УДК 531.01

В. В. Козлов

ДИНАМИКА СИСТЕМ С НЕИНТЕГРИРУЕМЫМИ СВЯЗЯМИ
V. ПРИНЦИП ОСВОБОЖДАЕМОСТИ И УСЛОВИЕ ИДЕАЛЬНОСТИ СВЯЗЕЙ

1. Виртуальные перемещения. В работах [1, 2] разработаны новые модели движения механических систем со связями. Пусть $L(\dot{x}, x)$ — лагранжиан, $a(x)\cdot\dot{x}=0$ — уравнение связи (в общем случае неинтегрируемой). Положим для краткости письма

$$[L]=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^{\cdot}-\frac{\partial L}{\partial x}, \quad \{a\}=\left(\frac{da}{dx}\right)^{\mathrm{T}}-\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right).$$

Нетрудно проверить справедливость тождества $[a\cdot\dot{x}]=-\{a\}\dot{x}$.

Уравнения движения имеют вид обобщенных уравнений Лагранжа со множителем λ (см. [1, IV]):

$$[L]=\alpha\lambda\{a\}\dot{x}-\alpha\dot{\lambda}a-\beta\lambda a, \quad a\cdot\dot{x}=0. \tag{1}$$

Здесь α и β — вещественные числа; уравнения (1) на самом деле зависят лишь от отношения $\alpha:\beta$. Уравнения (1) получены с помощью предельного перехода в свободной системе, когда присоединенная масса и коэффициент анизотропного вязкого трения стремятся к бесконечности [2]. При $\alpha=0$ будем иметь обычные неголономные уравнения.

Пусть $x(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, — движение (функция, удовлетворяющая вместе с некоторой функцией $\lambda(t)$ системе (1)). Введем вариации движения $x(t)$: это функции $\delta x(t)$, удовлетворяющие уравнению

$$\alpha\{a\}\dot{x}\cdot\delta x+\alpha(a\cdot\delta x)^{\cdot}-\beta(a\cdot\delta x)=0 \tag{2}$$

и обращающиеся в нуль в моменты времени t_1 и t_2. При $\alpha=0$ получим классическое определение виртуальных перемещений. В работе [1, IV] доказана

Теорема 1. *Допустимый путь $x(t)$ является движением тогда и только тогда, когда он является экстремалью функционала действие*

$$\int_{t_1}^{t_2} L\,dt \tag{3}$$

в классе вариаций (2).

Если $\alpha=0$, теорема 1 совпадает с известным вариационным принципом Гельдера. В другом крайнем случае, когда $\beta=0$, теорема 1 описывает экстремали вариационной задачи Лагранжа о стационарных значениях функционала (3) в классе кривых с закрепленными концами, удовлетворяющих уравнению связи.

2. Принципы освобождаемости и идеальности связей. В традиционной механике (когда $\alpha=0$) уравнения движения (1) получают из принципа Даламбера—Лагранжа

$$[L]\cdot\delta x=0, \quad a\cdot\delta x=0. \tag{4}$$

Сам же принцип обычно обосновывается с помощью принципа освобождаемости связей и аксиомы об их идеальности. Согласно принципу освобождаемости систему со связью можно считать свободной, а действие связи заменить действием силы реакции R. После этого динамика системы описывается уравнением Лагранжа

$$[L]=R. \tag{5}$$

Применяя затем условие идеальности связи $R\cdot\delta x=0$, приходим к принципу Даламбера–Лагранжа (4).

Нашей задачей является распространение этих рассуждений на общий случай $\alpha\neq0$. Сначала заметим, что условие идеальности связи можно представить в эквивалентной интегральной форме

$$\int_{t_1}^{t_2}(R\cdot\delta x)\,dt=0. \tag{6}$$

Здесь $\delta x(t)$ — произвольные гладкие функции, удовлетворяющие при всех значениях t уравнению $a\cdot\delta x=0$ и обращающиеся в нуль на концах интервала $[t_1, t_2]$. Этот очевидный факт в литературе, по-видимому, не отмечался.

Воспользуемся принципом освобождаемости. Рассматриваемая система теперь считается свободной, однако на нее действует сила

$$R=\alpha\lambda\{a\}\dot{x}-\alpha\dot{\lambda}a-\beta\lambda a. \tag{7}$$

В случае $\alpha=0$ хорошо известно, что при выполнении некоторых простых условий невырожденности множитель λ и реакция R находятся как явные функции состояния системы x, $\dot{x}$. В общем случае из соотношений (5)—(7) с помощью уравнения связи $a\cdot\dot{x}=0$ можно получить линейное дифференциальное уравнение для λ, коэффициенты которого — функции от $\dot{x}$ и x. Поэтому в общем случае сила R является не функцией состояния, а функционалом от движения $x(t)$. Концепция силы как функционала от движения высказана А. А. Ильюшиным.

Наложенную на систему связь назовем идеальной, если для всех вариаций с закрепленными концами, удовлетворяющих уравнению (2), выполнено условие (6). Оказывается, принцип освобождаемости вместе с условием идеальности эквивалентен теореме 1. Более точно, справедлива

Теорема 2. *Допустимый путь* $x(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, *является движением тогда и только тогда, когда реакция* $R(t)=[L]_{x(t)}$ *удовлетворяет равенству* (6) *для всех вариаций* (2) *с закрепленными концами.*

Докажем сначала необходимость. Для этого вычислим

$$\int_{t_1}^{t_2}(\alpha\lambda\{a\}\dot{x}-\alpha\dot{\lambda}a-\beta\lambda a)\cdot\delta x\,dt. \tag{8}$$

Используя тождество $\dot{\lambda}(a\cdot\delta x)=(\lambda(a\cdot\delta x))^{\cdot}-\lambda(a\cdot\delta x)^{\cdot}$ и условие (2), получим, что интеграл (8) равен

$$\lambda(a\cdot\delta x)\Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Остается воспользоваться условием равенства нулю вариации δx в точках t_1 и t_2.

Доказательство достаточности носит технический характер: надо показать, что найдется достаточно много вариаций δx для вывода соотношения (7) из равенств (2) и (6). В следующем пункте (для краткости записи) рассмотрен простейший нетривиальный случай, когда имеются три обобщенные координаты x^1, x^2, x^3.

3. Структура вариаций. Предположим сначала, что уравнение связи имеет следующий вид:

$$a_1(x^1,\ x^2,\ x^3)\,\dot{x}^1 + a_2(x^1,\ x^2,\ x^3)\,\dot{x}^2 = 0. \tag{9}$$

Запишем уравнение (2):

$$\alpha\left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3}\dot{x}^1 + \frac{\partial a_2}{\partial x^3}\dot{x}^2\right)\delta x^3 + \ldots = 0, \tag{10}$$

где многоточием обозначены слагаемые, не содержащие вариацию δx^3. Связь (9) естественно считать неинтегрируемой, поскольку иначе уравнения (1) будут обычными уравнениями Лагранжа голономной системы. Условие неинтегрируемости связи имеет, как известно, вид $(\operatorname{rot} a)\cdot a \neq 0$. Запишем его в явной форме:

$$a_2\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - a_1\frac{\partial a_2}{\partial x^3} \neq 0. \tag{11}$$

Коэффициент при δx^3 в уравнении (10) обращается в нуль (при $\alpha \neq 0$) лишь при выполнении равенства

$$\frac{\partial a_1}{\partial x^3}\dot{x}^1 + \frac{\partial a_2}{\partial x^3}\dot{x}^2 = 0. \tag{12}$$

Из (9) и (12) в силу неравенства (11) вытекает, что $\dot{x}^1 = \dot{x}^2 = 0$. Оставляя пока в стороне этот тривиальный случай, из равенства (10) найдем δx^3 как линейную комбинацию δx^1, δx^2 и их производных. В частности, вариации δx^1 и δx^2 можно считать произвольными гладкими функциями t, обращающимися в нуль в некоторых окрестностях точек t_1 и t_2. Последним свойством будет обладать и вариация δx^3.

Умножим теперь равенство (2) на $-\lambda$, проинтегрируем по интервалу $[t_1,\ t_2]$ и сложим с равенством (6). Интегрируя слагаемое $\alpha\lambda(a\cdot\delta x)^{\cdot}$ по частям, приходим к подынтегральному выражению

$$(R - \alpha\lambda\{a\}\,\dot{x} - \alpha\dot{\lambda}a - \beta\lambda a)\cdot\delta x. \tag{13}$$

Подберем функцию $\lambda(t)$ так, чтобы обратить в нуль коэффициент при вариации δx^3. Ввиду неравенства (11) это всегда можно сделать. Так как вариации δx^1 и δx^2 произвольны, то из соотношения (6) вытекает равенство нулю коэффициентов при δx^1 и δx^2 в линейной форме (13). Это доказывает соотношение (7).

Осталось показать, что любую связь можно локально привести к виду (9). Для этого рассмотрим векторное поле $v \neq 0$, удовлетворяющее равенству $a\cdot v = 0$, и применим к нему теорему о выпрямлении. В некоторых локальных координатах x^1, x^2, x^3 компоненты поля v имеют вид 0, 0, 1. Следовательно, в этих координатах $a_3 \equiv 0$. Что и требовалось.

Если $\dot{x}(t) \neq 0$, то векторное поле v можно выбрать независимым с вектором скорости $\dot{x}(t)$ в точках пути $x(t)$. В этом случае в локальных координатах x^1, x^2, x^3 хотя бы одна из производных $\dot{x}^1$, $\dot{x}^2$ отлична от нуля. Пусть в некоторых точках интервала $[t_1,\ t_2]$ скорость обращается в нуль. Тогда рассмотренное выше построение можно провести на дополнительном множестве. Если, наконец, $\dot{x}(t) \equiv 0$, то мы имеем положение равновесия, и теорема 2 дает известный принцип виртуальных перемещений из аналитической статики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов В. В. Динамика систем с неинтегрируемыми связями. I—IV//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1982. № 3. 92—100; 1982. № 4. 70—76; 1983. № 3. 102—111; 1987. № 5. 76—83.
2. Козлов В. В. Реализация неинтегрируемых связей в классической механике//Докл. АН СССР. 1983. 272, № 3. 550—554.

Поступила в редакцию
11.01.88