УДК 531.01

В. В. Козлов

К ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С НЕКОМПАКТНЫМИ ИНВАРИАНТНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Геометрический вариант теоремы Лиувилля о полной интегрируемости утверждает, что некритические совместные уровни n коммутирующих интегралов гамильтоновой системы с n степенями свободы диффеоморфны $\mathbf{T}^k\times\mathbf{R}^{n-k}$, $0\leqslant k\leqslant n$, причем в некоторых переменных $x_1, \ldots, x_k \bmod 2\pi, x_{k+1}, \ldots, x_n$ уравнения Гамильтона имеют совсем простой вид $\dot{x}_s=\omega_s=\mathrm{const}$, $1\leqslant s\leqslant n$. При $s>k$ «частоты» ω_s можно считать равными либо нулю, либо единице. Для справедливости этого утверждения в некомпактном случае нужно дополнительное предположение о полноте n гамильтоновых векторных полей, порожденных первыми интегралами. В компактном случае (когда $k=n$) имеется достаточно полная теория поведения гамильтоновых систем, мало отличающихся от интегрируемых. В настоящей работе обсуждаются некоторые аналитические аспекты этой теории для некомпактного случая.

1. Возмущения некомпактных поверхностей. Пусть $M^n=\mathbf{T}^k\times\mathbf{R}^{n-k}$ — пространство положений гамильтоновой системы с функцией Гамильтона

$$H_0+\varepsilon H_1,$$

где $H_0=(\Sigma a_{ij}y_iy_j)/2$ — положительно определенная квадратичная форма с постоянными коэффициентами, H_1 — однозначная функция на $\mathbf{T}^k\times\mathbf{R}^{n-k}=\{x_1, \ldots, x_k \bmod 2\pi, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$. Ввиду однозначности функция H_1 периодична по $x_1, \ldots, x_k$ с периодом 2π. Гамильтоновы системы такого вида содержат все существенные моменты общего случая, однако их анализ проще в техническом отношении.

Введем два скалярных произведения в $\mathbf{R}^n$:

$$\langle\xi, \eta\rangle=\Sigma a_{ij}\xi_i\eta_j, \quad (\xi, \eta)=\Sigma\xi_i\eta_i.$$

С учетом этих обозначений $H_0=\langle y, y\rangle/2$. Ясно, что для каждого $\xi\in\mathbf{R}^n$ найдется вектор $\hat{\xi}$, такой, что $\langle\hat{\xi}, \eta\rangle=(\xi, \eta)$ для всех η.

Следуя известной схеме классической теории возмущений, попытаемся найти зависящее от ε каноническое преобразование $x, y\mapsto u, v$ вида

$$y=\frac{\partial S}{\partial x}, \quad u=\frac{\partial S}{\partial v}; \quad S=S_0(v, x)+\varepsilon S_1(v, x)+\ldots,$$

переводящее гамильтониан $H_0+\varepsilon H_1$ в функцию $K_0(v)+\varepsilon K_1(v)+\ldots$. Положим $S_0=(v, x)$; тогда при $\varepsilon=0$ будем иметь тождественное преобразование. Производящая функция S должна удовлетворять уравнению Гамильтона—Якоби

$$H_0\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)+\varepsilon H_1(x)=K_0(v)+\varepsilon K_1(v)+\ldots.$$

Отсюда получаем бесконечную цепочку уравнений для последовательного определения $S_1, S_2, \ldots$ и $K_1, K_2, \ldots$:

$$\begin{gathered}
\left\langle v, \frac{\partial S_1}{\partial x}\right\rangle + H_1 = K_1 \\
\left\langle v, \frac{\partial S_2}{\partial x}\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial S_1}{\partial x}, \frac{\partial S_1}{\partial x}\right\rangle = K_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left\langle v, \frac{\partial S_m}{\partial x}\right\rangle + \frac{1}{2}\sum_{p+q=m}\left\langle \frac{\partial S_p}{\partial x}, \frac{\partial S_q}{\partial x}\right\rangle = K_m \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{1}$$

Будем искать $S_1, S_2, \ldots$ в виде функций, 2π-периодических по $x_1, \ldots, x_k$. В компактном случае ($k=n$) обычно предполагается, что средние значения функций S_m ($m \geqslant 1$) на $\mathbf{T}^n$ равны нулю. Это позволяет (на формальном уровне) из системы (1) однозначно найти $S_1, S_2, \ldots$ и $K_1, K_2, \ldots$ (см. [1, гл. IX]). Возникающие при этом малые знаменатели препятствуют сходимости формальных рядов. В некомпактном случае ситуация иная.

Каждое из уравнений системы (1) можно записать в следующем виде:

$$\left(\hat{v}, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = g, \tag{2}$$

где $\hat{v}$ — постоянное векторное поле на M^n, g — известная, а f — неизвестная функции. Имеет место простое

Предложение. *Если интегральные кривые векторного поля $\hat{v}$ не ограничены на M^n, то уравнение* (2) *разрешимо в целом.*

В частном случае, когда $M = \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}^{n-1}$ (или $M = \mathbf{R}^n$), функция f находится простым интегрированием g по траекториям поля $\hat{v}$. При этом f однозначно определяется своими значениями в сечении $x_1 = \mathrm{const}$.

Будем рассматривать решение уравнения (2) как функцию от x и $\hat{v}$ (или v). В общем случае оно имеет очевидную сингулярность в точке $\hat{v}=0$. Стоит отметить, что если $M \neq \mathbf{R}^n$, то уравнение (2) не имеет решения, аналитического по $\hat{v}$ в области $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. Причина заключается в том, что некоторые поля $\hat{v}$ имеют замкнутые траектории.

2. Малые знаменатели. Рассмотрим потенциалы частного вида

$$H_1 = \Sigma\, b_\lambda \exp\,(a_\lambda, x), \tag{3}$$

где $a_\lambda \in \mathbf{R}^n$, b_λ — вещественные постоянные. Чтобы не обсуждать вопросы сходимости, введем предположение о конечности суммы (3). К системам с потенциалом (3) относятся обобщенные цепочки Тоды [2]; они будут обсуждаться в п. 4.

Исследуем разрешимость первого уравнения системы (1) для потенциала (3). Можно считать, что все $a_\lambda \neq 0$: постоянные слагаемые в потенциале H_1 отнесем к функции K_1. Будем искать решение в виде суммы экспонент

$$S_1 = \Sigma\, s_\lambda(v) \exp\,(a_\lambda, x).$$

Тогда, очевидно,

$$s_\lambda = -\frac{b_\lambda}{\langle v, a_\lambda\rangle}.$$

Коэффициенты разложения функции S_1 не определены на «резонансных» плоскостях $\langle v, a_\lambda\rangle=0$. Объединение всех таких плоскостей обозначим $\mathbf{B}_1$. На множестве $(\mathbf{R}^n\setminus\mathbf{B}_1)\times M^n$ функция S_1 однозначна и аналитична. Уравнение для S_2 имеет тот же вид. Решая это уравнение тем же способом, приходим к множеству новых резонансных плоскостей $\mathbf{B}_2$; условимся, что множество $\mathbf{B}_2$ целиком содержит $\mathbf{B}_1$. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность вложенных друг в друга множеств

$$\mathbf{B}_1\subset\mathbf{B}_2\subset\ldots\subset\mathbf{B}_m\subset\ldots. \tag{4}$$

Положим

$$\mathbf{B}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\mathbf{B}_m.$$

Производящая функция S не «определена» в точках из $\mathbf{B}\times M^n\subset\mathbf{R}^n\times M^n$. Поэтому гамильтонову систему с потенциалом (3) естественно считать интегрируемой или неинтегрируемой в зависимости от того, стабилизирована последовательность (4) или нет (т. е. $\mathbf{B}_{m+s}=\mathbf{B}_m$ при всех $s\geqslant 0$). Целесообразность такого определения интегрируемой системы обсуждается в п. 3. Ниже указано достаточное условие неинтегрируемости.

Совокупность всех векторов a_λ обозначим через $\mathfrak{M}$. Пусть $a=(a_1, \ldots, a_n)$. Вершиной множества $\mathfrak{M}$ назовем вектор α с компонентами

$$\alpha_1=\max_{\mathfrak{M}} a_1,\quad \alpha_2=\max_{\substack{\mathfrak{M}\\ a_1=\alpha_1}} a_2,\ \ldots,\ \alpha_n=\max_{\substack{\mathfrak{M}\\ a_1=\alpha_1\\ \cdots\cdots\\ a_{n-1}=\alpha_{n-1}}} a_n. \tag{5}$$

Ясно, что $\alpha\in\mathfrak{W}$. Вершину β множества $\mathfrak{M}\setminus\{\alpha\}$ назовем вершиной $\mathfrak{M}$, примыкающей к β.

Теорема. *Предположим, что вершины α и β линейно независимы и*

$$2\langle\alpha,\beta\rangle+l\langle\alpha,\alpha\rangle\neq 0 \tag{6}$$

при всех целых $l\geqslant 0$. Тогда множество $\mathbf{B}_m$ содержит гиперплоскость $\langle v, m\alpha+\beta\rangle=0$.

Это утверждение можно доказать методом работы [3].

Не следует думать, что каждое решение уравнений системы (1) имеет сингулярности на «резонансных» плоскостях. Рассмотрим простой пример уравнения

$$v_1\frac{\partial S}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial S}{\partial x_2}=e^{x_1}.$$

Оно имеет решение e^{x_1}/v_1; прямая $v_1=0$ будет резонансной. Однако можно указать решение без сингулярностей в области $\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$:

$$S=\begin{cases}\dfrac{1}{v_1}\left(\exp x_1-\exp\dfrac{v_2(v_2x_1-v_1x_2)}{v_1^2+v_2^2}\right); & v_1\neq 0,\\[2ex] \dfrac{x_2}{v_2}\exp x_1; \quad v_1=0, & v_2\neq 0.\end{cases}$$

Оно, конечно, не является многочленом экспонент при всех $v_1^2+v_2^2\neq 0$.

С аналитической точки зрения причина появления малых знаменателей для потенциалов с вещественными экспонентами точно такая же, как и в случае компактной поверхности M^n. Разница лишь в том, что аналитическое предположение о представимости решения системы (1) в виде кратного ряда Фурье обычно формулируют геометрически как условие однозначности на M^n.

Если $M^n = \mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^{n-k}$, то формулу (3) для потенциала H_1 следует модифицировать: первые k компонент каждого вектора a_λ должны быть числами из $i\mathbf{Z}$, i — мнимая единица. Тогда функция H_1 будет 2π-периодической по $x_1, \ldots, x_k$. Так как H_1 — вещественная функция, то для каждого λ найдется μ, такое, что

(i) первые k компонент вектора $a_\lambda + a_\mu$ равны нулю,

(ii) $\bar{b}_\lambda = b_\mu$.

И в этом более общем случае систему (1) можно решать методом п. 2. Надо только иметь в виду, что уравнение $\langle a, v\rangle = 0$ задает теперь не одну, а две гиперплоскости $\langle a', v\rangle = \langle a'', v\rangle = 0$; здесь $a' + a'' = a$, причем компоненты вектора a' вещественны, а вектора a'' чисто мнимы. Поэтому в общем случае коразмерность резонансных плоскостей больше единицы.

3. Малые знаменатели и первые интегралы. Целесообразность определения интегрируемой системы, данного в п. 2, можно обосновать с помощью рассуждения, восходящего к Пуанкаре [1, гл. V]. Будем искать первые интегралы гамильтоновой системы в виде степенных рядов $\Sigma F_s(x, y)\varepsilon^s$. В случае компактного пространства положений M коэффициенты F_s полагают 2π-периодическими по $x_1, \ldots, x_n$. Если $M = \mathbf{R}^n$ и потенциал H_1 задан формулой (3), то F_s естественно искать в виде ряда экспонент

$$\Sigma f_\lambda(y) \exp(c_\lambda, x). \tag{7}$$

Такой вид имеют первые интегралы в проинтегрированных обобщенных цепочках Тоды.

Предложение. *Предположим, что рассматриваемая гамильтонова система имеет n интегралов*

$$F_0 + \varepsilon F_1 + \ldots, \ \ldots, \ \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 + \ldots$$

с коэффициентами вида (7). *Тогда*

(i) $F_0, \ldots, \Phi_0$ *не зависят от* x,

(ii) *якобиан* $\dfrac{\partial(F_0, \ldots, \Phi_0)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}$ *обращается в нуль в точках множества* $\mathbf{B}$.

Если множество $\mathbf{B}$ состоит из бесконечного числа различных гиперплоскостей и функции $F_0, \ldots, \Phi_0$ аналитичны, то из заключения (ii) вытекает зависимость $F_0, \ldots, \Phi_0$ во всех точках $\mathbf{R}^n$.

Докажем, например, (i). Свободные коэффициенты $F_0, \ldots, \Phi_0$ являются интегралами невозмущенной системы с гамильтонианом H_0. Приравнивая нулю результат дифференцирования ряда (7) в силу невозмущенной системы, получим равенство

$$\Sigma f_\lambda \langle c_\lambda, y\rangle \exp(c_\lambda, x) \equiv 0.$$

Пусть $c_\lambda \neq 0$. Тогда $\langle c_\lambda, y\rangle \not\equiv 0$, откуда $f_\lambda \equiv 0$. Что и требовалось. Заключение (ii) доказывается точно так же, как и аналогичное утверждение в компактном случае [3].

К определению интегрируемой системы с потенциалом (3) можно подойти с другой стороны. Следуя Биркгофу, назовем систему интегрируемой, если она имеет полный независимый набор полиномиальных по импульсам первых интегралов с коэффициентами в виде суммы экспонент.

Предложение. *Предположим, что множество* **B** *состоит из бесконечного числа различных гиперплоскостей. Тогда гамильтонова система с гамильтонианом H_0+H_1 не имеет n полиномиальных интегралов с независимыми старшими однородными формами.*

Подчеркнем, что здесь не предполагается малость потенциала H_1. В случае двух степеней свободы можно гарантировать отсутствие дополнительного полиномиального интеграла, независимого с функцией H_0+H_1.

4. Приложение к цепочкам Тоды. Основываясь на теореме п. 2, сначала укажем простое необходимое условие интегрируемости гамильтоновой системы с функцией Гамильтона $H_0+\varepsilon H_1$, где $H_0=\langle y, y\rangle/2$, а потенциал H_1 задан формулой (3).

Теорема. *Предположим, что гамильтонова система интегрируема и пусть α, β — любые две соседние вершины выпуклой оболочки совокупности $\mathfrak{M}=\{a_\lambda\}$. Если α и β линейно независимы, то*

$$\frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\in-\mathbf{Z}^+,\quad \mathbf{Z}^+=\{0,1,2,\ldots\}. \tag{8}$$

Предположение о независимости векторов α и β существенно. Это показывает пример вполне интегрируемой системы, у которой все векторы a_λ попарно линейно зависимы.

Следствие. *Предположим, что n любых векторов из совокупности $a_1, a_2,\ldots,a_{n+1}\in\mathbf{R}^n$ линейно независимы. Тогда гамильтонова система с функцией Гамильтона*

$$H=\frac{1}{2}\Sigma y_s^2+\varepsilon\Sigma\exp(a_s,x) \tag{9}$$

интегрируема тогда и только тогда, когда

$$\frac{2\langle a_i,a_j\rangle}{\langle a_i,a_i\rangle}\in-\mathbf{Z}^+ \tag{10}$$

для всех $i\neq j$.

Действительно, в этом случае выпуклая оболочка $\mathfrak{M}$ является n-мерным симплексом, и поэтому каждые две вершины будут соседними. Включение (10) вытекает, конечно, из (8). Достаточность условия (10) доказана в работе [4].

Условие (10) получено впервые Адлером и ван Мербеке [4] с помощью анзаца Ковалевской как критерий алгебраической интегрируемости системы с функцией Гамильтона (9). Алгебраическая интегрируемость рассматриваемой системы означает, в частности, что имеется полный набор интегралов, полиномиальных по переменным y_s, $\exp x_s$ $(1\leqslant s\leqslant n)$, и что эти переменные выражаются через ϑ-функции комплексного времени. Ясно, что сформулированное выше следствие усиливает результат Адлера—ван Мербеке.

Для доказательства теоремы воспользуемся следующим приемом. Совершим невырожденное линейное преобразование $x'=Bx$ и расширим его до канонического преобразования $x, y\mapsto x', y'$, положив $y'=(B^{\mathrm{T}})^{-1}y$. В новых переменных

$$H_0=\frac{1}{2}(BAB^{\mathrm{T}}y',y'),\quad H_1=\Sigma b_\lambda\exp(a'_\lambda,x'),$$

где $A=\|a_{ij}\|$, $a_\lambda'=(B^\top)^{-1}a_\lambda$. Ясно, что

$$\langle a_\lambda, a_\mu\rangle=(Aa_\lambda, a_\mu)=(BAB^\top a_\lambda', a_\mu'). \tag{11}$$

При линейном преобразовании $x\mapsto x'$ выпуклая оболочка $\mathfrak{M}=\{a_\lambda\}$ перейдет в выпуклую оболочку $\mathfrak{M}'=\{a_\lambda'\}$, однако в общем случае $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, рассматриваемые как множества в $\mathbf{R}^n$, не совпадают. Поэтому не совпадают и их вершины (в смысле определения п. 2). Пусть α и β — соседние вершины выпуклой оболочки $\mathfrak{M}$ и Γ — соединяющий их отрезок. Можно показать, что после подходящей замены переменных формулы (5) дадут нам в качестве вершины $\mathfrak{M}$ точку α, а в качестве примыкающей вершины α' — точку на Γ, ближайшую к α среди точек из $\mathfrak{M}\cap\Gamma$. Ввиду равенства (11) условие (6) теоремы п. 2 можно проверять в исходных переменных. Условие (6) дает неравенство $\langle\alpha, \alpha'\rangle\leqslant 0$. Следовательно, угол между векторами α и α' (в метрике $\langle,\rangle$) не меньше $\pi/2$. Точно так же в качестве вершины $\mathfrak{M}$ можно взять вектор β, причем примыкающая вершина — точка β' — будет расположена на Γ между β и α' (если, конечно, $\alpha'\neq\beta$). Угол между β и β' снова будет не меньше $\pi/2$. Так как векторы α и β по предположению линейно независимы и угол между ними не меньше π, то, очевидно, $\alpha'=\beta$ и $\beta'=\alpha$. Для завершения доказательства осталось использовать условие (8). Одновременно мы доказали, что на отрезке Γ кроме вершин α и β нет других точек из $\mathfrak{M}$, если α и β линейно независимы.

Обобщенные цепочки Тоды введены О. И. Богоявленским [5]. Их динамика описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_iy_j+\sum_{k,l=1}^{n+1} b_{kl}\exp[(a_k, x)+(a_l, x)]. \tag{12}$$

Векторы $a_1, \ldots, a_{n+1}\in\mathbf{R}^n$ и вещественные коэффициенты b_{kl} удовлетворяют следующим условиям:

A) для всякого $y\in\mathbf{R}^n$

$$\max_k (a_k, y)>0,$$

B) для всех k коэффициенты $b_{kk}>0$.

Из условия A вытекает, что векторы $a_1, \ldots, a_{n+1}$ попарно линейно независимы. Выпуклая оболочка множества $\mathfrak{M}$ является n-мерным симплексом, натянутым на точки $2a_1, \ldots, 2a_{n+1}$ и содержащим начало координат. Так как ребро симплекса, соединяющее вершины $2a_k$ и $2a_l$, содержит точку a_k+a_l, то необходимым условием интегрируемости является обращение в нуль коэффициентов b_{kl} при всех $k\neq l$. Другое условие интегрируемости заключается в выполнении соотношения (10). Если оба условия выполнены, то система с гамильтонианом (12) интегрируема, поскольку подходящей канонической заменой переменных функцию (12) можно привести к виду (9).

О. И. Богоявленским ранее было указано необходимое условие интегрируемости системы (12) в некотором неформальном смысле. Оно заключается в конечности группы Коксетера, порожденной отражениями относительно гиперплоскостей, ортогональных векторам $a_1, \ldots, a_{n+1}$.

С точки зрения приложений важную роль играют цепочки с бесконечным числом степеней свободы. Среди них есть и интегрируемые.

С. В. Манаков и Г. Флашка проинтегрировали систему с гамильтонианом

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\infty} y_s^2 + \sum_{s=1}^{\infty} \exp(x_s - x_{s+1}). \qquad (13)$$

Обсуждение этих вопросов см., например, в [2, 6]. Оказывается, теорема п. 2 справедлива и в бесконечномерном случае. Дополнительное требование заключается в существовании вершин α и β, компоненты которых вычисляются по формулам (5), где надо положить $n=\infty$. Для системы (13) векторы a_λ имеют вид $(\ldots, 0, 1, -1, 0, \ldots)$. Они линейно независимы и удовлетворяют условию (10).

Автор считает своим долгом поблагодарить О. И. Богоявленского, С. В. Болотина, А. П. Веселова и Д. В. Трещева за обсуждения затронутых в статье вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Т. I//Избранные труды. Т. I. М., 1971.
2. Тода М. Теория нелинейных решеток. М., 1984.
3. Козлов В. В., Трещев Д. В. Неинтегрируемость общей задачи о вращении динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. I, II// //Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1985. № 6. 73—81; 1986. № 1. 39—44.
4. Adler M., Moerbeke P. van. Kowalewski's asymptotic method, Kac—Moody Lie algebras and regularization//Communs Math. Phys. 1982. 83. 83—106.
5. Богоявленский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астродинамике и газовой динамике. М., 1980.
6. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М., 1986.

Поступила в редакцию
08.05.87