УДК 531.38

В. В. Козлов, Д. В. Трещёв

НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ О ВРАЩЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ. I

1. Введение. Основные результаты. Тяжелое твердое тело с неподвижной точкой — гамильтонова система с тремя степенями свободы, имеющая два независимых интеграла энергии и площадей. Для ее полной интегрируемости недостает третьего интеграла, функционально независимого от двух классических и находящегося в инволюции с интегралом площадей. Общая задача о вращении тяжелого твердого тела рассматривается как возмущение случая интегрируемости Эйлера: считается малым параметр Пуанкаре — произведение веса тела на расстояние от точки подвеса до его центра масс. Математически эта задача эквивалентна изучению быстрых вращений твердого тела (с произвольным распределением массы) в умеренном поле силы тяжести. Далее рассматривается задача Пуанкаре (см. [1], п. 86) о существовании первого интеграла уравнений вращения твердого тела в виде ряда по степеням параметра Пуанкаре (необязательно сходящегося) с аналитическими во всем фазовом пространстве коэффициентами, который независим от интегралов энергии и площадей и коммутирует с последним. В работе [2] (см. также [3]) показано, что если тело динамически несимметрично (все главные моменты инерции A, B, C различны), то задача Пуанкаре решается отрицательно. Для случая динамической симметрии (когда $A=B$) задача Пуанкаре значительно сложнее: метод работы [2] здесь неприменим, и при $A=B$ имеют место интегрируемые задачи Лагранжа и Ковалевской. Следовательно, задача о вращении тяжелого твердого тела при $A=B$ «ближе» к интегрируемым задачам, чем в несимметричном случае, и поэтому труднее доказать ее неинтегрируемость. Мы покажем, однако, что в общем случае $A=B$ задача Пуанкаре также имеет отрицательное решение. Этот результат полезно сравнить с результатами работ [4, 5] (где доказано отсутствие новых алгебраических и голоморфных интегралов в комплексифицированном фазовом пространстве) и работы [6] (в которой установлено отсутствие дополнительного аналитического интеграла при дополнительных ограничениях на его структуру; см. также [7], гл. VI).

Представим функцию Гамильтона рассматриваемой задачи в специальных канонических переменных L, G, H; l, g, $h \bmod 2\pi$ (см. [3], гл. II):

$$F=F_0+\varepsilon F_1=\frac{1}{2A}G^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)L^2+$$
$$+\varepsilon\left[x\left(\frac{H}{G}\sqrt{1-\left(\frac{L}{G}\right)^2}\sin l+\frac{L}{G}\sqrt{1-\left(\frac{H}{G}\right)^2}\sin l\cos g+\right.\right.$$
$$\left.+\sqrt{1-\left(\frac{H}{G}\right)^2}\cos l\sin g\right)+$$
$$\left.+z\left(\frac{LH}{G^2}-\sqrt{1-\left(\frac{L}{G}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{H}{G}\right)^2}\cos g\right)\right], \tag{1}$$

где ε — параметр Пуанкаре, а $(x, 0, z)$ — направляющие косинусы радиуса-вектора центра масс тела относительно главных осей инерции. В действительном движении выполняются неравенства $G\geqslant 0$, $|L|\leqslant G$, $|H|\leqslant G$. Поскольку гамильтониан F не зависит от угла h, координата H — первый интеграл уравнений движения, совпадающий с интегралом площадей. Зафиксировав его постоянную, сведем гамильтонову систему к двум степеням свободы. Полученную систему будем называть приведенной. Если исходная гамильтонова система с тремя степенями свободы *имеет дополнительный независимый аналитический интеграл*, находящийся в инволюции с интегралом площадей, то приведенная система также обладает дополнительным интегралом. Причем этот интеграл почти при всех значениях H независим с интегралом энергии F. Отметим, что специальные канонические переменные L, G, l, g *являются переменными действие — угол для интегрируемой задачи* Эйлера — Пуансо.

В дальнейшем анализе важную роль играет пространство формальных степенных рядов $u\sim\sum\limits_{s=0}^{\infty}u_s\varepsilon^s$, где u_s — аналитическая функция на прямом произведении $D\times\mathbf{T}^2$; здесь D — область в плоскости переменных L, G, а $\mathbf{T}^2$ — двумерный тор, то есть множество значений пар переменных l, g, рассматриваемых по модулю 2π. Формальный ряд

u считается равным нулю, если все $u_s=0$. Ряд u называется формальным интегралом гамильтоновой системы с гамильтонианом $v=\sum_{s=0}^{\infty} v_s\varepsilon^s$, если скобка Пуассона

$$\{u, v\}=\sum_{s=0}^{\infty}\Big(\sum_{m+n=s}\{u_m, v_n\}\Big)\varepsilon^s \tag{2}$$

равна нулю. Два ряда u, v считаются независимыми, если хотя бы один минор второго порядка их матрицы Якоби $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(L, G, l, g)}$ не равен нулю как формальный степенной ряд.

Теорема 1. *Пусть $A>2C$, $x\neq 0$, а также либо $H\neq 0$, либо $z\neq 0$. Пусть D — окрестность точки (L_0, G_0), определяемой условиями*

$$G_0>|H|,\quad \frac{G_0}{A}=\pm\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)L_0. \tag{3}$$

Если отношение A/C не является корнем многочленов с целыми коэффициентами

$$\sum_{l=0}^{k} a_l x^l,\qquad a_0=2^n, \tag{4}$$

то канонические уравнения с гамильтонианом (1) не имеют формального интеграла $\Phi\sim\Sigma\Phi_s\varepsilon^s$ с аналитическими в области $D\times T^2$ коэффициентами, который независим от интеграла энергии F.

Если $A>2C$, то из неравенства (3) вытекает, что $|L|<G_0$. Равенство $x=0$ дает случай интегрируемости Лагранжа.

Следствие 1. *Если $x\neq 0$, $A>2C$ и отношение A/C трансцендентно, то задача Пуанкаре имеет отрицательное решение.*

Следствие 2. *Пусть $x\neq 0$ и отношение A/C является целым числом. Если уравнения движения имеют третий независимый аналитический интеграл, коммутирующий с интегралом площадей и аналитический по параметру ε, то $A=2^nC$.*

Отметим, что при $n=0$, 1, 2 условие $A=2^nC$ дает как раз интегрируемость для случаев полной динамической симметрии, Ковалевской и частного случая интегрируемости Горячева—Чаплыгина (при $H=0$).

Для несимметричного тела методом расщепления асимптотических поверхностей доказано отсутствие дополнительного аналитического интеграла при малых, но фиксированных значениях параметра ε (см. [8]). При $A=B$ этот метод неприменим из-за отсутствия у невозмущенной задачи асимптотических решений. Мы укажем, однако, достаточные условия на распределение массы динамически симметричного твердого тела, при которых приведенная система не имеет дополнительного независимого интеграла, аналитического в фазовом пространстве. Для этого, зафиксировав значения A и εz, заменим C и εx на δC и $\delta\varepsilon x$ $(0<\delta\ll 1)$. При $\delta\to 0$ твердое тело вырождается в прямолинейный отрезок.

Теорема 2. *Если $x\neq 0$, а также $H\neq 0$ или $z\neq 0$, то при достаточно малых фиксированных значениях $\delta>0$ приведенные уравнения не имеют аналитического интеграла, независимого с интегралом энергии.*

Этот результат свидетельствует, в частности, о том, что последовательность возможных случаев интегрируемости из следствия 2 (когда $A/C-2^n$) должна где-то обрываться.

Ниже даны доказательства теорем 1, 2.

2. Вековое множество и его структура. Хорошо известно, что наличие полного набора первых интегралов, аналитических по возмущающему параметру, тесно связано с возможностью реализации классической схемы теории возмущений (см. [1], гл. XIII). Эта схема состоит в следующем: отыскивается каноническое преобразование $p_1, p_2;\ q_1, q_2 \bmod 2\pi \to P_1, P_2;\ Q_1, Q_2 \bmod 2\pi$ с производящей функцией $S(P, q, \varepsilon) = S_0(P, q) + \varepsilon S_1(P, q) + \ldots$, переводящее исходную функцию Гамильтона $F_0(p_1, p_2) + \varepsilon F_1(p_1, p_2, q_1, q_2)$ в функцию $K(P, \varepsilon) = K_0(P) + \varepsilon K_1(P) + \varepsilon^2 K_2(P) + \ldots$, зависящую лишь от новых импульсов. Если такое преобразование удается найти, то система проинтегрирована. В частности, функции $P_1(p, q, \varepsilon)$ и $P_2(p, q, \varepsilon)$ будут составлять полный набор первых интегралов, аналитических по параметру ε. Производящая функция $S(P, q, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$F_0\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}\right) + \varepsilon F_1\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, q_1, q_2\right) = \sum_{m \geqslant 0} K_m(P)\, \varepsilon^m.$$

Разложив левую часть этого уравнения в ряд по степеням ε, получим бесконечную цепочку уравнений для последовательного определения функций S_n $(n \geqslant 0)$:

$$\sum_{t,k,l,m} \left(\frac{1}{t!} \frac{\partial^t F_0}{\partial p_{k_1} \ldots \partial p_{k_t}} \frac{\partial S_{m_1}}{\partial q_{k_1}} \cdots \frac{\partial S_{m_t}}{\partial q_{k_t}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(t-1)!} \frac{\partial^{t-1} F_1}{\partial p_{k_1} \ldots \partial p_{k_{t-1}}} \frac{\partial S_{l_1}}{\partial q_{k_1}} \cdots \frac{\partial S_{l_{t-1}}}{\partial q_{k_{t-1}}} \right) - K_{n+1}(P), \tag{5}$$

где t, k_i, m_i, l_i — натуральные числа, причем $t \leqslant n+1$, $\sum_{i=1}^{t} m_i = n+1$, $\sum_{i=1}^{t-1} l_i = n$.

Обычно полагают $S_0 = P_1 q_1 + P_2 q_2$ и функции S_n при $n \geqslant 1$ считают 2π-периодическими по q_1 и q_2 с нулевым средним значением. Эти условия однозначно определяют функции S_n (детали можно найти в [1], гл. IX). При $\varepsilon = 0$ будем иметь тождественное преобразование. Таким образом, если аналитическую функцию $f(p, q)$ представить с помощью замены $p = \partial S / \partial q$ как функцию от переменных P, q и разложить в ряд по степеням ε, то в формулах для коэффициентов разложения, содержащих производные $f(p, q)$ по переменным p, можно заменить символы p на P.

При $n = 0$ будем иметь уравнение для определения S_1:

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial F_0}{\partial P_k} \frac{\partial S_1}{\partial q_k} = K_1 - F_1. \tag{6}$$

Положим

$$F_1(P, q) = \sum_{\tau \in Z^2} F_1^\tau(P)\, e^{i(\tau, q)}, \quad S_1(P, q) = \sum_{\tau \in Z^2} S_1^\tau(p)\, e^{i(\tau, q)}.$$

Из уравнения (6) получим, что при $\tau \neq 0$

$$S_1^\tau = \frac{i F_1^\tau}{(\nu, \tau)}, \quad \nu = \left(\frac{\partial F_0}{\partial P_1}, \frac{\partial F_0}{\partial P_2}\right), \tag{7}$$

Следовательно, функция S_1 не определена в тех точках плоскости $\mathbf{R}^2=\{P_1, P_2\}$, где выполнены два условия:

$$1)\ (\nu(P),\tau)=0,\qquad \tau\neq 0;\ 2)\ F_1^{\tau}(P)\neq 0.$$

Совокупность всех таких точек назовем вековым множеством первого порядка и обозначим $\mathbf{B}_1$. Уравнение для S_n при $n>1$ имеет вид (6), где правая часть зависит от функций $S_1, \ldots, S_{n-1}$, найденных на предыдущих шагах теории возмущений. Аналогично определяются вековые множества n-го порядка $\mathbf{B}_n$. Положим, наконец, $\mathbf{B}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{B}_n$ и назовем это множество вековым множеством возмущенной задачи. Поскольку точки множества $\mathbf{B}\times\mathbf{T}^2$ являются точками разрыва для функции S, в дальнейшем важную роль играет структура векового множества.

Возвратившись к динамике твердого тела, положим $p_1=L$, $p_2=G$, $q_1=l$, $q_2=g$; функция Гамильтона задана формулой (1).

Основная лемма. *Предположим, что параметры рассматриваемой задачи A, C, x, z, H удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда в области возможных движений $\Delta_H=\{P_2\geqslant|H|,\ |P_1|\leqslant P_2\}$ вековое множество $\mathbf{B}$ является объединением бесконечного числа различных прямых, проходящих через точку $P_1-P_2=0$ и накапливающихся у пары прямых*

$$\frac{P_2}{A}=\pm\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)P_1,$$

которые пересекаются с внутренностью области Δ_H.

Замечание. В случае динамической несимметрии тела уже первое множество $\mathbf{B}_1$ состоит из бесконечного числа прямых (см. [2]). Этот факт является ключевым для доказательства неинтегрируемости возмущенной задачи. В нашем случае все $\mathbf{B}_n$ состоят лишь из конечного числа прямых. По-видимому, в условиях теоремы 1 вековое множество $\mathbf{B}$ всюду плотно заполняет область Δ_H. Но это пока не доказано.

Доказательство основной леммы разобьем на несколько пунктов. Положим $\partial F_0/\partial P_k=\nu_k$, $\partial^2F_0/\partial P_k\partial P_l=\nu_{kl}$. Пусть

$$S_m(P,q)=\sum_{\tau}S_m^{\tau}(P)\,e^{i(\tau,q)}$$

Заметив, что при $t\geqslant 3$

$$\frac{\partial^t F_0}{\partial P_{k_1}\ldots\partial P_{k_t}}=0,$$

уравнение (5) можем записать в следующем виде ($n>0$):

$$\sum_{k,\tau} i\nu_k\tau_k S_{n+1}^{\tau}e^{i(\tau,q)}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{s+m=n+1\\ k,l,\sigma,\delta\\ \sigma+\delta=\tau}} i^2\nu_{kl}\sigma_k\delta_l S_s^{\sigma}S_m^{\delta}e^{i(\sigma+\delta,q)}+$$

$$+\sum_{t,k,l,\tau}\frac{1}{(t-1)!}\,\frac{\partial^{t-1}F_1}{\partial P_{k_1}\ldots\partial P_{k_{t-1}}}\,i^{t-1}\tau^1_{k_1}\ldots\tau^{t-1}_{k_{t-1}}S_{l_1}^{\tau^1}\ldots S_{l_{t-1}}^{\tau^{t-1}}e^{i(\tau^1+\ldots+\tau^{t-1},q)}=$$

$$=K_{n+1}(P);$$

здесь $\tau^p_{k_h}\in\mathbf{Z}$, $\sigma,\delta\in\mathbf{Z}^2$. Отсюда

$$S_{n+1}^{\tau'} = \frac{i}{(\nu, \tau)}\left(-\frac{1}{2}\sum_{\substack{s+m=n+1\\ k,l,\sigma+\delta=\tau}} \nu_{kl}\sigma_k\delta_l S_s^\sigma S_m^\delta + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{t,k\\ \Sigma l_j=l,\ \Sigma\tau_j=\tau}} \frac{i^{t-1}}{(t-1)!}\frac{\partial^{t-1}F_1}{\partial P_{k_1}\ldots\partial P_{k_{t-1}}}\tau_{k_1}^1\ldots\tau_{k_{t-1}}^{t-1}S_{l_1}^{\tau^1}\ldots S_{l_{t-1}}^{\tau^{t-1}}\right). \qquad (8)$$

Ясно, что S_n^τ можно представить в виде дробей, в знаменателях которых стоят выражения вида (ν, τ) и их произведения. Из формулы для F_1 следует, что отличны от нуля лишь коэффициенты Фурье $F_1^{\pm 1, \pm 1}$, $F_1^{0, \pm 1}$, $F_1^{\pm 1, 0}$ (коэффициент $F_1^{0,0}$ в дальнейших вычислениях не участвует). Следовательно, в разложении Фурье функции S_1 ненулевыми являются лишь коэффициенты $S_1^{\pm 1, \pm 1}$, $S_1^{0, \pm 1}$, $S_1^{\pm 1, 0}$.

Лемма 1: $S_n^{l,m}=0$, *если* $|l|>n$ *или* $|m|>n$.

Это утверждение просто доказывается по индукции с помощью формулы (8).

Следствие. *Если* $\frac{A-C}{C}<\frac{1}{n_0}$ *при некотором натуральном* n_0, *то множество* $\bigcup_{j=1}^{n_0} \mathbf{B}_j \subset \mathbf{B}$ *пересекается с областью* Δ_H *лишь по прямой* $L=0$.

Действительно, если $|(A-C)/C|<1/n_0$, то прямые $\tau_1\nu_1+\tau_2\nu_2=0$, $|\tau_1|\leqslant n_0$, $|\tau_2|\leqslant n_0$ пересекаются с областью Δ_H лишь при условии, что $\tau_2=0$. В частности, подходящей канонической заменой функцию F можно привести к виду $K(P_1, P_2, \varepsilon)$ с точностью до членов порядка ε^{n_0+1} практически во всей области Δ_H. Отметим, что прямая $L=0$ всегда принадлежит $\mathbf{B}$, если только $xH\neq 0$. При $n_0\to\infty$ имеем интегрируемость для случая полной динамической симметрии.

Рассмотрим теперь коэффициенты $S_{n+1}^{n+1,n}$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Лемма 2:

$$S_{n-1}^{n+1,n} = \sum_{u+v=n+1} \frac{(\nu_{11}uv+\nu_{22}(u-1)v)S_u^{u,u-1}S_v^{v,v}}{i((n+1)\nu_1+n\nu_2)}. \qquad (9)$$

Действительно, ведь $\tau_p{}^j$ из второй суммы в правой части формулы (8) не превосходит l_j (лемма 1). Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{t-1}\tau_p^j \leqslant \sum_{j=1}^{t-1} l_j = n < n+1.$$

Поэтому в формуле (8) для $S_{n+1}^{n+1,n}$ надо учитывать лишь первую сумму:

$$S_{n+1}^{n+1,n} = \sum_{\substack{k,l,u+v=n+1\\ \sigma+\delta=(n+1,n)=\tau}} \frac{\nu_{kl}\sigma_k\delta_l S_u^\sigma S_v^\delta}{2i(\nu,\tau)}. \qquad (10)$$

Покажем, что $\sigma=(u, u-1)$, $\delta=(v, v)$ или $\sigma=(u, u)$, $\delta=(v, v-1)$. Действительно, из неравенств $|\sigma_1|\leqslant u$, $|\delta_1|\leqslant v$ и соотношения $\sigma_1+\delta_1=n+1$ вытекает, что $\sigma_1=u$ и $\delta_1=v$. Если $\sigma_2<u-1$, то $\delta_2>v$. Но тогда $S_v{}^\delta=0$ (по лемме 1). Следовательно, $\sigma_2=u$ или $\sigma_2=u-1$. Для завершения доказательства осталось использовать симметрию индексов u, v в формуле (10) и соотношения $\nu_{12}=\nu_{21}=0$.

Аналогично доказывается

Лемма 3:

$$S_n^{n,n} = \sum_{u+v=n} \frac{(\nu_{11}+\nu_{22})\, uv S_u^{u,u} S_v^{v,v}}{2in(\nu_1+\nu_2)}. \tag{11}$$

Лемма 4:

$$S_n^{n,n} = K_n \left(\frac{\nu_{11}+\nu_{22}}{i(\nu_1+\nu_2)} \right)^{n-1} (S_1^{1,1})^n, \tag{12}$$

где $K_1 = 1$, $K_n = \sum\limits_{\substack{p+q=n \\ p,q \in \mathbf{N}}} \frac{K_p K_q pq}{2n}$.

Доказательство проводится по индукции. Для $n=1$ утверждение очевидно справедливо. Пусть формулы (12) верны при всех $n \leqslant m-1$. Тогда, используя (12), будем иметь

$$S_m^{m,m} = \sum_{p+q=m} \frac{pq(\nu_{11}+\nu_{22})}{2i(\nu_1+\nu_2)\,n} K_p K_q \left(\frac{\nu_{11}+\nu_{22}}{i(\nu_1+\nu_2)} \right)^{p+q-2} (S_1^{1,1})^{p+q} =$$

$$= K_m \left(\frac{\nu_{11}+\tau_{22}}{i(\nu_1+\nu_2)} \right)^{m-1} (S_1^{1,1})^m,$$

что и требовалось.

Преобразуем формулу (9):

$$i\,((n+1)\,\nu_1 + n\nu_2)\, S_{n+1}^{n+1,n} =$$

$$= \sum_{u+v=n+1} \frac{\nu_{11}u + \nu_{22}(u-1)}{\nu_1 u + \nu_2(u-1)} v S_v^{v,v} (u\nu_1 + (u-1)\,\nu_2)\, S_u^{u,u-1}. \tag{13}$$

Введем обозначения:

$$x_n = nS_n^{n,n}, \quad m_{q+1} = \frac{(q+1)\,\nu_{11} + q\nu_{22}}{(q+1)\,\nu_1 + q\nu_2}, \quad y_{n+1} = ((n+1)\,\nu_1 + n\nu_2)\, S_{n+1}^{n+1,n}.$$

Теперь (13) предстанет в виде равенства

$$y_n = \sum_{p+q=n} \frac{x_p y_q m_q}{i}. \tag{14}$$

Лемма 5:

$$y_n = a_n x_1^{n-1} y_1 / i^{n-1}, \text{ где } a_1 = 1,$$

$$a_n = \sum_{p+q=n} pK_p h^{p-1} a_q m_q, \qquad h = \frac{\nu_{11}+\nu_{22}}{\nu_1+\nu_2}. \tag{15}$$

Доказательство проводится по индукции. Для $n=1$ лемма 5 верна. Пусть она верна для всех $n \leqslant k-1$. Тогда из (14) с учетом (12) получим:

$$y_k = \sum_{p+q=k} pK_p \frac{h^{p-1}}{ii^{p-1}} x_1^p a_q x_1^{q-1} y_1 \frac{1}{i^{q-1}} m_q =$$

$$= \sum_{p+q=k} pK_p h^{p-1} a_q m_q \frac{x_1^{k-1}}{i^{k-1}} y_1 = a_k x_1^{k-1} y_1 \frac{1}{i^{k-1}}.$$

Утверждение доказано.

Положим $pK_p = r_p$. Из формулы (12) получаем

$$r_1 = 1, \quad r_n = \sum_{\substack{p+q=n \\ p,q\in\mathbf{N}}} \frac{r_p r_q}{2}.$$

Следовательно, $r_k = c_k/2^k$, где $c_k \in \mathbf{N}$. С учетом этого обозначения,

$$a_n = \sum_{p+q=n} r_p h^{p-1} a_q m_q. \tag{16}$$

Использовав формулу (16), получим

$$a_2 = m_1, \; a_3 = (r_2 h + m_2) m_1,$$

$$a_4 = (r_3 h^2 + r_2 h (m_2 + m_3) + m_2 m_3) m_1, \; \ldots$$

Лемма 6. *При* $n \geqslant 3$

$$a_n = m_1 \Big(r_{n-1} h^{n-2} + \sum d_j^n m_j h^{n-3} + \sum_{j_1, j_2} d^n_{j_1, j_2} m_{j_1} m_{j_2} h^{n-4} + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{j_1 \ldots j_{n-3}} d^n_{j_1 \ldots j_{n-3}} m_{j_1} \ldots m_{j_{n-3}} h + m_2 \ldots m_{n-1}\Big), \tag{17}$$

где $j_k \neq j_l$ *при* $k \neq l$ и $(m+1)$*-индексные величины* $d^s_{j_1 \ldots j_m}$ *равны или некоторому* r_l, *или произведению* $\prod_i r_{l_i}$.

Простое доказательство основано на применении принципа индукции.

Из формулы (9) следует, что знаменатель у $S^{n+1,n}_{n+1}$ обращается в нуль, когда

$$(n+1)\nu_1 + n\nu_2 = 0 \Leftrightarrow L = \frac{\alpha n}{A}, \quad G = -\alpha (n+1)\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right), \qquad \alpha \in \mathbf{R}. \tag{18}$$

Точки этой прямой будут принадлежать множеству $\mathbf{B}_{n+1}$, если в этих точках $y_{n+1} = ((n+1)\nu_1 + n\nu_2) S^{n+1,n}_{n+1} \neq 0$. В формуле (15), очевидно, $x_1 = S_1^{1,1}$, $y_1 = (C^{-1} - A^{-1}) L S_1^{1,0}$. Использовав (7), получим, что

$$S_1^{1,0} = \frac{x}{2\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) L} \frac{H}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2},$$

$$S_1^{1,1} = \frac{x}{4\left(\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) L + \frac{1}{A} G\right)} \left(1 + \frac{L}{G}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2}.$$

Следовательно, $x_1 \neq 0$ и $y_1 \neq 0$, если $x \neq 0$ и $H \neq 0$. Осталось выяснить, обращается ли a_{n+1} в нуль в точках (18). Для этого вычислим

$$m_{q+1} = \frac{(q+1)\nu_{11} + q\nu_{22}}{(q+1)\nu_1 + q\nu_2} = \frac{1}{\frac{\alpha}{A}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)} \frac{(q+1)\frac{1}{C} - \frac{1}{A}}{n-q},$$

$$h = \frac{\nu_{11} + \nu_{22}}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{1}{\frac{\alpha}{A}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)} \left(-\frac{1}{C}\right), \tag{19}$$

Из формулы (17) следует, что a_n — однородный многочлен относительно переменных $m_1, \ldots, m_{n-1}, h$ степени $n-1$. С учетом (19) условие $a_{n+1}=0$ оказывается эквивалентным уравнению

$$r_n+\sum d_j^n \frac{j-\frac{C}{A}}{(j-1)-n}+\ldots+\sum_{j_1\ldots j_{n-3}} d^n_{j_1\ldots j_{n-3}} \frac{j_1-\frac{C}{A}}{(j_1-1)-n}\cdots\frac{j_{n-3}-\frac{C}{A}}{(j_{n-3}-1)-n}+$$

$$+\frac{2-\frac{C}{A}}{1-n}\,\frac{3-\frac{C}{A}}{2-n}\cdots\frac{n-\frac{C}{A}}{(n-1)-n}=0. \qquad (20)$$

Левая часть этого уравнения — многочлен степени n с рациональными коэффициентами относительно отношения C/A. Напомним, что r_n и $d^n_{j_1,\ldots,j_s}$ имеют вид $c/2^m$, где $c, m\in\mathbb{N}$. Умножив (20) на $n/2^k$, где k — достаточно большое целое число, получим следующее утверждение: если $a_{n+1}=0$, то C/A является корнем алгебраического многочлена степени n с целыми коэффициентами, причем старший коэффициент равен 2^k. Отсюда вытекает заключение основной леммы, если $x\neq0$ и $H\neq0$. Если же $H=0$, то надо аналогично рассмотреть коэффициенты вида $S^{n,n+1}_{n+1}$ при условии, что $z\neq0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. — Избр. тр., т. 1. М., 1971.
2. Козлов В. В. Несуществование дополнительного аналитического интеграла в задаче о движении несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. — Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1975, № 1, 105—110.
3. Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М., 1980.
4. Husson E. Recherche des integrales algebraiques dans les mouvement d'un solide pesant autor d'un point fixe. — Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse, 2 ser., 1906, 8, 73—152.
5. Зиглин С. Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике. II. — Функц. анализ и его прилож., 1983, 17, вып. 1, 8—23.
6. Козлов В. В. Несуществование аналитических интегралов вблизи положений равновесия гамильтоновых систем. — Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1976, № 1, 110—115.
7. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике.— Успехи матем. наук, 1983, 38, вып. 1, 3—67.
8. Зиглин С. Л. Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела. — Тр. Моск. матем. об-ва, 1980, 41, 287—303.

Поступила в редакцию
26.12.84