УДК 531.01

В. В. Козлов

ДИНАМИКА СИСТЕМ С НЕИНТЕГРИРУЕМЫМИ СВЯЗЯМИ. III

Введение. В работах [1, 2] предложен вариационный подход для описания движения механических систем с неинтегрируемыми связями. Движениями названы слабые экстремали (по Гато) действия Гамильтона

$$\int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}, q, t)\,dt \tag{1}$$

в классе кривых с полузакрепленными концами. Варьированные кривые в линейном приближении удовлетворяют уравнениям связей *

$$f_i = a_i(q, t)\cdot\dot{q} + b_i(q, t) = 0, \qquad i \in I$$

(I — конечное множество индексов), левый конец закреплен ($\delta q(t_1) = 0$), а на правом конце вариация δq линейно выражается через a_i. Динамика, основанная на таком обобщении принципа Гамильтона, названа вакономной. Если связи интегрируемы, то мы будем иметь обычную лагранжеву (голономную) механику.

Вариационный принцип Гамильтона для систем с неинтегрируемыми связями анализировали Герц [3], Гёльдер [4], Суслов [5] и ряд

* При желании можно рассматривать связи, нелинейные по скоростям.

других авторов с традиционных позиций априорной универсальности принципа Даламбера — Лагранжа. Оказалось, что если связи неинтегрируемы, то применение принципов Даламбера — Лагранжа и Гамильтона дает разные результаты и поэтому «к таким случаям принцип Гамильтона неприменим» (Герц [3]). Однако в некоторых случаях возможны корректные предельные переходы от обычных голономных систем к системам с неинтегрируемыми вакономными связями [2]. Таким образом, принцип Даламбера — Лагранжа не охватывает всего многообразия движений механических систем и потому наравне с традиционной неголономной моделью следует использовать вакономную модель движения, основанную на обобщенном вариационном принципе Гамильтона.

Уравнения движения вакономных систем всегда можно представить в гамильтоновой форме. Канонические импульсы определяются уравнениями

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \sum_{s \in I} \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial \dot{q}}. \tag{2}$$

Множители $\lambda_s(p, q, t)$ однозначно находятся из уравнений связей. Функция Гамильтона вводится по обычному правилу

$$H = p \cdot \dot{q} - L(\dot{q}, q, t)|_{p,q,t}.$$

Гладкая функция $q(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, является экстремалью действия в классе кривых со свободным правым концом в том и только в том случае, когда существует такая «сопряженная» функция $p(t)$, что $q(t)$ и $p(t)$ *одновременно удовлетворяют каноническим уравнениям*

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{3}$$

и на правом конце выполняется условие трансверсальности $p(t_2) \cdot \delta q(t_2) = 0$ (см. [1]).

Если момент времени $t = t_2$ считать начальным, то по состоянию системы $q(t_2)$, $\dot{q}(t_2)$ с помощью условия трансверсальности можно однозначно определить движение $q(t)$. Если, однако, мы найдем по тому же правилу движение $q'(t)$ в интервале времени $[t'_1, t'_2] \subset [t_1, t_2]$, то в случае неинтегрируемости связей сужение $q(t)$ на интервал $[t'_1, t'_2]$ не совпадет с движением $q'(t)$ (см. [2]).

Можно расширить множество движений, рассмотрев лишь вариации с двумя закрепленными концами, как это сделано, например, в работах [3—5]. Тогда движения будут определяться только уравнениями Гамильтона (3). При такой точке зрения любая часть траектории снова является траекторией, однако начальное состояние уже не будет однозначно определять последующее движение системы.

1. Теорема о предельном переходе и принцип детерминированности. Пусть

$$L_0 = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q} \cdot \dot{q}) - U(q),$$

а уравнение связи есть $(a(q) \cdot \dot{q}) = 0$. Без ущерба общности можно считать, что

$$A^{-1}a \cdot a = 1. \tag{4}$$

Рассмотрим семейство лагранжианов

$$L_\varepsilon = L_0 + \frac{\varepsilon}{2}(a \cdot \dot{q})^2.$$

При $\varepsilon > 0$ обычным способом введем канонические импульсы голономной системы с функцией Лагранжа L_ε:

$$p = A\dot{q} + \varepsilon(a \cdot \dot{q})a.$$

С помощью соотношения (4) разрешим это уравнение относительно скорости:

$$A\dot{q} = p - (A^{-1}p \cdot a)a + \frac{1}{\varepsilon + 1}(A^{-1}p \cdot a)a.$$

При $\varepsilon \to \infty$ оно переходит в равенство

$$A\dot{q} = p - (A^{-1}p \cdot a)\ a, \tag{5}$$

с помощью которого вводятся импульсы в вакономной динамике (см. (2)). Гамильтониан голономной системы H_ε с лагранжианом L_ε равен $H_0 + O(1/\varepsilon)$, где H_0 — вакономная функция Гамильтона. Рассмотрим движение голономной системы при $\varepsilon > 0$ с начальными данными

$$q(0) = q_0, \quad p_\alpha(0) = p_0 + \alpha a, \tag{6}$$

где $p_0 = A\dot{q}_0$ и $a(q_0) \cdot \dot{q}_0 = 0$. При фиксированном значении α начальные условия $q(0)$ и $\dot{q}_\alpha(0) = A^{-1}p_\alpha(0)$ удовлетворяют уравнению связи $a \cdot \dot{q} = 0$ с точностью до $1/\varepsilon$. Согласно теореме Пуанкаре при $\varepsilon \to \infty$ и фиксированном α на каждом конечном промежутке времени существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} q(t, \varepsilon) = q^*(t) \qquad (q(0, \varepsilon) = q(0),\ \dot{q}(0, \varepsilon) = \dot{q}_\alpha(0)), \tag{7}$$

который представляет собой одно из движений вакономной системы с лагранжианом L_0 и со связью $a \cdot \dot{q} = 0$.

При $\varepsilon \to \infty$ начальное состояние $q(0)$, $\dot{q}_\alpha(0)$ будет одним и тем же, однако предел (7) для неинтегрируемых связей существенно зависит от α. Таким образом, когда ε велико, ошибки в начальных условиях порядка $1/\varepsilon$ могут порождать конечные отклонения на временах $t \sim 1$. Это — одно из качественных объяснений недетерминированного поведения вакономной системы.

Покажем, что если связь $a \cdot \dot{q} = 0$ неинтегрируема, то движения предельной вакономной системы с начальными данными (6) действительно разные при разных значениях α. Продифференцируем (5) по t:

$$A\ddot{q} + \Phi(\dot{q}, q) = \dot{p} - (A^{-1}p \cdot a)a'\dot{q} - (A^{-1}p \cdot a'\dot{q})a - ((A^{-1})'\dot{q}p \cdot a)a - (A^{-1}\dot{p} \cdot a)a.$$

Так как функция Гамильтона $H_0(p, q)$ инвариантна относительно трансляций $p \to p + \alpha a$, то

$$\dot{p}|_p = -\frac{\partial H_0(p, q)}{\partial p} = -\frac{\partial H_0(p + \alpha a, q)}{\partial q} = -\frac{\partial H_0}{\partial q}\bigg|_{p+\alpha a} -$$

$$-\alpha\left(\frac{\partial H_0}{\partial p}\frac{\partial a}{\partial q}\right) = \dot{p}|_{p+\alpha a} - \alpha(a' \cdot \dot{q}).$$

Следовательно, при фиксированных $\dot{q}$ и q ускорение $\ddot{q}$ не зависит от α только в том случае, если разность $(a' \cdot \dot{q}) - a'\dot{q}$ пропорциональна a. Если указанное свойство имеет место для всех $\dot{q}$ из распределения касательных гиперплоскостей $\Lambda_a = \{\dot{q} : a(q) \cdot \dot{q} = 0\}$, то это распределение интегрируемо. Для доказательства рассмотрим линейный кососимметрический оператор

$$B\dot{q}=a'\dot{q}-(a'\cdot\dot{q}).$$

Элементы его матрицы $\|b_{ij}\|$ просто выражаются через компоненты вектора a:

$$b_{ij}=\frac{\partial a_j}{\partial q_i}-\frac{\partial a_i}{\partial q_j}.$$

Так как $B\Lambda_a\subset\Lambda_a$, то $B\dot{q}_1\cdot\dot{q}_2=0$ для всех q_1, $q_2\in\Lambda_a$. Иными словами, внешняя 2-форма

$$\Sigma b_{ij}dq_i\wedge dq_j$$

обращается в нуль на подпространстве Λ_a. Пусть $\omega=\Sigma a_j dq_j$. Тогда

$$d\omega=\Sigma\frac{\partial a_j}{\partial q_i}dq_i\wedge dq_j=\frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{\partial a_j}{\partial q_i}-\frac{\partial a_i}{\partial q_j}\right)dq_i\wedge dq_j=0,$$

если $\omega=0$. Но это — хорошо известное условие Фробениуса полной интегрируемости распределения Λ_a.

С помощью предельного перехода можно прояснить смысл «скрытого» параметра λ:

$$\lambda=\lim_{\varepsilon\to\infty}\varepsilon(a\cdot\dot{q}).$$

В результате раскрытия неопределенности $\ll\infty\cdot 0\gg$ мы получаем неопределенность в поведении вакономной системы.

Рассмотрим в качестве примера задачу Суслова о вращении твердого тела с нулевой проекцией угловой скорости на фиксированную в теле ось [2]. Если эта связь реализуется с помощью задачи Кирхгофа о движении твердого тела в безграничной идеальной жидкости, то параметр λ имеет смысл присоединенного кинетического момента жидкости относительно неподвижной в теле оси.

Сделаем несколько замечаний.

1°. Проблема скрытых параметров — ненаблюдаемых величин, участвующих в описании динамики систем, — неоднократно обсуждалась в квантовой механике как раз в связи с анализом принципа причинности [6].

2°. Принцип причинности Ньютона — Лапласа, несправедливый в целом, может выполняться для отдельных состояний.

3°. В вакономной механике справедлив следующий «обобщенный» принцип причинности: движение системы на некотором промежутке времени полностью определяет все ее прошлое и будущее.

4°. Функция $f(p, q, t)$ называется наблюдаемой, если существует функция состояния $g(\dot{q}, q, t)$, такая, что

$$f=g|_{p,q,t}.$$

Условием наблюдаемости функции $f(p, q, t)$ является, очевидно, ее инвариантность относительно семейства трансляций $p\to p+\mu a$. Оказывается, линейное пространство наблюдаемых функций будет замкнутым относительно скобки Пуассона, порожденной стандартной симплектической структурой $dp\wedge dq$, в том и только в том случае, когда связи интегрируемы.

5°. Для описания вакономной системы достаточно знать не «полный» лагранжиан $L(\dot{q}, q, t)$, а лишь его сужение на пространство состояний, высекаемое уравнениями связей. В традиционной неголономной механике это естественное свойство отсутствует.

2. Малые колебания. Пусть $q=0$ — положение равновесия вакономной системы с функцией Лагранжа

$$L=\frac{1}{2}(A(q)\dot{q}\cdot\dot{q})+V(q)$$

и со связью $a(q)\cdot\dot{q}=0$. Изучим линейные колебания этой системы в окрестности положения равновесия.

Так как для малых колебаний функция Гамильтона

$$H(p,q)=\frac{1}{2}(A\dot{q}\cdot\dot{q})-V(q),\qquad A\dot{q}=p-\frac{A^{-1}p\cdot a}{A^{-1}a\cdot a}a,$$

должна быть квадратичной по p и q, то $a(q)$ и $A(q)$ следует заменить на $a_0=a(0)$ и $A_0=A(0)$, а $V(q)$ — на

$$V(0)+V'(0)\cdot q+\frac{1}{2}V''(0)q\cdot q.$$

Линеаризованное уравнение связи $a(0)\cdot\dot{q}=(a_0\cdot q)^{\cdot}=0$ интегрируется. Поскольку в положении равновесия $dV(0)$ пропорционально $a_0\cdot dq$ (см. [2]), то $V'(0)\cdot q=\mathrm{const}$. Следовательно, функция Гамильтона линейных колебаний равна:

$$H_0=\frac{1}{2}(A_0\dot{q}\cdot\dot{q})-\frac{1}{2}(V''(0)q\cdot q),\qquad A_0\dot{q}=p-\frac{A_0^{-1}p\cdot a_0}{A_0^{-1}a_0\cdot a_0}a_0.$$

Легко видеть, что этим гамильтонианом описываются колебания линейной голономной системы с функцией Лагранжа

$$\frac{1}{2}(A_0\dot{q}\cdot\dot{q}+V''(0)q\cdot q),$$

на которую наложена линейная интегрируемая связь $a_0\cdot q=\mathrm{const}$. Таким образом, линеаризация вакономных уравнений сводится к известному эффекту наложения новой связи на колебания голономной системы.

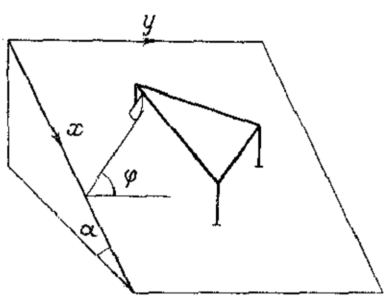

Рис. 1

В качестве примера рассмотрим равновесие «саней Чаплыгина» на наклонной плоскости (см. [7]). Предположим, что проекция центра тяжести тела на наклонную плоскость лежит на прямой, перпендикулярной лезвию и проходящей через точку контакта лезвия и плоскости. Пусть x, y — декартовы координаты точки контакта, φ — угол поворота лезвия (рис. 1). Неинтегрируемая связь задается уравнением $\dot{x}\cos\varphi+\dot{y}\sin\varphi=0$. Функция Лагранжа

$$L=\frac{m}{2}[(\dot{x}-l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2+(\dot{y}+l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2+k^2\dot{\varphi}^2]+mg\sin\alpha(x+l\cos\varphi),$$

где m — масса тела, k — радиус инерции, α — угол наклона плоскости, l — расстояние от проекции центра масс на наклонную плоскость до точки контакта, g — ускорение силы тяжести.

В состоянии равновесия угол φ равен 0 или π. Равновесие $\varphi=\pi$ заведомо неустойчиво. Рассмотрим случай $\varphi=0$. Линеаризованное уравнение связи дает $\dot{x}=0$. Таким образом, в линейном приближении $x=\mathrm{const}$. Функция Гамильтона малых колебаний равна

$$H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{(p_\varphi - lp_y)^2}{2mk^2} + \frac{mgl\,(\sin\alpha)\,\varphi^2}{2},$$

$$p_y = m(\dot y + l\dot\varphi),\ \ p_\varphi = ml(\dot y + l\dot\varphi) + mk^2\dot\varphi.$$

Импульс p_y сохраняется, а канонические координаты p_φ и φ удовлетворяют уравнениям

$$\ddot\varphi + \omega^2\varphi = 0,\quad \ddot p_\varphi + \omega^2 p_\varphi = \frac{gl^2\sin\alpha}{k^2}p_y^0;\qquad \omega^2 = \frac{gl\sin\alpha}{k^2}.$$

Следовательно, в линейном приближении сани совершают гармонические колебания с частотой ω, которая больше частоты колебаний тела с закрепленной точкой контакта. Так как

$$\dot y = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}\left(1 + \frac{l^2}{k^2}\right) - \frac{l}{mk^2}\,p_\varphi,$$

то точка контакта лезвия движется по горизонтали с постоянной средней скоростью $p_y(0)/m$ и совершает гармонические колебания с частотой ω около своего среднего движения. «Остается еще выяснить, обеспечиваются ли опытной проверкой эти простые отношения, и если обеспечиваются, то в какой степени и в каком объеме» *.

Приведем для сравнения линеаризованные неголономные уравнения колебаний саней Чаплыгина:

$$\dot x = 0,\ \ddot y + g(\sin\alpha)\varphi = 0,\quad \ddot\varphi = 0.$$

Угол φ меняется равномерно, а $y(t)$ — полином третьей степени относительно t.

Отметим в заключение, что если положение равновесия является критической точкой потенциальной энергии, то линеаризация вакономных и неголономных уравнений дает один и тот же результат (ср. с [9]).

3. **Конек на наклонной плоскости.** Коньком мы назвали в работе [1] «уравновешенные» сани Чаплыгина: $l=0$. Единицы измерения массы, длины и времени можно подобрать так, чтобы выполнялись равенства $m=k=g\sin\alpha=1$. Угол φ в этой задаче удобно отсчитывать от оси x. Функция Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot\varphi^2) + x,$$

а уравнение связи есть $\dot x\sin\varphi - \dot y\cos\varphi = 0$. Канонические импульсы вводятся по формулам

$$p_x = \dot x - \lambda\sin\varphi,\ \ p_y = \dot y + \lambda\cos\varphi,\ \ p_\varphi = \dot\varphi;\ \ \lambda = p_y\cos\varphi - p_x\sin\varphi. \tag{8}$$

Функция Гамильтона:

$$H = \frac{1}{2}\left[(p_x\cos\varphi + p_y\sin\varphi)^2 + p_\varphi^2\right] - x.$$

Пусть в начальный момент $\varphi=0$. Будем предполагать для определенности, что $\lambda(0)=0$. Так как $p_y=\text{const}$ и $\varphi(0)=\lambda(0)=0$, то $p_y\equiv 0$. Следовательно, в этом случае функция Гамильтона принимает совсем простой вид:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2\cos^2\varphi + p_\varphi^2) - x.$$

* Риман Б. *О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии* (см. [8]).

Канонические уравнения с такой функцией Гамильтона, по-видимому, неинтегрируемы. Однако можно дать качественный анализ движения конька. Так как

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 1,$$

то $p_x = t + c$. Из уравнений

$$\dot{\varphi} = p_\varphi, \quad \dot{p}_\varphi = p_x^2 \sin\varphi\cos\varphi$$

следует, что

$$\ddot{\varphi} = (t+c)^2 \sin\varphi\cos\varphi.$$

Из соотношений (8) получим уравнения для определения x и y:

$$\dot{x} = (t+c)\cos^2\varphi, \quad \dot{y} = (t+c)\sin\varphi\cos\varphi.$$

Выполним замену времени $\tau = (t+c)^2/2$. Обозначая штрихом дифференцирование по τ, будем иметь

$$x' = \cos^2\varphi, \quad y' = \sin\varphi\cos\varphi, \quad \varphi'' - \sin\varphi\cos\varphi = -\varphi'/2\tau.$$

Уравнение изменения φ описывает динамику одномерной системы с полной энергией

$$E = \frac{\varphi'^2}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{4},$$

на которую действуют силы вязкого трения с убывающим коэффициентом трения $1/2\tau$. Так как $E' = -\varphi'^2/2\tau < 0$, то энергия монотонно убывает. Рассмотрим на фазовом цилиндре φ', $\varphi \bmod \pi$ кольцо $|\varphi'| \leqslant \varepsilon$. В силу оценки $E' \leqslant -\varepsilon^2/2\tau$ точка $(\varphi'(\tau), \varphi(\tau))$ за конечное время попадет в это кольцо. Следовательно, при $\tau \to \infty$ угол φ стремится либо к нулю, либо к $\pi/2$ (рис. 2). Первая возможность реализуется с нулевой вероятностью ввиду неустойчивости равновесия $\varphi = 0$. Итак, почти всегда $\varphi(\tau) \to \pi/2$ при $\tau \to \infty$. Изучим асимптотическое поведение конька. Для этого положим $\varphi = \pi/2 + \psi$ и рассмотрим линеаризованное уравнение малых колебаний

$$\psi'' + \frac{\psi'}{2\tau} + \psi = 0.$$

Положим $\psi = \xi/\sqrt[4]{\tau}$. Функция $\xi(\tau)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\xi'' + \left(1 + \frac{3}{16\tau^2}\right)\xi = 0.$$

Для его решений хорошо известна асимптотическая формула

$$\xi = a\sin\tau + b\cos\tau + O(1), \qquad \tau \to \infty.$$

Итак,

$$\psi(t) \sim \frac{a\sin(t+c)^2 + b\cos(t+c)^2}{\sqrt{t+c}}.$$

Поскольку в линейном приближении $y' = -\psi$ и интегралы

$$\int_{\tau_0}^{\infty} \frac{\sin\tau}{\sqrt[4]{\tau}}\, d\tau, \quad \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{\cos\tau}{\sqrt[4]{\tau}}\, d\tau$$

сходятся, то существует $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$.

Из формулы

$$\dot{x} \approx (t+c)\psi^2 \sim (a\sin(t+c)^2 + b\cos(t+c)^2)$$

следует, что асимптотически точка контакта опускается вниз по прямой со средней скоростью $(a^2+b^2)/2$.

Этот результат интересно сравнить с движением неголономного конька. Если $\dot\varphi(0)\neq 0$, то конек описывает горизонтально расположенную циклоиду, то есть в среднем он смещается вдоль горизонтали. Если же конек в начальный момент не закручен, то он будет опускаться по наклонной прямой с постоянным ускорением.

4. Реализация вакономной модели конька. Рассмотрим движение в безграничной идеальной жидкости удлиненной невесомой эллиптической пластинки с жестко закрепленными точками положительной массы (рис. 3). Предположим, что на точки действует только сила тяжести. Симметрия задачи допускает движения, при которых ось x горизонтальна, а оси y и z постоянно лежат в некоторой вертикальной плоскости.

Пусть ω — проекция угловой скорости тела на ось x, а u, v — проекции скорости центра масс на оси y, z. Рассмотрим сначала движение эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

в однородной жидкости плотности ρ. Кинетическая энергия жидкости равна

$$(A\omega^2+Bu^2+Cv^2)/2, \tag{9}$$

где

$$A=\frac{1}{5}\,\frac{(b^2-c^2)^2(\gamma_0-\beta_0)}{2(b^2-c^2)+(b^2+c^2)(\beta_0-\gamma_0)}\,\frac{4}{3}\pi\rho abc,$$

$$B=\frac{\beta_0}{2-\beta_0}\,\frac{4}{3}\pi\rho abc,\quad C=\frac{\gamma_0}{2-\gamma_0}\,\frac{4}{3}\pi\rho abc,$$

$$\beta_0=abc\int\limits_0^\infty\frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)D},\quad \gamma_0=abc\int\limits_0^\infty\frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)D},$$

$$D=\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}.$$

Эти формулы можно найти, например, в книге Ламба [10].

Устремим c к нулю. Справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\gamma_0=2-I_1c+o(c),\qquad I_1=\frac{2}{ab}\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\cdot dx,$$

$$\beta_0=I_2c+o(c),\qquad I_2=ab\int\limits_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x(a^2+x)(b^2+x)}\cdot(b^2+x)}.$$

Вторая формула очевидна, а доказательство первой содержится в [10]. Из этих соотношений легко получить предельные значения при $c\to 0$ для коэффициентов A, B и C:

$$A=\frac{4}{15}\pi\rho ab\,\frac{2b^2}{I_1+I_2},\quad B=0,\quad C=\frac{4}{3}\pi\rho ab\,\frac{2}{I_1}.$$

Положим $b=\varepsilon$, $a=\varepsilon^{-\alpha}$, где $\varepsilon,\alpha>0$. При фиксированном α и малых ε

$$I_1\sim\frac{2}{\varepsilon},\quad I_2\sim\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\infty\frac{dy}{\sqrt{y(1+y)}\cdot(1+y)}=\frac{2}{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$A \sim \frac{2}{15}\pi\rho\varepsilon^{4-\alpha}, \quad C \sim \frac{4}{3}\pi\rho\varepsilon^{2-\alpha}.$$

Таким образом, если $2<\alpha<4$, то $A \to 0$, а $C \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Кинетическая энергия системы «тело+жидкость» имеет тот же вид (9), только к A надо добавить момент инерции тела относительно оси x, а к B и C — массу тела. В итоге при $\varepsilon \to 0$ величины A и B стремятся к конечным пределам, а $C \to \infty$. Таким образом, мы находимся в условиях теоремы о предельном переходе ([2], п. 12): при $\varepsilon \to 0$ движение эллиптической пластинки с начальной скоростью $v(0)=0$

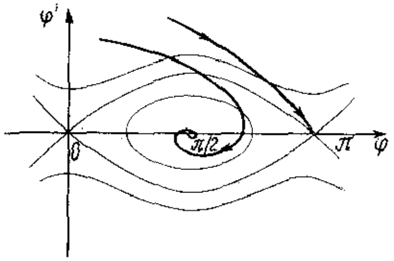

Рис. 2

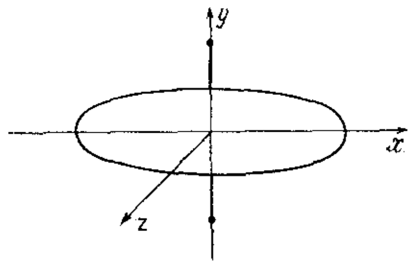

Рис. 3

будет стремится к движению предельной вакономной системы, рассмотренной в п. 3.

5. Заключительные замечания. По мнению Гаусса, «геометрию приходится ставить не в один ранг с арифметикой, существующей чисто a priori, а скорее с механикой» *. Таким образом, по Гауссу, основные принципы механики, как и геометрии, не являются единственно возможными, априорными истинами. С этой точки зрения вакономная динамика, являясь внутренне непротиворечивой моделью, применимой к описанию движения любых механических систем, так же «истинна», как и традиционная неголономная механика. Вопрос о выборе модели для каждого конкретного случая в конечном счете решает эксперимент. Если неинтегрируемые связи реализуются силами вязкого трения с большим коэффициентом вязкости, то для описания движения естественно воспользоваться неголономной моделью (см. [11], а также [12]). Если же связи возникают в результате изменения римановой метрики системы (например, с помощью присоединенных масс), то с теоретической точки зрения предпочтение следует отдать вакономной модели. В сложных механических системах часть связей может быть неголономной, а часть — вакономной. Не исключено, что в механике с конечным числом степеней свободы так же, как и в механике сплошной среды, возможно разнообразие моделей. «Я не буду более останавливаться на этом вопросе, так как эти истины становятся уже избитыми» **.

Автор благодарен Я. В. Татаринову и С. В. Болотину, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд замечаний.

V. V. Kozlov

DYNAMICS OF SYSTEMS WITH NONINTEGRABLE CONSTRAINTS. III

A new mathematical model of analytical dynamics with nonintegrable constraints is considered. It is based on a generalization of the well-known principle of least action. Some applications are given.

---

* Из письма Гаусса к Ольберсу (см. [8]).

** Пуанкаре А. Об основных гипотезах геометрии (см. [8]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов В. В. Динамика систем с неинтегрируемыми связями. I. — Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1982, № 3, 92—100.
2. Козлов В. В. Динамика систем с неинтегрируемыми связями. II. — Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1982, № 4, 70—76.
3. Hertz H. Die prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt. — Ges. Werke, Bd 3. Leipzig, 1894.
4. Hölder L. O. Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis. — Nachr. Königl. Gesell. Wiss. Göttingen. Math.-phys., 1896, N 2, 122—157.
5. Суслов Г. К. Основы аналитической механики. Киев, 1911.
6. Бом Д. Квантовая теория. М., 1965.
7. Чаплыгин С. А. Исследования по динамике неголономных систем. М.—Л., 1949.
8. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М., 1956.
9. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.—Л., 1937.
10. Ламб Г. Гидродинамика. М., 1947.
11. Caratheodory C. Der Schlitten. — Z. angew. Math. und Mech., 1933, 13, 71—76.
12. Карапетян А. В. О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней. — Прикл. матем. и механ., 1981, вып. 1, 42—51.

Поступила в редакцию
26.11.82