ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1986. № 5

УДК 531.01+530.145

В. В. Козлов, Е. М. Никишин

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ВАРИАНТ ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМАЛИЗМА И ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ВОДОРОДОПОДОБНОГО АТОМА

1. Введение. Хорошо известны трудности, связанные с релятивистски инвариантной постановкой задачи системы взаимодействующих частиц. При исследовании таких систем считают, что собственные времена отдельных частиц приближенно совпадают с временем в лабораторной системе отсчета. Трудности исчезают при последовательном развитии полевого подхода. Однако, имея стройную картину классической механики, трудно отказаться от попыток предложить описание релятивистской динамики взаимодействующих частиц. В этом направлении выполнен ряд работ (см., например, обзор [1], в котором можно найти ссылки на них, а также [2]). Физическое пространство системы рассматривается как фазовое пространство: (координаты + время)$^n \times$ (импульс + энергия)^n, где n — число взаимодействующих частиц. Их динамика определяется $7n$-мерной лоренц-инвариантной поверхностью, которую можно представлять себе как пересечение «массовых поверхностей» отдельных частиц. Дальнейшее рассмотрение проводится в рамках гамильтоновой механики со связями, которая предложена Дираком [3]. К сожалению, этот подход приводит к результатам негативного характера: например, непротиворечивое описание взаимодействия двух частиц возможно лишь в тех случаях, когда мировые линии частиц являются прямыми [1].

В настоящей работе предложена релятивистски инвариантная «свободная» гамильтонова механика. Объект изучения — гамильтоновы системы дифференциальных уравнений, гамильтонианы которых инвариантны относительно симплектического действия группы Лоренца — Пуанкаре. Нас будут интересовать мировые линии — интегральные кривые гамильтоновых систем. Поскольку мы рассматриваем автономный случай, вопрос о параметризации мировых линий не существен. Для описания взаимодействия частиц используем релятивистски инвариантный потенциал кулоновского типа. Применение известных правил квантования гамильтоновых систем приводит к новой постановке релятивистской задачи двух тел для водородоподобных атомов. Анализ этой задачи приводит к тому же спектру энергий, что и в классической модели Н. Бора. Однако при этом возникает новое квантовое число, характеризующее рассогласование собственных времен электрона и ядра атома, и каждый энергетический уровень оказывается бесконечно вырожденным.

2. Релятивистский вариант гамильтонова формализма. Введем в рассмотрение четырехмерное пространство — время $\mathbf{R}^4=\{x, y, z, t\}$ и положение каждой частицы зададим координатами x_s, y_s, z_s, t_s $(1\leqslant s\leqslant n)$. Таким образом, положение n частиц задается точкой в $\mathbf{R}^{4n}$. Введем пространство $\mathbf{R}_*^{4n}=\{p_{x_s}, p_{y_s}, p_{z_s}, p_{t_s}\}_{s=1}^n$ и интерпретируем его точки как наборы импульсов и энергий (с обратным знаком) отдельных частиц.

Положим

$$M=\mathbf{R}^{4n}\times\mathbf{R}_*^{4n},$$

$$\Omega=\sum_{s=1}^{n}(dp_{x_s}\wedge dx_s+dp_{y_s}\wedge dy_s+dp_{z_s}\wedge dz_s+dp_{t_s}\wedge dt_s).$$

Для введенного выше пространства $\mathbf{R}^{4n}$ определим действие группы Лоренца. Именно пусть $q\mapsto Aq$ преобразование Лоренца в $\mathbf{R}^4=\{q\}$. Тогда в $\mathbf{R}^{4n}$ определяем преобразование

$$q_s\mapsto Aq_s,\quad 1\leqslant s\leqslant n,$$

то есть координаты всех частиц преобразуются по одному и тому же закону. Преобразование $p\mapsto(A^T)^{-1}p$, задаваемое обратной транспонированной матрицей A, дополняет преобразование A до канонического преобразования в $\mathbf{R}^4\times\mathbf{R}^4_*$. Таким образом, в M действует группа Лоренца, сохраняющая структуру симплектического пространства (M, Ω).

Динамика n частиц задается гамильтонианом $\mathcal{H}: M\to\mathbf{R}$, инвариантным относительно симплектического действия группы Лоренца. Нас будут интересовать мировые линии — интегральные кривые гамильтоновой системы

$$\frac{dp_{x_\nu}}{ds}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_\nu},\quad \frac{dx_\nu}{ds}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_{x_\nu}},\ \ldots,\ \frac{dp_{t_\nu}}{ds}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t_\nu},\quad \frac{dt_\nu}{ds}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_{t_\nu}},$$

$$\nu=1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Способ параметризации мировых линий не имеет никакого значения. Нетрудно понять, что при действии группы Лоренца мировые линии переходят в мировые линии.

Заметим, что аналогичным образом можно интерпретировать задачу взаимодействия частиц, инвариантную относительно полной группы Лоренца—Пуанкаре, а также любых других «кинематических» групп.

Рассмотрим простейший пример — свободную релятивистскую частицу. Для краткости будем обозначать: $r=(x, y, z)$, $p_r=(p_x, p_y, p_z)$, $r^2=x^2+y^2+z^2$, $p_r^2=p_x^2+p_y^2+p_z^2$. Положим (см. [4])

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2mc^2}(p_t^2 - c^2 p_r^2), \tag{2}$$

где m — масса покоя частицы. Нетрудно показать, что уравнения (1) с релятивистским гамильтонианом (2) задают равномерное прямолинейное движение частицы. Скорость $\dot{r}$, разумеется, не зависит от массы m. Отметим, что размерность обеих частей соотношения (2) является размерностью энергии.

3. Релятивистская задача двух тел и квантование по Бору — Зоммерфельду. Зададим динамику двух релятивистских частиц с массами m_1 и m_2 гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_1c^2}(p_{t_1}^2 - c^2 p_{r_1}^2) + \frac{1}{2m_2c^2}(p_{t_2}^2 - c^2 p_{r_2}^2) - U(\rho), \tag{3}$$

где $\rho=\sqrt{(r_1-r_2)^2-c^2(t_1-t_2)^2}$ и $U(\rho)$ — действительная функция на $[0, \infty)$. Тот факт, что $\mathcal{H}$ определена не на всем фазовом пространстве, а лишь в его лоренц-инвариантной части $(r_1-r_2)^2-c^2(t_1-t_2)^2>0$, ничего не меняет в постановках задач.

В случае кулоновского взаимодействия принимаем, что

$$U(\rho) = Q_1 Q_2/\rho,$$

где Q_1 и Q_2 — заряды частиц. Отметим, что гамильтониан (3) фактически постулирует и что при сближении траекторий частиц m_1 и m_2 их собственные времена могут различаться лишь небольшой величиной $|r_1-r_2|/c$.

В гамильтониане (3) исключим движение центра масс. Для этого выполним каноническое преобразование:

$$r_1 - r_2 = r \qquad t_1 - t_2 = t$$

$$\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = R \qquad \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} = T$$

$$\frac{m_2 p_{r_1} - m_1 p_{r_2}}{m_1 + m_2} = p_r \qquad \frac{m_2 p_{t_1} - m_1 p_{t_2}}{m_1 + m_2} = p_t$$

$$p_{r_1} + p_{r_2} = p_R \qquad p_{t_1} + p_{t_2} = p_T.$$

В новых переменных гамильтониан (3) принимает вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2Mc^2}(p_T^2 - c^2 p_R^2) + \frac{1}{2mc^2}(p_t^2 - c^2 p_r^2) - U(\rho),$$

где $M=m_1+m_2$, $m=m_1m_2/(m_1+m_2)$ — приведенная масса, $\rho=\sqrt{r^2-c^2t^2}$. Движение центра масс системы оказывается отделенным от относительного движения взаимодействующих частиц: p_T и p_R постоянны на мировых линиях. Таким образом, задача сводится к изучению движения в «центральном поле» в псевдоевклидовом пространстве

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2mc^2}(p_t^2 - c^2 p_r^2) - U(\rho). \tag{4}$$

Отметим, что временная компонента здесь имеет смысл не абсолютного времени, а разницы (рассогласования) собственных времен взаимодействующих частиц.

Исследование гамильтониана (4) может быть проведено по аналогии с задачей Кеплера (см. работы по многомерной задаче Кеплера, например [5]). Вот описание интегралов динамической системы с гамильтонианом (4). Вне зависимости от вида $U(\rho)$ задача имеет шесть интегралов момента

$$F_1 = p_y z - p_z y,\ F_2 = p_z x - p_x z,\ F_3 = p_x y - p_y x,$$
$$F_4 = cp_x t + \frac{1}{c} p_t x,\ F_5 = cp_y t + \frac{1}{c} p_t y,\ F_6 = cp_z t + \frac{1}{c} p_t z$$

и интеграл энергии

$$E = \frac{1}{2mc^2} (p_t^2 - c^2 p_r^2) - U(\rho).$$

Если предположить, что $U(\rho) = -\varkappa/\rho$, $\varkappa = -Q_1 Q_2$, то к указанному основному списку можно добавить четыре интеграла Лапласа — Рунге — Ленца:

$$\left(p_r^2 - \frac{1}{c^2} p_t^2\right) r - [(r, p_r) + tp_t]\, p_r - \frac{m\varkappa r}{\sqrt{r^2 - c^2 t^2}},$$
$$\left(p_r^2 - \frac{1}{c^2} p_t^2\right) ct + [(r, p_r) + tp_t]\, \frac{p_t}{c} + \frac{m\varkappa ct}{\sqrt{r^2 - c^2 t^2}}.$$

Из семи основных интегралов можно образовать четыре независимых интеграла, находящихся попарно в инволюции:

$$I_1 = p_y z - p_z y = F_1,$$
$$I_2^2 = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (xp_x + yp_y + zp_z)^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2,$$
$$I_3^2 = \left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{1}{c^2} p_t^2\right)(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2) -$$
$$- (xp_x + yp_y + zp_y + tp_t)^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 - F_4^2 - F_5^2 - F_6^2,$$
$$I_4 = 2mE.$$

Отметим, что из четырех интегралов два $I_3{}^2$ и I_4 являются лоренц-инвариантными. Будем считать, что величина $I_3 = \sqrt{I_3^2}$ принимает или неотрицательные значения, если $I_3 \geqslant 0$, или два чисто мнимых значения $\pm i\sqrt{-I_3^2}$, если $I_3 < 0$. Это просто условность, поскольку сама величина I_3 пока нигде не фигурирует.

Выполним замену переменных:

$$ct = \rho \operatorname{sh} \psi,\ z = \rho \operatorname{ch} \psi \cos \vartheta,\ y = \rho \operatorname{ch} \psi \sin \vartheta \sin \varphi,\ x = \rho \operatorname{ch} \psi \sin \vartheta \cos \varphi,$$
$$0 < \rho < \infty,\ -\infty < \psi < \infty,\ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi,\ \varphi \bmod 2\pi.$$

В новых переменных гамильтониан (4) принимает вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 - \frac{p_\psi^2}{\rho^2} + \frac{p_\vartheta^2}{\rho^2 \operatorname{ch}^2 \psi} + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2 \operatorname{ch}^2 \psi \sin^2 \vartheta}\right) - U(\rho).$$

Ясно, что переменные разделяются и выполняются соотношения

$$I_1 = p_\varphi,\ I_2^2 = p_\vartheta^2 + \frac{I_1^2}{\sin^2\vartheta},\ I_3^2 = -p_\psi^2 + \frac{I_2^2}{\operatorname{ch}^2\psi},\ I_4 = p_\rho^2 + \frac{I_3^2}{\rho^2} - 2mU(\rho), \tag{5}$$

где I_1, I_2, I_3, I_4 — выписанные выше интегралы. Таким образом, интегрирование уравнений движения сведено к интегрированию четырех гамильтоновых систем с одной степенью свободы.

Пусть $U(\rho)$ — кулоновский потенциал, соответствующий притяжению частиц: $U = -\varkappa/\rho$, $\varkappa > 0$. Анализ динамической системы в этом случае показывает, что при $I_3^2 < 0$ система «неустойчива»: частицы либо сталкиваются либо разлетаются на бесконечности. Условия, при которых движение в каждой фазовой плоскости ограничено, заключаются в следующих соотношениях:

$$|I_1| \leqslant I_2,\ 0 < I_3 \leqslant I_2,\ 0 < -I_4 \leqslant \frac{m^2\varkappa^2}{I_3^2}. \tag{6}$$

При этом совместные поверхности уровней интегралов I_1, I_2^2, I_3^2, I_4 будут четырехмерными торами.

Заметим далее, что можно показать независимость семи интегралов из всей совокупности одиннадцати интегралов. Это позволяет утверждать, что, как и в задаче Кеплера, все фазовые кривые на четырехмерных инвариантных торах замкнуты.

Отметим еще одно свойство динамических систем (4) с произвольным потенциалом $U(\rho)$. Движение в фазовой плоскости (ψ, p_ψ) задается гамильтонианом

$$I_3^2 = -p_\psi^2 + I_2^2/\operatorname{ch}^2\psi,$$

имеющим строгий максимум в точке (0, 0). Следовательно, если в некоторый момент значения ψ и p_ψ малы, то они будут оставаться столь же малыми на всей мировой линии. Таким образом, рассогласование времен может нарастать лишь за счет увеличения ρ. В частности, на ограниченных траекториях рассогласование времен будет колебаться в небольших пределах.

Поскольку гамильтонова система (4) с потенциалом $U = -\frac{Ze^2}{\rho}$ (e — заряд электрона, Z — кратность заряженного ядра) обладает компактными интегральными торами, к ней можно применить классические правила квантования Бора — Зоммерфельда [6]. Согласно этим правилам следует выделить инвариантные торы, для которых действие

$$\frac{1}{2\pi}\oint p_x dx + p_y dy + p_z dz + p_t dt = \frac{1}{2\pi}\oint p_\rho d\rho + p_\psi d\psi + p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi,$$

вычисленное по гомологически независимым циклам, кратно постоянной Планка $\hbar$. Ясно, что вычисление действия сводится к вычислению интегралов от 1-форм $p_\rho d\rho$, $p_\psi d\psi$, $p_\vartheta d\vartheta$, $p_\varphi d\varphi$ по замкнутым кривым (5). С учетом неравенств (6) квантование Бора — Зоммерфельда приводит к состояниям с фиксированной энергией

$$E_n = -\frac{m\varkappa^2}{2\hbar^2 n^2},\quad n = 1, 2, \ldots;$$

с фиксированным значением четырехмерного момента импульса

$$I_3 = \nu\hbar, \qquad 0 < \nu \leqslant n;$$

с фиксированным моментом импульса в $\mathbf{R}^3$

$$I_2 = l\hbar, \qquad l \geqslant \nu;$$

с фиксированным моментом относительно оси

$$I_1 = m\hbar, \qquad m = -l, -l+1, \ldots, l.$$

4. Релятивистские волновые функции водородоподобного атома. Роль гамильтониана в нашей задаче играет функция (3), в которой надо положить $U = -Ze^2/\rho$. В соответствии с правилами квантования положим:

$$p_{x_s} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_s}, \quad p_{y_s} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y_s}, \quad p_{z_s} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z_s}, \quad p_{t_s} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t_s}.$$

Эта подстановка превращает гамильтониан $\mathscr{H}$ в дифференциальный оператор второго порядка:

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2m_1c^2} \Box_1 + \frac{1}{2m_2c^2} \Box_2 + \frac{\varkappa}{\sqrt{(r_1 - r_2)^2 - c^2 (t_1 - t_2)^2}},$$

где $\Box_1$, $\Box_2$ — операторы Даламбера и $\varkappa = Ze^2$. Поскольку временные переменные учитываются внутренним образом, будем искать решения «стационарного» уравнения Шрёдингера:

$$\mathscr{H}\Psi = \frac{uc^2}{2} \Psi, \quad u = \text{const}. \tag{7}$$

Выполним замену переменных, соответствующую переходу к системе центра масс. Ясно, что при этом отделяется гамильтониан, учитывающий движение центра масс. Таким образом, мы получаем решения (7) вида

$$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}(P_0T + P_1X + P_2Y + P_3Z)} \Phi(x, y, z, t),$$

где X, Y, Z, T — координаты и время в системе центра масс. Волновая функция $\Phi(x, y, z, t)$ отвечает за внутренние состояния атома и удовлетворяет уравнению

$$\left(-E_0 + \frac{\hbar^2}{2m} \Box - \frac{\varkappa}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2}}\right) \Phi = 0, \tag{8}$$

где

$$E_0 = \frac{1}{2Mc^2} \left[P_0^2 - c^2 (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)\right] - \frac{uc^2}{2},$$

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

Будем рассматривать решения уравнения (8) в области

$$\mathfrak{B} = \{x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 > 0\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_{E_0}$ класс решений уравнения (8), для которых

$$\iiiint_{\mathfrak{B}} |\Phi|^2 \, dxdydzdt < \infty. \tag{9}$$

Каждой функции $\Phi \in \mathfrak{M}_{E_0}$ можно придать вероятностный смысл. После соответствующей нормировки $|\Phi(x, y, z, t)|^2$ означает плотность вероятности обнаружения электрона в точке с относительными координатами x, y, z и с собственным временем, отличающимся на t от времени ядра.

В уравнении (8) произведем замену переменных:

$$-\frac{m\varkappa}{\hbar^2} ct = \rho \operatorname{sh} \psi, \quad -\frac{m\varkappa}{\hbar^2} z = \rho \operatorname{ch} \psi \cos \vartheta,$$

$$-\frac{m\varkappa}{\hbar^2} y = \rho \operatorname{ch} \psi \sin \vartheta \cos \varphi, \quad -\frac{m\varkappa}{\hbar^2} x = \rho \operatorname{ch} \psi \sin \vartheta \sin \varphi,$$

где $\rho > 0$, $-\infty < \psi < \infty$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, $\varphi \bmod 2\pi$.

В новых переменных уравнение (8) принимает вид

$$\Big\{ -\varepsilon_0 - \Big[\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^3 \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2 \operatorname{ch}^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \operatorname{ch}^2 \psi \frac{\partial}{\partial \psi} +$$

$$+ \frac{1}{\rho^2 \operatorname{ch}^2 \psi} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Big] - \frac{2}{\rho} \Big\} \Phi(\rho, \psi, \vartheta, \varphi) = 0,$$

$$\varepsilon_0 = \frac{2\hbar^2}{m\varkappa^2} E_0. \tag{10}$$

Отметим, что в круглых скобках уравнения (10) стоит оператор Лапласа $D_{\vartheta, \varphi}$ на сфере в $\mathbf{R}^3$. Условие (9) превращается в неравенство:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\Phi(\rho, \psi, \vartheta, \varphi)|^2 \rho^3 \operatorname{ch}^2 \psi \sin \vartheta \, d\rho \, d\psi \, d\vartheta \, d\varphi < \infty. \tag{11}$$

Мы будем решать уравнение (10) методом Фурье. Разложим сначала решение по собственным функциям оператора Лапласа на сфере, затем соответствующие коэффициенты по спектральным функциям оператора второго порядка, связанного с переменной ψ, и наконец решим уравнения по ρ. Очевидно, что эта процедура обратима и мы получим описание всех функций класса $\mathfrak{M}_{E_0}$.

По-видимому, Паули впервые обратил внимание, что в аналогичной ситуации для боровской модели совсем необязательно рассматривать однозначные на сфере в $\mathbf{R}^3$ функции $\Phi(\rho, \psi, \vartheta, \varphi)$. Все физические величины будут однозначно определены, если мы подчиним функции $\Phi(\rho, \psi, \vartheta, \varphi)$ не условию периодичности по φ, а условию антипериодичности:

$$\Phi(\rho, \psi, \vartheta, \varphi + 2\pi) = -\Phi(\rho, \psi, \vartheta, \varphi)$$

(см. по этому поводу [7], гл. 17, п. 3). Таким образом, с оператором Лапласа на сфере в $\mathbf{R}^3$ можно связать две системы сферических функций:

i) $\{Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)\}$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, $m = -l, -l+1, \ldots, l$;

ii) $\{Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)\}$, $l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, m = -l, -l+1, \ldots, l$.

Первая система состоит из периодических с периодом 2π по переменной φ функций, а вторая из антипериодических.

В классическом случае рассматривается первый вариант, а второй отвергается, поскольку он приводит к энергетическому спектру, отличному от наблюдаемого. В нашем случае ситуация оказывается прямо противоположной. Рассмотрение однозначных на сфере функций приводит к спектру $E_n = -\dfrac{m\varkappa^2}{2\hbar^2\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2}$, а рассмотрение антипериодических функций — к уровням $E_n = -\dfrac{m\varkappa^2}{2\hbar^2 n^2}$.

Мы ограничиваемся здесь рассмотрением второго варианта для более полной аналогии с моделью Н. Бора.

Итак, пусть $l=1/2,\ 3/2,\dots, m=-l,\ -l+1,\dots, l$ и $\{Y_{l,m}(\vartheta,\ \varphi)\}$ — соответствующая система сферических функций. Рассмотрим разложение

$$\Phi(\rho,\ \psi,\ \vartheta,\ \varphi) = \sum_{l,m} B_{l,m}(\rho,\ \psi)\, Y_{l,m}(\vartheta,\ \varphi).$$

Условие (11) превращается теперь в соотношение

$$\sum_{l,m} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |B_{l,m}(\rho,\ \psi)|^2 \rho^3 \operatorname{ch}^2\psi\, d\rho\, d\psi < \infty,$$

а функции $B_{l,m}(\rho,\ \psi)$ удовлетворяют уравнению

$$\left\{-\varepsilon_0 - \left[\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^3\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2\operatorname{ch}^2\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\operatorname{ch}^2\psi\frac{\partial}{\partial\psi} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{l(l+1)}{\rho^2\operatorname{ch}^2\psi}\right] - \frac{2}{\rho}\right\} B(\rho,\ \psi) = 0.$$

Рассмотрим теперь задачу на собственные значения

$$\left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2\psi}\frac{d}{d\psi}\operatorname{ch}^2\psi\frac{d}{d\psi} + \frac{l(l+1)}{\operatorname{ch}^2\psi}\right] T_1 = \lambda T_1.$$

Замена $T = T_1/\operatorname{ch}\psi$ приводит это уравнение к виду

$$\frac{d^2}{d\psi^2}T + \left[\frac{l(l+1)}{\operatorname{ch}^2\psi} - (\lambda+1)\right] T = 0. \tag{12}$$

Спектр уравнения (12) состоит из дискретной части в области $\lambda+1>0$ и непрерывной части, заполняющей всю полуось $\lambda+1\leqslant 0$. Введем новый спектральный параметр $\nu^2=\lambda+1$. Дискретный спектр уравнения (12) указан в [8, с. 97]. Он состоит из точек $\nu=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\dots, l$, а собственные функции имеют вид

$$T_{\nu,l}(\psi) = \frac{1}{(\operatorname{ch}\psi)^\nu} \sum_{k=0}^{l-\nu} \frac{(\nu-l)_k(\nu+l+1)_k}{(\nu+1)_k\, k!} \frac{1}{(e^{2\psi}+1)^k}.$$

Обобщенные собственные функции непрерывного спектра вычисляются по формуле

$$T_{\nu,l}(\psi) = e^{-\nu\psi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-l)_k(l+1)_k}{(\nu+1)_k\, k!} \frac{1}{(e^{2\psi}+1)^k}.$$

Здесь ν пробегает всю мнимую ось; $(p)_k = p(p+1)\dots(p+k-1)$.

Разложим функцию $\operatorname{ch}\psi B(\rho, \psi)$ по спектральным функциям задачи (12). Имеем

$$\operatorname{ch}\psi B(\rho, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\rho, i\xi) T_{i\xi, l}(\psi) d\xi + \sum_{\nu=\frac{1}{2}}^{l} A_\nu(\rho) T_{\nu, l}(\psi),$$

где функции $T_{\nu, l}$ предполагаем нормированными. Соотношение (11) доказывает, что

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} |A(\rho, i\xi)|^2 \rho^3 d\rho d\xi + \sum_{\nu=\frac{1}{2}}^{l} \int_0^\infty |A_\nu(\rho)|^2 \rho^3 d\rho < \infty.$$

Функции $A(\rho, \nu)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{\rho^3}\frac{d}{d\rho}\rho^3\frac{d}{d\rho}A_1(\rho) - \left(\frac{\lambda}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} - \varepsilon_0\right) A_1(\rho) = 0.$$

Замена $\mathcal{A}(\rho) = \rho^{3/2} A_1(\rho)$ приводит его к виду

$$\frac{d^2}{d\rho^2}\mathcal{A}(\rho) - \left[\frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} - \varepsilon_0\right]\mathcal{A}(\rho) = 0. \qquad (13)$$

Известный анализ этого уравнения дает следующие результаты [9]. При $\varepsilon_0 > 0$ нет нетривиальных решений, для которых

$$\int_0^\infty |\mathcal{A}(\rho)|^2 d\rho < \infty.$$

При $\varepsilon_0 < 0$ положим $n = 1/\sqrt{-\varepsilon_0} > 0$. Если ν — полуцелое и $\nu > 0$, то уравнение (13) имеет суммируемое с квадратом решение лишь при $n = \nu + \frac{1}{2} + k$, $k = 0, 1, \ldots$ Это решение имеет вид

$$\mathcal{A}_{n,\nu}(\rho) = \rho^{\nu + \frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho}{n}} L_k^{2\nu}(\rho),$$

где $L_k^{2\nu}$ — многочлен Лагерра. Если ν — чисто мнимое число, то

$$\mathcal{A}_{n,\nu}(\rho) = \rho^{\nu + \frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho}{n}} U\left(\nu + \frac{1}{2} - n,\ 2\nu + 1,\ \frac{2}{n}\rho\right) \in L_2,$$

где U — вырожденная гипергеометрическая функция [10].

Таким образом, при фиксированном $\varepsilon_0 < 0$ модифицированный класс $\mathfrak{M}_{E_0}$, состоящий из антипериодических решений уравнения (10), можно рассматривать как линейную комбинацию, включая интегрирование по мнимой оси, функций

$$A_{n,\nu}(\rho) T_{\nu,l}(\psi) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi). \qquad (14)$$

Если $\varepsilon_0 \neq -1/n^2$, то ν в этой совокупности принимает лишь чисто мнимые значения. Если же $\varepsilon_0 = -1/n^2$, то к чисто мнимым ν добавляются дискретные значения. Естественно рассмотреть волновые функции (14), отвечающие квантовым числам

$$n=1, 2, \ldots; \ \nu=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \nu<n; \ l=\nu, \nu+1, \ldots;$$

$$m=-l, -l+1, \ldots, l.$$

Эти волновые функции и соответствующие квантовые числа имеет смысл отнести к стационарным состояниям водородоподобного атома. Конечно, интерпретация квантовых чисел остается той же, что и при квантовании Бора — Зоммерфельда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nikolov P. A., Todorov I. T. Space-time versus phase spase approach to relativistic particle dynamics // Lect. Notes Math. 1982. **970**. 197—216.
2. Клепиков Н. П., Шатний А. Н. О формулировке релятивистской механики систем взаимодействующих частиц // Теорет. и матем. физика. 1981. **46**, № 1. 50—63.
3. Dirac P. A. M. Generalized Hamiltonian dynamics // Can. J. Math. 1950. **2**. 129—148.
4. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. М., 1960.
5. Moser J. Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold // Communs Pure and Appl. Math. 1970. **23**, N 4. 609—636.
6. Борн М. Лекции по атомной механике. Харьков, 1934.
7. Бом Д. Квантовая теория. М., 1961.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1974.
9. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1954.
10. Справочник по специальным функциям. М., 1979.

Поступила в редакцию
09.04.86