УДК 531 01

В. В. Козлов

ГИДРОДИНАМИКА ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

1. Гидродинамика и гамильтонова механика. Баротропное течение идеальной жидкости в потенциальном силовом поле удовлетворяет уравнению Эйлера

$$a=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}v=\frac{\partial}{\partial x}g(x,t).$$

Здесь v, a — скорость и ускорение частиц жидкости, $g(x, t)$ — неизвестная функция, для отыскания которой следует привлечь уравнение неразрывности Уравнение Эйлера можно трактовать как уравнение движения материальной точки единичной массы в силовом поле с потенциалом g:

$$\ddot{x}=a=\frac{\partial}{\partial x}g(x,t).$$

Оно, разумеется, гамильтоново

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial y},\quad \dot{y}=-\frac{\partial H}{\partial x};\qquad H(y,x,t)=\frac{y^2}{2}-g(x,t),$$

и поэтому к нему применимы результаты гамильтоновой механики. Если, в частности, течение стационарно, то g не зависит явно от времени и функция $H=\frac{v^2}{2}-g(x)$, называемая интегралом Бернулли, не меняется при движении частиц жидкости В силу равенства $\oint ydx=\oint vdx$ теорема об интегральном инварианте Пуанкаре переходит в теорему Томсона о сохранности циркуляции, из которой, в свою очередь, выводятся основные результаты динамики идеальной жидкости

Уравнение Эйлера можно представить в следующем виде

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^*\right)v=-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^*v+\frac{\partial}{\partial x}g,$$

где символ $*$ означает транспонирование Кососимметрический оператор $\frac{\partial v}{\partial x}-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^*$ называется ротором поля $v(x, t)$. Результат его действия на вектор v эквивалентен векторному умножению $(\operatorname{rot} v)\times v$ В силу формулы

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{v^2}{2}=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^*v$$

уравнение Эйлера принимает теперь вид уравнения Ламба

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\operatorname{rot} v\times v=-\frac{\partial}{\partial x}\hat{H}(x,t),\qquad \hat{H}=\frac{v^2(x,t)}{2}-g(x,t).$$

Применяя к обеим его частям операцию rot, приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} v+\operatorname{rot}(\operatorname{rot} v\times v)=0,$$

которое описывает динамику вихрей идеальной жидкости

Предположим, что в начальный момент времени течение жидкости потенциально

$$v=\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,t).$$

Тогда согласно теореме Лагранжа оно потенциально для всех значений t Из уравнения Ламба получаем уравнение на потенциал φ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+H\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},x,t\right)=0,$$

которое называется интегралом Лагранжа—Коши Инвариантная поверхность $y=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ в гамильтоновой механике называется лагранжевой, а интеграл Лагранжа—Коши — уравнением Гамильтона—Якоби

Наша цель — распространить аналогию между гидродинамикой и гамильтоновой механикой на случаи произвольных гамильтоновых систем

2. Уравнения гидродинамического типа. Пусть M — гладкое многообразие n измерений, которое будем считать пространством положений гамильтоновой системы, и пусть H $T^*M\times R\{t\}\to R$ — функция Гамильтона Точки многообразия M будем обозначать буквой x, а ковекторы — элементы векторного пространства T_x^*M — буквой y

Предположим, что уравнения Гамильтона

$$\dot{x}=\frac{\partial}{\partial y}H(y,x,t),\quad \dot{y}=-\frac{\partial}{\partial x}H(y,x,t)$$

имеют инвариантное n-мерное многообразие $y=u(x, t)$, где u — гладкое ковекторное поле на M (или на его части), которое возможно зависит от времени Свяжем с полем u его ротор — кососимметричную матрицу размера $n\times n$

$$\operatorname{rot} u=\frac{\partial u}{\partial x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^*$$

По аналогии со случаем $n=3$ результат действия оператора $\operatorname{rot} u$ на вектор w будем обозначать так $\operatorname{rot} u\times w$

Введем гладкое векторное поле скорости v на M, положив

$$v(x,t)=\dot{x}=\left.\frac{\partial H}{\partial y}\right|_{y=u(x\ t)}$$

Оказывается, поля $u(x, t)$ и $v(x, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\operatorname{rot} u\times v=-\frac{\partial\hat{H}}{\partial x},\qquad \hat{H}(x,t)=H(u(x,t),x,t);\tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} u+\operatorname{rot}(\operatorname{rot} u\times v)=0\tag{2}$$

Действительно, инвариантность многообразия, определяемого уравнением $y=u(x\ t)$ эквивалентна дифференциальному уравнению

$$\dot{u}=-\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{y=u}.$$

Его можно представить в следующем виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}v(x,t)=-\frac{\partial\hat{H}}{\partial x}+\left.\frac{\partial H}{\partial y}\right|_{y=u}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial\hat{H}}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^*v$$

Отсюда вытекает уравнение (1). Уравнение (2) следует из (1) применением ротора к левой и правой части.

Обратно, пусть $u(x, t)$ — гладкое ковекторное поле на M, и пусть

$$v(x, t) = \frac{\partial H}{\partial y}\bigg|_{y=u(x,t)}.$$

Если поля u и v удовлетворяют «уравнению Ламба» (1), то многообразие $\Sigma=\{y=u(x, t)\}$ является инвариантным многообразием гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(y, x, t)$. Решения, лежащие на Σ, найдем интегрированием дифференциального уравнения на M: $\dot{x}=v(x, t)$.

Пусть $u(x, t, \alpha)$ — семейство ковекторных полей в некоторой области на M, которое зависит от n параметров α и таково, что при каждом значении α уравнение $y=u(x, t, \alpha)$ является инвариантным многообразием. Пусть $x(t, \alpha, \beta)$ — «полное» решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} = v(x, t, \alpha) = \frac{\partial H}{\partial y}\bigg|_{y=u(x,t,\alpha)},$$

то есть

$$\det \frac{\partial x}{\partial \beta} \neq 0. \tag{3}$$

Если

$$\det \frac{\partial u}{\partial \alpha} \neq 0, \tag{4}$$

то $x=x(t, \alpha, \beta)$, $y=u(x(t, \alpha, \beta), t, \alpha)$ — полное решение гамильтоновой системы с гамильтонианом H:

$$\det \frac{\partial (x, y)}{\partial (\alpha, \beta)} \neq 0.$$

Пусть, в частности, ковекторное поле $u(x, t)$ потенциально:

$$u = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, t).$$

Согласно уравнению Ламба (1) потенциал φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, x, t\right) = g(t).$$

Замена $\varphi \to \varphi - \int g(t)\,dt$ превращает его в обычное уравнение Гамильтона—Якоби. Пусть $\varphi(x, t)$ — одно из решений этого уравнения. Согласно сказанному выше уравнение $y=\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ задает инвариантное многообразие. Если $\varphi(x, t, \alpha)$ — полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби, то интегрирование канонических уравнений сводится к интегрированию уравнений

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}\bigg|_{y=\frac{\partial \varphi}{\partial x}}. \tag{5}$$

Условие (3) выполняется автоматически, а условие (4) совпадает с определением полного интеграла:

$$\det \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial x} \neq 0.$$

Согласно теореме Якоби уравнение (5) интегрируется в квадратурах. В общем случае «вихревых» течений это утверждать, по-видимому, нельзя.

В заключение обсудим вопрос о существовании решений уравнения (1) в целом. Пусть M — компактное многообразие без края, и пусть $u_0(x)$ — гладкое ковекторное поле, заданное на всем M. Утверждается, что при достаточно малых значениях t существует гладкое решение $u(x, t)$ уравнения (1), такое, что $u(x, 0)=u_0(x)$ при всех $x \in M$. Для доказательства рассмотрим решения уравнений Гамильтона на T^*M

$$x=x(x_0, t), \quad y=y(x_0, t)$$

со следующими начальными условиями:

$$x(x_0, 0)=x_0, \quad y(x_0, 0)=u_0(x_0).$$

По теореме о неявной функции отображение $M \to M$, задаваемое формулой $x=x(x_0, t)$, является диффеоморфизмом при малых значениях t. Искомое решение $u(x, t)$ равно $y(x_0, t)$, где x_0 надо заменить через x и t, разрешив уравнение $x=x(x_0, t)$ относительно x_0.

При больших значениях t решение $u(x, t)$ оказывается, как правило, негладким и неоднозначным. В этом случае уравнение Ламба (1) становится бесполезным и для описания движения следует использовать исходные канонические уравнения на T^*M. Считается, что в гидромеханике идеальной жидкости возможно аналогичное явление: за конечное время решение уравнения Эйлера и уравнения неразрывности с гладким начальным данным теряет необходимую гладкость и однозначность. С физической точки зрения это означает, что классическая гидродинамическая модель перестает действовать.

3. Инвариантная запись уравнений гидродинамического типа. Рассмотрим снова гладкое ковекторное поле $u(x, t)$ на M и предположим, что $\Sigma_t=\{y=u\} \subset T^*M$ является инвариантным многообразием гамильтоновой системы с гамильтонианом $H: T^*M \times R\{t\} \to R$. Пусть π — естественная проекция T^*M на M.

Рассмотрим 1-форму $\omega=u(x, t)\,dx$ и касательное поле скорости $v(x, t)$, которое является проекцией на M сужения исходного гамильтонова векторного поля на инвариантное многообразие Σ_t. Корректно определено внутреннее произведение v на $d\omega=\omega^2$:

$$i_v d\omega = \omega^2(v, \cdot),$$

которое снова является 1-формой. Уравнение (1) в этих обозначениях запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + i_v\, d\omega = -d\hat{H}; \tag{6}$$

здесь функция $\hat{H}: M \times R\{t\} \to R$ при фиксированном t определяется коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} \Sigma_t \arrow[rr, "H|\Sigma_t"] \arrow[dr, "\pi"'] & & R \\ & M \arrow[ur, "\hat{H}"'] & \end{tikzcd}$$

Поскольку $dd\hat{H}=0$, из уравнения (6) получаем уравнение (2):

$$\frac{\partial d\omega}{\partial t} + d i_v\, d\omega = 0. \tag{7}$$

Воспользуемся формулой гомотопии

$$i_v d + d i_v = L_v,$$

где L_v — дифференцирование вдоль векторного поля v Учитывая то дество $dd\omega=0$, уравнение вихря (7) можно представить в виде с. дующего уравнения:

$$\frac{d\omega^2}{dt} = \frac{\partial \omega^2}{\partial t} + L_v\,\omega^2 = 0. \tag{8}$$

Пусть g^t — фазовый поток дифференциального уравнения

$$\dot{x} = v(x,\ t) \tag{9}$$

и a_0, b_0 — касательные векторы в точке $x_0 \in M$ в момент времени $t=0$. При отображении $dg^t: T_{x_0}M \to T_{g^t(x_0)}M$ они перейдут в касательные векторы a_t, b_t. Рассмотрим значение внешней 2-формы $\omega^2 = d\omega$ на этих векторах. Из уравнения (8) вытекает важная

Теорема Пуанкаре. *Функция $\omega^2(a_t,\ b_t): R\{t\} \to R$ постоянна.*

Это утверждение характеризует свойство «вмороженности» вихрей. значение формы $d\omega = du \wedge dx$ постоянно на векторах, движущихся вместе с «жидкостью» по закону $x = g^t(x_0)$. Отметим, что теорема Пуанкаре связана со свойством симплектичности фазового потока исходной гамильтоновой системы в T^*M.

В качестве следствия укажем «теорему Лагранжа»· если при $t=0$ ковекторное поле $u(x,\ t)$ потенциально ($du \wedge dx \equiv 0 \Leftrightarrow \mathrm{rot}\, u \equiv 0$), то оно будет потенциальным при всех t. Отметим еще «теорему Томсона»: интеграл

$$\oint \omega = \oint u(x,\ t)\, dx,$$

вычисленный по замкнутому подвижному контуру на M, является интегральным инвариантом уравнения (9). Это утверждение можно вывести из теоремы Пуанкаре с помощью формулы Стокса или из теоремы об интегральном инварианте уравнений Гамильтона.

4. Гидродинамика гамильтоновых систем. С кососимметричной матрицей $\mathrm{rot}\, u(x,\ t)$ связана внешняя 2-форма $\omega^2 = du \wedge dx$ на M. Если размерность n нечетна, то в каждой точке $x \in M$ существует ненулевой касательный вектор $w(x,\ t)$, такой, что $\omega^2(w,\ w') = 0$ для всех $w' \in T_x M$. Если форма ω^2 неособа, то вектор w единственный. Векторное поле $w(x,\ t)$ назовем вихревым векторным полем, а его интегральные кривые (при фиксированном значении t) — вихревыми линиями. При $n=3$ условие $\mathrm{rot}\, u \neq 0$ является критерием неособости формы ω^2.

Теорема 1 *Фазовый поток дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x,\ t)$ переводит вихревые линии в вихревые линии*

Гладкое подмногообразие (возможно, с краем) M назовем вихревым, если оно составлено сплошь из вихревых линий

Следствие. *Фазовый поток уравнения $\dot{x} = v$ переводит вихревые многообразия в вихревые многообразия.*

Это утверждение обобщает известный результат Гельмгольца о «вмороженности» вихревых линий и поверхностей в динамике идеальной жидкости.

Теорему 1 можно вывести из теоремы Пуанкаре. Мы, однако, дадим непосредственное «гидродинамическое» доказательство. Возьмем на заданной вихревой линии l_0 в начальный момент времени два бесконечно малых вектора w_0 и w_0', где вектор w_0 вихревой (касательный к l_0). При сдвиге g^t по решениям уравнения $\dot{x} = v$ за время t вихревая

линия l_0 перейдет в некоторую линию l_t, а векторы w_0 и w_0' перейдут в малые векторы w_t и w_t' При этом вектор w_t, конечно, снова будет касаться l_t. Пусть σ_t — бесконечно малый параллелограмм, натянутый на w_t и w_t' Согласно формуле Стокса

$$\oint_{\partial\sigma_t} u\,dx = \iint_{\sigma_t} du \wedge dx = \iint_{\sigma_t} \omega^2.$$

Поскольку при $t=0$ этот интеграл равен нулю, то по теореме Томсона он равен нулю при всех значениях t. Следовательно, $\omega^2(w_t,\ w_t') = 0$. Поскольку отображение g^t является диффеоморфизмом многообразия M, то каждый вектор w_t' является образом некоторого вектора w_0' при касательном отображении dg^t Так как форма ω^2 неособая, w_t — вихревой вектор, что и требовалось.

Вихревые поля определены с точностью до умножения на функции от x и t. Среди них есть замечательные поля (определенные с точностью до постоянного множителя), характеристическое свойство которых дает

Теорема 2 *При нечетном n в неособом случае существует вихревое векторное поле $w(x,\ t)$, удовлетворяющее уравнению*

$$\frac{\partial w}{\partial t} + [w,\ v] = 0, \tag{10}$$

где $[\,,]$ — коммутатор касательных векторных полей на M.

Это уравнение является аналогом известного уравнения Эйлера для изменения кинетического момента в динамике твердого тела.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим расширенное пространство положений $M' = M \times R\{t\}$ и на нем — два дифференциальных оператора

$$L_v' = \frac{\partial}{\partial t} + L_v, \quad L_w,$$

где L_v (L_w) — дифференцирование на M вдоль векторного поля v (w). Вычислим их коммутатор:

$$[L_v',\ L_w] = L_{w'} + [L_v,\ L_w], \qquad w' = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Вихревые линии определяются при фиксированном значении t и при действии g^t переходят в вихревые линии (теорема 1). Следовательно, распределение двумерных касательных плоскостей на M', порожденное векторами L'_v и L_w, интегрируемо. По теореме Фробениуса

$$L_{w'} + [L_v,\ L_w] = \alpha(x,\ t)\, L_w + \beta(x,t)\, L_v'. \tag{11}$$

Поскольку коммутатор $[L'_v,\ L_w]$ является дифференциальным оператором на M, то $\beta \equiv 0$. Таким образом, уравнение (11) можно переписать в эквивалентной форме:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + [w,\ v] = \alpha w.$$

Положим $w = \rho w_0$, причем функция $\rho(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + L_v\,\rho = \alpha\rho. \tag{12}$$

Тогда w_0 удовлетворяет, очевидно, искомому уравнению (1). Для доказательства существования решения (12) положим $\rho = \exp \xi(x,\ t)$.

Тогда

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial\xi}{\partial t}+L_v\xi=\alpha,$$

откуда

$$\xi(x,t)=\eta\left((g^t)^{-1}(x),t\right),\ \text{где}\ \eta(x,t)=\int_0^t\alpha(g^s(x),s)\,ds.$$

Теорема доказана.

При $n=3$ одним из вихревых полей является обычное поле ротора $\operatorname{rot} u$. Согласно теореме 2 в этом случае существует векторное поле $w(x,t)$, задаваемое уравнением (10), такое, что $\operatorname{rot} u=\alpha(x,t)w$.

Теорема 3. *Функция $\alpha(x,t)$ удовлетворяет «уравнению неразрывности»*

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\operatorname{div}(\alpha w)=0,$$

где $\operatorname{div} a(x,t)$ — след матрицы $\frac{\partial a}{\partial x}$.

Следствие. *Интеграл $\int_D\alpha(x,t)\,dx$, вычисленный по области D трехмерного многообразия M, является интегральным инвариантом для дифференциального уравнения $\dot x=v(x,t)$.*

Подчеркнем, что $\alpha(x,t)$ не есть функция точки в $M\times R(t)$: при замене локальных координат она умножается на якобиан преобразования. В связи с этим последующее вычисление не носит инвариантного характера и существенно использует фиксированную систему локальных координат.

Доказательство теоремы 3 основано на применении известной формулы векторного анализа:

$$\operatorname{rot}(a\times b)=[a,b]+a\operatorname{div} b-b\operatorname{div} a.$$

С помощью этой формулы и очевидного соотношения $\operatorname{div}\operatorname{rot} u\equiv 0$ уравнение (2) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} u+[\operatorname{rot} u,v]+(\operatorname{rot} u)\operatorname{div} v=0. \tag{13}$$

Положим $\operatorname{rot} u=\alpha w$. Тогда из (13) получим уравнение

$$\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial t}+[w,v]\right)+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}+L_v\alpha+\alpha\operatorname{div} v\right)w=0.$$

Если векторное поле $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению (10), то

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+L_v\alpha+\alpha\operatorname{div} v=0.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что

$$L_v\alpha+\alpha\operatorname{div} v=\operatorname{div}(\alpha v).$$

Замечание. Теорема Пуанкаре и теоремы 1—3 являются следствием одного лишь уравнения вихря (2). Они останутся справедливыми и в том случае, если заменить уравнение (2) более общим уравнением

$$\frac{\partial a}{\partial t}+\operatorname{rot}(a\times v)=0,$$

где $a=\|a_{ij}\|$ — кососимметричная матрица, удовлетворяющая условию

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}=0.$$

Положим $\Omega=(a\,dx)\wedge dx$. Тогда

$$d\Omega=0,\quad \frac{\partial\Omega}{\partial t}+di_v\Omega=0\Leftrightarrow\frac{\partial\Omega}{\partial t}+L_v\Omega=0.$$

Такими уравнениями описывается, в частности, изменение вектора магнитной напряженности в среде с бесконечной проводимостью. При этом вихревыми линиями 2-формы Ω являются силовые линии магнитного поля.

В стационарном случае функция $\hat H(x)$, очевидно, постоянна на линиях тока — интегральных кривых векторного поля $v(x)$.

Теорема 4. *Пусть $u(x)$ и $H(y,x)$ не зависят явно от времени Тогда функция $\hat H(x)=H(u(x),x)$ постоянна на вихревых линиях. Если $x\in M$ не является критической точкой функции $\hat H(x)$, то векторы $v(x)$ и $w(x)\neq 0$ линейно-независимы.*

Это утверждение обобщает известный в гидродинамике результат о постоянстве интеграла Бернулли в стационарном случае не только на линиях тока, но и на вихревых линиях.

Если $\hat H(x)\neq\text{const}$, то естественно рассмотреть распределение касательных плоскостей $\Pi(x)$, порожденное линейными комбинациями независимых векторов $v(x)$ и $w(x)$. Так как v и w коммутируют, то распределение $\Pi(x)$ интегрируемо. Следовательно, через каждую точку $x\in M$ проходит единственная интегральная поверхность $N(x)$ этого распределения, которая в каждой своей точке касается векторов v и w. Если поля v и w полны на N, то N диффеоморфна одной из следующих поверхностей. R^2 (плоскость), $R\times T^1$ (цилиндр), T^2 (тор). Причем в некоторых глобальных координатах на N линии тока и вихревые линии являются прямыми В общем случае поверхности N могут быть погружены в M весьма сложным образом. Особый интерес поэтому представляет случай, когда N замкнуто в M Это автоматически выполнено при $n=3$. интегральные поверхности совпадают со связными компонентами уровней непостоянной функции $\hat H(x)$. Эффективное применение этого замечания упирается в нетривиальный вопрос о существовании нужного нам ковекторного поля $u(x)$ на всем M.

Докажем теорему 4. Запишем уравнение (1) в стационарном случае:

$$\operatorname{rot} u\times v=-\frac{\partial}{\partial x}\hat H(x).$$

Если $w(x)$ — вихревое поле, то

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat H\right)w=-(\operatorname{rot} u\times v)\,w=(\operatorname{rot} u\times w)v=0\cdot v=0.$$

Для доказательства второго утверждения предположим, что в некоторой точке $x\in M$ векторы v и $w\neq 0$ зависимы. Тогда $v(x)$ — вихревой вектор, и поэтому для любого вектора $a(x)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat H\right)a=-(\operatorname{rot} u\times v)\,a=-0\cdot a=0.$$

Следовательно, $d\hat H(x)=0$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь случай, когда M имеет четную размерность, и предположим, что форма ω^2 не вырождена (определитель матрицы

$\operatorname{rot} u$ отличен от нуля). Если поле $u(x)$ не зависит от времени, то уравнение Ламба можно записать в виде уравнения

$$i_v\omega^2=\omega^2(v(x),\ \cdot)=-d\hat{H}(x). \tag{14}$$

Поскольку форма ω^2 не вырождена, пара $(M,\ \omega^2)$ — симплектическое многообразие. Более того, из уравнения (14) вытекает, что дифференциальное уравнение $\dot{x}=v(x)$ на M гамильтоново относительно симплектической структуры ω^2 с функцией Гамильтона $-\hat{H}(x)$. Оказывается, этот результат справедлив и в неавтономном случае.

Теорема 5. *Существует замена переменных $x=x(z,\ t)$, такая, что в новых локальных координатах $z=(\alpha,\ \beta)$ на M дифференциальное уравнение $\dot{x}=v(x,\ t)$ имеет канонический вид*

$$\dot{\alpha}=-\frac{\partial K}{\partial \beta},\quad \dot{\beta}=\frac{\partial K}{\partial \alpha}$$

с функцией Гамильтона $K(z,\ t)=\hat{H}(x(z,\ t),\ t)$.

Этому утверждению в гидродинамике соответствует свойство гамильтоновости уравнений плоского течения несжимаемой идеальной жидкости. Роль функции Гамильтона играет функция тока.

Доказательство теоремы 5. С учетом равенств

$$v=\dot{x}=\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial z}\dot{z},\quad \frac{\partial \hat{H}}{\partial x}=\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{*-1}\frac{\partial}{\partial z}K(z,t)$$

уравнение Ламба (1) можно представить в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^*\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\operatorname{rot} u\times\frac{\partial x}{\partial t}\right)+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^*\operatorname{rot} u\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)\right]\times\dot{z}=-\frac{\partial K}{\partial z}. \tag{15}$$

С заменой переменных $x=x(z,\ t)$ связано векторное поле

$$w(x,t)=\hat{w}(z,t)=\frac{\partial x(z,t)}{\partial t}. \tag{16}$$

Обратно, любое векторное поле $w(x,\ t)$ задает преобразование $x=x(z,\ t)$, определяемое дифференциальным уравнением (16) и некоторым начальным условием. Возьмем в качестве $w(x,\ t)$ поле, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\operatorname{rot} u\times w=0. \tag{17}$$

Выражение $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^*\operatorname{rot}_x u\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)$ является ротором ковекторного поля

$$\hat{u}(z,t)=\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^* u(x(z,t),t),$$

вычисленным в новых переменных z. Покажем, что матрица $\operatorname{rot}_z\hat{u}$, или, что то же самое, 2-форма $\hat{\omega}^2=d\hat{u}\wedge dz$, не зависит явно от t. Применив оператор rot_x к уравнению (17) и использовав формулу гомотопии, получим, что

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial t}+L_w\omega^2=0.$$

Следовательно, форма ω^2 «вморожена» в фазовый поток дифференциального уравнения (16): представленная в новых переменных z, она не зависит от t.

Гамильтоновость уравнения $\dot{x}=v$ вытекает теперь из равенства

$$\hat{\omega}^2(\dot{z},\ \cdot)=-dK(z,t)$$

и невырожденности формы $\hat{\omega}^2_z=\omega^2_x$. Существование симплектических координат α, β выводится из теоремы Дарбу.

Осталось доказать существование нужного нам поля $w(x,\ t)$. Рассмотрим в расширенном пространстве положений $M\times R\{t\}$ дифференциальную форму $u(x,\ t)\,dx$ и ее внешнюю производную

$$du(x,t)\wedge dx=\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)\wedge dx-\frac{\partial u}{\partial t}dx\wedge dt.$$

Эта 2-форма определяется кососимметричной матрицей нечетного порядка

$$\left\|\begin{array}{c|c}\operatorname{rot} u & -\dfrac{\partial u}{\partial t}\\ \hline \dfrac{\partial u}{\partial t} & 0\end{array}\right\|.$$

Пусть $\begin{pmatrix}w\\ w_0\end{pmatrix}$, $w\in T_xM,\ w_0\in R$, есть вихревой вектор. Поскольку матрица $\operatorname{rot} u$ не вырождена, $w_0\neq0$. Положим $w_0=-1$. Тогда

$$\operatorname{rot} u\times w+\frac{\partial u}{\partial t}=0,$$

что и требовалось.

5. Примеры. В динамике идеальной жидкости различают потенциальные течения ($\operatorname{rot} v\equiv0$) и вихревые течения ($\operatorname{rot} v\neq0$). В свою очередь, вихревые течения бывают двух типов: когда $v\times\operatorname{rot} v\equiv0$ и когда $v\times\operatorname{rot} v\neq0$. Ниже приводятся примеры гамильтоновых систем, обладающих течениями (в целом) всех этих типов.

Наиболее простые из них — потенциальные течения — встречаются особенно часто: примерами могут служить гамильтоновы системы, решенные методом Гамильтона — Якоби. Для того чтобы подчеркнуть аналогию с гидродинамикой, рассмотрим задачу двух тел, притягивающихся с силой, обратно пропорциональной кубу их взаимного расстояния. Поскольку в барицентрической системе координат точки движутся в одной плоскости, естественно рассматривать эту систему как гамильтонову систему с четырьмя степенями свободы. Пусть x_1, y_1 и x_2, y_2 — декартовы координаты точек с массами Γ_1 и Γ_2, а X_1, Y_1 и X_2, Y_2 — их канонические импульсы. Положим:

$$H=\frac{X_1^2+Y_1^2}{2\Gamma_1}+\frac{X_2^2+Y_2^2}{2\Gamma_2}-\frac{1}{2\pi^2}\frac{\Gamma_1^2\Gamma_2^2}{r_{12}^2},\quad r_{12}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Легко проверить, что канонические уравнения с функцией Гамильтона H имеют следующее инвариантное многообразие:

$$X_1=-\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi}\frac{y_1-y_2}{r_{12}},\quad Y_1=\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi}\frac{x_1-x_2}{r_{12}},$$

$$X_2=-\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi}\frac{y_2-y_1}{r_{12}},\quad Y_2=\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi}\frac{x_2-x_1}{r_{12}}. \tag{18}$$

Течение, определяемое этими формулами, потенциально. На соответствующих частных решениях $H=0$, $X_1+X_2=Y_1+Y_2=0$, а постоянная кинетического момента относительно начала кординат равна $\Gamma_1\Gamma_2/2\pi$.

Уравнения (18) можно представить в виде следующей системы:

$$\Gamma_i \dot{x}_i = \frac{\partial \Psi}{\partial y_i}, \quad \Gamma_i \dot{y}_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}, \qquad i=1, 2, \quad \Psi = -\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi}\ln r_{12}.$$

Эти уравнения описывают динамику точечных вихрей в плоском течении идеальной жидкости с интенсивностями Γ_1 и Γ_2. Таким образом, среди движений двух «гравитирующих» тел есть зависящее от четырех параметров семейство движений двух точечных вихрей. Это замечание находится в согласии с хорошо известными представлениями Декарта о вихревом характере движения в классической механике *.

В качестве второго примера рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = 1/2\,(y_1^2+y_2^2+y_3^2) - \mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \sin x_1 \cos x_3 - \mathcal{J}_2\mathcal{J}_3 \sin x_2 \cos x_1 -$$
$$-\mathcal{J}_3\mathcal{J}_1 \sin x_3 \cos x_2.$$

Она имеет следующие инвариантные соотношения:

$$y_1 = u_1 = \mathcal{J}_1 \sin x_3 + \mathcal{J}_3 \cos x_2, \quad y_2 = u_2 = \mathcal{J}_2 \sin x_1 + \mathcal{J}_1 \cos x_3,$$
$$y_3 = u_3 = \mathcal{J}_3 \sin x_2 + \mathcal{J}_2 \cos x_1.$$

В этом примере $\operatorname{rot} u \neq 0$, однако $v \times \operatorname{rot} u = 0$, поскольку $\operatorname{rot} u = v$. Судя по результатам численного счета, проведенного Хеноном, течение на трехмерном торе $T^3\{x_1, x_2, x_3 \bmod 2\pi\}$, которое задано уравнениями $\dot{x}_i = u_i(x)$, $i=1, 2, 3$, устроено достаточно сложно: некоторые линии тока, по-видимому, всюду плотно заполняют трехмерные области на T^3.

В заключение обратимся к задаче Эйлера о движении по инерции твердого тела вокруг неподвижной точки. В этой задаче пространством положений M служит ортогональная группа $SO(3)$. Хорошо известно, что кинетический момент твердого тела неизменен в неподвижном пространстве. Фиксируя его ненулевое постоянное значение, мы можем представить кинетический момент тела в подвижном пространстве в виде функции от положения твердого тела. В результате на группе $SO(3)$ появляется трехмерное течение. Оно вихревое, поскольку проекции кинетического момента на независимые направления не коммутируют. Уравнение стационарного течения имеет, очевидно, следующий вид:

$$\operatorname{rot} u \times v = -\frac{\partial}{\partial x}\hat{H}(x), \tag{19}$$

где $\hat{H}(x)$ — кинетическая энергия тела как функция на $SO(3)$; она постоянна лишь в том вырожденном случае, когда совпадают все главные моменты инерции. Таким образом, в типичной ситуации $\operatorname{rot} u \times v \neq 0$. Линии тока и вихревые линии лежат на поверхностях Бернулли $M_c = \{x : \hat{H}(x) = c\}$. При некритических значениях c поверхности M_c диффеоморфны двумерным торам. Отметим, что критических значений всего три: они равны энергии вращения твердого тела вокруг главных осей инерции (при фиксированном значении кинетического момента).

6. Ссылки и комментарии. Все необходимые сведения из гидродинамики можно найти в книге Ламба [1]. Применение гамильтоновой механики к выводу основных результатов динамики невязкой жидкости содержится в [2] Представление экстремалей вариационных задач (которые описываются каноническими уравнениями) с помощью ковекторных полей (полей экстремалей) широко используется в вариационном исчислении. Правда, обычно рассматривают лишь «самосопряженные» (потенциальные) поля Преобразование Ламба применялось в теории гамильтоновых систем в связи с анализом линейных по импульсам инвариантных соотношений (см, например, [3]) Уравнение (1) фактически известно: в вариационном исчислении оно выражает условие «согласованности» поля экстремалей [4] Однако его обычно не связывают с идеями гидромеханики.

В работе [5] показано, что уравнению Эйлера для изменения момента (10) удовлетворяет вектор вихря $\operatorname{rot} v$ идеальной несжимаемой жидкости в поле потенциальных массовых сил В случае сжимаемой жидкости $\operatorname{rot} v$ надо разделить на плотность вещества [6] (ср. с теоремой 3). В работах [5, 6] с помощью уравнения (19) и свойства коммутируемости полей v и w исследована топология стационарных вихревых течений идеальной жидкости в трехмерном евклидовом пространстве. Как и в задаче Эйлера, компактные поверхности Бернулли без края являются двумерными торами, причем частицы движутся по этим торам по квазипериодическому закону.

В заключение отметим связь гидродинамики гамильтоновых систем с обобщенной гамильтоновой механикой Биркгофа [7, 8]. Пусть $u(x, t)$ — гладкое ковекторное поле на многообразии M и $B : M \times R \to R$ — некоторая гладкая функция. Функционал

$$P = \int_{t_1}^{t_2} (u \cdot \dot{x} - B)\, dt,$$

определенный на пространстве гладких путей $x : [t_1, t_2] \to M$ с закрепленными концами, назовем, следуя Биркгофу, действием Пфаффа Легко показать, что экстремали вариационной задачи $\delta P = 0$ совпадают с решениями дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x, t)$ на M, где поле v удовлетворяет уравнению Ламба (1), в которое вместо функции $\hat{H}$ надо подставить «биркгофиан» B. Это уравнение Биркгоф назвал «уравнением Пфаффа» Отметим, что в нашем случае действие Пфаффа совпадает с обычным действием Гамильтона

$$\int_{t_1}^{t_2} (y \cdot \dot{x} - H)\, dt,$$

ограниченным на пространство положений M с помощью инвариантного соотношения $y = u(x, t)$ Биркгоф рассматривал случай, когда M четномерно и матрица $\operatorname{rot} u$ не вырождена. В автономном случае уравнение Пфаффа, очевидно, является обычным уравнением Гамильтона, записанным не в канонических переменных. Теорема 5, сводящая общее неавтономное уравнение Пфаффа к уравнению Гамильтона, по-видимому, была неизвестна Биркгофу и его последователям Сам Биркгоф показал, что такое приведение можно осуществить в окрестности положения равновесия общего вида с помощью формальной замены переменных [7]

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Ламб Г Гидродинамика М, 1947.
2 Картан Э Интегральные инварианты М—Л, 1940
3. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.—Л., 1937.

* « Материя неба должна вращать планеты не только вокруг Солнца, но и вокруг собственного центра и, следовательно, образовывать вокруг планет малые неба, вращающиеся в том же направлении, что и большое небо» (Р. Декарт «Космогония»).

4. Блисс Дж. А. Лекции по вариационному исчислению. М., 1950.
5. Арнольд В. И. О топологии стационарных течений идеальной жидкости. — Прикл. матем. и механ., 1966, 30, вып. 1, 183—185
6. Козлов В. В. Замечания о стационарных вихревых движениях сплошной среды. — Прикл. матем. и механ., 1983, 47, вып. 2, 341—342.
7. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.—Л., 1941.
8. Santilli R. M. Foundations of theoretical mechanics. II. Birkhoffian generalization of Hamiltonian mechanics. N. Y., 1983.

Поступила в редакцию
20.04.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1 МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1983, № 6

УДК 517

В. А. Кондратьев, О. А. Олейник

НЕУЛУЧШАЕМЫЕ ОЦЕНКИ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА И СИСТЕМЫ КАРМАНА В НЕГЛАДКИХ ДВУМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

Для решений задачи Дирихле для бигармонического уравнения в двумерной области Ω с правой частью из $L^2(\Omega)$ в работе [1] доказано, что их первые производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем, зависящим от геометрической структуры области и являющимся корнем некоторого трансцендентного уравнения, и этот показатель неулучшаем в классе областей с соответствующей геометрической структурой. В частности, в работе [1] показано, что если область Ω такова, что любая окружность радиуса ρ с центром в точке x^0 для $\rho\leqslant\rho_0$, $\rho_0=\text{const}>0$, пересекает границу $\partial\Omega$ области Ω при любой точке x^0 из $\partial\Omega$, то обобщенное решение $u(x)$ задачи Дирихле для уравнения $\Delta\Delta u=f$, $f\in L^2(\Omega)$, с однородными граничными условиями принадлежит классу $C^{3/2}(\overline{\Omega})$. Получены также неулучшаемые оценки, характеризующие порядок обращения в нуль решения $u(x)$ и $\operatorname{grad} u(x)$ в граничной точке x^0 области Ω, при определенных условиях геометрического характера на структуру границы в окрестности этой точки.

В настоящей работе получено обобщение результатов работы [1] для уравнения

$$\Delta\Delta u = f + \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial f_j}{\partial x_j}, \tag{1}$$

где $f\in L^p(\Omega)$, $p\geqslant 1$, $f_1, f_2\in L^q(\Omega)$ при некотором $q>1$. С помощью этих результатов получены аналогичные теоремы о гладкости обобщенных решений в негладких двумерных областях для системы уравнений Навье — Стокса и для системы Кармана.

Вопросы гладкости обобщенных решений задачи Дирихле для бигармонического уравнения рассматриваются также в работах [2, 3] (см. обзор в [4]).

Для системы уравнений Навье — Стокса в двумерной области Ω с кусочно-гладкой границей в работе [5] доказана непрерывность первых производных обобщенного решения задачи Дирихле, а в работе [6] получено асимптотическое разложение решения этой задачи в окрестности угловой точки границы $\partial\Omega$ области Ω. Система уравнений Навье — Стокса в кусочно-гладкой двумерной области рассматривается также в [7] (см. [4]).

Вопрос о существовании обобщенных решений краевых задач для системы уравнений Кармана изучался во многих работах (см., например, [8—14]). В работе [13] получена асимптотика обобщенных решений краевой задачи для системы Кармана в окрестности угловой точки границы для некоторого класса областей.

Введем некоторые обозначения. Пусть Ω — ограниченная область в плоскости (x_1, x_2). Через $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ обозначим пространство функций в Ω, полученное пополнением пространства $C_0^\infty(\Omega)$ (бесконечно дифференцируемых финитных функций в Ω) по норме

$$\|u\|_2 = \Big(\int_\Omega \sum_{|\beta|=2} |D^\beta u|^2 dx\Big)^{1/2}, \tag{2}$$

где

$$\beta=(\beta_1,\ \beta_2),\ |\beta|=\beta_1+\beta_2,\ \ D^\beta u=\frac{\partial^{|\beta|}u}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}}.$$

Положим:

$$E(u,v)=\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j},\quad E(u)=E(u,u),$$

$$\nabla u=\operatorname{grad} u=\Big(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ \frac{\partial u}{\partial x_2}\Big).$$

Будем предполагать, что точка O — начало координат и точка O принадлежит $\partial\Omega$ — границе области Ω. Положим

$$\sigma_t=\partial\Omega\cap\{x:|x|=t\},\quad S_t=\Omega\cap\{x:|x|=t\},\quad \Omega_t=\Omega\cap\{x:|x|<t\}.$$

Пусть постоянная ω такова, что $\pi\leqslant\omega\leqslant 2\pi$. Рассмотрим уравнение относительно δ:

$$\sin^2(\omega\delta)=\delta^2\sin^2\omega. \tag{3}$$

Легко видеть, что уравнение (3) имеет при $\pi\leqslant\omega\leqslant 2\pi$ единственное решение $\delta(\omega)$, такое, что $0<\omega\delta(\omega)\leqslant\pi$. Очевидно, $\delta(2\pi)=1/2$.

В дальнейшем будем предполагать, что $1{,}24\pi\leqslant\omega\leqslant 2\pi$. Именно для таких значений ω установлены основные теоремы для бигармонического уравнения (1) с правой частью $f+\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial f_j}{\partial x_j}$, где $f\in L^2(\Omega)$, $f_j\in L^2(\Omega)$, в работах [1] и [4], § 3, с. 37—46. При этом $\delta(\omega)\leqslant 3/4$.

§ 1. Бигармоническое уравнение. Рассмотрим уравнение (1) в двумерной ограниченной области Ω с граничными условиями

$$u|_{\partial\Omega}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial\mu}\Big|_{\partial\Omega}=0, \tag{4}$$

где μ — направление внешней нормали к $\partial\Omega$, $f\in L^p(\Omega)$, $f_j\in L^q(\Omega)$, $j=1, 2$, при некоторых $p\geqslant 1$, $q>1$; условия на q будут указаны ниже.

Обобщенным решением задачи (1), (4) называется функция $u(x)$ из пространства $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$, для которой при любой функции v из $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_\Omega E(u,v)\,dx=\int_\Omega fv\,dx-\sum_{j=1}^{2}\int_\Omega f_j\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx. \tag{5}$$