МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 1 (1988)

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ОБРАТИМОЙ СИСТЕМЕ НА ТОРЕ

В. В. Козлов

Рассматривается движение точки по тору $\mathbf{T}^n = \{x \bmod 2\pi\}$ с плоской метрикой в поле периодической силы, компоненты которой F_s — мероморфные функции в $\mathbf{C}^n$. Пусть $x = az + b$, $z \in \mathbf{C}$ — прямая в $\mathbf{C}^n$ и f_s — ограничение F_s на эту прямую — мероморфные функции одной комплексной переменной z. Если f_s имеют полюсы с ненулевыми вычетами, то общее решение уравнений движения неоднозначно в плоскости комплексного времени (теорема 1). Пусть мероморфная вектор-функция f имеет m полюсов с линейно независимыми вычетами, а уравнения движения допускают k независимых однозначных первых интегралов, которые являются полиномами по скоростям. Тогда $m + k \leqslant n$ (теорема 2). Этот результат дает ответ на вопрос о наличии связи между однозначностью общего решения уравнений динамики и их интегрируемостью (задача Пенлеве—Голубева).

1. Пусть $\mathbf{T}^n = \{x^1, \ldots, x^n \bmod 2\pi\}$ — пространство положений механической системы с n степенями свободы,

$$T = \frac{1}{2} g_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k, \qquad g_{jk} = \mathrm{const}$$

— кинетическая энергия, ковекторное поле на $\mathbf{T}^n$,

$$F = \{F_1, \ldots, F_n\}$$

— сила, действующая на систему. Уравнения движения

$$g_{kj}\ddot{x}^j = F_k \ (k = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

обратимы: вместе с решением $t \mapsto x(t)$ они имеют решение $t \mapsto x(-t)$. Все известные интегралы системы (1) являются полиномами по скоростям $\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n$ с однозначными на $\mathbf{T}^n$ коэффициентами (либо функциями от полиномов).

Предположим, что компоненты силы F_s аналитичны на $\mathbf{T}^n$ и продолжаются до мероморфных функций в аффинном пространстве комплексных переменных $x^1, \ldots, x^n$. Тогда систему (1) можно трактовать как систему дифференциальных уравнений в $\mathbf{C}^n$ с комплексным временем $t \in \mathbf{C}$. Нас будут интересовать задачи, связанные с условиями однозначности общего решения системы (1) и существования $k \leqslant n$ однозначных полиномиальных интегралов.

Полиномиальный по скоростям интеграл назовем однозначной функцией, если его коэффициенты

1) периодичны по $x^1, \ldots, x^n$ с вещественным периодом 2π;

2) голоморфны в области $\mathbf{C}^n \setminus \mathscr{P}$, где $\mathscr{P}$ — объединение полярных множеств мероморфных функций $F_1, \ldots, F_n$.

Пусть

$$x = az + b, \quad a, b \in \mathbf{C}^n, \quad z \in \mathbf{C} \tag{2}$$

— прямая в комплексном пространстве $\mathbf{C}^n$. Предположим, что ограничения мероморфных функций $F_1, \ldots, F_n$ на эту прямую являются мероморфными функциями на комплексной плоскости $z \in \mathbf{C}$. Обозначим их $f_1, \ldots, f_n$. Мероморфность функций f_s заведомо имеет место, если прямая (2) трансверсально пересекает полярное множество $\mathscr{P}$ в точках, не являющихся точками неопределенности функций F_s. Так как $\mathscr{P}$ является комплексной гиперповерхностью в $\mathbf{C}^n$, а множество точек неопределенности имеет комплексную коразмерность два, то указанное свойство имеет место для почти всех значений a и b. Совокупность мероморфных функций $f_1, \ldots, f_n$ образует мероморфную вектор-функцию f. Поэтому можно говорить о вычетах функции f в ее полюсах. Вычеты являются векторами из $\mathbf{C}^n$; они зависят, разумеется, от выбора значений a и b.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что при некоторых a, $b \in \mathbf{C}^n$ функция $z \mapsto f(z)$ имеет полюс с ненулевым вычетом. Тогда общее решение системы* (1) *не является однозначной функцией комплексного времени.*

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что*

1) *при некоторых a, $b \in \mathbf{C}^n$ функция f имеет m полюсов, вычеты в которых линейно независимы над полем $\mathbf{C}$;*

2) *система* (1) *имеет* k *однозначных полиномиальных интегралов с почти всюду независимыми старшими однородными формами.*

Тогда $m + k \leqslant n$.

Рассмотрим простой пример. Пусть $n = 1$ и $F(x) = \operatorname{sn}(2Kx/\pi, \varkappa)$, где K — полный эллиптический интеграл с модулем $\varkappa > 0$. Так как f имеет простые полюсы, то применимы теоремы 1 и 2. Следовательно, общее решение многозначно и уравнения движения не имеют однозначного полиномиального интеграла. Интересно отметить, что в вещественной области имеется однозначный полиномиальный интеграл — интеграл энергии. Однако в комплексном фазовом пространстве эта функция имеет логарифмические особые точки. Задача о несуществовании полиномиальных интегралов уравнений (1) при вещественных значениях x значительно сложнее.

Пусть силы потенциальны ($F_s = -\partial V/\partial x^s$) и потенциал V является периодической мероморфной функцией. Тогда уравнения (1) допускают интеграл энергии, являющийся однозначной полиномиальной функцией. Поэтому $m \leqslant n - 1$. Легко привести примеры потенциальных силовых полей, для которых $m = n - 1$.

2. Теорема 1 выводится из следующего утверждения:

Предложение 1. *Предположим, что при некоторых* a, b *функция* $z \mapsto f_j(z)$ *имеет в точке* z_0 *полюс с вычетом* ζ_j. *Тогда при достаточно больших значениях* $|\alpha|$, $\alpha \in \mathbf{C}$ *решение системы* (1) *с начальным условием* $x(0) = b$, $\dot{x}(0) = \alpha a$ *продолжается в некоторую кольцевую окрестность точки* $t_0 = z_0/\alpha$, *причем при обходе точки* t_0 *скорость* $\dot{x}_s$ *испытывает скачок* $2\pi i\alpha^{-1}g^{sj}\zeta_j + o(\alpha^{-1})$.

Для доказательства перепишем систему (1) в виде системы уравнений первого порядка

$$\dot{x}^s = v^s,\ \dot{v}^s = g^{sj}F_j \quad (1 \leqslant s \leqslant n) \tag{3}$$

и сделаем подстановку $v^s = \alpha u^s$, $t = \tau/\alpha$. Обозначая штрихом дифференцирование по τ, из (3) получим следующие уравнения:

$$x^{s\prime} = u^s,\ u^{s\prime} = \varepsilon g^{sj}F_j,\ \varepsilon = \alpha^{-2}. \tag{4}$$

Считаем ε малым параметром и рассматриваем прямую $x = a\tau + b$ как решение невозмущенной системы. Для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой Пуанкаре о разложении решений уравнений (4) в сходящиеся ряды по степеням ε и теоремой Коши о вычетах.

Для доказательства теоремы 2 будет использована следующая

ЛЕММА 1. *Старшая однородная форма однозначного интеграла уравнений* (1) *не зависит от переменных* x.

Действительно, старшая однородная форма полиномиального интеграла является интегралом задачи о движении по инерции по n-мерному тору $\mathbf{T}^n = \{x \bmod 2\pi\}$. Будем считать x вещественными угловыми координатами. Тогда действительная и мнимая части однородной формы также являются интегралами уравнений $\ddot{x}^s = 0$. Так как $\dot{x}^s = \text{const}$ и почти все траектории этой системы всюду плотны на $\mathbf{T}^n$, то любой вещественный периодический интеграл зависит лишь от скоростей $\dot{x}^s$. Что и требовалось.

ЛЕММА 2. *Предположим, что выполнены условия предложения* 1 *и пусть* $\Phi(v^1, \ldots, v^n)$, $v^s = \dot{x}^s$ — *старшая однородная форма однозначного интеграла. Тогда*

$$g^{sj}\frac{\partial\Phi}{\partial v^s}\zeta_j \equiv 0. \tag{5}$$

Доказательство использует постоянство интеграла на ветвящихся решениях из предложения 1. Замена $v^s = \alpha u^s$ переводит полиномиальный интеграл системы (3) в интеграл системы (4), аналитический по $1/\alpha$:

$$\Phi(u) + \frac{1}{\alpha}\Psi(u, x) + \ldots$$

Эта функция инвариантна при подстановке

$$u^s \mapsto (u^s)' = u^s + 2\pi i\alpha^{-2}g^{sj}\zeta_j + o(\alpha^{-2}),$$
$$x^s \mapsto (x^s)' = x^s + O(\alpha^{-2}).$$

Следовательно,

$$\Phi(u') + \frac{1}{\alpha}\Psi(u', x') + \ldots = \Phi(u) + \frac{1}{\alpha}\Psi(u, x) + \ldots$$

Дифференцируя это равенство по α, умножая обе части равенства на α^3 и полагая затем $\alpha \to \infty$, приходим к соотношению (5).

Условие (5) геометрически означает ортогональность градиента Φ_v' и вычета ζ. Если система имеет m независимых вычетов и k интегралов с независимыми градиентами старших форм, то, очевидно, $m + k \leqslant n$. Что доказывает теорему 2.

3. Хорошо известно, что не всякое ветвление решений приводит к отсутствию однозначных полиномиальных интегралов. Теоремы 1—2 дают достаточные условия, при которых траектории ветвящихся решений уравнений (1) не укладываются на поверхности уровня полиномиальных интегралов. Этот результат дает ответ на вопрос о наличии связи между однозначностью общего решения системы уравнений (1) и ее интегрируемостью. Постановка этого вопроса восходит к Пенлеве. В [1] эта задача связывается с результатами Ковалевской — Ляпунова и Гюссона в динамике тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. В последнее время задача Пенлеве — Голубева обсуждалась в ряде физических работ [2, 3]. Роль ветвящихся решений как препятствия к интегрируемости в комплексном фазовом пространстве впервые выяснена в [4] с помощью метода малого параметра Пуанкаре. Затем С. Л. Зиглин связал эти вопросы с самопересечением комплексных сепаратрис [5] и со строением группы монодромии уравнений в вариациях [6]. Второй подход связан с известным методом Ляпунова. В рассматриваемой задаче результаты [5, 6] неприменимы. Доказательство теорем 1 и 2 основывается на методе [4].

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 18.01.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений вращения тяжелого твердого тела около неподвижной точки.— М.: Гостехиздат, 1953.

[2] Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика.— М.: Мир, 1984.

[3] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи.— М.: Мир, 1987.

[4] Козлов В. В. Несуществование однозначных интегралов и ветвление решений в динамике твердого тела // ПММ.— 1978. Т. 42, вып. 3.— С. 400—406.

[5] Зиглин С. Л. Самопересечение комплексных сепаратрис и несуществование интегралов в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // ПММ.— 1981. Т. 45, вып. 3.— С. 564—566.

[6] Зиглин С. Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике I, II // Функцион. анализ и его прил.— 1982. Т. 16, № 3.— С. 30—41; 1983. Т. 17, № 1.— С. 8—23.