сепаратрис. Отсюда следует, что уравнения Кирхгофа неинтегрируемы на инвариантных многообразиях I_{123} и, в частности, во всем фазовом пространстве R^6.

Если не выполнено условие (3.5) (или (3.6), если $B=0$), то одна из пар сепаратрис задачи Эйлера обязательно расщепляется при добавлении возмущения. Интересно отметить, что при подходящем выборе матриц B и C одна пара сепаратрис остается сдвоенной, а другая — расщепляется. Пусть, например, $B=0$, а элементы c_{ij} симметричной матрицы C удовлетворяют следующим условиям: $c_{12}=c_{23}=0$,

$$\sqrt{a_2-a_1}\,c_{13}\pm\sqrt{a_3-a_2}\,(c_{22}-c_{11})=0,$$
$$\sqrt{a_2-a_1}\,(c_{33}-c_{22})\mp\sqrt{a_3-a_2}\,c_{13}=0.$$

Тогда при всех значениях ε уравнения Кирхгофа имеют «частный интеграл Гесса — Аппельрота» $F=M_1\sqrt{a_2-a_1}\pm M_3\sqrt{a_3-a_2}$. При малых значениях ε сепаратрисы задачи Эйлера $I_{123}\cap\{F=0\}$ останутся сепаратрисами возмущенных периодических решений (3.2).

4. С помощью метода расщепления асимптотических поверхностей можно установить неинтегрируемость задачи о движении четырех точечных вихрей [21]. Точнее, рассмотрим эту задачу в ограниченной постановке: вихрь нулевой интенсивности (т. е. просто частица идеальной жидкости) движется в «поле» трех вихрей одинаковой интенсивности. Оказывается, уравнение движения нулевого вихря можно представить в гамильтоновой форме с периодическим по времени гамильтонианом; эти уравнения имеют гиперболические периодические движения с пересекающимися сепаратрисами. Поэтому ограниченная задача четырех вихрей не является вполне интегрируемой, хотя (как и в неограниченной постановке) имеет четыре независимых некоммутирующих интеграла.

§ 4. Изолированность интегрируемых случаев

1. Когда гамильтонова система зависит от параметра, то в типичной ситуации интегрируемым случаям отвечают исключительные изолированные значения параметра. Доказательство изолированности интегрируемых случаев в конкретных задачах может оказаться весьма трудным делом. Мы исследуем этот вопрос для гамильтонова уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2\{1 + \varepsilon f(t)\}\sin x = 0 \quad (\omega,\ \varepsilon = \mathrm{const}), \tag{4.1}$$

которое описывает колебания математического маятника. Аналитическая функция $f(t)$ считается непостоянной и 2π-периодической по $t \in R$. При $\varepsilon = 0$ уравнение (4.1) интегрируемо, а при малых $\varepsilon \neq 0$ оно не имеет интеграла однозначного и аналитического в расширенном фазовом пространстве $Ц\{\dot{x}, x \bmod 2\pi\} \times T^1\{t \bmod 2\pi\}$ (см. § 3). Ниже будет показано, что это уравнение может быть интегрируемым лишь при конечном множестве значений параметра ε из интервала $[-a, a]$, где $a = 1/\max_R |f(t)|$.

При всех значениях $\varepsilon \in [-a, a]$ периодическое решение $x(t) \equiv \pi$ (или, что то же самое, $x(t) \equiv -\pi$) — вертикальные колебания перевернутого маятника — является гиперболическим. Для доказательства положим $x = \pi + y$. Тогда уравнением в вариациях периодического решения $x(t) = \pi$ будет уравнение

$$\ddot{y} - p(t)y = 0, \quad p(t) = \omega^2(1 + \varepsilon f(t)).$$

Поскольку $p(t) \geqslant 0$ и $p(t) \not\equiv 0$, то мультипликаторы этого решения положительны и один из них больше единицы, а другой — меньше единицы (А. М. Ляпунов). Таким образом, решение $x(t) = \pi$ действительно гиперболическое. Оно имеет две двумерные асимптотические поверхности Λ^+ и Λ^-, сплошь заполненные траекториями, неограниченно приближающимися к точке $x = \pm\pi$ при $t \to \pm\infty$. Поскольку гамильтониан H аналитичен, то Λ_ε^+, Λ_ε^- — регулярные аналитические поверхности в $Ц \times T^1$, аналитически зависящие от ε.

Оказывается, поверхности Λ_ε^+ и Λ_ε^- пересекаются при всех $\varepsilon \in (-a, a)$. Это утверждение, очевидно, эквивалентно существованию гомоклинного решения $x(t)$ ($x(t) \to \pm\pi$ при $t \to \pm\infty$). Доказательство можно извлечь, например, из следующего общего утверждения.

Т е о р е м а 1. *Пусть (M, T, U) — натуральная механическая система, M компактно, метрика T не зависит от времени, а потенциальная энергия U: $M \times R\{t\} \to R$ периодична по t. Если $U(x, t) < U(x_0, t)$ для всех $x \neq x_0$ и $t \in R$, то существует двоякоасимптотическое (гомоклинное) решение $x(t)$ такое, что $x(t) \to x_0$ при $t \to \pm\infty$* [10].

В нашем случае $M = S^1$, $T = \dot{x}^2/2$, а $U = -\omega^2(1 + \varepsilon f)(1 + \cos x)$. Если $-a < \varepsilon < a$, то $U(x, t) < U(\pi, t)$ для всех $0 \leqslant x < 2\pi$ и всех t.

Так как] поверхности Λ_ε^+ и Λ_ε^- не совпадают при малых $\varepsilon \neq 0$, то те значения ε, $|\varepsilon| \leqslant a + \delta$ $(\delta > 0)$, при которых $\Lambda_\varepsilon^+ \equiv \Lambda_\varepsilon^-$, изолированы. Поскольку при $|\varepsilon| \leqslant a$ поверхности Λ_ε^+ и Λ_ε^- пересекаются, то уравнение (4.1) интегрируемо лишь при изолированных значениях ε.

2. Укажем пример гамильтоновой системы, которая при всюду плотных множествах значений параметра является как вполне интегрируемой, так и неинтегрируемой. Таким образом, интегрируемые случаи изолированы не всегда.

Рассмотрим в $R\{y\} \times T^2\{x, t \bmod 2\pi\}$ канонические уравнения

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \tag{4.2}$$

с функцией Гамильтона $H = \varepsilon y - f(x, t)$, где $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$, а $f(x, t)$ — 2π-периодическая аналитическая функция по x и t.

Уравнения (4.2) запишем в явном виде:

$$\dot{x} = \varepsilon, \quad \dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x} = F(x, t). \tag{4.3}$$

Они, очевидно, интегрируются в квадратурах:

$$x = \varepsilon t + x_0, \quad y = y_0 + \int_0^t F(\varepsilon s + x_0, s)\, ds.$$

Будем искать первый интеграл системы (4.2) в виде $y + g(x, t)$, где g: $T^2 \to R$ — некоторая аналитическая функция, которая должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x} = -F(x, t). \tag{4.4}$$

Пусть

$$F = \sum F_{mn} e^{i(mx+nt)}, \quad g = \sum g_{mn} e^{i(mx+nt)}.$$

Тогда

$$g_{mn} = \frac{-F_{mn}}{i(m\varepsilon + n)}.$$

Поскольку

1) $|F_{mn}| \leqslant ce^{-\rho(|m|+|n|)}$, $c, \rho > 0$ (функция F: $T^2 \to R$ аналитична),

2) для почти всех ε (в смысле меры Лебега на R) справедлива оценка

$$|m\varepsilon + n| \geqslant \frac{k}{(|m| + |n|)^\gamma} \quad (k, \gamma > 0),$$

то ряд

$$\sum \frac{-F_{mn}}{i(m\varepsilon + n)} e^{i(mx+nt)}$$

представляет аналитическое решение уравнения (4.4). Следовательно, почти всегда канонические уравнения (4.2) вполне интегрируемы.

Покажем, что при подходящем выборе функции $f(x, t)$ уравнения (4.2) неинтегрируемы для всюду плотного множества значений ε: в этих случаях уравнения (4.2) имеют решения, всюду плотные в расширенном фазовом пространстве $R \times T^2$.

Доказательство основано на одном эргодическом свойстве «цилиндрических каскадов». Пусть отображение T: $Ц \to Ц$ ($Ц = S^1 \times R$) задается формулой $T(x, y) = (x + \varepsilon, y + h(x))$, где $\varepsilon/2\pi$ — иррациональное число, а $h(x)$ — 2π-периодическая аналитическая функция с нулевым средним значением:

$$\int_0^{2\pi} h(x)\, dx = 0.$$

Каскад $\{T^n\}$ называется эргодическим, если последовательность точек $T^n(a)$, $n \in N$, всюду плотна в $Ц$ при некотором $a \in Ц$.

Теорема 2 (А. Б. Крыгин). *Пусть $\varepsilon/2\pi$ — такое иррациональное число, что неравенство*

$$\left|\frac{\varepsilon}{2\pi}-\frac{m}{n}\right|\leqslant\frac{1}{2^{|n|}n^2}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах. Тогда для некоторой аналитической функции $h(x)$ цилиндрический каскад $T(x, y) = (x + \varepsilon,\ y + h(x))$ эргодичен [35].

Заметим, что иррациональные числа ε, удовлетворяющие условиям теоремы 2, всюду плотны в R.

С уравнением (4.3) естественным образом связано отображение за период

$$T\colon\ x\to x+\varepsilon/2\pi,\quad y\to y+\int\limits_0^{2\pi}F(\varepsilon s+x,\ s)\,ds. \tag{4.5}$$

Поскольку функция

$$h(x)=\int\limits_0^{2\pi}F(\varepsilon s+x,\ s)\,ds \tag{4.6}$$

2π-периодична по x и ее среднее

$$\int\limits_0^{2\pi}h(x)\,dx=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F(x,\ s)\,dx\,ds=0,$$

то отображение (4.5) порождает цилиндрический каскад.

Выбирая подходящим образом функцию $f(x, t)$, мы можем получить произвольную аналитическую функцию $F(x, t)$ с точностью до 2π-периодического слагаемого $\varphi(t)$ с нулевым средним. Однако добавок $\varphi(t)$ не влияет на отображение (4.5).

По-видимому, справедливо более сильное утверждение: для некоторой функции $f\colon T^2\to R$ существуют всюду плотные в R множества M_ω, M_∞, ..., M_k, ..., M_0, $M_\varnothing$ такие, что при $\varepsilon\in M_\omega$ уравнения (4.3) имеют аналитический интеграл, при $\varepsilon\in M_\infty$ существует гладкий интеграл, но нет аналитического первого интеграла, ..., при $\varepsilon\in M_k$ существует интеграл класса C^k, но нет интегралов класса C^{k+1}, ..., при $\varepsilon\in M_0$ уравнения (4.3) имеют только непрерывную инвариантную функцию, при $\varepsilon\in M_\varnothing$ нет даже непрерывных интегралов. Мы доказали, что M_ω и $M_\varnothing$ всюду плотны в R.

Отметим в заключение, что уравнения (4.3) впервые изучались А. Пуанкаре в работе [46].

ГЛАВА VI
НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

§ 1. Метод К. Зигеля

Рассмотрим каноническую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k=\frac{\partial H}{\partial y_k},\quad \dot{y}_k=-\frac{\partial H}{\partial x_k}\quad(1\leqslant k\leqslant n) \tag{1.1}$$

и предположим, что H — аналитическая функция в окрестности точки $x = y = 0$, причем $H(0) = 0$ и $dH(0) = 0$. Пусть $H=\sum\limits_{s\geqslant 2}H_s$, где H_s — однородный полином от x и y степени s.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ — собственные значения линеаризованной канонической системы с гамильтонианом H_2. Можно считать, что $\lambda_{n+k} =$

$=-\lambda_k (1 \leqslant k \leqslant n)$. Будем рассматривать случай, когда числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ чисто мнимы и независимы над полем рациональных чисел.

В этом параграфе мы исследуем полную интегрируемость уравнений (1.1) в окрестности положения равновесия $x = y = 0$ и сходимость нормализующего преобразования Биркгофа.

1. Рассмотрим множество $\mathfrak{H}$ всех степенных рядов

$$H=\sum h_{ks}x^k y^s, \quad k=(k_1, \ldots, k_n), \quad s=(s_1, \ldots, s_n).$$

сходящихся в некоторой окрестности точки $x = y = 0$. Введем в $\mathfrak{H}$ следующую топологию $\mathcal{T}$: окрестностью степенного ряда H^* с коэффициентами h^*_{ks} мы будем называть множество степенных рядов с коэффициентами h_{ks}, удовлетворяющими неравенствам $|h_{ks} - h^*_{ks}| < \varepsilon_{ks}$, где ε_{ks} — произвольная последовательность положительных чисел.

Теорема 1 (К. Зигель). *В любой окрестности любой точки $H^* \in \mathfrak{H}$ найдется гамильтониан H, такой, что соответствующая каноническая система* (1.1) *не имеет независимого от функции H интеграла, аналитического в окрестности равновесия $x = y = 0$* [19].

Таким образом, неинтегрируемые системы всюду плотны в $\mathfrak{H}$. В частности, всюду плотны гамильтоновы системы, для которых расходится преобразование Биркгофа. Относительно расходимости преобразования Биркгофа справедлива более сильная

Теорема 2 (К. Зигель). *Функции Гамильтона H со сходящимся преобразованием Биркгофа образуют в $\mathfrak{H}$ подмножество первой категории Бэра в топологии $\mathcal{T}$* [20].

Более точно, К. Зигель доказал существование бесконечного счетного множества аналитически независимых степенных рядов $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ от бесконечного числа переменных h_{ks}, абсолютно сходящихся при $|h_{ks}| < \varepsilon$ (для всех k, s), таких, что если точка $H \in \mathfrak{H}$ сходящимся преобразованием Биркгофа приводится к нормальной форме, то в этой точке почти все Φ_s (кроме, быть может, конечного числа) обращаются в нуль. Так как функции Φ_s аналитичны, их решения нигде не плотны в $\mathfrak{H}$. Следовательно, множество точек из $\mathfrak{H}$, удовлетворяющих хотя бы одному уравнению $\Phi_s = 0$, имеет первую категорию в смысле Бэра. Если мы попытаемся исследовать сходимость преобразования Биркгофа в какой-нибудь конкретной гамильтоновой системе, то придется проверить выполнение бесконечного числа условий. Для этого не известно никакого конечного метода, хотя все коэффициенты рядов Φ_s можно явно вычислить.

2. С помощью метода К. Зигеля можно доказать всюду плотность неинтегрируемых систем в некоторых подпространствах $\mathfrak{H}$. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad x \in R^n, \tag{1.2}$$

которое описывает движение материальной точки в силовом поле с потенциалом $U(x)$. Это уравнение, разумеется, можно записать в гамильтоновой форме:

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}; \quad H=p^2/2+U(x). \tag{1.3}$$

Пусть $U(0) = 0$, $dU(0) = 0$. Тогда точка $x = 0$ будет положением равновесия. Положим $U = \sum\limits_{s\geqslant 2} U_s$, и пусть $U_2 = \sum \omega_k^2 x_k^2/2$. Будем считать частоты малых колебаний $\omega_1, \ldots, \omega_n$ рационально независимыми.

Введем пространство $\mathfrak{U}$ степенных рядов

$$\sum_{|k|\geqslant 2} u_k x^k,$$

сходящихся в некоторой окрестности точки $x = 0$. Снабдим $\mathfrak{U}$ топологией $\mathcal{T}$ из п. 1. В следующем пункте будет доказана (по модулю одной леммы Зигеля)

Теорема 3. *В пространстве $\mathfrak{U}$ с топологией $\mathcal{T}$ всюду плотны точки, для которых уравнения* (1.2) *не имеют интеграла $F(\dot{x}, x)$, аналитического в окрестности точки $\dot{x} = x = 0$ и независимого от интеграла энергии $E = \dot{x}^2/2 + U(x)$.*

По-видимому, точки $U \in \mathfrak{U}$, для которых преобразование Биркгофа к нормальной форме сходится, образуют в $\mathfrak{U}$ подмножество первой категории.

3. Ограничимся для простоты случаем двух степеней свободы ($n = 2$). Пусть $\omega_1 = 1$, а $\omega_2 = \omega$ иррационально.

Рассмотрим канонические уравнения с функциями Гамильтона следующего вида:

$$(1.4)\qquad H = i\,(x_1y_1 + \omega x_2y_2) + \sum_{p+q\geqslant 3} h_{p_1p_2q_1q_2} x_1^{p_1}x_2^{p_2}y_1^{q_1}y_2^{q_2}.$$

Коэффициенты h_{pq} могут быть комплексными числами.

Пусть $\varepsilon_{pq} < 1$ — произвольная последовательность положительных чисел, а ω — иррациональное число, которое достаточно хорошо приближается рациональными числами: неравенство

$$(1.5)\qquad 0 < |r - \omega s| < \frac{\varepsilon_{pq}}{s^{s^2}},\quad p = (r,\ 0)\quad q = (0,\ s)$$

должно иметь бесконечно много решений в натуральных числах r, s. Мера множества таких чисел ω равна нулю, однако они всюду плотны в R.

Так как ω иррационально, то по теореме Биркгофа (гл. II) канонические уравнения с функцией Гамильтона (1.4) имеют формальный интеграл

$$F(x,\ y) = x_1y_1 + \sum_{p+q\geqslant 3} f_{p_1p_2q_1q_2} x_1^{p_1}x_2^{p_2}y_1^{q_1}y_2^{q_2}.$$

Лемма 1. *В ε_{pq}-окрестности каждой функции* (1.4) *существует точка H такая, что при целых r, s из неравенства* (1.5) *коэффициенты f_{r00s} допускают оценку*

$$|f_{r00s}| \geqslant s^{s^2}.$$

Следствие. *Всюду плотны точки H, для которых преобразование Биркгофа расходится.*

Доказательство леммы. Пусть $F = x_1y_1 + \sum F_l$, где F_l — однородный полином степени $l \geqslant 3$. Ряд F формально удовлетворяет уравнению

$$\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{\partial F}{\partial y_k}\frac{\partial H}{\partial x_k}\right) \equiv 0.$$

Приравнивая нулю члены l-го порядка, мы придем к уравнению для F_l:

$$x_1\frac{\partial F_l}{\partial x_1} - y_1\frac{\partial F_l}{\partial y_1} + \omega\left(x_2\frac{\partial F_l}{\partial x_2} - y_2\frac{\partial F_l}{\partial y_2}\right) + i\sum_{p+q=l}(p_1 - q_2)\,h_{pq}x^py^q = \ldots,$$

где правая часть будет некоторым многочленом степени l, коэффициенты которого выражаются только через коэффициенты многочленов $F_3, \ldots, F_{l-1}$ и через h_{pq} при $p + q < l$. Для слагаемых $f_{r00s}x_1^ry_2^s$ функции F_l получим уравнение

$$(1.6)\qquad f_{r00s}(r - \omega s) + irh_{r00s} = g_{r00s}.$$

В конечном счете g_{r00s} выражается через коэффициенты h_{pq} при $p + q < l$. Пусть теперь r и s будут натуральными числами, которые удовлетворяют неравенству (1.5). Коэффициенты h_{r00s} можно изменить не более чем на ε_{r00s} так, чтобы выполнялось неравенство $|irh_{r00s} - g_{r00s}| \geqslant \varepsilon_{r00s}$. Тогда в силу соотношений (1.5) и (1.6) будем иметь нужную нам оценку:

$$|f_{r00s}| \geqslant s^{s^2}.$$

Важно отметить, что при построении «возмущенной» функции Гамильтона H мы «варьировали» только коэффициенты вида h_{r00s}.

Обозначим через $|F_l|_*$ максимум абсолютных значений коэффициентов формы F_l.

Лемма 2 (К. Зигель). *Пусть каноническая система*

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \qquad (k=1,\ 2)$$

обладает сходящимся интегралом, не зависящим от H. Тогда последовательность

$$\frac{\ln |F_k|_*}{k \ln k} \qquad (k=3,\ 4,\ \ldots)$$

ограничена [19].

В нашем случае $\ln |F_k|_* \geqslant s^2 \ln s$, если $k = r + s$. Из неравенства (1.5) при $\varepsilon < 1$ будем иметь оценку для r: $r \leqslant \omega s + 1$. Следовательно, последовательность

$$\frac{\ln |F_{r+s}|_*}{(r+s)\ln(r+s)} \geqslant \frac{s^2 \ln s}{[(\omega+1)s+1]\ln[(\omega+1)s+1]}$$

неограничена при $s \to \infty$.

Вернемся к анализу канонических уравнений (1.3). В этом случае

$$H = H_2 + H_3 + \ldots, \quad H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + x_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega^2 x_2^2).$$

Сделаем линейную каноническую замену переменных с комплексными коэффициентами:

$$p_1 = \frac{\xi_1 + i\eta_1}{\sqrt{2}}, \quad x_1 = \frac{i\xi_1 + \eta_1}{\sqrt{2}} \quad p_2 = \sqrt{\omega}\,\frac{\xi_2 + i\eta_2}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\,\frac{i\xi_2 + \eta_2}{\sqrt{2}}.$$

В новых переменных $H = H_2 + H_*$, где

$$H_2 = i(\xi_1\eta_1 + \omega\xi_2\eta_2), \quad H_* = \sum u_{k_1k_2} \frac{1}{(\sqrt{\omega})^{k_2}} \left(\frac{i\xi_1 + \eta_1}{\sqrt{2}}\right)^{k_1} \left(\frac{i\xi_2 + \eta_2}{\sqrt{2}}\right)^{k_2}.$$

Коэффициенты h_{pq} при слагаемых $\xi^p\eta^q$ линейно выражаются через u_k, причем

$$h_{r00s} = \frac{i^r u_{rs}}{(\sqrt{\omega})^s (\sqrt{2})^{r+s}}.$$

Варьируя коэффициенты u_{rs} в разложении потенциальной энергии $U(x)$, мы будем, следовательно, варьировать нужные нам коэффициенты h_{r00s}.

§ 2. Неинтегрируемость систем, зависящих от параметра

1. Пусть $x = y = 0$ — равновесие аналитической гамильтоновой системы с функцией Гамильтона

$$H(x,\ y,\ \varepsilon) = H_2 + H_3 + \ldots, \quad (x,\ y) \in R^{2n}, \quad \varepsilon \in D \subset R^d.$$

Предположим, что при всех $\varepsilon \in D$ частоты линейных колебаний $\omega(\varepsilon) = (\omega_1(\varepsilon), \ldots, \omega_n(\varepsilon))$ не удовлетворяют ни одному из соотношений

$$\langle m,\ \omega\rangle = m_1\omega_1 + \ldots + m_n\omega_n = 0$$

порядка $|m_1| + \ldots + |m_n| \leqslant m-1$. Тогда можно найти линейное преобразование $x, y \to p, q$, аналитическое по ε, такое, что в новых координатах

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \omega_i \rho_i, \quad H_k(\rho_1, \ldots, \rho_n, \varepsilon), \quad k \leqslant m-1,$$

где $\rho_i = p_i^2 + q_i^2$.

Теперь перейдем к каноническим переменным «действие-угол» I, φ по формулам

$$I_i = \rho_i/2, \quad \varphi_i = \operatorname{arctg} p_i/q_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

В переменных I, φ гамильтониан

$$H = H_2(I, \varepsilon) + \ldots + H_{m-1}(I, \varepsilon) + H_m(I, \varphi, \varepsilon) + \ldots$$

Представим тригонометрический полином H_m в виде конечного ряда Фурье:

$$H_m = \sum h_k^{(m)}(I, \varepsilon)\, e^{i\langle k, \varphi\rangle}.$$

Теорема 1. *Предположим, что* $\langle k, \omega(\varepsilon)\rangle \not\equiv 0$ *при всех* $k \in \mathbb{Z}^n$, $k \neq 0$. *Пусть при некотором* $\varepsilon_0 \in D$ *выполнено резонансное соотношение* $\langle k_0, \omega(\varepsilon_0)\rangle = 0$, $|k_0| = m$ *и* $h_{k_0}^{(m)}(I, \varepsilon) \not\equiv 0$. *Тогда канонические уравнения с гамильтонианом* $H = \sum H_s$ *не имеют полного набора (формальных) интегралов* $F_j = \sum_{s \geqslant 2} F_s^{(j)}$, *квадратичные части которых* $F_2^{(j)}(x, y, \varepsilon)$ *независимы при всех* $\varepsilon \in D$ [27].

Заметим, что при выполнении условий теоремы могут существовать независимые интегралы с зависимыми (при некоторых значениях ε) квадратичными частями их разложений Маклорена. Вот простой пример: канонические уравнения с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{\varepsilon}{2}(x_2^2 + y_2^2) + 2x_1y_1y_2 + x_2y_1^2 + x_1^2x_2$$

имеют интеграл $F = x_1^2 + y_1^2 + 2(x_2^2 + y_2^2)$, который при $\varepsilon = 2$ зависим с квадратичной формой H_2, однако все условия теоремы выполнены.

Теорема 1 доказывается методом Пуанкаре. Сперва докажем простое вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть функция* $\Phi(I, \varphi, \varepsilon)$ *аналитична по всем переменным* I, φ, ε *и* 2π*-периодична по* φ. *Если* $\{H_2, \Phi\} \equiv 0$, *то* Φ *не зависит от* φ.

Действительно, пусть

$$\Phi = \sum \Phi_k(I, \varepsilon)\, e^{i\langle k, \varphi\rangle}.$$

Поскольку

$$\{H_2, \Phi\} = \sum i\langle k, \omega(\varepsilon)\rangle \Phi_k(I, \varepsilon)\, e^{i\langle k, \varphi\rangle} \equiv 0$$

и $\langle k, \omega(\varepsilon)\rangle \not\equiv 0$ при $k \neq 0$, то $\Phi_k(I, \varepsilon) \neq 0$ только при $k = 0$.

Пусть $F(x, y, \varepsilon) = \sum F_s(I, \varphi, \varepsilon)$ — формальный аналитический интеграл канонических уравнений с гамильтонианом H. Из условия $\{H, F\} \equiv 0$ получим серию уравнений

$$\{H_2, F_2\} = 0, \quad \{H_2, F_3\} + \{H_3, F_2\} = 0, \ldots$$
$$\ldots, \{H_2, F_m\} + \ldots + \{H_m, F_2\} = 0, \ldots$$

Покажем, что функции $F_2, \ldots, F_{m-1}$ не зависят от φ. Для функции F_2 это уже доказано в лемме. Так как H_3 не зависит от φ, то $\{H_3, F_2\} = 0$, и поэтому $\{H_2, F_2\} = 0$. Согласно лемме F_3 тоже не зависит от φ и так далее.

С учетом этого замечания уравнение для F_m можно записать в следующем виде:

$$\{H_2, F_m\} + \{H_m, F_2\} = 0.$$

Если

$$F_m = \sum f_k^{(m)}(I, \varepsilon)\, e^{i\langle k, \varphi\rangle},$$

то

$$\langle \omega(\varepsilon), k\rangle f_k^{(m)} = \left\langle \frac{\partial F_2}{\partial I}, k\right\rangle h_k^{(m)} \quad \forall k \in Z^n.$$

Положим $k = k_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$. Тогда $\langle \omega, k\rangle = 0$, а $h_k^{(m)} \neq 0$. Следовательно,

$$\left\langle \frac{\partial F_\bullet}{\partial I}\Big|_{\varepsilon_0}, k_0\right\rangle = 0.$$

Если наши уравнения имеют n интегралов $F_1, \ldots, F_n$, то при $\varepsilon = \varepsilon_0$ получим n линейных уравнений

$$\left\langle \frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial I}, k_0\right\rangle = \ldots = \left\langle \frac{\partial F_2^{(n)}}{\partial I}, k_0\right\rangle = 0.$$

Так как $k_0 \neq 0$, то квадратичные формы $F_2^{(1)}, \ldots, F_2^{(n)}$ зависимы при $\varepsilon = \varepsilon_0$. Что требовалось доказать.

Хотя доказательство теоремы несложно, ее применение в конкретных задачах наталкивается на довольно громоздкие вычисления, связанные с нормализацией гамильтонианов.

2. В качестве первого примера рассмотрим задачу о вращении вокруг неподвижной точки динамически симметричного твердого тела $(J_1 = J_2)$, центр тяжести которого находится в экваториальной плоскости эллипсоида инерции [27]. Среди таких случаев находится наибольшее число интегрируемых. Единицы измерения массы и длины можно выбрать так, чтобы $J_1 = J_2 = 1$ и параметр ε — произведение веса тела на расстояние от центра масс до точки закрепления — тоже был равен 1. Единственным параметром в этой задаче будет момент инерции J_3.

На всех интегральных многообразиях $I_{23} = \{\langle J\omega, e\rangle = f_2,\ \langle e, e\rangle = 1\}$ приведенная гамильтонова система имеет два положения равновесия; они соответствуют равномерным вращениям тела вокруг вертикальной оси, при которых центр тяжести постоянно находится над (под) точкой подвеса.

Угловая скорость ω такого вращения связана с постоянной площадей f_2 простым соотношением $f_2 = \pm J_3 |\omega|$. Рассмотрим для определенности случай, когда центр масс находится под точкой подвеса.

В окрестности этого равновесия функция Гамильтона H приведенной системы с двумя степенями свободы имеет вид $H_2 + H_4 + \ldots$ (члены третьей степени отсутствуют). Коэффициенты зависят от двух параметров $x = f_2^2$, $y = J_3^{-1}$. Можно показать, что характеристические корни векового уравнения чисто мнимы, если $y > x/(x+1)$. Обозначим через Σ подобласть $R^2\{x, y\}$, где выполнено это неравенство. Отношение частот равно трем, когда параметры x и y связаны соотношением

$$\mathrm{I}: \qquad 9x^2 - 82xy + 9y^2 + 118x - 82y + 9 = 0.$$

Это — уравнение гиперболы; ее ветви при $x > 0$, $y > 0$ целиком лежат в Σ.

Из неравенства треугольника для моментов инерции $(J_1 + J_2 \geqslant J_3)$ следует, что $y \geqslant 1/2$. Для любого фиксированного $y_0 \geqslant 1/2$ существует x_0 такое, что точка (x_0, y_0) удовлетворяет уравнению I. Условие равенства нулю коэффициента $h_{1,-3}^{(4)}$ в разложении функции H_4 можно привести к следующему виду:

$$\text{II:}\quad 9x^4 - 10x^3y + x^2y^2 - 17x^3 + 58x^2y - 7xy^2 - \\ - 375x^2 - 86xy - 170y^2 + 541x + 1700y - 1530 = 0.$$

Алгебраические кривые I и II пересекаются в двух точках (4/3, 1) и (7,2), которым отвечают интегрируемые случаи Лагранжа ($J_1 = J_3$) и Ковалевской ($J_1 = 2J_3$).

3. Рассмотрим еще плоскую круговую ограниченную задачу трех тел. Уравнения движения астероида во вращающейся вместе с Солнцем и Юпитером системе координат можно представить в гамильтоновой форме:

$$\dot{x}_s = \frac{\partial H}{\partial y_s}, \quad \dot{y}_s = -\frac{\partial H}{\partial x_s} \qquad (s = 1,\ 2),$$

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + x_2y_1 - x_1y_2 - F(x_1,\ x_2,\ \mu),$$

$$F = \frac{1-\mu}{\sqrt{(x_1+\mu)^2 + x_2^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x_1+\mu-1)^2 + x_2^2}}.$$

Эта гамильтонова система имеет положения равновесия в точках $x_1 = 1/2 - \mu$, $x_2 = \pm\sqrt{3}/2$, $y_1 = y_2 = 0$, которые называются лагранжевыми решениями или треугольными точками либрации (см. гл. I). Если $0 < 27\,\mu(1-\mu) < 1$, то собственные числа линеаризованной системы чисто мнимы и различны; их отношение — непостоянная функция параметра μ. В случаях, когда имеют место соизмеримости третьего и четвертого порядка, коэффициенты $h_{1,2}^{(3)}$ и $h_{1,3}^{(4)}$ вычислены А. П. Маркеевым при исследовании устойчивости треугольных точек либрации [37]. Эти числа отличны от нуля. По-видимому, то же самое верно для всех (или почти всех) резонансных соотношений. Из теоремы п. 1 вытекает, в частности, что в окрестности точек либрации не существует даже формального нормализующего преобразования Биркгофа, аналитического по параметру μ. «....все еще неизвестно, можно ли привести к нормальной форме сходящимся преобразованием дифференциальные уравнения ограниченной задачи трех тел с фиксированным отношением масс в окрестности лагранжевых решений или нет» (К. Зигель [20]).

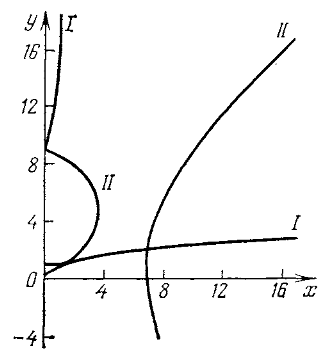

Рис. 11.

ГЛАВА VII
ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ И ОТСУТСТВИЕ ОДНОЗНАЧНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть M_C^{2n} — комплексное симплектическое аналитическое многообразие (все M покрыто некоторым набором комплексных карт из $C^{2n}\{p, q\}$, причем переход от карты к карте является обратимым голоморфным каноническим преобразованием). Любая аналитическая (в смысле функций комплексного переменного) функция $H(p, q, t)$: $M^{2n} \times C \to C$ задает некоторую комплексно-гамильтонову систему

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Естественно рассмотреть задачу о существовании у этой системы дополнительных голоморфных (или, более общо, мероморфных) первых интегралов. В большинстве проинтегрированных задач гамильтоновой механики известные первые интегралы продолжаются в комплексную область изменения канонических переменных до некоторых голоморфных или мероморфных функций. В этой главе будет показано, что ветвление решений гамильтоновых систем в плоскости комплексного времени в общем случае препятствует появлению новых однозначных первых интегралов.

§ 1. Ветвление решений — препятствие к интегрируемости

1. Пусть $D_{C,\delta} = \{I \in C^n\colon \operatorname{Re} I \in D \subset R^n, |\operatorname{Im} I| < \delta\}$, $T^n_C = C^n/2\pi Z^n$ — комплексный тор (над R это $T^n \times R^n$) с комплексно-угловыми координатами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \bmod 2\pi$, E — некоторая окрестность нуля в C. Пусть $H(I, \varphi, \varepsilon)$: $D_{C,\delta} \times T^n_C \times E \to C$ — голоморфная функция, которая при действительных значениях I, φ, ε принимает действительные значения, причем $H(I, \varphi, 0) = H_0(I)$.

Прямое произведение $D_{C,\delta} \times T^n_C$ снабжено простейшей симплектической структурой, в которой уравнения Гамильтона с гамильтонианом H имеют канонический вид:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I}; \quad H = H_0 + \varepsilon H_1 + \ldots \tag{1.1}$$

Все решения системы с функцией Гамильтона H_0 однозначны на комплексной плоскости времени $t \in C$:

$$I = I^0, \quad \varphi = \varphi^0 + \omega(I^0)t.$$

При $\varepsilon \neq 0$ решения «возмущенных» уравнений (1.1), вообще говоря, уже неоднозначны. Пусть γ — некоторый замкнутый контур на комплексной плоскости времени. Согласно известной теореме Пуанкаре, решения уравнений (1.1) можно разложить в степенные ряды

$$\begin{cases} I = I^0 + \varepsilon I^1(t) + \ldots, & \varphi = \varphi^0 + \omega t + \varepsilon \varphi^1(t) + \ldots, \\ I^1(0) = \ldots = \varphi^1(0) = \ldots = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

сходящиеся при достаточно малых значениях параметра ε, если $t \in \gamma$ ([48], гл. II; [13]).

Будем говорить, что аналитическая вектор-функция $f(t)$, $t \in C$, неоднозначна вдоль контура γ, если она испытывает скачок $\Delta f = \xi \neq 0$ при обходе γ. Если, например, функция $I^1(t, I^0, \varphi^0)$ неоднозначна вдоль γ, то при малых значениях параметра ε возмущенное решение (1.2) тоже неоднозначно вдоль контура γ. Скачок ΔI^1 равен, очевидно,

$$\xi = \int_\gamma \Phi(t)\,dt, \quad \Phi(t) = -\left.\frac{\partial H_1}{\partial \varphi}\right|_{I^0,\ \varphi^0 + \omega(I^0)t}.$$

Если при фиксированных значениях I функция $H_1(I, \varphi)$ голоморфна в T^n_C, то, конечно, $\xi = 0$. Однако в практически важных случаях эта функция имеет особенности (скажем, полюсы). Поэтому мы будем считать функцию $H(I, \varphi, \varepsilon)$ голоморфной лишь в области $D_{C,\delta} \times \Omega \times E$, где Ω — связная область в T^n_C, содержащая действительный тор T^n_R и замкнутый контур Γ, который является образом контура γ при отображении $\varphi = \varphi^0 + \omega(I^0)t$, $t \in \gamma$.

Зафиксируем начальные данные I^0, φ^0 и будем непрерывно деформировать контур γ так, что при этом контур Γ не пересечет ни одной особой точки функции H. Тогда, согласно теореме Коши, функция $I^1(t)$ при обходе деформированного контура будет изменяться снова на ту же величину $\xi \neq 0$. С другой стороны, так как решения (1.2) непрерывны по начальным данным, то неоднозначность функции $I^1(t, I^0, \varphi^0)$ вдоль контура γ будет иметь место и для всех близких значений I^0, φ^0.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det \|\partial^2 H_0/\partial I^2\| \not\equiv 0$ *в* $D_{C,\delta}$,

2) *для некоторых начальных данных* I^0, φ^0 *функция* I^1 *неоднозначна вдоль замкнутого контура* $\gamma \subset C\{t\}$.

Тогда уравнения (1.1) *не имеют полного набора независимых формальных* [1]) *интегралов*

$$F_s = \sum_{i=0}^{\infty} F_i^s(I, \varphi)\,\varepsilon^i \quad (1 \leqslant s \leqslant n),$$

коэффициенты которых — однозначные голоморфные функции в прямом произведении $V \times \Omega \subset D_{C,\delta} \times T_C^n$, *где* V *— окрестность точки* I^0 *в* $D_{C,\delta}$ ([29], [32]).

2. Укажем основные моменты доказательства теоремы. Как всегда, покажем сначала, что функции $F_0^s(I, \varphi)$ не зависят от φ. Пусть $(I, \varphi) \in D \times T_R^n$ и $F_0^s = \Phi_0^s + i\Psi_0^s$. Тогда Φ_0^s, Ψ_0^s — первые интегралы невырожденной невозмущенной системы. Согласно лемме Пуанкаре (§ 1, гл. IV), они не зависят от $\varphi \in T_R^n$. Когда $\varphi \in \Omega$, постоянство функций F_0^s вытекает из связности области Ω и единственности аналитического продолжения.

Затем докажем, что функции $F_0^1(I), \ldots, F_0^n(I)$ зависимы в области $V \subset D_{C,\delta}$. Действительно, так как $F_s(I, \varphi, \varepsilon)$ — интеграл канонической системы (1.1), то эта функция постоянна на решениях (1.2). Следовательно, ее значения в момент времени $\tau \in \gamma$ и после обхода контура γ совпадают:

$$F_0^s(I^0 + \varepsilon I^1(\tau) + \ldots) + \varepsilon F_1^s(I^0 + \varepsilon I^1(\tau) + \ldots, \varphi^0 + \omega\tau + \varepsilon\varphi^1(\tau) + \ldots) + \ldots \equiv$$
$$\equiv F_0^s(I^0 + \varepsilon(I^1(\tau) + \xi(I^0)) + \ldots) + \varepsilon F_1^s(I^0 + \ldots, \varphi^0 + \omega\tau + \ldots) + \ldots$$

Разлагая это тождество в степенные ряды по ε и приравнивая коэффициенты при первой степени ε, получим

$$\left\langle \frac{\partial F_0^s}{\partial I}, \xi \right\rangle = 0, \quad 1 \leqslant s \leqslant n.$$

Так как скачок ξ отличен от нуля в окрестности точки I^0, то якобиан

$$\frac{\partial(F_0^1, \ldots, F_0^n)}{\partial(I_1, \ldots, I_n)} \equiv 0$$

в целой области V, содержащей точку I^0.

С другой стороны, применяя метод Пуанкаре из гл. IV, можно доказать существование таких независимых интегралов

$$\Phi_s(I, \varphi, \varepsilon) = \sum_{i \geqslant 0} \Phi_i^s(I, \varphi)\,\varepsilon^i$$

с коэффициентами, голоморфными в области $W \times \Omega$ (W — малая подобласть V), что функции $\Phi_0^s (1 \leqslant s \leqslant n)$ независимы.

3. Вновь рассмотрим задачу о быстром вращении тяжелого несимметричного твердого тела вокруг неподвижной точки. Функция Гамильтона H в этой задаче есть $H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi)$, $I \in \Delta \subset R^2\{I\}$, $\varphi \in T^2$ (см. гл. IV, § 3). Возмущающую функцию H_1 можно представить в виде суммы

$$h_1(I, \varphi_1)\,e^{i\varphi_2} + h_2(I, \varphi_1)\,e^{-i\varphi_2} + h_3(I, \varphi_1),$$

[1]) Мы снова считаем, что формальный ряд $F = \sum F_i\varepsilon^i$ — интеграл канонических уравнений (1.1), если формально $\{H, F\} \equiv 0$. Легко понять, что в этом случае композиция степенных рядов (1.2) и $\sum F_i\varepsilon^i$ будет степенным рядом с постоянными коэффициентами.

причем при фиксированных значениях $I \in \Delta$ функции $h_s(I, z)$ $(1 \leqslant s \leqslant 3)$ — эллиптические (двоякопериодические мероморфные функции от $z \in C$). Следовательно, гамильтониан H продолжается до однозначной мероморфной функции в T^2_C.

Пусть $\varphi^0 = 0$, а $I^0 \in \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}$ — вековое множество возмущенной задачи). Рассмотрим на комплексной плоскости $t \in C$ замкнутый контур γ — границу прямоугольника $ABCD$ (см. рис. 12). Здесь T и iT' — соответственно действительный и чисто мнимый периоды эллиптических функций $f_s(I^0, \omega_1 z)$, $\omega_1 = \partial H_0/\partial I_1$. Число τ выбрано так, чтобы эти мероморфные функции не имели полюсов на γ. Можно показать, что функция $I^1_2(t, I^0, 0)$ неоднозначна вдоль контура γ [29]. Следовательно, решения возмущенной задачи ветвятся в плоскости комплексного времени и это обстоятельство препятствует появлению нового однозначного интеграла.

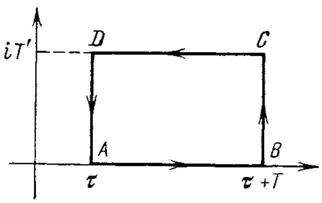

Рис. 12.

4. Используя ветвление решений, можно установить отсутствие однозначных аналитических интегралов при малых, но фиксированных значениях параметра $\varepsilon \neq 0$. Приведем один из результатов в этом направлении, принадлежащий С. Л. Зиглину [23].

Пусть $M^3 = C^2 \times T^1_C\{t \bmod 2\pi\}$, $H(z, t, \varepsilon)$: $M^3 \times E \to C$ — некоторая голоморфная функция, принимающая действительные значения при действительных z, t и ε, такая, что $H(z, t, 0) = H_0(z)$. Рассмотрим гамильтонову систему

$$(1.3) \qquad \dot z = \mathfrak{J} H', \quad H = H_0(z) + \varepsilon H_1(z, t) + \ldots$$

Пусть $z = z_0 \in C^2$, $\operatorname{Im} z_0 = 0$ — неподвижная гиперболическая точка невозмущенной системы

$$\dot z = \mathfrak{J} H_0', \quad dH_0(z_0) = 0.$$

Собственные значения $\pm\lambda$ линеаризованной системы имеют ненулевые вещественные части ($\operatorname{Re}\lambda > 0$). Решение $z(t) = z_0$ можно считать периодическим с периодом 2π. Согласно Пуанкаре, при достаточно малых $|\varepsilon|$ система (1.3) имеет 2π-периодическое решение $z = p(t, \varepsilon)$, $p(t, 0) = z_0$. Продолжая решения системы (1.3), асимптотические к траектории $p(t, \varepsilon)$ при $t \to -\infty$, максимально аналитически по $t \in C$ (возможно неоднозначно), получим двумерную комплексную поверхность Λ^-_ε, которую назовем неустойчивой комплексной асимптотической поверхностью гиперболического периодического решения $p(t, \varepsilon)$.

Мы видели в гл. VI, что устойчивая и неустойчивая асимптотические поверхности Λ^+_ε и Λ^-_ε могут трансверсально пересекаться в действительной области и это приводит к отсутствию аналитического интеграла в $R^2 \times T^1_R$ (следовательно, и во всем $C^2 \times T^1_C$). В данном случае комплексная асимптотическая поверхность Λ^-_ε (Λ^+_ε) в отличие от вещественной может иметь трансверсальные самопересечения, которые тоже препятствуют существованию у системы (1.3) голоморфного интеграла.

Приведем достаточное условие самопересечения. Пусть асимптотическое решение $z = z_a(t)$ невозмущенной системы ($\lim\limits_{t\to-\infty} z_a(t) = z_0$) однозначно и аналитически продолжается вдоль замкнутого непрерывного пути γ: $[0, 1] \to C$, $\gamma(0) = \gamma(1) \in R \subset C$. Тогда при достаточно малых $|\varepsilon|$ решение $z(t, t_0, \varepsilon)$ возмущенной системы (1.3) с начальным условием $z(\gamma(0) + t_0, t_0, \varepsilon) = z_a(\gamma(0))$ тоже аналитически (но, вообще говоря, неоднозначно) продолжается вдоль «смещенного» пути $\gamma + t_0$. Пусть $h(t_0, \varepsilon) = H_0(z(\gamma(1) +$

$+ t_0,\ t_0,\ \varepsilon)) - H_0(z_a(\gamma(0))) = \varepsilon h_1(t_0) + o(\varepsilon)$ — приращение функции $H_0(z(t, t_0, \varepsilon))$ при обходе t вдоль $\gamma + t_0$.

Теорема 2. *Если функция h_1 имеет простой нуль, то при достаточно малых $|\varepsilon| \neq 0$ комплексная поверхность Λ_ε^- имеет трансверсальное самопересечение и система* (1.3) *не имеет в M^3 однозначного аналитического первого интеграла* [23].

Отметим, что величину $h_1(t_0)$ можно вычислить по формуле

$$\int\limits_\gamma \frac{\partial H_1}{\partial t}(z_a(t),\ t+t_0)\,dt.$$

§ 2. Группы монодромии гамильтоновых систем с однозначными интегралами

1. В этом параграфе мы сперва займемся исследованием линейных гамильтоновых уравнений с голоморфными коэффициентами.

Пусть $H = \langle z, A(t)z\rangle/2$ — квадратичная форма относительно $z \in C^{2n}$, $A(t)$ — заданная $2n \times 2n$ матрица, коэффициенты которой — голоморфные функции, определенные на некоторой римановой поверхности X. Если, например, элементы матрицы $A(t)$ — мероморфные на C функции, то X — это комплексная плоскость с некоторым количеством выколотых точек (полюсов). Линейные уравнения Гамильтона с функцией H будут иметь вид

$$\dot z = \Im H' = \Im A(t)z. \tag{2.1}$$

Локально при заданном начальном условии $z(t_0) = z_0$ всегда существует однозначно определенное голоморфное решение. Его можно продолжать вдоль любой кривой в X, однако это продолжение в общем случае уже не будет однозначной функцией на X. Ветвление решений линейной системы (2.1) описывается его группой монодромии G: каждому элементу σ фундаментальной группы $\pi_1(X)$ соответствует $2n \times 2n$ матрица T_σ такая, что после обхода вдоль замкнутых путей из гомотопического класса σ значение функции $z(t)$ становится равным $T_\sigma z(t)$. Если τ — другой элемент группы $\pi_1(X)$, то $T_{\tau\sigma} = T_\tau T_\sigma$. Соответствие $\sigma \to T_\sigma$ определяет тем самым гомоморфизм групп $\pi_1(X) \to G$ (подробности можно найти, например, в [13], [56]).

Нас будет интересовать задача о наличии у уравнения (2.1) голоморфных интегралов $F(z, t)$: $C^{2n} \times X \to C$. Так как любой интеграл $F(z, t)$ постоянен на решениях (2.1), то при каждом $t_0 \in X$ функция $F(z, t_0)$ инвариантна относительно действия группы монодромии G. Это свойство налагает жесткие ограничения на вид первых интегралов: если группа G достаточно «богата», то инвариантными функциями (интегралами) являются лишь константы.

Поскольку система (2.1) гамильтонова, то преобразования группы монодромии являются симплектическими. Задача об интегралах групп симплектических преобразований изучена С. Л. Зиглиным в работе [24]. Мы кратко изложим его результаты.

2. Согласно теореме Пуанкаре — Ляпунова, собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ симплектического преобразования g: $C^{2n} \to C^{2n}$ разбиваются на пары $\lambda_1 = \lambda_{n+1}^{-1}, \ldots, \lambda_n = \lambda_{2n}^{-1}$. Назовем преобразование $g \in G$ нерезонансным, если из равенства $\lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_n^{m_n} = 1$ с целыми $m_1, \ldots, m_n$ следует, что все $m_s = 0$. При $n = 1$ это условие означает, что λ не является корнем из 1. Пусть T — матрица нерезонансного симплектического отображения g. Так как ни одно из собственных значений матрицы T не равно 1, то уравнение $Tz = z$ имеет тривиальное решение $z = 0$.

Удобно перейти к симплектическому базису отображения g: если $z = (x, y)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — координаты в этом базисе, то

g: $(x, y) \to (\lambda x, \lambda^{-1}y)$. Симплектический базис существует, если все $\lambda_s \neq 1$ $(1 \leqslant s \leqslant n)$ (это утверждение доказано, например, в работе К. Зигеля [18]).

Пусть $F(z) = \sum_{s \geqslant 1} F_s(z)$ — интеграл отображения g. Тогда все однородные формы F_s тоже будут интегралами. Пусть $F_s(x, y) = \sum_{k+l=s} f_{kl}x^k y^l$. Тогда, очевидно

$$\sum f_{kl}x^k y^l = \sum \lambda^{k-l} f_{kl} x^k y^l.$$

Если g нерезонансно, то s четно и $f_{kl} = 0$ при $k \neq l$.

Т е о р е м а 1. *Пусть $g \in G$ нерезонансно. Если гамильтонова система имеет n независимых голоморфных интегралов $F(z, t)$: $C^{2n} \times X \to C$, то любое преобразование $g' \in G$ имеет ту же неподвижную точку, что и g, и переводит собственные направления g в собственные направления. Если при этом никакие $k \geqslant 2$ собственных значений преобразования g' не образуют на комплексной плоскости правильного многоугольника с центром в нуле, то g' коммутирует с g* [24].

Последнее условие заведомо выполняется, если g' тоже нерезонансно.

Мы сейчас докажем теорему 1 для простого, но важного для приложений случая, когда $n = 1$. Пусть собственное значение отображения g не является корнем из единицы, и пусть $(x, y) = z$ — симплектический базис для g. Собственные направления g — две прямые $x = 0$ и $y = 0$. Выше было показано, что любой однородный интеграл g имеет вид $c(xy)^s$, $s \in N$. Пусть g' — другое отображение из группы G. Поскольку функция $(xy)^s$ инвариантна относительно действия g', то множество $xy = 0$ остается неподвижным при отображении g'. Так как g' — невырожденное линейное отображение, то точка $x = y = 0$ неподвижна и отображение g' либо сохраняет собственные направления отображения g, либо переставляет их. В первом случае g', очевидно, коммутирует с g, а во втором случае оно имеет вид

$$x \to \alpha y, \quad y \to \beta x.$$

Так как отображение g' симплектическое, его матрица

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{Vmatrix}$$

удовлетворяет условию

$$S^* \mathfrak{I} S = \mathfrak{I},$$

откуда $\alpha\beta = -1$. Но в этом случае собственные значения матрицы S равны $\pm i$. Точки $\pm i$ образуют как раз тот исключительный правильный многоугольник, о котором идет речь в заключении теоремы. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай, когда элементы матрицы $A(t)$ — однозначные двоякопериодические мероморфные функции времени $t \in C$, имеющие внутри параллелограмма периодов только один полюс. Можно считать, что $A(t)$ — мероморфная функция на комплексном торе X, полученном из комплексной плоскости C факторизацией по решетке периодов. Рассмотрим два симплектических отображения g и g' за периоды матрицы $A(t)$. Предположим, что их собственные значения удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда для того чтобы уравнение (2.1) имело n независимых аналитических интегралов, необходимо, чтобы g и g' коммутировали. Следовательно, обходу особой точки (элементу $gg'g^{-1}g'^{-1} \in G$) будет отвечать тождественное отображение пространства C^{2n}.

3. Применим это соображение к линейному дифференциальному уравнению

$$\ddot{z} + (\omega^2 + \varepsilon f(t))z = 0, \tag{2.2}$$

где ω, ε — действительные постоянные, $f(t)$ — эллиптическая функция с периодами 2π и $2\pi i$, имеющая в прямоугольнике периодов единственный полюс второго порядка. Можно считать, что при действительных t функция f принимает действительные значения. Примером такой функции является известная $\wp$ — функция Вейерштрасса.

Уравнение (2.2) можно интерпретировать как линеаризованное уравнение колебаний маятника с вибрирующей точкой подвеса в окрестности положения равновесия.

Найдем собственные значения отображения из группы монодромии, порожденного обходом вокруг полюса функции f. Пусть, для простоты записи, полюсом является точка $t = 0$. Ряд Лорана функции $f(t)$ в окрестности точки $t = 0$ имеет вид

$$\frac{\alpha}{t^2} + \sum_{n\geqslant 0} f_n t^n \qquad (\alpha \neq 0).$$

Будем искать линейно независимые решения уравнения (2.2) в виде рядов

$$z(t) = t^\rho \sum_{n\geqslant 0} c_n t^n, \quad \rho \in C, \quad c_0 \neq 0.$$

Так как

$$\ddot{z}(t) = t^\rho \sum_{n\geqslant 0} (\rho + n)(\rho + n - 1) c_n t^{n-2},$$

то

$$\sum_{n\geqslant 0} (\rho + n)(\rho + n - 1) c_n t^{n-2} + (\omega^2 + \varepsilon\alpha t^{-2} + \varepsilon \sum_{s\geqslant 0} f_s t^s) \sum_{n\geqslant 0} c_n t^n = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициент при t^{-2}, получим уравнение

$$(\rho(\rho - 1) + \varepsilon\alpha)c_0 = 0.$$

Так как $c_0 \neq 0$, то

$$\rho(\rho - 1) + \varepsilon\alpha = 0.$$

Это уравнение дает нам два значения ρ_1 и ρ_2, которым соответствуют два линейно независимых решения линейного уравнения (2.2). При обходе полюса эти решения умножаются соответственно на $e^{2\pi i\rho_1}$ и $e^{2\pi i\rho_2}$. Соответствующая матрица монодромии будет единичной, если ρ_1 и ρ_2 — целые числа. В частности, $\varepsilon\alpha$ должно быть целым числом.

При $\varepsilon = 0$ собственные значения матрицы монодромии уравнения (2.2) при отображении за периоды 2π и $2\pi i$ равны соответственно $\lambda_{1,2} = e^{\pm 2\pi\omega i}$ и $\mu_{1,2} = e^{\pm 2\pi\omega}$. Очевидно, что при $\omega \neq 0$ значения $|\mu_{1,2}| \neq 1$, а $\lambda_{1,2} \neq \pm i$, если $\omega \neq {}^1/_4 + k\pi$, $k \in Z$. По непрерывности, если $\omega \neq {}^1/_4 + k\pi$, то при малых значениях $\varepsilon \neq 0$ собственные значения $\mu_{1,2}$ не являются корнями из единицы, а $\lambda_{1,2} \neq \pm i$ (это свойство на самом деле имеет место для почти всех ω и ε). Следовательно, по теореме 2, уравнение (2.2) в этих случаях не интегрируемо в комплексной области. Отметим, что в действительной области это уравнение вполне интегрируемо: оно имеет аналитический интеграл $f(\dot{z}, z, t)$, 2π-периодический по t. Дело в том, что линейной канонической заменой переменных, 2π-периодической по t, уравнение (2.2) можно привести к линейной автономной гамильтоновой системе с одной степенью свободы. В качестве функции f можно тогда взять функцию Гамильтона автономной системы.

Рассмотрим теперь нелинейное уравнение колебаний математического маятника

$$\ddot{z} + (\omega^2 + \varepsilon f(t)) \sin z = 0.$$

Покажем, что оно может иметь аналитический интеграл $f(\dot{z}, z, t)$, двоякопериодический по $t \in C$, только при тех значениях параметров ω и ε, когда интегрируемо линейное уравнение (2.2). Для доказательства разложим функцию f в сходящийся степенной ряд

$$\sum_{s \geqslant m} \sum_{k+l=s} f_{kl}(t)\, z^k \dot{z}^l, \tag{2.3}$$

коэффициенты которого f_{kl} — эллиптические функции с периодами 2π и $2\pi i$. Первая форма разложения (2.3) (когда $s = m$) является, очевидно, однозначным интегралом линейного уравнения (2.2). Следовательно, согласно предположению, она должна быть постоянной. Но тогда следующая форма ($s = m + 1$) будет интегралом уравнения (2.2) и поэтому тоже постоянна, и так далее.

4. Последнее замечание можно обобщить. Пусть нелинейная гамильтонова система

$$\dot{z} = \mathfrak{J} H', \; z \in C^{2n} \tag{2.4}$$

имеет частное решение $z_0(t)$, однозначное на его римановой поверхности X. Положим $u = z - z_0(t)$. Тогда уравнение (2.4) можно переписать в следующем виде:

$$\dot{u} = \mathfrak{J} H''(z_0(t))u + \ldots$$

Линейное неавтономное уравнение

$$\dot{u} = \mathfrak{J} H''(t)u \tag{2.5}$$

будет уравнением в вариациях для решения $z_0(t)$. Оно, разумеется, будет гамильтоновым с функцией Гамильтона

$$\frac{1}{2} \langle u, \; H''(t)\, u \rangle.$$

Интегралу $H(z)$ автономной системы (2.4) соответствует линейный интеграл уравнений в вариациях:

$$\langle H'(z_0(t)), \; u \rangle.$$

С его помощью можно, например, понизить число степеней свободы системы (2.5) на единицу.

Предположим, что нелинейное уравнение (2.4) имеет несколько независимых голоморфных интегралов $F_s(z)$ $(1 \leqslant s \leqslant m)$. Тогда уравнение (2.5) также будет иметь первые интегралы. Ими будут однородные формы разложений функций F_s в ряды по степеням u:

$$\langle F_s'(z_0(t)), \; u \rangle + \ldots$$

Эти формы — голоморфные функции в прямом произведении $C^{2n} \times X$. Справедлива

Лемма. *Если уравнение* (2.4) *имеет* m *независимых интегралов, то уравнение в вариациях* (2.5) *имеет* m *независимых полиномиальных интегралов* [24].

Таким образом, задача о полной интегрируемости гамильтоновых систем в комплексной области сводится к исследованию интегрируемости линейных канонических систем.

С помощью этого метода С. Л. Зиглин доказал неинтегрируемость гамильтоновых систем Хенона — Хейлеса и Янга — Миллса (см. гл. I). Он также применил его к задаче о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Оказалось, что дополнительный голоморфный интеграл существует только в трех классических случаях Эйлера, Лагранжа, Ковалевской. Если зафиксировать нулевое значение постоянной площадей, то к этим случаям надо добавить еще случай Горячева — Чаплыгина [24].

Для систем Хенона — Хейлеса и Янга — Миллса удается доказать отсутствие интеграла даже в действительной области. Вопрос о существовании дополнительного действительного аналитического интеграла при произвольном распределении масс в твердом теле остается пока открытым.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Алексеев. Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика.— УМН, 1981, 36:4, с. 161—176.

[2] Д. В. Аносов. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны.— Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1967, 90.

[3] П. Аппель. Теоретическая механика, т. 1—2.— М.: Гостехиздат, 1960.

[4] В. И. Арнольд. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— УМН, 1961, 25:1, с. 21—86.

[5] В. И. Арнольд. Об одной теореме Лиувилля, касающейся интегрируемых проблем динамики.— СМЖ, 1963, 4:2, с. 471—474.

[6] В. И. Арнольд. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы.— ДАН, 1964, 156:1, с. 9—12.

[7] В. И. Арнольд. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1979.

[8] В. В. Белецкий. Движение искусственного спутника вокруг центра масс.— М.: Наука, 1965.

[9] Дж. Биркгоф. Динамические системы.— М.— Л.: Гостехиздат, 1941.

[10] С. В. Болотин, В. В. Козлов. Об асимптотических решениях уравнений динамики.— Вестн. МГУ, сер. матем.—мех., 1980, № 4, с. 84—89

[11] М. Борн. Лекции по атомной механике.— Харьков, 1934.

[12] Е. В. Гайдуков. Асимптотические геодезические на римановом многообразии, негомеоморфном сфере.— ДАН, 1966, 169:5, с. 999—1001.

[13] В. В. Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.— М.— Л.: Гостехиздат, 1950.

[14] В. В. Голубев. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки.— М.: Гостехиздат, 1953.

[15] П. Дирак. Обобщенная гамильтонова динамика.— В кн.: Вариационные принципы механики. М., Наука, 1959, с. 705—722.

[16] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия.— М.: Наука, 1979.

[17] В. Е. Захаров, М. Ф. Иванов, П. Н. Шур. Об аномально медленной стохастизации в некоторых двумерных моделях теории поля.— Письма в ЖЭТФ, 1979, 30:1, с. 39-44.

[18] К. Л. Зигель. Лекции по небесной механике.— М.: ИЛ, 1959.

[19] К. Л. Зигель. Об интегралах гамильтоновых систем.— Математика, 1961, 5:2, с. 103—117.

[20] К. Л. Зигель. О существовании нормальной формы аналитических дифференциальных уравнений Гамильтона.— Математика, 1961, 5:2, с. 129—156.

[21] С. Л. Зиглин. Неинтегрируемость задачи о движении четырех точечных вихрей.— ДАН, 1979, 250:6, с. 1296—1300.

[22] С. Л. Зиглин. Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела.— Труды ММО, 1980, **41**, с. 287—303.
[23] С. Л. Зиглин. Самопересечение комплексных сепаратрис и несуществование интегралов в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы.— ПММ, 1981, **45**:3, с. 564—566.
[24] С. Л. Зиглин. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике I, II.— Функц. анализ, 1982, **16**:3, с. 30—41; 1983, **17**:1.
[25] В. В. Козлов. О несуществовании аналитических интегралов канонических систем, близких к интегрируемым.— Вестн. МГУ, сер. матем.— мех., 1974, № 2, с. 77—82.
[26] В. В. Козлов. Несуществование дополнительного аналитического интеграла в задаче о движении несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.— Вестн. МГУ, сер. матем.— мех., 1975, № 1, с. 105—110.
[27] В. В. Козлов. Несуществование аналитических интегралов вблизи положений равновесия гамильтоновых систем.— Вестн. МГУ, сер. матем.— мех., 1976, № 1, с. 110—115.
[28] В. В. Козлов. Расщепление сепаратрис возмущенной задачи Эйлера—Пуансо.— Вестн. МГУ, сер. матем.— мех., 1976, № 6, с. 99—104.
[29] В. В. Козлов. Несуществование однозначных интегралов и ветвление решений в динамике твердого тела.— ПММ, 1978, **42**:3, с. 400—406.
[30] В. В. Козлов, Н. Н. Колесников. Об интегрируемости гамильтоновых систем.— Вестн. МГУ, сер. матем.— мех., 1976, № 6, с. 88—91.
[31] В. В. Козлов. Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем.— ДАН, 1979, **249**:6, с. 1299—1302.
[32] В. В. Козлов. Методы качественного анализа в динамике твердого тела.— М.: Изд-во МГУ, 1980.
[33] В. В. Козлов. Две интегрируемые задачи классической динамики.— Вестн. МГУ, сер. матем.— мех., 1981, № 4, с. 80—84.
[34] В. Н. Колокольцов. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом.— Изв. АН, сер. матем., 1982, № 5.
[35] А. Б. Крыгин. Примеры эргодических цилиндрических каскадов.— Матем. заметки, 1974, **16**:6, с. 981—991.
[36] Г. Ламб. Гидродинамика.— М.: Гостехиздат, 1947.
[37] А. П. Маркеев. Точки либрации в небесной механике и космодинамике.— М.: Наука, 1978.
[38] Дж. Милнор. Теория Морса.— М.: Мир, 1965.
[39] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем.— Функц. анализ, 1978, **12**:2, с. 46—56.
[40] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями.— Труды сем. по вект. и тенз. анализу, 1980, **20**, с. 5—54.
[41] Ю. Мозер. Лекции о гамильтоновых системах.— М.: Мир, 1973.
[42] Ю. Мозер. Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем.— УМН, 1981, **36**:5, с. 109—151.
[43] Н. Н. Нехорошев. Переменные действие-угол и их обобщения.— Труды ММО, 1972, **26**, с. 181—198.
[44] З. Нитецки. Введение в дифференциальную динамику.— М.: Мир, 1975.
[45] С. П. Новиков, И. Шмельцер. Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория Люстерника — Шнирельмана — Морса (ЛШМ) I.— Функц. анализ, 1981, **15**:3, с. 54—66.
[46] А. Пуанкаре. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.— М.— Л.: Гостехиздат, 1947.

[47] А. Пуанкаре. О проблеме трех тел и об уравнениях динамики. Избр. труды, т. II.— М.: Наука, 1972.
[48] А. Пуанкаре. Новые методы небесной механики, Избр. труды, т. I.— М.: Наука, 1971.
[49] А. Пуанкаре. О геодезических линиях на выпуклых поверхностях. Избр. труды, т. II.— М.: Наука, 1972.
[50] А. Пуанкаре. Об одной геометрической теореме. Избр. труды, т. II.— М.: Наука, 1972.
[51] П. К. Рашевский. Геометрическая теория уравнений с частными производными.— М.— Л.: Гостехиздат, 1947.
[52] Дж. Л. Синг. Классическая динамика.— М.: Физматгиз, 1963.
[53] В. А. Стеклов. О движении твердого тела в жидкости.— Харьков, 1893.
[54] А. Уинтнер. Аналитические основы небесной механики.— М.: Наука, 1967.
[55] Е. Т. Уиттекер. Аналитическая динамика.— М.— Л.: ОНТИ, 1937.
[56] О. Форстер. Римановы поверхности.— М.: Мир, 1980.
[57] Ф. Франк, Р. Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. II.— М.— Л.: ОНТИ, 1937.
[58] Н. Г. Чеботарёв. Теория групп Ли.— М.— Л.: Гостехиздат, 1940.
[59] К. Шарлье. Небесная механика.— М.: Наука, 1966.
[60] Л. П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований.— М.: ИЛ, 1947.
[61] R. Abraham. Foundations of Mechanics.— New York, 1967.
[62] H. Andoyer. Cours de mécanique céleste.— Paris: Gautheer-Villars, 1923.
[63] J. Bour. Sur l'integration des équations differentielles de la Mécanique Analytique.— J. Math. Pures Appl., 1855, **20**, p. 185—200.
[64] G. Contopoulos. On the existence of a third integral of motion.— Astr. J., 1963, **68**, p. 1—14.
[65] R. Cushman. Examples of nonintegrable analytic Hamiltonian vector fields with no small divisors.— Trans. Amer. Math. Soc., 1978, **238**, p. 45—55.
[66] C. Delaunay. Théorie du mouvement de la lune., v. 1.— Paris, 1860.
[67] L. Galgani, A. Giorgilli, J.-M. Strelcyn. Chaotic motions and transition to stochasticity in the classical problems of the heavy rigid body with a fixed point.— Preprint, 1980.
[68] F. Gustavson. On constructing formal integrals of a Hamiltonian system near an equilibrium point.— Astr. J., 1966, **71**, p. 670—686.
[69] M. Hénon, C. Heiles. The applicability of the third integral of motion; some numerical experiments.— Astr. J., 1964, **69**, p. 73—79.
[70] C. G. I. Jacobi. Sur la rotation d'un corps. Gesammelte Werke, Bd. 2.— Berlin, 1882, S. 289—352.
[71] J. Liouville. Note à l'occasion du mémoire précedent de M. Edmond Bour.— J. Math. Pures Appl., 1855, **20**, p. 201—202.
[72] J. Moser. The analytical invariants of an area-preserving mapping near a hyperbolic point.— Comm. Pure Appl. Math., 1956, **9**:4, p. 673—692.
[73] A. M. Perelomov. Lax representation for the systems of S. Kowalevskaya type.— Comm. Math. Phys., 1981, **81**, p. 239—241.
[74] H. Rüssman. Über das Verhalten analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung.— Math. Ann., 1964, **154**, p. 285—300.
[75] J. Souček, V. Souček. Morse — Sard theorem for real-analytic functions.— Comment. Math. Univ. Carolinae, 1972, **13**:1, p. 45—51.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
25 мая 1982 г.