1985 г. март—апрель *т. 40, вып. 2(242)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.43+531.31

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ЦЕЛОМ И КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

В. В. Козлов

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 33
§ 1. Геометрия областей возможности движения 35
§ 2. Периодические траектории натуральных механических систем . . . 40
§ 3. Периодические траектории необратимых систем 48
§ 4. Асимптотические решения. Приложение к теории устойчивости движения 53
Литература 59

Введение

Одним из основных объектов классической механики является лагранжева система — пара (M, L), где M — гладкое многообразие (пространство положений механической системы), а L — гладкая функция на пространстве касательного расслоения TM (функция Лагранжа или лагранжиан). Можно рассматривать и более общий случай, когда L явно зависит от времени t. Движения лагранжевой системы — это (по определению) гладкие пути x: $[t_1, t_2] \to M$, являющиеся критическими точками функционала (действие по Гамильтону)

$$F = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$$

в классе путей с закрепленными концами (принцип Гамильтона). В локальных координатах $x = (x^1, \ldots, x^n)$ движения могут быть определены как решения уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Левые части этих уравнений преобразуются при замене локальных координат по ковариантному закону. Следовательно, наборы чисел $(L'_{\dot{x}^i})^{\cdot} - L'_{x^i}$ можно рассматривать как ковектор; он называется лагранжевой производной функции L и обычно обозначается $[L]$.

В наиболее простом и распространенном случае «натуральных» механических систем лагранжиан задается функцией $\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle/2 - V(x)$, где $\langle , \rangle$ — риманова метрика на M (удвоенная кинетическая энергия), V: $M \to \mathbb{R}$ — потенциал силового поля. Согласно знаменитому принципу наименьшего действия Мопертюи, траектории движений с полной энергией $\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle/2 +$

$+ V(x) = h$ являются геодезическими линиями метрики Якоби $(h - V)\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle$. В силу интеграла энергии движение происходит в области, где функция $h - V$ неотрицательна. Если $\sup_M(V) < h$, то описание движений натуральной системы сводится к задаче римановой геометрии. С точки зрения теории колебаний больший интерес представляет противоположный случай, когда в некоторых точках на M выполняется равенство $V = h$ [1]). В этих точках метрика Якоби вырождается. Первые нетривиальные результаты о поведении траекторий механической системы в случае вырождения метрики Якоби получены Г. Зейфертом в работе [1]. В отличие от другой работы Г. Зейферта (на родственную тему) о замкнутых траекториях на трехмерной сфере [2], эта работа, к сожалению, долгое время оставалась малоизвестной. Активное изучение областей возможности движения $\{x \in M: V(x) \leqslant h\}$ началось после публикации работ [3], [4]. Основное внимание было сосредоточено на вопросах существования замкнутых траекторий с концами на границе $\{x \in M: h - V = 0\}$. Соответствующие результаты изложены в §§ 1—2.

Если добавить в лагранжиан $L = \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle/2 - V(x)$ слагаемое $\omega(\dot{x})$, где ω — некоторая 1-форма на M, то получим следующий по сложности класс механических систем. Он изучается в § 3. Уравнение Лагранжа будет содержать дополнительное слагаемое — ковектор $[\omega(\dot{x})] = \Omega(\dot{x}, \cdot)$, где 2-форма Ω является внешним дифференциалом 1-формы ω. Наличие этого слагаемого не влияет на сохранность полной энергии. Если уравнение движения представить в виде $[L(\dot{x})](\cdot) = \Omega(\cdot, \dot{x})$, то Ω можно трактовать как дополнительную силу, действующую на натуральную механическую систему. Можно рассматривать и более общий случай, когда форма Ω замкнута, но не обязательно точна. Форму Ω в механике называют обычно формой гироскопических сил. Их природа может быть самой различной. Гироскопические силы появляются при переходе во вращающуюся систему отсчета, при понижении по Раусу числа степеней свободы системы с симметриями (см., например, [5]), а также при описании движения заряженных тел в магнитном поле. В силу разных причин наличие гироскопических сил существенно усложняет задачу о периодических движениях. Существенный прогресс в этой задаче достигнут недавно в работах С. П. Новикова [6] — [8], построившего аналог теории Морса для многозначных функционалов. Теория С. П. Новикова относится как раз к случаю, когда форма Ω не точна. Вопросы существования периодических траекторий рассматриваются в § 3 также с точки зрения теории динамических систем.

В §§ 1—3 используется вариационный принцип стационарности укороченного действия Мопертюи, являющийся следствием принципа Гамильтона и справедливый лишь для автономных систем. В § 4 с помощью принципа Гамильтона установлено существование асимптотических движений. Результаты этого параграфа применяются для исследования устойчивости периодических или почти периодических режимов колебаний. Например, установлены строгие достаточные условия неустойчивости вертикального равновесия маятника на вибрирующем основании. Отметим, что результаты такого сорта обычно получают с помощью приближенного анализа (например, с помощью метода усреднения).

Мы не ставили себе целью дать исчерпывающий обзор работ, связанных с применением вариационного исчисления в целом к классической механике. Мы ограничились лагранжевым аспектом механики, оставив в стороне вариационный принцип теории гамильтоновых систем

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (y \cdot \dot{x} - H)\, dt = 0$$

[1]) См., например, работы [35], [36].

В этой вариационной задаче Гамильтона, модифицированной Пуанкаре ([9], гл. 29), симплектические координаты x, y («координаты-импульсы») считаются независимыми переменными. Функционал «действие», определенный на кривых в фазовом пространстве, неограничен снизу (и сверху), и поэтому метод градиентного спуска теории Морса в задаче о периодических траекториях в этой ситуации не является эффективным. Здесь применяются иные методы, представление о которых могут дать работы [10], [11]. Отметим еще «нетрадиционный» принцип Персиваля [12], обоснованный в работе Дж. Мезера [13]. Этот принцип предназначен для отыскания инвариантных торов гамильтоновой системы, близкой к интегрируемой. Мы не касались также приложений вариационных методов к теории полной интегрируемости уравнений движения механических систем. Эти вопросы обсуждаются в работе [14] (см. также [15]).

В заключение автор выражает признательность В. И. Арнольду и С. В. Болотину, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд замечаний.

§ 1. Геометрия областей возможности движения

1.1. Принцип стационарности укороченного действия. Пусть (M, L) — лагранжева система с лагранжианом $L = L_2 + L_1 + L_0$, где L_s — гладкие функции на TM, однородные по скоростям степени однородности s. Будем считать форму L_2 положительно определенной, так что L_2 — кинетическая энергия системы — задает риманову метрику на M. Функцию L_0: $M \to \mathbb{R}$ можно отождествить с силовой функцией U: $M \to \mathbb{R}$ ($U = -V$).

Уравнение Лагранжа $[L] = 0$ имеет интеграл энергии $H = L_2 - L_0$. При фиксированном значении $H = h$ движение может происходить лишь в области $B_h = \{x \in M: V \leqslant h\}$, называемой областью возможности движения. При $h > \overline{h} = \sup_M V$ множество B_h совпадает со всем пространством положений M. Если $h < \overline{h}$, то граница $\partial B_h \neq \varnothing$. В типичном случае, когда h — регулярное значение функции H: $TM \to \mathbb{R}$, область B_h — гладкое многообразие с гладким краем $\partial B_h = \Sigma_h$, размерность которого на единицу меньше размерности M.

Пусть для простоты записи $h = 0$ (если $h \neq 0$, то можно заменить L на $L + h$). Предположим, что $B \setminus \Sigma \neq \varnothing$ (здесь $B = B_0$, $\Sigma = \Sigma_0$).

Определение. Функционал

$$F^* = \int_{t_1}^{t_2} (2\sqrt{L_0 L_2} + L_1)\, dt = F - \int_{t_1}^{t_2} (\sqrt{L_2} - \sqrt{L_0})^2\, dt,$$

определенный на гладких кривых x: $[t_1, t_2] \to B$, назовем *укороченным действием* или *действием по Мопертюи*.

Подынтегральное выражение в F^* является однородной функцией скорости степени 1. Следовательно, величина укороченного действия F^* не зависит от параметризации пути интегрирования.

Теорема 1. *Гладкий путь* x: $[t_1, t_2] \to B \setminus \Sigma$ *такой, что* $H(\dot{x}(t)) = 0$ *для всех* $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ *является решением уравнения Лагранжа* $[L] = 0$ *в том и только том случае, когда этот путь является критической точкой функционала* F^* [1]).

Доказательство. Пусть $[L]_{x(t)} = 0$ и $L_2(\dot{x}(t)) \equiv L_0(x(t))$. Тогда

$$\delta F^* = \delta F - 2\int_{t_1}^{t_2} (\sqrt{L_2} - \sqrt{L_0})\, \delta\, (\sqrt{L_2} - \sqrt{L_0})\, dt = 0. \tag{1}$$

[1]) Исторически «принцип Мопертюи» (теорема 1) предшествовал более простому принципу стационарности действия Гамильтона. «Фактическое содержание этого «принципа» не было совсем ясным Мопертюи. Точная формулировка, приведенная в тексте, принадлежит Якоби и его предшественникам Эйлеру и Лагранжу» (А. Уинтнер [16], с. 153).

Обратно, пусть $x\colon [s_1, s_2] \to B \setminus \Sigma$ — некоторый гладкий путь, являющийся стационарной точкой функционала F^*. Положим

$$t = \int_{s_0}^{s} \sqrt{L_2}/\sqrt{L_0}\, d\tau.$$

Тогда, очевидно, гладкий путь $x(s(t))\colon [t_1, t_2] \to B \setminus \Sigma$ удовлетворяет уравнению $L_2 = L_0$. Если $\delta F^* = 0$, то из формулы (1) вытекает, что $\delta F = 0$. Теорема доказана.

Определим внутри области B риманову метрику $\langle\,,\rangle$, положив

$$\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle = 4L_0(x)L_2(\dot{x}), \quad \dot{x} \in TB.$$

Эта метрика называется метрикой Якоби. Для натуральных систем, когда форма гироскопических сил $L_1 \equiv 0$, теорема 1 означает, что в области $B \setminus \Sigma$ движения с нулевой полной энергией совпадают с геодезическими линиями метрики Якоби.

Когда $h > \overline{h}$, область B совпадает с M и $(B, \langle\,,\rangle)$ — обычное риманово многообразие. В противном случае граница Σ области B не пуста и метрика Якоби имеет особенность: длины кривых, лежащих на Σ, равны нулю.

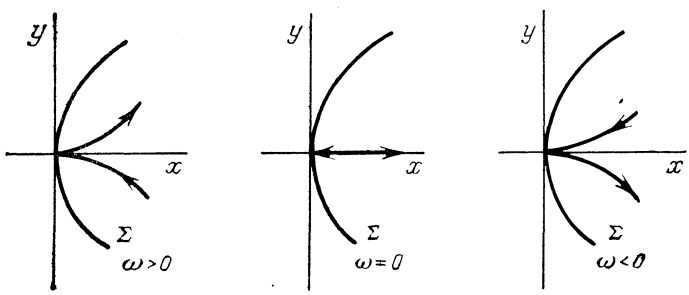

Рис. 1

Натуральные системы обладают свойством «обратимости»: вместе с решением $x(t)$ уравнения движения имеют решение $x(-t)$. Из этого простого замечания и теоремы единственности вытекает

Предложение 1. *Пусть* $x\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to B$ — *движение натуральной системы и* $x(0) \in \Sigma$. *Тогда* $x(t) = x(-t)$ *для всех* $-\varepsilon < t < \varepsilon$.

В общем необратимом случае предложение 1, конечно, несправедливо.

Пример 1. Рассмотрим лагранжеву систему ($\mathbb{R}^2 = \{x, y\}$, L) с лагранжианом $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 + \omega(x\dot{y} - y\dot{x}) + U(x, y)$. Уравнения движения

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + U'_x, \quad \ddot{y} = -2\omega\dot{x} + U'_y \tag{2}$$

по форме совпадают с уравнениями ограниченной задачи трех тел (см. [16], гл. VI). Пусть точка $(0, 0) \in \Sigma$ и ось x направлена по нормали к Σ внутрь области B. Пусть $(x, y)\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to B$ — решение уравнений (2) такое, что $x(0) = y(0) = 0$. Следовательно, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$. Предположим, что точка $x = y = 0$ является регулярной точкой силовой функции U. Поскольку $U'_y(0) = 0$, то $U'_x(0) > 0$ (с учетом выбора направления оси x). Из уравнений (2) вытекает, что $\ddot{x}(0) = \alpha > 0$, $\ddot{y}(0) = 0$, $\dddot{y}(0) = -2\omega\alpha$. Следовательно, по формуле Тейлора имеем разложения

$$x(t) = \alpha t^2/2 + o(t^2), \quad y(t) = -2\omega\alpha t^3/3 + o(t^3).$$

Таким образом, вблизи точки возврата $x = y = 0$ обе ветви траектории имеют вид полукубической параболы (рис. 1). Этот вывод справедлив, конечно, и для системы самого общего вида.

1.2. Геометрия окрестности границы. Предположим, что граница Σ компактна и на ней нет положений равновесия натуральной системы ($dU|_\Sigma \neq 0$). Пусть $q \in \Sigma$ и $t \geqslant 0$. Обозначим через $x(q, t)$ решение уравнений движения со следующими начальными условиями:

$$x(q, 0) = q, \quad \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} x = 0. \tag{3}$$

Наша задача — изучить гладкое отображение x: $\Sigma \times [0, \varepsilon) \to B$ [1]).

Поскольку функция U: $M \to \mathbb{R}$ не имеет критических точек на Σ, то

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big|_{t=0} U(x(q, t)) = -2L_2^*(U'(q)) < 0, \tag{4}$$

где L_2^*: $T^*M \to \mathbb{R}$ — функция, двойственная к кинетической энергии L_2: $TM \to \mathbb{R}$ (в смысле преобразования Лежандра). Следовательно, отображение x: $\Sigma \times [0, \varepsilon) \to B$ гомеоморфно отображает малую окрестность $\Sigma \times \{0\}$ на некоторую окрестность Σ в B, а обратное отображение является гладким вне Σ.

Пусть $s(q, t)$ — длина дуги в метрике Якоби вдоль геодезической $t \mapsto x(q, t)$:

$$s(q, t) = \int_0^t \left|\frac{\partial x(q, t)}{\partial t}\right| dt = 2\int_0^t U(x(q, t))\, dt.$$

Из (3) и (4) следует, что при $t = 0$

$$s = s'_t = s''_{tt} = 0, \quad s'''_{ttt} > 0.$$

По теореме о неявной функции уравнение $r^3 = s(q, t)$ при достаточно малых значениях $r \geqslant 0$ можно разрешить относительно t; функция $t(q, r)$ гладкая и при $r = 0$

$$t = 0, \quad t'_r > 0. \tag{5}$$

При всех $q \in \Sigma$ и малых $r \geqslant 0$ определено гладкое отображение $(q, r) \mapsto (q, t(q, r))$. Так как его якобиан при $r = 0$ равен $t'_r > 0$ и Σ компактна, то это отображение является диффеоморфизмом в достаточно малой окрестности множества $\Sigma \times \{0\}$. При малых $\varepsilon > 0$ можно определить отображение f: $\Sigma \times [0, \varepsilon] \to B$ по формуле $f(q, s) = x(q, t(q, s^{1/3}))$, причем f гомеоморфно отображает $\Sigma \times [0, \varepsilon]$ на некоторую окрестность Σ в B, а ограничение f на $\Sigma \times (0, \varepsilon)$ есть диффеоморфизм.

Для всех $0 < s \leqslant \varepsilon$ положим $W_s = f(\Sigma \times [0, s])$, $B_s = B \setminus f(\Sigma \times [0, s))$ и $\Sigma_s = f(\Sigma \times \{s\})$.

Лемма 1. *Множества W_s, B_s и Σ_s — гладкие подмногообразия в B, диффеоморфные соответственно $\Sigma \times [0, 1]$, B и Σ.*

Действительно, отображение $(q, r) \mapsto f(q, r^3)$ гладкое и в силу (3) — (5) при $r = 0$

$$f = q, \quad f'_r = 0, \quad U''_{rr}(f(q, r^3)) < 0.$$

Предложение 2. *При малых значениях ε множество W_ε обладает следующими свойствами:*

1) *геодезические метрики Якоби, начинающиеся на Σ, пересекают гиперповерхность $\Sigma_s \subset W_\varepsilon$ $(0 < s \leqslant \varepsilon)$ под прямым углом;*

2) *для любой точки $z \in W_\varepsilon$ существует единственная геодезическая γ_z, начинающаяся на Σ и проходящая через z;*

3) *геодезическая γ_z — кратчайшая среди кусочно-гладких кривых, соединяющих точку z с множеством Σ;*

4) *существует $\delta > 0$ такое, что каждая геодезическая метрики Якоби длины, меньшей δ, соединяющая две точки из W_ε, целиком содержится в W_ε.*

---

[1]) Если область B компактна, то отображение x определено на $\Sigma \times [0, \infty)$.

Заключения 1) и 4) являются аналогом известных утверждений Гаусса и Уайтхеда из римановой геометрии. Доказательство см. в [17].

Из этого предложения вытекает, в частности, что Σ_s ($s < \varepsilon$) совпадает с множеством точек из B, удаленных от границы на расстояние s. Аналогичную геометрическую интерпретацию можно дать множествам W_s и B_s.

1.3. Риманова геометрия областей возможности движения с краем. Пусть точки $a, b \in B$. Обозначим через Ω_{ab} множество всех кусочно-гладких путей γ: $[0, 1] \to B$ с началом a и концом b. Определим функцию d: $B \times B \to \mathbb{R}$ по формуле $d(a, b) = \inf\{l(\gamma)\colon \gamma \in \Omega_{ab}\}$, где $l(\gamma)$ — длина пути γ в метрике Якоби. Неотрицательная функция d задает отклонение на множестве B, поскольку:

1) $d(a, a) = 0$ для всех $a \in B$;
2) $d(a, b) = d(b, a)$ для всех $a, b \in B$;
3) $d(a, b) + d(b, c) \geqslant d(a, c)$ для всех $a, b, c \in B$.

Отметим, что отклонение d не является расстоянием на B, так как $d(a, b) = 0$ для любых точек a, b из одной связной компоненты границы Σ. Однако если $a \notin \Sigma$, то из равенства $d(a, b) = 0$ следует $a = b$. Значит, d есть расстояние внутри области B, и поэтому $(B \setminus \Sigma, \langle , \rangle)$ является (неполным) римановым многообразием.

Расстоянием от точки $c \in B$ до границы Σ назовем число

$$\partial(c) = \inf_{x \in \Sigma} d(c, x).$$

Если граница связна, то $\partial(c) = d(c, a)$ для всех $a \in \Sigma$. Расстояние $\partial(c) = 0$ тогда и только тогда, когда $c \in \Sigma$. Отметим непрерывность функций d и ∂ соответственно на $B \times B$ и B.

Предложение 3. *Пусть множество B компактно. Тогда:*

α) *если Σ связна, то для всех $a, b \in B$*

$$d(a, b) \leqslant \partial(a) + \partial(b),$$

β) *если $d(a, b) < \partial(a) + \partial(b)$, то точки a, b можно соединить геодезической метрики Якоби длины $d(a, b)$, целиком лежащей в $B \setminus \Sigma$.*

Это утверждение просто доказывается стандартными методами римановой геометрии.

Теорема 2 [4]. *Если B компактно, то любую точку $a \in B$ можно соединить с некоторой точкой Σ геодезической линией длины $\partial(a)$.*

Пусть $x(q, t) \in B$ — образ точки (q, t) при гладком отображении x: $\Sigma \times [0, \infty) \to B$ (см. п. 1.2). Так как уравнения движения обратимы, справедливо

Следствие.

$$\bigcup_{t \geqslant 0} \bigcup_{q \in \Sigma} x(q, t) = B.$$

Доказательство теоремы 2. Пусть γ': $[0, {}^1/_2] \to B$ — кратчайшая геодезическая, соединяющая точку $\gamma'(0) = a$ с гиперповерхностью Σ_ε. Такая кривая существует, и она ортогональна Σ_ε в точке $\gamma'({}^1/_2)$. Согласно предложению 3 существует геодезическая γ'': $[{}^1/_2, 1] \to B$ длины ε, соединяющая точку $\gamma''({}^1/_2) = \gamma'({}^1/_2)$ с границей Σ. Кривая γ: $[0, 1] \to B$, совпадающая в интервале $[0, {}^1/_2]$ ($[{}^1/_2, 1]$) с $\gamma'(\gamma'')$, является, очевидно, гладкой геодезической длины $\partial(a)$, причем $\gamma(0) = a$ и $\gamma(1) \in \Sigma$.

Теорему 2 можно рассматривать как аналог теоремы Хопфа — Ринова (см. [18]) из римановой геометрии. Отметим, что, в отличие от риманова случая, здесь даже при компактном B не каждые две точки можно соединить геодезической метрики Якоби.

Пример 2. Рассмотрим колебания плоского гармонического осциллятора, описываемые уравнениями $\ddot{x} = -x$, $\ddot{y} = -y$, с полной энергией $h = {}^1/_2$. В этой задаче B совпадает с единичным кругом $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Можно

показать, что множество точек единичного круга, в которые можно попасть из точки $(x, y) = (a, 0)$ с начальной скоростью $|v| = \sqrt{1 - a^2}$, задается неравенством $x^2 + y^2/(1 - a^2) \leqslant 1$ (см. рис. 2). Когда $a \to 0$ $(a \to 1)$, это «множество достижимости» [1]) стремится ко всей области B (к отрезку $y = 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$).

В необратимом случае теорема 2 несправедлива.

Пример 3. Рассмотрим плоский гармонический осциллятор, находящийся под действием дополнительных гироскопических сил:

$$\ddot{x} = -2\omega\dot{y} - x, \quad \ddot{y} = 2\omega\dot{x} - y. \tag{6}$$

Такие уравнения описывают, в частности, малые колебания маятника Фуко (см. [25]). В этой задаче B снова совпадает с кругом $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Пусть

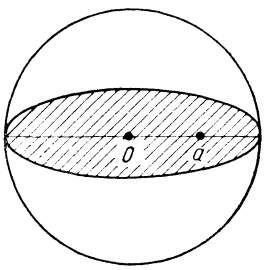

Рис. 2

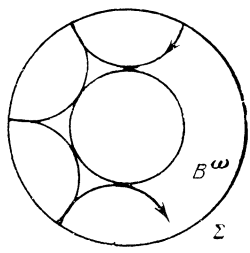

Рис. 3

B^ω — множество точек из B, в которые можно попасть с границы Σ, двигаясь по траекториям системы (6). В полярных координатах r, φ уравнения (6) примут следующий вид:

$$\ddot{r} = r\dot{\varphi}(\dot{\varphi} - 2\omega) - 1), \quad (r^2\dot{\varphi})^{\cdot} = (\omega r^2)^{\cdot}.$$

Второе уравнение можно проинтегрировать: $r^2\dot{\varphi} = \omega r^2 + c$. Поскольку $\dot{r} = \dot{\varphi} = 0$, $r = 1$ при $t = 0$, то $c = -\omega$. После подстановки $\dot{\varphi} = (1 - r^{-2})\omega$ в первое уравнение мы получим систему с одной степенью свободы:

$$\ddot{r} = -(1 + \omega^2)\, r + \frac{\omega^2}{r^3}.$$

Из интеграла энергии

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + (1 + \omega^2)\,\frac{r^2}{2} + \frac{\omega^2}{2r^2} = \frac{1}{2} + \omega^2$$

вытекает, что множество B^ω задается неравенствами

$$\frac{\omega^2}{1 + \omega^2} \leqslant r^2 \leqslant 1.$$

Следовательно, при $\omega \neq 0$ область B^ω не совпадает с B; если $\omega \to 0$, то B^ω стремится к B, а при $\omega \to \infty$ область B^ω вырождается в границу $\Sigma = \{x^2 + y^2 = 1\}$. Траектории системы (6), начинающиеся на Σ, показаны на рис. 3. При почти всех значениях ω они всюду плотно заполняют область B^ω. Отметим, что если траектория системы (6) проходит через начало координат, то постоянная $c = 0$ и, следовательно, $\dot{\varphi} \equiv \omega$. В этом случае точка совершает гармонические колебания с частотой $\sqrt{1 + \omega^2} > 1$ вдоль отрезка длины $2/\sqrt{1 + \omega^2} < 2$, проходящего через начало координат и равномерно вращающегося с постоянной угловой скоростью ω. Наличие таких движений — характерное свойство маятника Фуко.

[1]) Общее определение множества достижимости дано Я. В. Татариновым в работе [19].

В общем необратимом случае обозначим через B^+ замкнутое множество точек из B, где выполнено неравенство $4L_0L_2 \geqslant L_1^2$. Если исключить вырожденный случай, когда в некоторых точках на Σ линейная функция $L_1 \equiv 0$, то $B^+ \subset B \setminus \Sigma$. Внутри области B^+ подынтегральное выражение в функционале укороченного действия F^* положительно определено. Это свойство имеет место одновременно для механических систем с лагранжианами $L_\pm = L_2 \pm L_1 + L_0$. Отметим, что если $x(t)$ — решение уравнения Лагранжа $[L_+] = 0$, то $x(-t)$ — решение уравнения $[L_-] = 0$ и наоборот.

Может случиться, что B^+ пусто. В этом случае можно поступить следующим образом. Пусть $L_1 = a(x)\cdot\dot{x}$ и $x_0 \in B \setminus \Sigma$. Заменим локально форму L_1 на $L_1 - \hat{L}_1$, где $\hat{L}_1 = a(x_0)\cdot\dot{x}$. Поскольку форма $\hat{L}_1$ замкнута, то при такой замене уравнение Лагранжа $[L] = 0$ не изменится. Для новой функции Лагранжа в малой окрестности точки x_0 справедливо неравенство $4L_0L_2 > L_1^2$, так как при $x = x_0$ форма $L_1 \equiv 0$. Это замечание позволяет варьировать форму и расположение области B^+.

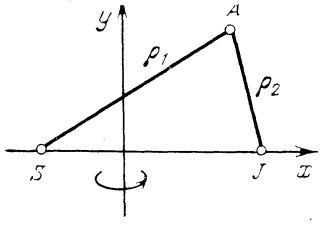

Рис. 4

Уменьшим область B^+, выбросив из нее ε-окрестность (например, в метрике Якоби) границы ∂B^+. Оставшееся множество обозначим B^+_ε.

Предложение 4. *Пусть B компактна и при некотором $\varepsilon > 0$ множество B^+_ε не пусто. Тогда*:

1) *для любой точки $a \in B^+_\varepsilon$ существует решение x: $[0, \tau] \to B^+_\varepsilon$ уравнения Лагранжа $[L] = 0$ такое, что $x(0) = a$ и $x(\tau) \in \partial B^+_\varepsilon$;*

2) *для любой точки $a \in B^+_\varepsilon$ существует решение y: $[0, \tau] \to B^+_\varepsilon$ такое, что $y(0) \in \partial B^+_\varepsilon$ и $y(\tau) = a$.*

Доказательство. Кривая $x(t)$ $(y(-t))$ доставляет минимум функционалу действия F^*, соответствующего лагранжиану $L_+(L_-)$ на множестве кусочно-гладких кривых, соединяющих точку a с точками границы B^+_ε.

Замечание. В отличие от теоремы 2 в предложении 4 постоянную ε нельзя положить равной нулю (даже в случае, когда $B^+ \subset B \setminus \Sigma$).

Пример 4. Движение астероида в ограниченной задаче трех тел описывается уравнением (2), в котором нужно положить $\omega = 1$ и

$$U = \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}; \quad \rho_1 = \sqrt{(x+\mu)^2+y^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2+y^2}.$$

В этой задаче Солнце и Юпитер с массами $1 - \mu$ и μ вращаются с единичной угловой скоростью по круговым орбитам с радиусами μ и $1 - \mu$ вокруг их общего центра масс, а астероид — тело ничтожно малой массы — движется в плоскости эклиптики, испытывая притяжение со стороны Солнца и Юпитера (рис. 4); подробности см. в [16] гл. VI. Область B (называется в небесной механике областью Хилла) задается неравенством $U \geqslant -h$. Если L_1 имеет «стандартный» вид $x\dot{y} - y\dot{x}$, то B^+ совпадает с множеством

$$\left\{\frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} \geqslant -h\right\},$$

которое является областью возможности движения в задаче двух неподвижных центров (неподвижные Солнце и Юпитер притягивают астероид по закону всемирного тяготения).

§ 2. Периодические траектории натуральных механических систем

2.1. Вращения и либрации. Решение x: $\mathbb{R} \to M$ уравнений Лагранжа $[L] = 0$ будет периодическим, если $x(t + \tau) = x(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$ при некотором $\tau > 0$. Траектория периодического решения всегда замкнута. Нас

будет интересовать вопрос о существовании замкнутых траекторий при фиксированном значении полной энергии h. Будем считать h регулярным значением (чтобы исключить тривиальные периодические траектории — положения равновесия).

Предложение 5. *Замкнутая траектория* γ *периодического решения* $x\colon \mathbb{R} \to B$ *с нулевым запасом полной энергии либо*:

1) *не пересекается с* Σ,

либо

2) *имеет с* Σ *ровно две общие точки.*

Каждой траектории первого типа отвечают два различных периодических решения (вращения по γ в противоположных направлениях), а траектории второго типа — единственное периодическое решение (колебательное движение между граничными точками γ). Периодические движения первого типа назовем вращениями, а второго — либрациями. Из предложения 1 вытекает, что если траектория некоторого решения $x\colon \mathbb{R} \to B$ имеет с границей Σ две общие точки, то других общих точек нет и решение $x(\cdot)$ является либрацией.

Если $\Sigma = \varnothing$, то вопрос о существовании периодических вращений сводится к вопросу о наличии замкнутых геодезических риманова многообразия $(M, \langle , \rangle)$. Эта классическая задача римановой геометрии достаточно хорошо изучена (по крайней мере, в случае компактного M). Если M неодносвязно, то, как показал Адамар в 1898 г., каждую негомотопную нулю замкнутую кривую можно продеформировать в замкнутую геодезическую минимальной длины в ее свободном гомотопическом классе. Это замечание позволяет оценить снизу число различных замкнутых геодезических на неодносвязном многообразии. Задача о существовании периодических геодезических в случае односвязного M намного сложнее. В 1905 г. Пуанкаре установил существование таких кривых на выпуклой двумерной сфере [1]. Позже этот результат был распространен Биркгофом на случай произвольной многомерной римановой сферы. В работе Л. А. Люстерника и Л. Шнирельмана (1929) доказано существование трех несамопересекающихся замкнутых геодезических на двумерной сфере. При некоторых дополнительных ограничениях аналогичный результат справедлив в многомерном случае: если гауссова кривизна K римановой сферы S^n (во всех точках и по всем двумерным направлениям) удовлетворяет неравенствам $K_0/4 < K \leqslant K_0$ с некоторым $K_0 > 0$, то на S^n существует n несамопересекающихся замкнутых геодезических (В. Клингенберг). Существование замкнутой геодезической на любом компактном многообразии установлено Л. А. Люстерником и А. И. Фетом (1951). Для некоторых односвязных многообразий удалось даже доказать существование бесконечного числа различных замкнутых геодезических (Громол и Мейер). В настоящее время нет пока полной ясности в вопросе о том, справедлив ли этот результат в общем случае односвязного многообразия. Обстоятельный обзор современного состояния затронутых вопросов можно найти в книге Клингенберга [20].

В случае непустого Σ ситуация с существованием периодических траекторий выглядит по-другому. Хорошее представление об этом случае дает

Пример 5. Рассмотрим колебания «полигармонического» осциллятора, описываемые уравнениями $\ddot{x}^s + \omega_s^2 x^s = 0$ $(1 \leqslant s \leqslant n)$ с рационально независимыми частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Область возможности движения B с полной энергией h совпадает с эллипсоидом $\sum \omega_s^2 x^{s^2} \leqslant 2h$. При любом $h > 0$ уравнения движения имеют ровно n периодических колебаний —

---

[1] Для решения этой задачи Пуанкаре предложил два подхода. Первый основан на принципе аналитического продолжения периодических траекторий (см. также [34]). Второй подход чисто вариационный: среди замкнутых несамопересекающихся кривых, разделяющих сферу на две половины с равной полной кривизной, ищется кривая минимальной длины; это и будет искомая замкнутая геодезическая.

либраций, траектории которых совпадают с главными осями этого эллипсоида. Стоит подчеркнуть отсутствие вращений и конечность числа периодических траекторий при фиксированном значении полной энергии. Если частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ рационально соизмеримы, то количество либраций может увеличиться. Например, в случае $n = 2$ при рациональном отношении частот ω_1/ω_2 через каждую точку Σ проходит траектория либрационного периодического движения. Для доказательства надо учесть, что при рациональном отношении ω_1/ω_2 все траектории замкнуты, и воспользоваться предложением 5. Отметим частный случай, когда $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = n \in \mathbb{N}$. Либрации энергии h задаются формулами $x^1 = x_0^1 \cos t$, $x^2 = x_0^2 \cos nt$, где $x_0^1 = \sqrt{2h} \sin\alpha$, $x_0^2 = \sqrt{2h}\,(\cos\alpha)/n$, α — произвольная постоянная. Пусть $2h = n^2 + 1$; тогда при некотором α значения x_0^1 и x_0^2 равны 1 и траектория соответствующей либрации в плоскости $\mathbb{R}^2 = \{x^1, x^2\}$ совпадает с частью графика многочлена Чебышёва T_n.

2.2. Либрации в неодносвязных областях возможности движения. Для любой группы π будем через $r(\pi)$ обозначать наименьшее возможное число образующих этой группы. Пусть B/Σ — топологическое пространство, полученное из B стягиванием границы Σ в точку, а $\pi(B/\Sigma)$ — его фундаментальная группа.

Теорема 3. *Пусть область B компактна и на Σ нет положений равновесия. Тогда число различных либраций в области B не меньше $r(\pi(B/\Sigma))$.*

Замечание. Это число не меньше первого числа Бетти области B по модулю Σ.

Следствие. *Если Σ состоит из n связных компонент, то число либраций в области B не меньше $n - 1$. Более того, для каждой связной компоненты многообразия Σ существует либрация с концом на этой компоненте, причем траектории этих либраций не имеют самопересечений* (*рис.* 5).

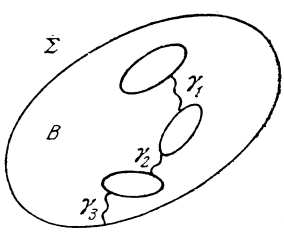

Рис. 5

Действительно, в этом случае группа $\pi(B/\Sigma)$ содержит свободную группу с $(n - 1)$ образующими.

Теорема 3 доказана в работе С. В. Болотина и автора [17]; она аналогична известной теореме Адамара о минимальных замкнутых геодезических неодносвязного риманова многообразия.

Приведем идею доказательства следствия. Можно считать, что B — замкнутое подмногообразие с краем некоторого компактного риманова многообразия M, метрика которого на $B \setminus W_\varepsilon$ совпадает с метрикой Якоби. Пусть $\Sigma_\varepsilon^1, \ldots, \Sigma_\varepsilon^n$ — связные компоненты гиперповерхности Σ_ε, и пусть d_{ij} $(i < j)$ — расстояния между Σ_ε^i и Σ_ε^j. Зафиксируем номер i; среди чисел d_{is} $(i \neq s)$ есть минимальное. Этот минимум реализуется несамопересекающейся геодезической γ_i длины d_{is}, лежащей целиком в $B \setminus W_\varepsilon$ и ортогональной Σ_ε в своих концах. Геодезическую γ_i можно продолжить до либрационного периодического решения с помощью предложения 2 (ср. с доказательством теоремы 2). Количество таких различных «минимальных» либраций, очевидно, не меньше $n - 1$.

Пример 6 ([17]). Рассмотрим задачу о существовании либраций плоского n-звенного математического маятника (рис. 6). Пусть $l_1, \ldots, l_n$ — длины звеньев, которые будем нумеровать от точки подвеса, $P_1, \ldots, P_n$ — веса соответствующих материальных точек, а $\vartheta^1, \ldots, \vartheta^n$ — углы, образуемые звеньями с вертикалью. Пространство положений M является n-мерным тором $\mathbf{T}^n = \{\vartheta^1, \ldots, \vartheta^n \bmod 2\pi\}$, а потенциальная энергия имеет вид

$$V = -\sum_{i=1}^{n} a_i \cos\vartheta^i, \quad a_i = l_i \sum_{j=i}^{n} P_j.$$

Множество критических точек функции $V\colon \mathbf{T}^n \to \mathbb{R}$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех подмножеств множества $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$; индекс критической точки, отвечающий подмножеству $I \subset \Lambda$, равен числу элементов из I, а критическое значение равно

$$h_I = \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \notin I} a_i.$$

Пусть h — некритическое значение потенциальной энергии и $|h| < \sum_\Lambda a_i$. В этом случае область $B \subset \mathbf{T}^n$ имеет непустой край Σ. Положим $\hat{B} = \overline{\mathbf{T}^n \setminus B}$. Так как $B/\Sigma = \mathbf{T}^n/\hat{B}$, то $\pi(B/\Sigma) = \pi(\mathbf{T}^n/\hat{B})$. Положим $r = r(\pi(\mathbf{T}^n/\hat{B}))$ и $\hat{r} = r(\pi(\hat{B}))$. Пусть $k \leqslant n$ — число критических точек функции $V\colon \mathbf{T}^n \to \mathbb{R}$ индекса $n-1$ в множестве B. Докажем, что $r = k$.

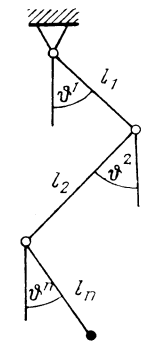

Рис. 6

Действительно, пространство $\mathbf{T}^n/\hat{B}(\hat{B})$ гомотопически эквивалентно клеточному комплексу с k (соответственно $n-k$) одномерными клетками. Поэтому $r \leqslant k$, $\hat{r} \leqslant n-k$. Так как группы $\pi(\hat{B})$ и $\pi(\mathbf{T}^n/\hat{B})$ порождают группу $\pi(\mathbf{T}^n)$, то $n \leqslant r + \hat{r} \leqslant k + (n-k) = n$. Поэтому $r = k$.

Применяя теорему 3, получим следующее утверждение: если $h \neq h_I$ для всех $I \subset \Lambda$ и $|h| < \Sigma_\Lambda a_i$, то число либраций с полной энергией h не меньше числа индексов i таких, что $a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_n < h$. В зависимости от значения h оценка снизу числа различных либраций изменяется от 0 до n. В п. 2.4 будет показано, как можно улучшить эту оценку, используя свойства симметрии.

Теорема 3 о кратчайших либрациях допускает следующее уточнение, принадлежащее С. В. Болотину.

Т е о р е м а 4. *Пусть B компактна и на Σ нет положений равновесия. Тогда в области B существует по крайней мере $r(\pi(B/\Sigma))$ различных неустойчивых либраций с вещественными характеристическими показателями.*

Доказательство этого утверждения состоит как раз в проверке вещественности всех характеристических показателей кратчайших либрационных решений, существование которых гарантирует теорема 3.

П р и м е р 7. Рассмотрим движение материальной точки в центральном поле с потенциалом $V = r + r^{-1}$. При $h > 2$ область возможности движения B является кольцом и через каждую точку границы, очевидно, проходит траектория либрационного решения. Все эти либрации являются кратчайшими; они вырождены, поскольку все их характеристические показатели равны нулю. Неустойчивость либраций легко выводится с помощью интеграла площадей: $r^2\dot{\varphi} = \text{const}$.

В общем случае характеристические показатели отличны от нуля, и поэтому кратчайшие либрации (орбитально) неустойчивы уже в линейном приближении. Более того, поскольку эти либрации являются гиперболическими периодическими решениями, то существуют семейства траекторий, асимптотически приближающихся к траекториям кратчайших либраций при $t \to \pm\infty$.

Пусть $A(\gamma)$ обозначает множество точек в области B, через которые проходят траектории, асимптотические к γ. Представление о виде и расположении множества A дает

П р и м е р 8 (С. В. Болотин). Пусть $M = S^1\{x \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}\{y\}$ и $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 + \cos x - y^2/2$. При $h > 1$ область B диффеоморфна кольцу $|y| \leqslant \sqrt{2(h + \cos x)}$ и кривая $x \equiv \pi$, $y = \sqrt{2(h-1)}\cos t$ является кратчайшей либрацией энергии h. Уравнения Лагранжа $[L] = 0$ имеют два первых интеграла $\dot{x}^2/2 - \cos x$ и $\dot{y}^2 + y^2$. С их помощью легко показать, что

множество $A = \{|\, y \,| \leqslant \sqrt{2(h - 1)}\}$. Отметим, что A не совпадает с B и пересечение $A \cap \Sigma$ состоит из концов траектории кратчайшей либрации.

2.3. Либрации в односвязных областях и гипотеза Зейферта. Первый общий результат о либрациях натуральных систем принадлежит Зейферту. В его работе [1] доказано существование либраций в случае, когда область B диффеоморфна n-мерному диску.

Т е о р е м а 5 (С. В. Болотин). *Если область B компактна и Σ не содержит критических точек потенциала, то в области B существует хотя бы одна либрация.*

Продолжая аналогию с римановой геометрией, можно сказать, что теоремы Г. Зейферта и С. В. Болотина соответствуют результатам Биркгофа и Люстерника — Фета о замкнутых геодезических на n-мерной сфере и произвольном односвязном многообразии.

Доказательство теоремы 5 основано на следующем утверждении:

Л е м м а 2. *Существует $l > 0$ такое, что для всех $0 < \varepsilon \leqslant \delta$ в области $\Lambda_\varepsilon = \overline{B \setminus W_\varepsilon}$ существует геодезическая метрики Якоби длины, меньшей l, с концами на Σ_ε и пересекающаяся с Λ_δ.*

Выведем отсюда теорему 5. Для всех s из интервала $(0, \delta)$ обозначим через γ_s: $[a_s, b_s] \to \Lambda_s$ геодезическую из леммы 2. Будем считать, что γ_s имеет натуральную параметризацию, причем $a_s < 0 < b_s$ и $\gamma_s(0) \in \Lambda_\delta$. Так как область Λ_δ компактна, то найдется последовательность $s_n \to 0$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_{s_n}(0) = x \in \Lambda_\delta, \quad \lim_{n\to\infty} \dot{\gamma}_{s_n}(0) = v.$$

Пусть γ: $(a, b) \to B$ — единственная максимальная геодезическая метрики Якоби, удовлетворяющая условиям $\gamma(0) = x$, $\dot{\gamma}(0) = v$. Ясно, что γ — траектория либрации в B, длина которой не превосходит l.

Лемма 2 доказывается методами теории Морса. Выберем малое $\delta > 0$, и пусть $0 < s < \delta$. Введем пространство кусочно-гладких кривых γ: $[0, 1] \to M$ таких, что $\gamma(0), \gamma(1) \in \Sigma_\varepsilon$; это пространство обозначим Ω. Пусть Γ — подпространство Ω, состоящее из кривых, не пересекающихся с внутренностью Λ_δ. На многообразии M можно указать семейство гладких функций V_s, $0 < s \leqslant \varepsilon$, таких, что V_s совпадает с потенциалом V в области Λ_s, $V_s \geqslant V_\varepsilon$ на M и $\sup\limits_M V_s < h$. При всех $s \in (0, \varepsilon]$ на M зададим метрику $\langle\ ,\ \rangle_s$, которая является метрикой Якоби, определяемой потенциалом V_s и энергией h. Определим, наконец, функционал действия F_s: $\Omega \to \mathbb{R}$ по формуле

$$F_s(\gamma) = \int_0^1 \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle_s \, dt.$$

Критические точки функционала F_s — это в точности геодезические метрики $\langle\ ,\ \rangle_s$, ортогональные Σ_s в своих концах.

Для любого $a > 0$ положим $\Omega_s^a = \{\gamma \in \Omega\colon F_s(\gamma) \leqslant a\}$ и $\Gamma_s^a = \Gamma \cap \Omega_s^a$.

Л е м м а 3. *Если функционал F_s, $0 < s \leqslant \varepsilon$ не имеет критических точек в $\Omega_s^a \setminus \Gamma_s^a$, то Γ_s^a есть деформационный ретракт Ω_s^a.*

Идея доказательства этого утверждения состоит в том, чтобы сдвинуть Ω_s^a «вниз» на Γ_s^a вдоль интегральных кривых векторного поля градиента функционала F_s. Основной момент заключается в использовании выпуклости области W_δ: указанные «кривые наискорейшего спуска» не выходят из пространства Γ_s^a.

Лемма 2 выводится из леммы 3 и следующего топологического факта: так как B/Σ нестягиваемо, то при достаточно больших значениях $a > 0$ пространство Γ_s^a не является деформационным ретрактом Ω_s^a. Подробное доказательство теоремы 5 содержится в работе [21].

П р и м е р 9 [3]. Рассмотрим задачу о вращении твердого тела в осесимметричном силовом поле с потенциалом V. При нулевом значении постоян-

ной кинетического момента эта задача сводится к изучению натуральной системы с двумя степенями свободы на сфере. Из теорем 3 и 5 и результатов теории Морса вытекает следующее утверждение: при всех некритических значениях $h > \min V$ приведенная система имеет периодическое решение энергии h. Если $h > \max V$, то по теореме Люстерника — Шнирельмана на сфере Пуассона имеется не менее трех различных несамопересекающихся периодических траекторий.

Замечание. В работе [39] рассмотрена задача о периодических решениях «лоренцевой» лагранжевой системы с лагранжианом $(S\dot{x}, \dot{x})/2 - V(x)$, где $(\ ,\ )$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, а S — симметрический невырожденный линейный оператор с единственным отрицательным собственным значением. Пусть $\Sigma = \{y \in \mathbb{R}^n: (Sy, y) < 0\}$ — конус в $\mathbb{R}^n$. Если $x(\cdot)$ — движение с нулевой полной энергией, начинающееся в области $C = \{V(x) > 0\}$, то $\dot{x} \in \Sigma$. Так как Σ состоит из двух связных компонент, то переход из одной компоненты Σ в другую (изменение «направления» движения) может происходить лишь на границе C. Если точка x попала на ∂C, то справедливо предложение 1: точка будет двигаться по той же траектории в противоположную сторону. В работе [39] доказано существование либраций в предположении компактности и выпуклости области C, а также условия отсутствия критических точек V на границе C. Доказательство основано на применении топологических теорем о неподвижных точках гладких отображений.

В связи с теоремой 5 естественно возникает вопрос об оценке снизу числа различных либраций в случае, когда пространство B/Σ односвязно. Пример 5 показывает, что универсальная оценка не превосходит размерности области B. Существует гипотеза Зейферта, утверждающая существование n различных либраций, когда область B диффеоморфна n-мерному диску D^n. Эта гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута. Приведем один результат С. В. Болотина в подтверждение гипотезы Зейферта.

Пусть область возможности движения B диффеоморфна D^n, и пусть f: $(D^n, S^{n-1}) \to (B, \Sigma)$ — непрерывное сюръективное отображение. Для любых двух точек $x, y \in S^{n-1}$ определим непрерывную кривую $f_{x,y}$: $[0, 1] \to B$ по формуле $f_{x,y}(t) = f((1-t)x + ty)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Будем считать отображение f достаточно гладким, так что для всех точек $x, y \in S^{n-1}$ кривая $f_{x,y}$ кусочно-гладкая. На таких кривых определено укороченное действие F^*. Положим

$$S = \inf_f \sup_{x,\, y \in S^{n-1}} F^*(f_{x,\,y}).$$

Теорема 6. *Предположим, что для любой либрации γ в области $B \simeq D^n$ выполнено неравенство $2F^*(\gamma) > S$. Тогда в области B существуют n различных либраций $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, таких, что $S/2 < F^*(\gamma_1) \leqslant \ldots \leqslant F^*(\gamma_n) = S$.*

Пример 10. Продолжим рассмотрение задачи из примера 5. Пусть $\omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_n > 0$ — частоты полигармонического осциллятора. Как мы уже видели, эта задача всегда имеет n различных либраций энергии h:

$$\gamma_1\colon\ x^1 = \sqrt{2h}/\omega_1 \cos \omega_1 t, \qquad x^i = 0 \quad (i > 1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\gamma_n\colon\ x^i = 0 \ (i < n), \qquad x^n = \sqrt{2h}/\omega_n \cos \omega_n t.$$

Легко подсчитать, что $F^*(\gamma_i) = \pi h/\omega_i$; таким образом, $F^*(\gamma_1) \leqslant \ldots \leqslant F^*(\gamma_n)$. В этой задаче $S = F^*(\gamma_n)$, и поэтому условие теоремы 6 эквивалентно неравенству $2\omega_n > \omega_1$.

Замечание. В работе [10] рассмотрена родственная задача о существовании периодических решений гамильтоновых уравнений в $\mathbb{R}^{2n}$ с выпук-

лым гамильтонианом H. Доказано, что если для некоторого $a > 0$ выполнены неравенства

$$a \mid z \mid^2 < H(z) < 2a \mid z \mid^2,$$

то на каждом множестве уровня $H(z) = h$, $h > 0$, гамильтонова система имеет по меньшей мере n различных замкнутых траекторий. Для полигармонического осциллятора с частотами $\omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_n > 0$ эти неравенства дают то же самое условие $2\omega_n > \omega_1$, поскольку с помощью замены $q_i = \sqrt{\omega_i} x^i$, $p_i = \dot{x}^i/\sqrt{\omega_i}$ уравнения колебаний осциллятора приводятся к гамильтоновой форме с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum \omega_i (p_i^2 + q_i^2).$$

2.4. Периодические колебания многозвенного маятника [22]. В этом пункте мы получим оценку числа различных периодических движений (как либраций, так и вращений) заданной энергии составного маятника, рассматривавшегося нами в примере 6. Пространством положений этой системы служит n-мерный тор $\mathbf{T}^n = \{\vartheta^1, \ldots, \vartheta^n \bmod 2\pi\}$, где $\vartheta^1, \ldots, \vartheta^n$ — углы, которые образуют стержни с вертикалью. Можно считать, что пространством положений является накрывающее пространство $\mathbb{R}^n = \{\vartheta^1, \ldots, \vartheta^n\}$ и что функция Лагранжа L является функцией на $T\mathbb{R}^n$, 2π-периодической по ϑ^i. Положения равновесия — это точки в $\mathbb{R}^n$ следующего вида: $a = (m_1\pi, \ldots, m_n\pi)$, где m_s — целые числа. Легко понять, что лагранжиан допускает отражения $\mathbb{R}^n$ относительно положений равновесия, т. е. отображения Λ_a: $\vartheta \to -\vartheta + 2a$.

Лемма 4. *Если траектория некоторого движения $\vartheta(t)$ проходит через точку a ($\vartheta(0) = a$), то эта кривая инвариантна относительно отражения Λ_a (т. е. $\vartheta(-t) = \Lambda_a\vartheta(t) = -\vartheta(t) + 2a$). В частности, $\dot{\vartheta}(-t) = \dot{\vartheta}(t)$.*

Лемма 5. *Пусть точка $b \in \mathbb{R}^n$ — другое равновесие ($a \neq b$). Если траектория движения $\vartheta(t)$ содержит точки a и b, то:*

1) *существует $\tau > 0$ такое, что $\vartheta(t + \tau) = \vartheta(t) + 2(b - a)$ для всех $t \in \mathbb{R}$,*

2) *$\dot{\vartheta}(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$.*

Пусть $h_-(h_+)$ — наименьшее (наибольшее) значение потенциальной энергии $V(\vartheta)$.

Предложение 6. Пусть h — некритическое значение потенциала из интервала (h_-, h_+). Через каждую критическую точку потенциала V, лежащую внутри области $B = \{V \leqslant h\} \subset \mathbf{T}^n$, проходит хотя бы одна либрационная траектория. Либрации, проходящие через разные критические точки, различны.

Следствие. *Количество различных либраций в области B не меньше числа положений равновесия маятника внутри B.*

В зависимости от h оценка снизу количества либраций энергии h изменяется от 1 до $2^n - 1$. Эта оценка усиливает результат, отмеченный в примере 6. Правда, оценка в примере 6 справедлива и в тех случаях, когда потенциал не обладает свойством симметрии.

Доказательство предложения 6. Пусть $a' \in B \subset \mathbf{T}^n$ — положение равновесия маятника. Поскольку значение h — некритическое, то по теореме 2 существует движение γ: $[0, \tau] \to B$ такое, что $\gamma(0) = a'$ и $\gamma(\tau) \in \Sigma$. Согласно лемме 4 гладкая кривая γ: $\mathbb{R} \to B$ является искомой либрацией, траектория которой содержит a'. Либрации, проходящие через разные критические точки, различны, поскольку в противном случае (по лемме 5) скорость движения никогда в нуль не обращается.

Рассмотрим теперь случай, когда $h > h_+$. Поскольку $\Sigma = \varnothing$, то периодические движения могут быть только вращениями. Исследуем вопрос о суще-

ствовании периодических вращений n-звенного маятника, при которых k-е звено за период вращения сделает N_k полных оборотов. Такие движения назовем вращениями, принадлежащими типу $]N_1, \ldots, N_n[$.

Предложение 7. *Для любых фиксированных целых чисел* $N_1, \ldots, N_n$ *и любого* $h > h_+$ *существуют* 2^{n-1} *различных периодических вращений типа* $]N_1, \ldots, N_n[$ *с запасом полной энергии* h, *траектории которых на* $\mathbf{T}^n$ *проходят через пары критических точек потенциала* V.

Доказательство. Можно, очевидно, сразу считать, что числа $N_1, \ldots, N_n$ взаимно просты. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n = \{\vartheta\}$ пару критических точек a' и a'' потенциала V, ϑ^k-координаты которых различаются на πN_k. Эти точки накрывают различные точки b' и b'' на $\mathbf{T}^n$. Соединим b' и b'' кратчайшей геодезической метрики Якоби на $\mathbf{T}^n$. Этой геодезической отвечает движение γ: $\mathbb{R} \to \mathbf{T}^n$ такое, что $\gamma(t') = b'$ и $\gamma(t'') = b''$, $t'' > t'$. Пусть кривая ϑ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ накрывает γ и $\vartheta(t') = a'$, $\vartheta(t'') = a''$. По лемме 2 существует $\tau > 0$ такое, что

$$\vartheta(t + \tau) - \vartheta(t) = 2(a'' - a') = (2\pi N_1, \ldots, 2\pi N_n).$$

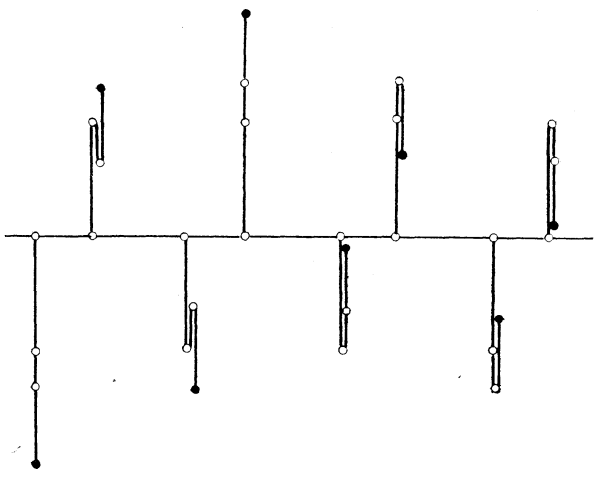

Рис. 7

Следовательно, движение γ: $\mathbb{R} \to \mathbf{T}^n$ — периодическое типа $]N_1, \ldots, N_n[$ с периодом τ. Поскольку числа $N_1, \ldots, N_n$ взаимно просты, то τ — наименьший период γ. Из этого замечания и леммы 5 легко вывести, что траектория γ на $\mathbf{T}^n$ не содержит положений равновесия, отличных от b' и b''.

На рис. 7 изображены четыре пары положений равновесия трехзвенного маятника, которые занимает этот маятник при различных периодических вращениях типа $]1, 2, 3[$.

В заключение покажем, что при некоторых условиях периодические вращения маятника существуют и при значениях $h < h_+$. Для этого рассмотрим двойной маятник с одинаковой длиной стержней l, массы точек равны m_1 и m_2, g — ускорение свободного падения. Лагранжиан равен

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, l^2 \dot{\vartheta}^{1\,2} + \frac{m}{2}\, l^2 \dot{\vartheta}^{2\,2} + m_2 l^2 \dot{\vartheta}^1 \dot{\vartheta}^2 \cos(\vartheta^1 - \vartheta^2) + \\ + m_1 g l \cos \vartheta^1 + m_2 g l (\cos \vartheta^1 + \cos \vartheta^2).$$

Рассмотрим случай, когда величина h близка к h_+. Зафиксировав значение m_1, устремим m_2 к нулю. При достаточно малых m_2 расстояние между точками $a = (0, 0)$ и $b = (0, \pi)$ меньше суммы расстояний от этих точек до границы Σ. Действительно, $d(a, b)$ не превосходит длины отрезка $\{\vartheta^1 = 0, 0 \leqslant \vartheta^2 \leqslant \pi\} \subset \mathbb{R}^2$, равной

$$\sqrt{m_2}\, l \int_0^{\pi} \sqrt{h + m_1 g l + m_2 g l (1 + \cos \vartheta^2)}\, d\vartheta^2.$$

Эта величина стремится к нулю при $m_2 \to 0$. Поскольку при этом область B мало отличается от области $\{h + m_1 g l \cos \vartheta^1 \geqslant 0\}$, то

$$\lim_{m_2 \to 0} \partial(a) = \frac{\sqrt{m_1}\, l}{2} \oint \sqrt{h + m_1 g l \cos \vartheta_1}\, d\vartheta_1 > 0.$$

Значит, при малых m_2 справедливо неравенство $d(a, b) < \partial(a) + \partial(b)$. Согласно предложению 3 существует кратчайшая геодезическая метрики Якоби, лежащая внутри B и соединяющая точки a и b. Этой геодезической отвечает решение уравнений движения с полной энергией h. Поскольку точки a и b положения равновесия, то по лемме 5 найденное решение — периодическое вращение.

§ 3. Периодические траектории необратимых систем

3.1. Системы с гироскопическими силами и многозначные функционалы. До сих пор мы рассматривали ситуацию, когда «полунатуральный» лагранжиан $L = L_2 + L_1 + L_0$ являлся однозначной функцией в пространстве касательного расслоения TM. В частности, 1-форма $\omega \equiv L_1$ определена и однозначна всюду на M. Следовательно, ее внешний дифференциал $\Omega = d\omega$ — 2-форма гироскопических сил — является точной. Полезно обобщить эту ситуацию, рассматривая механические системы с замкнутой (но не обязательно точной) формой гироскопических сил.

Пример 11. Движение заряда по евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2 = \{x, y\}$ в магнитном поле (направленном по оси z) с напряженностью $H(x, y)$ описывается уравнениями $\ddot{x} = -H\dot{y}$, $\ddot{y} = H\dot{x}$. Форма гироскопических сил Ω равна, очевидно, $H\, dx \wedge dy$. Она, разумеется, точна. Если, например, $H = \text{const}$, то $\omega = H(y\, dx - x\, dy)/2$. Рассмотрим частный случай, когда магнитное поле $H(x, y)$ 2π-периодично по x и y. В этом случае в качестве пространства положений можно взять двумерный тор $\mathbf{T}^2 = \{x, y \bmod 2\pi\}$ с плоской метрикой. Форма Ω точна только тогда, когда полный поток магнитного поля

$$\overline{H} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} H\, dx \wedge dy$$

равен нулю.

Пример 12. Рассмотрим движение заряда по поверхности единичной сферы $\langle r, r\rangle = 1$ в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3 = \{r\}$. Предположим, что магнитное поле однородно по величине и направлено ортогонально поверхности сферы. Уравнение движения можно представить с помощью множителя Лагранжа

$$\ddot{r} = H(\dot{r} \times r) + \lambda r, \quad \langle r, r\rangle = 1; \quad H = \text{const}.$$

Откуда $\lambda = -\langle \dot{r}, \dot{r}\rangle$. Поскольку полная энергия $E = \langle \dot{r}, \dot{r}\rangle/2$ сохраняется, то $\lambda(t) = -2E = \text{const}$. Можно показать, что траектории этого уравнения на единичной сфере с фиксированным значением энергии E являются окружностями радиуса ρ, где

$$\rho^2 = \frac{2E/H^2}{1 + 2E/H^2}. \tag{7}$$

В примере 11 «ларморовский радиус» $\rho = \sqrt{2E}/H$. Форма гироскопических сил $\Omega = H\, d\sigma$, где $d\sigma$ — элемент площади на единичной сфере. Она не точна, поскольку полный поток магнитного поля через сферу равен $4\pi H \neq 0$.

Пример 13. Вращение твердого тела с неподвижной точкой в осесимметричном силовом поле описывается системой уравнений Эйлера — Пуассона (в подвижном пространстве)

$$\dot{M} = M \times \omega + e \times V', \quad \dot{e} = e \times \omega.$$

Здесь $M = I\omega$ — кинетический момент твердого тела, ω — его угловая скорость, I — тензор инерции, e — единичный вектор оси симметрии силового поля, $V(e)$ — потенциал. Нетрудно показать, что на фиксированном уров-

не интеграла площадей

$$\{(M, e) \in \mathbb{R}^6: \langle M, e\rangle = c, \ \langle e, e\rangle = 1\}$$

возникает система с гироскопическими силами. Пространством положений служит двумерная сфера S^2, причем форма Ω_c не точна при $c \neq 0$, поскольку

$$\int_{S^2} \Omega_c = 4\pi c. \tag{8}$$

Родственный пример доставляет нам задача Кирхгофа о движении твердого тела в безграничной идеальной жидкости (см. [23]). Зафиксируем постоянные интегралов Кирхгофа $\langle e, e\rangle = p \neq 0$, $\langle M, e\rangle = c$. Соответствующий интегральный уровень является четырехмерным многообразием, диффеоморфным касательному расслоению двумерной сферы S^2. На S^2 возникает система с гироскопическими силами; их форма не точна при $c \neq 0$ ввиду формулы (8), справедливой и в задаче Кирхгофа (см. работу С. П. Новикова [8]).

Вернемся к исследованию общего случая. Рассмотрим область $Q \subset M$ такую, что форма Ω точна в Q: $\Omega = d\omega_Q$. Пусть кривая x: $[0, 1] \to M$ расположена целиком в Q. Тогда на этой кривой можно определить значение укороченного действия

$$F_Q^* = \int_0^1 (|\dot{x}(t)|_h + \omega_Q(\dot{x}(t)))\, dt,$$

где $|\cdot|_h$ — метрика Якоби (она равна $2\sqrt{(h + L_0)L_2}$; см. § 2). Зафиксируем набор 1-форм ω_Q для всех областей Q, где форма Ω точна. Если кривая $x(\cdot)$ лежит в пересечении областей $Q_1 \cap Q_2$, то $\Omega = d\omega_{Q_1} = d\omega_{Q_2}$, и поэтому

$$F_{Q_1}^*(x(\cdot)) - F_{Q_2}^*(x(\cdot)) = \int_{x(\cdot)} (\omega_{Q_1} - \omega_{Q_2}).$$

Так как форма Ω замкнута, то по формуле Стокса значение этого интеграла не изменится, если мы будем варьировать $x(\cdot)$ как кривую с закрепленными концами или как замкнутую кривую. Следовательно, совокупность локальных значений $F_Q^*(x(\cdot))$ определяет «многозначный функционал» на пространстве замкнутых ориентированных кривых K^+ и пространстве путей $K(x_1, x_2)$, соединяющих две точки $x_1, x_2 \in M$. Можно сказать, что вариация δF^* является однозначно определенной 1-формой на пространстве K^+ (или $K(x_1, x_2)$), однако ее интеграл по различным путям в $K^+(K)$ (которые являются вариациями кривых) задает в общем случае многозначную функцию на K^+ (или $K(x_1, x_2)$). Поскольку локально функционал F^* можно считать однозначным, то для него справедливы все локальные свойства классического действия (в частности, справедлива теорема 1, верна теорема Морса об индексе и т. д.). Многозначный функционал F^* становится однозначным после перехода к некоторому бесконечнолистному накрытию $\hat{K} \to K^+$ ($\widetilde{K}(x_1, x_2) \to K(x_1, x_2)$), однако, в отличие от классической теории Морса, однозначный функционал F^* может быть не ограничен снизу на $\hat{K}$ (или $\widetilde{K}$). Это обстоятельство создает дополнительные трудности при изучении вопросов существования периодических траекторий или траекторий с фиксированными концами с помощью градиентного спуска.

Многозначные функционалы введены С. П. Новиковым. В его работах [6] — [8] [1]) построена расширенная теория Морса для случая периодической

[1]) Читателю следует иметь в виду имеющиеся в [6] — [8] некоторые неточности. Они связаны с тем, что в этих работах рассматривается пространство ориентированных замкнутых кривых без самопересечений. Однако применение градиентного спуска в необратимом случае может привести к появлению самопересечений. Относительно уточнений см. [24].

вариационной задачи. Прежде чем перейти к краткому изложению результатов С. П. Новикова, мы приведем два простых примера, показывающих неприменимость теории Морса к многозначным функционалам в пространстве $K(x_1, x_2)$. Первый из них дополняет пример 3.

Пример 14 [6]. Рассмотрим задачу о движении заряженной частицы по плоскости $\mathbb{R}^2$ в постоянном магнитном поле (см. пример 11). При фиксированном значении энергии из-за ограниченности ларморовского радиуса нельзя соединить экстремалью функционала F^* любые две точки из $\mathbb{R}^2$. Причина состоит в том, что функционал F^* неограничен снизу на пространстве кривых $K(x_1, x_2)$. Действительно, соединим любые две точки $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ длинной кривой γ_1 и короткой γ_2. Ясно, что $F^*(\gamma_1) \sim F^*(\gamma_2^{-1}\gamma_1)$. Действие F^* на замкнутой кривой $\gamma_2^{-1}\gamma_1$ сложится из двух величин: одна из них пропорциональна длине γ_1, а другая — площади, заключенной внутри контура $\gamma_2^{-1}\gamma_1$. Увеличивая γ_1 и подбирая ее ориентацию, можно добиться того, что $F^*(\gamma_1)$ будет стремиться к $-\infty$. Может показаться, что это явление обусловлено некомпактностью $\mathbb{R}^2$. Следующий пример показывает, что это не так.

Пример 15 [6]. Рассмотрим систему с гироскопическими силами из примера 12. При фиксированном значении полной энергии E и больших значениях напряженности магнитного поля H ларморовский радиус будет малым (см. формулу (7)), что снова приводит к неразрешимости двухточечной вариационной задачи. В этом примере многообразие положений S^2 компактно, однако функционал F^* неоднозначен.

В отличие от двухточечной задачи периодическая задача вариационного исчисления всегда имеет тривиальные решения: это одноточечные кривые $x(t) \equiv x_0$, в которых функционал F^* имеет локальный минимум (см. п. 1.3).

3.2. Периодические траектории систем с гироскопическими силами. Теорема 7 [6]. *Если пространство положений M компактно, односвязно и $H^2(M) \neq 0$, то для всех значений полной энергии $h > \max(-L_0)$ уравнение движения имеет периодическое решение с заданной энергией $h = L_2 - L_0$.*

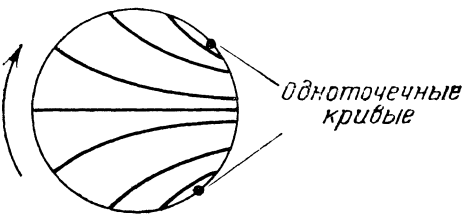

Рис. 8

В справедливости теоремы 7 можно убедиться с помощью следующих аргументов. Как уже было отмечено, для функционала F^* всегда имеются тривиальные одноточечные экстремали $x(t) \equiv x_0$. Они образуют n-мерное подмногообразие $N \subset K^+$, диффеоморфное M. Каждая из этих экстремалей доставляет многозначному функционалу F^* локальный минимум. На любом листе накрытия f: $\hat{K} \to K^+$ полный прообраз

$$f^{-1}(N) = N_0 \cup N_1 \cup \ldots$$

дает многообразие локальных минимумов однозначного функционала F^*. Так как M односвязно, то существует естественная гомотопия g: $M \times [0, 1] \to \hat{K}$, соединяющая подмногообразия N_0 и N_1 (рис. 8). Ограничим функционал F^* на образ $M \times [0, 1]$ и начнем «сдвигать» отображение g вниз по градиенту F^*; при этом концы N_0 и N_1 не будут двигаться. Поскольку $H^2(M) \neq 0$, то $\pi_2(M) \neq 0$ и, следовательно, пространство кривых K^+ неодносвязно. Градиентный спуск даст нам искомую нетривиальную стационарную «седловую» критическую точку.

Теорема 7 имеет ряд нетривиальных приложений.

Теорема 8. *Уравнения задачи о вращении твердого тела с неподвижной точкой в осесимметричном силовом поле при фиксированных значениях постоянной площадей $c = \langle M, e \rangle$ и энергии $h > \max V_c$ ($V_c = V + \frac{c^2}{2\langle Ie, e\rangle}$ — приведенный потенциал) имеют хотя бы одно периодическое движение.*

Доказательство вытекает из теоремы 7 с учетом компактности и односвязности сферы S^2, которая является пространством положений приведенной системы (см. пример 13). Если $c = 0$, то можно утверждать больше: при всех $h > \max V_0$ уравнения вращения твердого тела имеют не меньше шести различных периодических траекторий (их проекции на сферу — три различные замкнутые несамопересекающиеся кривые). Дело в том, что при $c = 0$ приведенная система будет натуральной и при фиксированном значении $h > \max V_0$ риманово пространство $(S^2, |\cdot|_h)$ имеет три различные замкнутые геодезические (см. п. 2.1). Для уравнений Кирхгофа также справедливо утверждение, аналогичное теореме 8 (см. [8]).

З а м е ч а н и е. В случае однородного силового поля в динамике твердого тела найдено много частных решений, которые большей частью являются периодическими. Используя, например, один результат В. А. Стеклова [32], можно доказать существование периодических решений на всех совместных некритических уровнях интегралов энергии и момента (а не только при достаточно больших значениях h), если центр масс тела лежит на оси инерции. Отметим, что периодические решения В. А. Стеклова выражаются через эллиптические функции времени.

В случае неодносвязных многообразий для доказательства существования замкнутых траекторий можно использовать следующее

П р е д л о ж е н и е 8. *Если найдется гомотопная нулю замкнутая кривая γ, на которой значение $F^* < 0$, то при $h > \max(-L_0)$ существует хотя бы одна периодическая траектория.*

Доказательство можно вывести из того, что функционал F^* имеет нулевой локальный минимум в одноточечных кривых. Если на гомотопной нулю кривой γ функционал F^* отрицателен, то применение метода градиентного спуска дает нам седловую критическую точку. Отметим, что в случае односвязного M теорема 7 и предложение 8 дают различные периодические траектории.

В качестве примера рассмотрим задачу о движении заряженной частицы по плоскости $\mathbb{R}^2 = \{x, y\}$ в периодическом по x и y магнитном поле (см. пример 11). Если среднее значение $\overline{H} \neq 0$, то в плоскости $\mathbb{R}^2$ существуют замкнутые кривые, на которых $F^* < 0$ (на $\mathbf{T}^2$ они гомотопны нулю). Следовательно, найдется периодическая траектория любой положительной полной энергии (при этом заряженная частица вращается в ту же сторону, что и в постоянном магнитном поле).

3.3. Приложения обобщенной геометрической теоремы Пуанкаре. В некоторых случаях существование периодических траекторий механических систем с гироскопическими силами можно установить с помощью обобщений известной геометрической теоремы Пуанкаре о неподвижных точках симплектических диффеоморфизмов. В качестве примера рассмотрим движение заряда по «евклидову» двумерному тору $\mathbf{T}^2 = \{x, y \bmod 2\pi\}$ под действием магнитного поля с напряженностью H: $\mathbf{T}^2 \to \mathbb{R}$ (см. пример 11). Движение заряда описывается уравнениями

$$\ddot{x} = -H(x, y)\dot{y}, \quad \ddot{y} = H(x, y)\dot{x}.$$

Полная энергия $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 = h$, конечно, сохраняется.

Т е о р е м а 9 [1]). *Если магнитное поле H нигде не обращается в нуль, то при каждом фиксированном значении энергии $h > 0$ имеется не менее четырех замкнутых траекторий, считая их кратности, и не менее трех геометрически различных. Если $H^2(x, y) > h$ для всех $(x, y) \in \mathbf{T}^2$, то существуют не менее четырех (считая кратности) гомотопных нулю замкнутых траекторий.*

[1]) Ср. с теоремой 2 работы [24].

Доказательство [1]). При всех $h > 0$ энергетическая поверхность $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2h$ диффеоморфна трехмерному тору $\mathbf{T}^3$ с угловыми координатами x, y, $\varphi = \operatorname{arctg}(\dot{y}/\dot{x})$. Уравнения движения на $\mathbf{T}^3$ имеют следующий вид:

$$\dot{x} = \sqrt{2h}\cos\varphi, \quad \dot{y} = \sqrt{2h}\sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = H(x, y).$$

Так как $H \neq 0$, то угловая переменная φ изменяется монотонно. Пусть для определенности $\dot{\varphi} > 0$. Перепишем уравнения движения, считая φ новым «временем»:

$$x' = \frac{\sqrt{2h}\cos\varphi}{H}, \quad y' = \frac{\sqrt{2h}\sin\varphi}{H}; \quad (\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{d\varphi}.$$

Фазовый поток этих уравнений сохраняет симплектическую структуру $H(x, y)dx \wedge dy$. Пусть $x \mapsto x + f(x, y)$, $y \mapsto y + g(x, y)$ — симплектическое отображение тора $\mathbf{T}^2 = \{x, y \bmod 2\pi\}$ на себя, являющееся отображением за время $\varphi = 2\pi$ (рис. 9). Можно показать, что это отображение сохраняет центр тяжести тора $\mathbf{T}^2$,т. е.

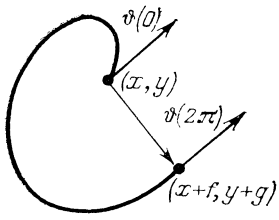

Рис. 9

$$\iint_{\mathbf{T}^2} fH\, dx \wedge dy = \iint_{\mathbf{T}^2} gH\, dx \wedge dy = 0.$$

Согласно обобщенной теореме Пуанкаре, сформулированной В. И. Арнольдом ([25], добавление 9) и полностью доказанной в работе [11], отображение за период имеет по меньшей мере четыре неподвижные точки (считая с кратностями), среди которых обязательно три геометрически различные. Для завершения доказательства нам осталось проверить, что $|f|, |g| < 2\pi$, если $\min H^2 > h$. Оценим, например,

$$|f|^2 = \left| \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2h}\cos\varphi\, d\varphi}{H(x(\varphi), y(\varphi))} \right|^2 \leqslant 2h \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{H^2} \leqslant \frac{(4\pi)^2 h}{\min H^2},$$

откуда $|f| \leqslant 2\pi(\sqrt{h}/\min|H|)$, что и требовалось.

Замечание. Усложним задачу, добавив потенциальные силы с потенциалом V: $\mathbf{T}^2 \to \mathbb{R}$. Рассмотрим движение заряда при условии, что $\max V < h$. Так как

$$\dot{\varphi} = H + \frac{V'_y\dot{x} - V'_x\dot{y}}{2(h - V)},$$

то φ изменяется монотонно, если выполнено неравенство

$$|H| > \sqrt{V'^2_x + V'^2_y}/\sqrt{2(h - V)}.$$

Это неравенство гарантирует существование трех периодических траекторий с энергией h. Если $h < \max V$, то угловая переменная φ не везде изменяется монотонно, и поэтому о наличии замкнутых траекторий в этом случае ничего определенного сказать нельзя.

Отметим еще один путь к четырем циклам на торе с магнитным полем, предложенный В. И. Арнольдом. Для этого, фиксируя центр тяжести диска на торе и его «магнитную» площадь

$$\iint H\, dx \wedge dy,$$

минимизируем длину границы. Если полученная функция центра тяжести как точки на $\mathbf{T}^2$ окажется гладкой, то ее критические точки (а их не меньше

[1]) Идея этого доказательства независимо от автора найдена В. И. Арнольдом.

четырех, считая кратности) дадут нам замкнутые траектории, ограничивающие фиксированную площадь. Варьируя затем площадь в пределах от нуля до бесконечности, мы получим замкнутые траектории заданной энергии. Эта программа пока не реализована. Привлекательность такого подхода заключается в возможности его обобщения на поверхности, отличные от тора. Правда, при этом надо дать подходящее определение центра тяжести. По-видимому, число различных замкнутых траекторий на любой компактной поверхности M с ненулевым магнитным полем при всех $h > 0$ оценивается снизу категорией M.

Рассмотрим еще задачу о движении заряда по сфере в магнитном поле (пример 12). В отсутствие магнитного поля точка движется периодически по большим кругам. Из теоремы Зейферта [2] вытекает существование периодических траекторий в случае, когда добавляется малое по величине магнитное поле.

§ 4. Асимптотические решения. Приложение к теории устойчивости движения

В этом параграфе рассматриваются движения механических систем, стремящихся к положениям равновесия при неограниченном возрастании времени. К этой задаче можно свести изучение движений, асимптотических к заданным движениям произвольного вида (а не только к равновесиям). Действительно, пусть $x_0(\cdot)$ — решение уравнения Лагранжа $[L(\dot{x}, x, t)]_x = 0$. Положим $y = x - x_0(t)$ и $\hat{L}(\dot{y}, y, t) = L(\dot{y} + \dot{x}_0, y + x_0, t)$. Очевидно, что $y(t) \equiv 0$ является решением уравнения $[\hat{L}]_y = 0$. Если $x(t) \to x_0(t)$ при $t \to \infty$, то $y(t) \to 0$.

4.1. Существование асимптотических движений. Рассмотрим неавтономную лагранжеву систему (M, L) с гладкой функцией Лагранжа L: $TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть $\langle\ ,\ \rangle$ — некоторая полная риманова метрика на M.

Определение. Лагранжеву систему (M, L) назовем *регулярной*, если существуют такие положительные постоянные c_1, c_2, c_3, c_4, что:

1) $$c_1\langle \dot{x}, \dot{x}\rangle - c_2 \leqslant L(\dot{x}, x, t),$$

2) $$c_3\langle v, v\rangle \leqslant L''_{\dot{x}\dot{x}} v \cdot v \leqslant c_4\langle v, v\rangle$$

для всех $(\dot{x}, x, t) \in TM \times \mathbb{R}$ и $v \in TM$.

Если пространство положений компактно, то определение регулярности не зависит от выбора римановой метрики на M.

Пример 16. Пусть функция Лагранжа периодически (или почти периодически) зависит от времени и имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\langle \dot{x}, \dot{x}\rangle_t + \langle v(x, t), \dot{x}\rangle_t + U(x, t),$$

где $\langle\ ,\ \rangle_t$ — зависящая от времени риманова метрика на M, v — гладкое векторное поле, а U: $M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторая гладкая функция. Условия 1), 2) заведомо выполнены, если метрика $\langle\ ,\ \rangle_t$ полна при всех t, а функции $\langle v, v\rangle_t$ и U ограничены сверху.

Всюду в этом параграфе условия 1), 2) считаются выполненными. Эти условия гарантируют нам существование, в целом, гладкой функции Гамильтона H: $T^*M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, двойственной (в смысле преобразования Лежандра) функции Лагранжа L. Введем гладкую функцию H_0: $M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ограничив гамильтониан H на множество точек из $T^*M \times \mathbb{R}$, где канонические импульсы $y = L'_{\dot{x}} = 0$.

Предположим, что уравнение Лагранжа $[L] = 0$ имеет решение $x(t) = a = \text{const}$, так что a — положение равновесия. Без ущерба общности можно считать, что $H_0(a, t) = 0$.

Определение. Функция H_0: $M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *отрицательно определенной*, если для любой окрестности D точки a существует $\varepsilon > 0$ такое, что $H(x, t) \leqslant -\varepsilon$ при всех $x \notin D$ и $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 10 [26]. *Если функция H_0 отрицательно определена, то для любых $x_0 \in M$ и $\tau \in \mathbb{R}$ существует движение x: $[\tau, +\infty) \to M$ такое, что $x(\tau) = x_0$ и $x(t) \to a$ при $t \to +\infty$.*

Для того чтобы установить существование движений, асимптотических к положению равновесия a при $t \to -\infty$, достаточно применить теорему 7 к лагранжевой системе $(M, \hat{L})$, где $\hat{L}(\dot{x}, x, t) = L(-\dot{x}, x, -t)$. Если $x(t)$ — движение лагранжевой системы (M, L), то $x(-t)$ — движение системы $(M, \hat{L})$.

Доказательство теоремы 10. Можно считать, что в положении равновесия функция $L(0, a, t) \equiv 0$ для всех t. Из определения преобразования Лежандра и условия регулярности вытекает, что

$$H = \sup_{\dot{x}} (y \cdot \dot{x} - L).$$

Следовательно,

$$L(\dot{x}, x, t) \geqslant -H_0(x, t) \geqslant 0 = L(0, a, t). \tag{9}$$

Пусть $x_0 \neq a$ и $\tau \in R$. Введем в рассмотрение множество $\Omega(x_0, \tau)$ кусочно-непрерывно дифференцируемых кривых x: $[\tau, +\infty) \to M$ таких, что $x(\tau) = x_0$ и $x(t) \equiv a$ при всех достаточно больших $t > \tau$. На множестве $\Omega(x_0, \tau)$ определен функционал действия по Гамильтону

$$F(x(\cdot)) = \int_\tau^\infty L(\dot{x}(t), x(t), t)\, dt.$$

Пусть d — расстояние между точками полного риманова пространства $(M, \langle\ ,\ \rangle)$. Для любой кривой $x(\cdot)$ из $\Omega(x_0, \tau)$ и моментов времени $t_2 > t_1 \geqslant \tau$ по неравенству Коши — Буняковского будем иметь оценку

$$d^2(x(t_1), x(t_2)) \leqslant \Big(\int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}(t)|\, dt\Big)^2 \leqslant (t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}(t)|^2\, dt.$$

Из условия регулярности 1) вытекает неравенство

$$d^2(x(t_1), x(t_2)) \leqslant \frac{t_2 - t_1}{c_1} (F(x(\cdot)) + c_2(t_2 - t_1)). \tag{10}$$

Для значения $T > \tau$ обозначим через Ω_T множество кривых $x(\cdot) \in \Omega(x_0, \tau)$ таких, что $x(t) \equiv a$ при $t \geqslant T$. В силу неравенства (10) каждое подмножество Ω_T, на котором функционал F ограничен, равномерно ограничено и равномерно непрерывно. Следовательно, по теореме Арцела, с учетом неравенства $F \geqslant 0$, получаем, что F: $\Omega_T \to \mathbb{R}$ достигает своей точной нижней грани на некоторой непрерывной кривой x_T: $[\tau, T] \to M$. Из условия регулярности вытекает, что $x_T(\cdot) \in \Omega_T$ (см. [27]).

Функция $T \mapsto F(x_T)$, $T > \tau$ непрерывна, неотрицательна и не возрастает. Из неравенства (10) вытекает, что семейство кривых $\{x_T(\cdot)\}_{T \geqslant \tau_0}$ $(\tau_0 > \tau)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Так как расстояние d полно, то, применив снова теорему Арцела и диагональный процесс, найдем последовательность $\tau_n \to +\infty$ такую, что для любого $T > \tau$ последовательность $x_{\tau_n}(\cdot)$ сходится к непрерывной кривой x: $[\tau, +\infty) \to M$ равномерно на $[\tau, T]$. Так как кривая x_{τ_n}: $[\tau, T] \to M$ доставляет минимум функционалу F в классе кривых с концами в x_0 и $x_{\tau_n}(T)$, то предельная кривая x: $[\tau, T] \to M$ является экстремалью F на множестве кривых с концами в точках x_0 и

$x(T) = \lim\limits_{n\to\infty} x_{\tau_n}(T)$. Следовательно, $x(\cdot)$ — движение и

$$\int_\tau^T L(\dot{x}(t),\ x(t),\ t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_\tau^T L(\dot{x}_{\tau_n}(t),\ x_{\tau_n}(t),\ t)\,dt \leqslant \lim_{n\to\infty} F(x_{\tau_n}).$$

Таким образом,

$$\int_\tau^\infty L(\dot{x}(t),\ x(t),\ t)\,dt \leqslant \inf\{F(x(\cdot)):\ x(\cdot)\in\Omega(x_0,\ \tau)\}. \tag{11}$$

Так как функция H_0 отрицательно определена, то из сходимости интеграла (11) и неравенства (9) вытекает, что $x(t) \to a$ при $t \to +\infty$.

Пример 17. Функции Лагранжа из примера 16 соответствует функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\langle y,\ y\rangle_t^* - y\cdot v(x,\ t) + \frac{1}{2}\langle v,\ v\rangle_t + V(x,\ t),$$

где $\langle\ ,\ \rangle_t^*$ — квадратичная форма на T_x^*M, сопряженная с метрикой $\langle\ ,\ \rangle_t$ на T_xM. Если точка $x = a$ — положение равновесия, то по теореме 10 асимптотические к точке a движения существуют, если для всех $x \neq a$ и $t \in R$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{2}\langle v(x,\ t),\ v(x,\ t)\rangle_t + V(x,\ t) < V(a,\ t). \tag{12}$$

В автономном случае существование асимптотических движений можно установить еще следующим способом. Если выполнено неравенство (12), то подынтегральное выражение для действия по Мопертюи (т. е. $2\sqrt{L_0L_2} + L_1$) положительно определено в области $M \setminus \{a\}$. Следовательно, действие по Мопертюи достигает наименьшего значения на множестве кусочно гладких кривых на M с концами в точках x_0 и a. Это значение достигается как раз на траектории искомого асимптотического движения.

Теорема 11 [28]. *Пусть функция H_0: $M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ отрицательно определена, а M компактно. Тогда существует движение x: $\mathbb{R} \to M$, двояко-асимптотическое к положению равновесия $a \in M$ (т. е. $x(t) \to a$ при $t \to \pm\infty$).*

4.2. Функция действия в окрестности неустойчивого равновесия. Снова будем предполагать, что функция H_0: $M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ отрицательно определена в окрестности положения равновесия $x = a$. Введем функцию S: $M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по следующей формуле:

$$S(x,\ \tau) = \inf\{F(z(\cdot)):\ z(\cdot) \in \Omega(x,\ \tau)\}.$$

Согласно теореме 10 любой точке $(x,\ \tau) \in M \times \mathbb{R}$ можно поставить в соответствие асимптотическое движение z: $[\tau,\ +\infty) \to M$, $z(\tau) = x$, $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = a$.

Предложение 9. *Если лагранжиан L периодичен по t, то*:

$$\lim_{t\to\infty} \dot{z}(t) = 0, \tag{α}$$

$$\int_\tau^\infty L(\dot{z}(t),\ z(t),\ t)\,dt = S(x,\ \tau). \tag{β}$$

Доказательство. Пусть T — период функции Лагранжа. Из сходимости интеграла (11) вытекает, что при больших T' в некоторых точках интервала $[T',\ T' + T]$ лагранжиан становится сколь угодно малым. Неравенство (9) показывает, что в этих точках скорость $\dot{z}$ мала. Заключение (α) выте-

кает из этого замечания и свойства периодичности по t уравнений движения. Заключение (β) является следствием (α) и неравенства (11).

Замечание. Предложение 9 справедливо, конечно, и при более общих предположениях относительно явной зависимости лагранжиана от времени.

Функция действия S положительно определена, непрерывна, но, возможно, недифференцируема.

Теорема 12 [26]. *Пусть функция L периодична по t и для любого момента времени положение равновесия $a \in M$ — точка невырожденного максимума функции H_0. Тогда существует окрестность $D \subset M \times \mathbb{R}$ прямой $\{a\} \times \mathbb{R}$ такая, что:*

α) для любой точки $(x, \tau) \in D$ существует единственное движение z: $[\tau, +\infty) \to M$, асимптотическое к точке a внутри D;

β) функция S является гладкой в D, имеет невырожденный минимум на прямой $\{a\} \times \mathbb{R}$ и удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби $S'_t + H(S'_x, x, t) = 0$;

γ) если y — импульс вдоль движения $z(\cdot)$, то $y(t) = S'_x(z(t), t)$.

По теореме об устойчивом многообразии (см., например, [29]) фазовые траектории лагранжевой системы (M, L), асимптотические к точке $(y, x) = (0, a) \in T^*M$, заполняют гладкое инвариантное подмногообразие $W \subset T^*M \times \mathbb{R}$, которое диффеоморфно проектируется на некоторую окрестность прямой $\{a\} \times \mathbb{R}$. Это доказывает заключение α). Представим W в виде графика гладкого отображения f: $D \to T^*M \times \mathbb{R}$. Если z: $[\tau, +\infty) \to M$, $z(\tau) = x$ — движение, асимптотическое к равновесию $z \equiv a$, то $\dot{z}(t) = H'_y(f(z, t), z, t)$. По теореме о гладкой зависимости решений от начальных данных функция $z(t, x, \tau)$, $z(\tau) = x$, гладкая, а вместе с ней и функция действия $S(x, \tau)$ гладко зависит от $(x, \tau) \in D$. Используя формулу (β) предложения 9, легко получить, что

$$dS(x, \tau) = y(x, \tau)dx - H(y(x, \tau), x, \tau)d\tau, \quad y = f(x, \tau).$$

Отсюда получаем искомые формулы $y = S'_x$ и $S'_\tau + H(S'_x, x, \tau) = 0$, что и требовалось.

Пример 18. Рассмотрим натуральную механическую систему $(M, \langle\ ,\ \rangle, V)$. Пусть точка $a \in M$ является невырожденным локальным максимумом потенциальной энергии V. Теорема 12 утверждает, что асимптотические к точке a траектории пересекают поверхности уровня функции действия $S(x)$ под прямым углом (в смысле метрики $\langle\ ,\ \rangle$); сама функция S удовлетворяет нелинейному уравнению

$$\langle S'_x, S'_x \rangle^* = V(x) - V(a).$$

Если условие невырожденности равновесия не выполнено, то это уравнение может не иметь гладких решений. Вот простой пример (см. [30]):

$$S'^2_x + S'^2_y = x^4 + \varepsilon x^2 y^2 + y^4, \quad \varepsilon > -2. \tag{13}$$

Легко показать, что при $\varepsilon \neq 2$ и $\varepsilon \neq 6$ уравнение (13) не имеет в окрестности точки $x = y = 0$ бесконечно дифференцируемого решения. Негладкие решения могут существовать. Например, при $\varepsilon = 7$ уравнение (13) имеет решение $S(x, y) = xy\sqrt{x^2 + y^2}$, принадлежащее лишь классу C^2.

Отметим в заключение, что постановка задачи и первые результаты о существовании асимптотических движений консервативных механических систем восходят, по-видимому, к работам Кнезера 1897 г.

4.3. Теорема о неустойчивости. Если лагранжева система (M, L) имеет движения, асимптотические к положению равновесия $a \in M$, то для системы $(M, \hat{L})$, где функция $\hat{L}$ получена из L обращением времени, это равновесие будет, очевидно, неустойчивым. Таким образом, согласно теореме 7, доста-

точным условием неустойчивости является отрицательная определенность функции H_0: $M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Это условие можно ослабить.

Т е о р е м а 13 [26]. *Если* $H_0 \leqslant 0$ *для всех* $(x, t) \in M \times \mathbb{R}$, *то для любых* $\varepsilon > 0$, $x_0 \in M$ *и* $\tau_0 \in \mathbb{R}$ *существует* $\tau > \tau_0$ *и движение* x: $[\tau_0, \tau] \to M$ *такое, что* $x(\tau_0) = x_0$, $x(\tau) = a$ *и* $|\dot{x}(\tau)| \leqslant \varepsilon$.

Для доказательства неустойчивости достаточно применить теорему к лагранжевой системе $(M, \hat{L})$. Теорема 13 доказывается методом п. 4.1.

П р и м е р 19. Условием неустойчивости равновесия для полунатуральной системы из примера 16 является условие (12) с нестрогим знаком неравенства. В автономном случае оно было отмечено Хагедорном [31].

4.4. Составной маятник с колеблющейся точкой подвеса. Применим установленные выше общие утверждения к задаче о движении плоского n-звенного маятника (см. пример 6) с вертикально колеблющейся точкой подвеса. Функция Лагранжа имеет следующий вид:

$$L(\dot{\vartheta}, \vartheta, t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} M_{\max(i,j)} l_i l_j \cos(\vartheta^i - \vartheta^j)\, \dot{\vartheta}^i \dot{\vartheta}^j + \\ + \dot{f}(t) \sum_{i=1}^{n} M_i l_i \sin \vartheta^i \dot{\vartheta}^i - g \sum_{i=1}^{n} M_i l_i \cos \vartheta^i,$$

где $M_i = \sum_{j=i}^{n} m_j$, а $f(t)$ — высота точки подвеса маятника. Поскольку пространство положений $\mathbf{T}^n = \{\vartheta \bmod 2\pi\}$ компактно, то система $(\mathbf{T}^n, L)$ регулярна, если $\dot{f}^2(\cdot)$ — гладкая ограниченная функция времени. Пусть $a = (\pi, \ldots, \pi)$ — верхнее положение равновесия маятника.

П р е д л о ж е н и е 10. *Если при всех* t *справедливо неравенство*

$$\dot{f}^2 < g \min_s (m_s l_s / M_s), \tag{14}$$

то выполнено условие (12).

Это утверждение остается справедливым, если в неравенствах (14) и (12) заменить знак $<$ на $\leqslant$.

С л е д с т в и е. *При* $n = 1$ *верхнее положение равновесия неустойчиво, если* $\dot{f}^2(t) \leqslant gl$ *для всех* $t \in R$.

З а м е ч а н и е. Достаточное условие устойчивости в линейном приближении, получаемое при $f \gg l$ методом усреднения, имеет следующий вид: $\overline{\dot{f}^2} > gl$ (Н. Н. Боголюбов [33]).

Если выполнено неравенство (14), то по теореме 10 существуют движения маятника, начинающиеся в произвольный момент времени в произвольном положении и асимптотические к верхнему положению равновесия $\vartheta = a$. Более того, в этом случае, согласно теореме 9, существуют движения маятника, двоякоасимптотические к точке $a \in \mathbf{T}^n$.

П р е д л о ж е н и е 11. *Если функция* $f(t)$ *четна и выполнено неравенство* (12), *то существуют по крайней мере* $2^n - 1$ *различных движений маятника, двоякоасимптотических к верхнему положению равновесия.*

Действительно, кроме верхнего, существуют еще $2^n - 1$ положений равновесия a_i, инвариантных относительно отражения $\vartheta \to -\vartheta$ (см. п. 2.4). Пусть x: $[0, +\infty) \to \mathbf{T}^n$, $x(0) = a_i$ — движение маятника, асимптотические к точке a при $t \to +\infty$. Поскольку отображение $(\dot{\vartheta}, \vartheta, t) \to (\dot{\vartheta}, -\vartheta, -t)$ сохраняет лагранжиан, то $\hat{\vartheta}(t) = -\vartheta(-t)$ — движения, асимптотические к a при $t \to -\infty$. Так как $\dot{\hat{\vartheta}}(0) = \dot{\vartheta}(0)$, то ϑ: $\mathbb{R} \to \mathbf{T}^n$ — искомое двоякоасимптотическое движение.

4.5. Теорема Гайдукова. Рассмотрим вопрос о существовании геодезических римановых многообразий, асимптотических к замкнутым геодезическим линиям. С помощью элементарных методов вариационного исчисления Е. В. Гайдуковым доказана

Теорема 14 [40]. *Пусть M — гладкое компактное ориентированное двумерное риманово многообразие. Для любой точки $x \in M$ и любого нетривиального класса π свободно гомотопных путей на M найдется геодезическая, содержащая точку x и асимптотически приближающаяся к некоторой замкнутой геодезической из класса π.*

Согласно принципу Мопертюи это утверждение справедливо для траекторий натуральной механической системы с пространством положений M, если ограничиться достаточно большим значением полной энергии. С помощью теоремы 14 доказывается

Предложение 12 [41]. *Пусть M является тором с угловыми координатами φ_1 и φ_2. Для любого вещественного λ и любой точки $(\varphi_1, \varphi_2)_0$ существует геодезическая $\varphi_1 = \varphi_1(s)$, $\varphi_2 = \varphi_2(s)$ такая, что:*

1) $$(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) = (\varphi_1, \varphi_2)_0,$$

2) $$\lim_{s\to\infty} \varphi_1(s)/\varphi_2(s) = \lambda.$$

В случае рационального «числа вращения» λ это утверждение — прямое следствие теоремы 14. Отметим, что геодезические, о которых идет речь, минимальны на накрывающей плоскости. Предложение 12 допускает следующее уточнение.

Предложение 13. *Пусть $\mathbf{T}^2$ снабжено аналитической метрикой, мало отличающейся от евклидовой, и λ — вещественное иррациональное число с «хорошими» арифметическими свойствами: $|n\lambda - m| \geqslant \alpha/|n|^\beta$ для некоторых α, $\beta > 0$. Тогда существует расслоение $\mathbf{T}^2$ на минимальные (на накрывающей плоскости) геодезические с числом вращения λ.*

Легко построить контрпримеры для метрик на $\mathbf{T}^2$, далеких от евклидовой. Кроме соображений из вариационного исчисления, доказательство предложения 13 использует результаты КАМ-теории. Ю. Мозер доказал более общую теорему о существовании расслоения на минимальные гиперповерхности многомерного тора с метрикой, близкой к стандартной, причем минимальные поверхности на накрывающем пространстве близки к гиперплоскостям с «хорошими» арифметическими свойствами [1]).

В заключение сформулируем в виде предположений некоторые нерешенные задачи.

1) Доказать теорему 14 в случае многомерного риманова многообразия.

2) Предложение 12 допускает, по-видимому, следующее обобщение: *если M негомеоморфна сфере, то через каждую точку на накрывающем пространстве проходит минимальная геодезическая, асимптотически приближающаяся к заданной точке абсолюта.*

3) Справедливо ли утверждение п. 2) в многомерном случае? Пусть, в частности, M является n-мерным тором с угловыми координатами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Доказать, что для любых вещественных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ и любой точки $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)_0$ найдется геодезическая $\varphi_i = \varphi_i(s)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, такая, что $\varphi_i(0) = (\varphi_i)_0$ и

$$\lim_{s\to\infty} \varphi_i(s)/\varphi_n(s) = \lambda_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1).$$

4) Предположим, что потенциал имеет единственный максимум на M. Доказать существование траекторий, асимптотических к точке максимума в одну сторону и к замкнутой траектории любого нетривиального гомотопического класса в другую сторону.

---

[1]) Доклад на конференции, посвященной 50-летию Математического института АН СССР им. В. А. Стеклова.

5) В тех же предположениях доказать существование траекторий, двоякоасимптотических к точке максимума и обходящих петлю заданного нетривиального гомотопического класса.

Используя метод работы [17], можно доказать, что количество различных двоякоасимптотических траекторий оценивается снизу рангом фундаментальной группы многообразия положений. Для односвязного многообразия существование двоякоасимптотических траекторий установлено С. В. Болотиным в [21].

Предположения 4) и 5) сформулированы В. И. Арнольдом в связи с анализом прохождения гамильтоновой системы через резонансы (см. [38]). С точки зрения этой задачи интерес представляют не только римановы, но и «лоренцевы» метрики.

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Seifert. Periodische Bewegungen mechanischer Systeme.— Math. Z., 1948, **51** : 2, S. 197—216.

[2] H. Seifert. Closed integral curves in 3-space and isotopic 2-dimentional deformations.— Proc. Amer. Math. Soc., 1950, **1**, p. 287—302.

[3] В. В. Козлов. Принцип наименьшего действия и периодические решения в задачах классической механики.— ПММ, 1976, **40** : 3, с. 399—407.

[4] В. В. Козлов. О геометрии областей возможных движений с краем.— Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1977, № 5, с. 118—120.

[5] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт. Математические аспекты классической и небесной механики.— В кн.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 3.— М.: ВИНИТИ, 1985.

[6] С. П. Новиков, И. Шмельцер. Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория Люстерника — Шнирельмана — Морса (ЛШМ). I.— Функцион. анализ и его прил., 1981, **15** : 3, с. 54—66.

[7] С. П. Новиков. Вариационные методы и периодические решения уравнений типа Кирхгофа. II.— Функцион. анализ и его прил., 1981, **15** : 4, с. 37—52.

[8] С. П. Новиков. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса.— УМН, 1982, **37** : 5, с. 3—49.

[9] А. Пуанкаре. Новые методы небесной механики, т. 3.— В кн.: Избр. труды, т. II.— М.: Наука, 1972.

[10] I. Ekeland, J. M. Lasry. On the number of periodic trajectories for a Hamiltonian flow on a convex energy surface.— Ann. of Math., 1980, **112**, p. 283—319.

[11] C. C. Conley, E. Lender. The Birkhoff — Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold.— Invent. Math., 1983, **73**, p. 33—49.

[12] I. C. Percival. Variational principles for the invariant toroids of classical dynamics.— J. Phys. A: Math., Nucl., Gen., 1974, **7** : 7, p. 794—802.

[13] J. N. Mather. Concavity of the Lagrangian for quasiperiodic orbits.— Comment. Math. Helvetia, 1982, **57**, p. 356—376.

[14] В. В. Козлов. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике.— УМН, 1983, **38** : 1, с. 3—67.

[15] С. В. Болотин. Неинтегрируемость задачи n центров при $n > 2$.— Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1984, № 3, с. 65—68.

[16] А. Уинтнер. Аналитические основы небесной механики.— М.: Наука, 1967.

[17] С. В. Болотин, В. В. Козлов. Либрация в системах со многими степенями свободы.— ПММ, 1978, **42** : 2, с. 245—250.

[18] Дж. Милнор. Теория Морса.— М.: Мир, 1965.

[19] Я. В. Татаринов. Приблизительный вид множеств достижимости после возмущений лиувиллевых систем.— Teorijska i primenjena mechanica, 1982, 8, с. 133—138.

[20] В. Клингенберг. Лекции о замкнутых геодезических.— М.: Мир, 1982.

[21] С. В. Болотин, Либрационные движения натуральных динамических систем.— Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика, 1978, № 6, с. 72—77.

[22] В. В. Козлов. Периодические колебания составного маятника.— ПММ, 1980, **44** : 2, с. 238—244.
[23] Г. Ламб. Гидродинамика.— М.: Гостехиздат, 1947.
[24] С. П. Новиков, И. А. Тайманов. Периодические экстремали многозначных или не всюду положительных функционалов.— ДАН СССР, 1984, **274** : 1, с. 26—28.
[25] В. И. Арнольд. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1979.
[26] С. В. Болотин, В. В. Козлов. Об асимптотических решениях уравнений динамики.— Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика, 1980, № 4, с. 84—89.
[27] R. Palais, S. Smale. Generalized Morse theory.— Bull. Amer. Math. Soc., 1964, **70** : 1, p. 165—172.
[28] С. В. Болотин. Существование гомоклинических движений.— Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика, 1983, № 6, с. 98—103.
[29] З. Нитецки. Введение в дифференциальную динамику.— М.: Мир, 1975.
[30] Р. М. Булатович. Существование решений уравнения Гамильтона — Якоби в окрестности невырожденных положений равновесия.— ПММ, 1983, **47** : 2, с. 330—333.
[31] P. Hagedorn. Über die Instabilität konservativer systeme mit gyroskopischen Kräften.— Arch. Ration Mech. and Anal., 1975, 58 : 1, p. 1—9.
[32] В. А. Стеклов. Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку.— Труды отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания, 1899, **10** : 1, с. 1—3.
[33] Н. Н. Боголюбов. О некоторых статистических методах в математической физике.— Киев: Изд-во АН УССР, 1945.
[34] Д. В. Аносов. О типичных свойствах замкнутых геодезических.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1982, **46** : 4, с. 675—709.
[35] Р. М. Розенберг. О формах колебаний нормального типа нелинейных систем с двумя степенями свободы.— Сб. пер. Механика, 1961, № 5, с. 3—15.
[36] C. H. Pak, R. M. Rosenberg. On the existence of normal mode vibrations.— Quart. Appl. Math., 1968, **26** : 3, p. 403—416.
[37] V. Arnold. Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique.— C. R. Acad. Sc. Paris, 1965, **261**, p. 3719—3722.
[38] В. И. Арнольд. Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем.— В кн.: Труды международного конгресса математиков (Москва, 1966).— М.: Мир, 1968, с. 387—392.
[39] H. Hofer, J. Toland. Homoclinic heteroclinic and periodic orbits for a class of indefinite Hamiltonian systems.— Preprint, 1984.
[40] Е. В. Гайдуков. Асимптотические геодезические на римановом многообразии, негомеоморфном сфере.— ДАН СССР, 1966, **169** : 5, с. 999—1001.
[41] С. А. Довбыш. Теорема Гайдукова и лагранжевы автономные системы.— В кн.: Материалы XXI Всесоюзной научной студенческой конференции, секция «Математика».— Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983, с. 24—28.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
28 мая 1984 г.