

УДК 517.9+531.01

КОЗЛОВ В. В., ТРЕЩЕВ Д. В.

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Введение

Пусть W, W^* — двойственные n -мерные линейные пространства над полем вещественных чисел. Их элементы будем обозначать соответственно через x, y . Пусть (y, x) — значение ковектора y на векторе x . Рассмотрим функцию $V: W \rightarrow \mathbb{R}$, определенную формулой

$$V(x) = \sum_{k=1}^m v_k \exp(a_k, x), \quad (1)$$

где v_k — отличные от нуля вещественные числа, $a_1, \dots, a_m$ — ненулевые векторы из W^* . Функция V будет играть роль потенциальной энергии потенциала экспоненциального взаимодействия. Набор векторов $a_1, \dots, a_m$ — «спектр» суммы экспонент (1) — обозначим $\mathfrak{M}$. Пусть $\langle, \rangle$ — скалярное произведение в пространстве W^* . Метрика $\langle, \rangle$ позволяет отождествить двойственные пространства W и W^* . Более точно, существует линейный изоморфизм $A: W^* \rightarrow W$ такой, что $(y, x) = \langle y, A^{-1}x \rangle$ для всех $x \in W, y \in W^*$. Зная метрику $\langle, \rangle$ и потенциал V , мы можем теперь записать уравнения движения системы с экспоненциальным взаимодействием $(W, \langle, \rangle, V)$:

$$\dot{x} = Ay, \quad \dot{y} = - \sum_k [v_k \exp(a_k, x)] a_k. \quad (2)$$

Пусть $e_1, \dots, e_n$ и $e_1^*, \dots, e_n^*$ — сопряженные базисы в W и W^* . Положим $x = \sum x_i e_i$ и $y = \sum y_i e_i^*$. В координатах $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ на фазовом пространстве $W \times W^*$ уравнения (2) можно представить в виде канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = - \frac{\partial H}{\partial x_i}; \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

с гамильтонианом $H = T + V$, $T = \langle y, y \rangle / 2$ — кинетическая энергия системы.

Пусть $D: W \rightarrow W$ — невырожденный линейный оператор и $D^*: W^* \rightarrow W^*$ — оператор, сопряженный с D . Отображение $W \times W^* \rightarrow W \times W^*$, задаваемое формулами $x' = Dx, y' = (D^*)^{-1}y$, является каноническим. В частности, в новых переменных $x'_1, \dots, x'_n, y'_1, \dots, y'_n$ уравнения Гамильтона (3) будут снова иметь канонический вид с тем же гамильтонианом. Подходящим выбором оператора D кинетическую энергию можно привести к сумме квадратов:

$$T = \frac{1}{2} (y_1^2 + \dots + y_n^2).$$

Гамильтоновы системы вида (2) часто встречаются в приложениях. Например, динамика конечной периодической цепочки Тоды [1] описывается системой уравнений (3) с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n y_s^2 + \sum_{s=1}^n \exp(x_s - x_{s+1}), \quad x_{n+1} = x_1. \quad (4)$$

Уравнения (2) встречаются также при изучении некоторых однородных космологических моделей в общей теории относительности [2].

Поиску случаев интегрируемости гамильтоновых систем (2) посвящено значительное число работ. М. Эно [3], Г. Флашка [4], С. В. Манакон [5] установили полную интегрируемость цепочки Тоды: уравнения Гамильтона с гамильтонианом (4) имеют n независимых полиномиальных по импульсам первых интегралов, попарно находящихся в инволюции. Этот результат был обобщен в работах [6, 7, 8] на случай, когда спектр $\mathfrak{M}$ является системой простых корней простой алгебры Ли. С этой точки зрения гамильтониан (4) соответствует алгебре типа A_n . Е. К. Склянин [9] указал еще одно интегрируемое обобщение цепочки Тоды:

$$H = \sum_{s=1}^n \frac{y_s^2}{2} + \sum_{s=1}^{n-1} \exp(x_{s+1} - x_s) + \alpha_1 \exp x_1 + \frac{\beta_1}{2} \exp(2x_1) + \\ + \alpha_n \exp(-x_n) + \frac{\beta_n}{2} \exp(-2x_n), \quad (5)$$

где $\alpha_1, \beta_1, \alpha_n, \beta_n$ — произвольные вещественные постоянные. Метод работ [3—9] основан на представлении уравнений Гамильтона (2) в виде $L - A$ пары Лакса. Элементы матриц L и A являются линейными функциями импульсов $y_1, \dots, y_n$, коэффициенты которых — конечные суммы вещественных экспонент:

$$\sum f_\lambda \exp(c_\lambda, x), \quad f_\lambda \in \mathbf{R}, \quad c_\lambda \in \mathbf{R}^n. \quad (6)$$

Следовательно, следы степеней матрицы L — интегралы уравнений Гамильтона — являются полиномами по импульсам с коэффициентами вида (6).

Относительно интегрируемости систем (2) в общем случае мало что известно. В [10] рассмотрен случай, когда $\mathfrak{M}$ состоит из $n+1$ векторов $a_1, \dots, a_{n+1}$, причем любые n из них предполагаются независимыми. Доказано, что при этих предположениях критерием алгебраической интегрируемости системы (2) является выполнение условий

$$\frac{2 \langle a_i, a_j \rangle}{\langle a_i, a_i \rangle} \in -\mathbf{Z}^+, \quad \mathbf{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$$

при всех $i \neq j$. Алгебраическая интегрируемость означает, в частности, что переменные $y_s, \exp x_s$ ($1 \leq s \leq n$) мероморфны на плоскости комплексного времени для почти всех начальных данных. Отыскание необходимых условий алгебраической интегрируемости основано на классическом методе С. В. Ковалевской, примененном ею в динамике твердого тела [11]. Отметим, что далеко не каждая вполне интегрируемая система вида (2) будет алгебраически интегрируемой в смысле определения работы [10]. Вот простой пример системы с одной степенью свободы:

$$H = [y^2 + \exp(-2x) f_m(\exp x)]/2,$$

где $f_m(\cdot)$ — многочлен степени m с простыми корнями. Эта система алгебраически неинтегрируема при $m \geq 5$. Действительно, функции

$$\int (2hq^2 - f_m(q))^{-1/2} dq = t, \quad q = \exp x, \quad y = \dot{q}/q$$

являются ее решениями с запасом полной энергии h . Ясно, что при $m \geq 5$ для почти всех h функция $t \rightarrow q(t)$ многозначна на комплексной плоскости.

Мы будем изучать интегрируемость системы (2) в вещественной области.

В [6] выявлено сложное поведение траекторий системы (2) с бесконечной группой Кокстера, порожденной отражениями относительно векторов $a \in \mathfrak{M}$. Было бы интересным связать конечность группы Кокстера с наличием дополнительного интеграла, независимого с энергией H .

§ 1. Строение интегрируемых систем

Гамильтонову систему уравнений (2) назовем *интегрируемой по Биркгофу*, если она имеет n полиномиальных по импульсам интегралов с коэффициентами вида (6), старшие однородные формы которых почти всюду независимы (как функции в $W \times W^*$).

В случае двух степеней свободы условие независимости старших форм мы заменим более слабым условием независимости дополнительного полиномиального интеграла с интегралом энергии (как аналитических функций в фазовом пространстве $W \times W^*$).

Биркгоф исследовал условия существования линейных и квадратичных по импульсам интегралов общих натуральных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы [12]. Наличие таких интегралов связано с существованием «скрытых» циклических координат и разделенных канонических переменных. Гамильтоновы системы из работ [3–9], как было отмечено выше, интегрируемы по Биркгофу.

Вектор из $\mathfrak{M}$ назовем *максимальным*, если он имеет наибольшую длину среди всех векторов $\mathfrak{M}$, имеющих с ним одинаковое направление.

Наш основной результат составляет

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что гамильтонова система (2) интегрируема по Биркгофу. Пусть a_i — максимальный вектор из $\mathfrak{M}$ и вектор $a_j \in \mathfrak{M}$ линейно независим с a_i . Тогда*

$$\frac{2 \langle a_i, a_j \rangle}{\langle a_i, a_i \rangle} \in -\mathbb{Z}^+. \quad (7)$$

Следствие 1. *Если система (2) интегрируема по Биркгофу, то любые два линейно независимых максимальных вектора $a_i, a_j \in \mathfrak{M}$ удовлетворяют условию (7).*

Это утверждение полезно сравнить с результатом работы [10], в которой рассмотрен случай, когда $\mathfrak{M}$ состоит из $n+1$ векторов $a_1, \dots, a_{n+1}$, причем любая подсистема из n векторов линейно независима. В [10] показано, что критерием алгебраической интегрируемости системы (2) является как раз выполнение условия (7). Следствие 1 утверждает, что в этом случае критерием интегрируемости по Биркгофу также является условие (7). Эта ситуация аналогична положению дел в классической задаче о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой: уравнения движения алгебраически интегрируемы тогда и только тогда, когда они имеют полный набор независимых полиномиальных интегралов (см., например, [11]).

Следствие 2. *Если система интегрируема по Биркгофу, то*

1) *угол между любыми двумя векторами из $\mathfrak{M}$ равен одному из следующих: $0, \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6, \pi$;*

2) пусть $\alpha, \alpha' \in \mathfrak{M}$ и вектор α максимальный; если угол между α и α' равен $2\pi/3$, то $|\alpha| = |\alpha'|$; если угол равен $3\pi/4$, то выполнено одно из равенств: $|\alpha| = \sqrt{2}|\alpha'|$, $|\alpha| = |\alpha'|/\sqrt{2}$; если угол равен $5\pi/6$, то выполнено одно из равенств: $|\alpha| = \sqrt{3}|\alpha'|$, $|\alpha| = 2|\alpha'|/\sqrt{3}$, $|\alpha| = |\alpha'|/\sqrt{3}$.

Вывод заключения 1) из условия (7) хорошо известен в теории корневых систем (см., например, [13—14]). Заключение 2) доказано в § 2.

Ниже приводится классификация интегрируемых по Биркгофу гамильтоновых систем.

Пусть W^* есть прямая сумма ортогональных подпространств $W_1^*, \dots, W_m^*$ и спектр $\mathfrak{M}$ лежит в их объединении $\bigcup W_i^*$. Через $W_1, \dots, W_m$ обозначим образы $W_1^*, \dots, W_m^*$ при отображении $A: W^* \rightarrow W$. Легко понять, что система (2) распадается на m замкнутых подсистем с фазовыми пространствами $W_i \times W_i^* \subset W \times W^*$. Пусть H_i — ограничение функции Гамильтона H на $W_i + W_i^*$. Тогда, очевидно, $H = \sum H_i$. Если базисные векторы $e_1, \dots, e_n$ принадлежат объединению $W_1 \cup \dots \cup W_m$, то в соответствующих канонических переменных $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ уравнения (3) разбиваются на m замкнутых гамильтоновых систем с функциями Гамильтона H_i (т. е. происходит частичное разделение переменных). Мы будем говорить, что в этой ситуации исходная гамильтонова система есть *прямая сумма* своих подсистем. Если такое разложение невозможно (разумеется, в предположении, что каждое из подпространств W_i нетривиально), то гамильтонову систему назовем *неприводимой*. Имеет место очевидное

Предложение 1. *Каждая гамильтонова система (2) есть прямая сумма своих неприводимых гамильтоновых подсистем.*

Пусть α и β — векторы из $\mathfrak{M}$ и φ — угол между ними. Если гамильтонова система интегрируема по Биркгофу, то, как утверждает следствие 2 теоремы 1, $4\cos^2 \varphi$ может быть одним из следующих целых чисел: 0, 1, 2, 3, 4. Это обстоятельство подсказывает нам ввести в рассмотрение *граф Кокстера* интегрируемой по Биркгофу гамильтоновой системы. Это граф, вершинами которого служат векторы из $\mathfrak{M}$, причем две вершины α и β соединены $4\cos^2 \varphi$ ребрами. Ясно, что если интегрируемая система неприводима, то ее граф Кокстера связан и непуст.

Если $\dim W_i^* = 1$, то множество $\mathfrak{M} \cap W_i^*$ может быть любым конечным множеством векторов. Это замечание вытекает из факта полной интегрируемости гамильтоновых систем с одной степенью свободы. Оставляя в стороне эти тривиальные случаи, мы будем в дальнейшем предполагать, что $\dim W_i^* > 1$.

Итак, рассмотрим строение интегрируемой неприводимой гамильтоновой системы с $n > 1$ степенями свободы.

Предложение 2. *Любые два линейно зависимых вектора из $\mathfrak{M}$ направлены в одну сторону.*

Доказательство. Положим $\Pi_\alpha = \{b \in W^*: \langle \alpha, b \rangle \leq 0\}$. Пусть α, β — линейно зависимые векторы из $\mathfrak{M}$. Если $\gamma \in \mathfrak{M}$ и $\gamma \neq k\alpha$, $k \in \mathbb{R}$, то по теореме 1 $\gamma \in \Pi_\alpha$ и $\gamma \in \Pi_\beta$. Если α и β направлены в разные стороны, то пересечение $\Pi_\alpha \cap \Pi_\beta$ является гиперплоскостью в W^* , ортогональной α и β . Следовательно, в этом случае γ ортогонален векторам α и β . Но это противоречит предположению о неприводимости. Предложение доказано.

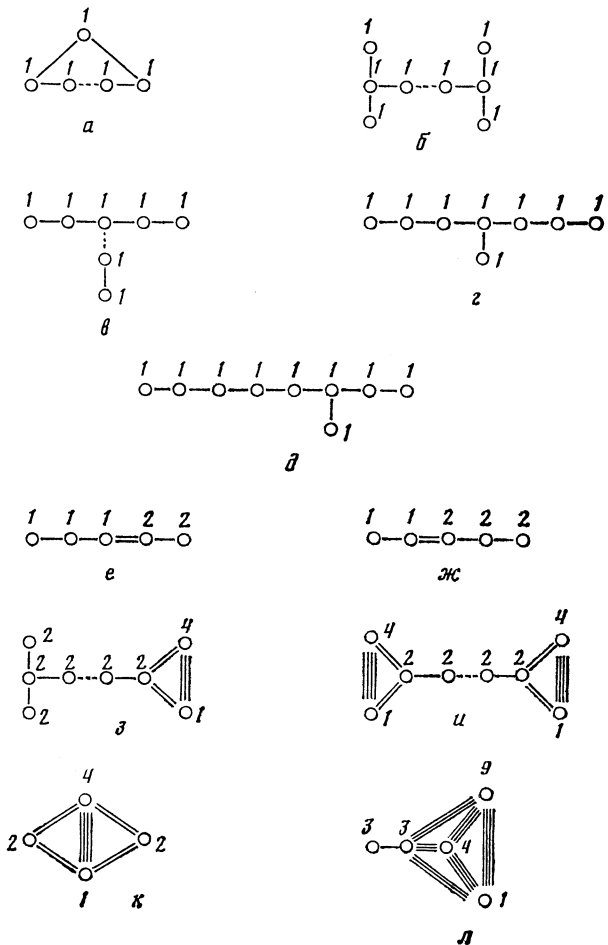
Интегрируемую систему со спектром $\mathfrak{M}$ назовем *полной*, если не существует ненулевого вектора $a \in W^*$ такого, что множество $\mathfrak{M} \setminus \{a\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Спектр каждой интегрируемой по Бирк-

гофу гамильтоновой системы получается из некоторого полного спектра отбрасыванием части элементов. При таком уменьшении множества $\mathfrak{M}$ не должна, конечно, нарушаться связность графа Кокстера и число его вершин не может оказаться меньше, чем $\dim W^* = n$.

Как легко понять, граф Кокстера определяет лишь углы между парами векторов из $\mathfrak{M}$. Для того чтобы можно было восстановить отношения длин векторов, припишем каждой вершине графа Кокстера коэффициент, пропорциональный квадрату длины $\langle a, a \rangle$ соответствующего вектора $a \in \mathfrak{M}$. Доопределенный таким образом граф Кокстера назовем (как это принято в теории корневых систем) *схемой Дынкина*. Условимся не различать схемы Дынкина, отличающиеся друг от друга лишь положительным коэффициентом пропорциональности. Этому соглашению можно придать прозрачный динамический смысл.

Рассмотрим две гамильтоновы системы, у которых векторы из их спектров отличаются положительным множителем $k > 0$. Нетрудно проверить, что подстановка $x \rightarrow kx, t \rightarrow kt$ переводит уравнения движения (2) одной системы в уравнения движения другой системы. С помощью следствия 2 из теоремы 1 и предложения 2 можно показать, что схема Дынкина однозначно, с точностью до изоморфизма, определяет спектр интегрируемой неприводимой гамильтоновой системы (ср. с [13—14]).

ТЕОРЕМА 2. *Схема Дынкина полной неприводимой гамильтоновой системы, интегрируемой по Биркгофу, изоморфна одной из следующих схем:*



Следствие. Спектр неприводимой гамильтоновой системы с $n \geq 2$ степенями свободы, интегрируемой по Биркгофу, содержит самое большее $n+3$ различных векторов.

Оценка $\text{card } \mathfrak{M} \leq n+3$ неулучшаема. Это показывает пример системы с функцией Гамильтона (5).

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится

ЛЕММА 1. Пусть векторы $a_\lambda \in \mathfrak{M}$ попарно линейно независимы и $\sum x_\lambda a_\lambda = 0$ при некоторых вещественных $x_\lambda \neq 0$. Если a — вектор из $\mathfrak{M}$, линейно независимый с каждым вектором a_λ , то $\langle a, a_\lambda \rangle = 0$.

Доказательство. Равенство $\sum x_\lambda a_\lambda = 0$, $x_\lambda \neq 0$, можно переписать в следующем виде:

$$\sum y_\mu a_\mu = \sum z_\nu a_\nu, \quad y_\mu > 0, \quad z_\nu > 0.$$

Положим $b = \sum y_\mu a_\mu$ и вычислим

$$\langle b, b \rangle = \sum y_\mu z_\nu \langle a_\mu, a_\nu \rangle.$$

Так как векторы a_λ попарно линейно независимы, то, по теореме 1, $\langle b, b \rangle \leq 0$. Следовательно, $b = 0$. Так как

$$0 = \langle a, b \rangle = \sum y_\mu \langle a, a_\mu \rangle, \quad y_\mu > 0,$$

и $\langle a, a_\mu \rangle \leq 0$ (теорема 1) то, очевидно, $\langle a, a_\mu \rangle = 0$. Аналогично, $\langle a, a_\nu \rangle = 0$, что и требовалось доказать.

Предложение 3. Множество $\mathfrak{M}$ содержит не более $n+1$ попарно линейно независимых векторов, причем любые n из них линейно независимы.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ имеет $n+1$ попарно независимых векторов $a_1, \dots, a_{n+1}$. Так как $\dim W^* = n$, то

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i a_i = 0, \quad \sum x_i^2 \neq 0.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}'$ множество векторов из $\mathfrak{M}$, зависящих с теми $a_1, \dots, a_{n+1}$, для которых $x_i \neq 0$. Согласно лемме 1, множества $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}'$ взаимно ортогональны. Так как по предположению система неприводима, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$ и все $x_i \neq 0$. В частности, каждые n векторов из совокупности $a_1, \dots, a_{n+1}$ линейно независимы. Предложение доказано.

Для систем $n+1$ векторов в n -мерном евклидовом пространстве, у которых каждая собственная подсистема линейно независима и которые удовлетворяют условию (7), имеется полная классификация ([15], см. также [10]). Такие системы являются системами простых корней градуированных алгебр Каца — Муди. Полные диаграммы Дынкина а) — л), перечисленные в теореме 2, получены из известных диаграмм систем корней алгебр Каца — Муди с учетом возможности существования в спектре интегрируемой системы одинаково направленных векторов. Мы опускаем относящиеся сюда простые рассуждения. Пусть теперь $\mathfrak{M}$ содержит n линейно независимых максимальных векторов, удовлетворяющих условию (7). Оказывается, такая система не является полной в смысле нашего определения: к этим n векторам можно добавить еще один вектор так, чтобы условие (7) сохранилось и чтобы любая подсистема из n векторов была линейно независима. Это вытекает, например,

из того факта, что диаграмма Дынкина системы простых корней получается из диаграммы системы корней некоторой алгебры Каца — Муди отбрасыванием одной вершины [13—15].

Рассмотрим теперь вопрос об интегрируемости по Биркгофу гамильтоновых систем, перечисленных в теореме 2. В случаях а) — ж) полная интегрируемость установлена в работах [6, 16]. Гамильтониан системы со схемой Дынкина и) можно всегда привести к виду (5). Эта система проинтегрирована в работе [9].

Графу к) отвечает гамильтонова система с двумя степенями свободы и функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 + v_4 e_4,$$

$$e_1 = \exp x_1, \quad e_2 = \exp x_2, \quad e_3 = \exp(-x_1 - x_2), \quad e_4 = \exp\left(-\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

При всех значениях коэффициентов $v_1, \dots, v_4$ она имеет дополнительный интеграл четвертой степени по импульсам:

$$F = y_1^2 y_2^2 + 2v_2 y_1^2 e_2 + 2v_3 y_1 y_2 e_3 + 2v_4 y_1 y_2 e_4 + 2v_1 y_2^2 e_1 + \\ + 2v_2 v_3 e_2 e_3 + 2v_1 v_3 e_1 e_3 + 4v_1 v_2 e_1 e_2 + v_3^2 e_3^2 + 2v_3 v_4 e_3 e_4 + v_4^2 e_4^2.$$

Это — новая интегрируемая цепочка. Если $v_3 = 0$ или $v_4 = 0$, то получаем интегрируемые цепочки из работ [6, 16]. Ясно, что старшие однородные формы функций H и F независимы.

Функция Гамильтона со схемой Дынкина з) в подходящих канонических переменных имеет следующий вид:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n y_s^2 + \sum_{s=1}^{n-1} \exp(x_s - x_{s+1}) + \exp(-x_1 - x_2) + \\ + \alpha_n \exp x_n + \beta_n \exp(2x_n); \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbf{R}, \quad n \geq 4. \quad (8)$$

Если $\alpha_n = 0$ или $\beta_n = 0$, то полная интегрируемость этой системы установлена в работах [6, 16]: когда $\beta_n = 0$, то это — система типа B_n (по классификации [6]), а когда $\alpha_n = 0$, то получаем систему типа $b_1^{(1)}$ (по классификации [10]). Невьясненным остался вопрос об интегрируемости уравнений Гамильтона с гамильтонианом (8) в общем случае, когда $\alpha_n \neq 0$ и $\beta_n \neq 0$. Ответ на него, по-видимому, положительный.

Вопрос об интегрируемости гамильтоновой системы с графом л) оказался более сложным. В работах [6, 16] проинтегрированы гамильтоновы системы с двумя степенями свободы, ориентированный граф Кокстера которых имеет следующий вид:



Они получаются из графа л) отбрасыванием двух вершин. Мы исследовали задачу об интегрируемости по Биркгофу системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + v_1 \exp x_1 + v_2 \exp\left(-\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right) + \\ + v_3 \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x_2\right) + v_4 \exp(\sqrt{3}x_2). \quad (9)$$

Ее граф Кокстера получается из графа л) отбрасыванием одной верши-

ны. Этот случай отличается от общего тем, что все линейно независимые векторы из $\mathfrak{M}$ удовлетворяют условию (7). Оказалось, что если все коэффициенты v_i отличны от нуля, то уравнения Гамильтона с гамильтонианом (9) не имеют дополнительного интеграла, степень которого не превосходит шести. Число шесть выбрано не случайно: это — ранг группы Кокстера, порожденной отражениями относительно векторов из спектра $\mathfrak{M}$. Отметим, что в остальных интегрируемых системах с двумя степенями свободы степень дополнительного полиномиального интеграла равна как раз рангу соответствующей группы Кокстера. По-видимому, система с гамильтонианом (9) (и тем более система с графом Γ) неинтегрируема по Биркгофу.

§ 2. Необходимые условия интегрируемости

Пусть $e_1, \dots, e_n$ и $e_1^*, \dots, e_n^*$ — сопряженные базисы в W и W^* . Введем отношение порядка в W^* , которое обозначим символом $<$. Пусть $\sigma = \sum \sigma_i e_i^*$ и $\delta = \sum \delta_i e_i^*$. Мы скажем, что $\sigma < \delta$, если для наименьшего индекса k такого, что $\sigma_k \neq \delta_k$ выполнено неравенство $\sigma_k < \delta_k$. Ясно, что $<$ является обычным отношением лексикографического порядка в W^* в базисе $e_1^*, \dots, e_n^*$. Это отношение естественным образом индуцирует отношение порядка в W . Мы будем говорить, что $\sigma \leq \delta$, если $\sigma < \delta$ или $\sigma = \delta$.

Доказательство теоремы 1 основано на применении следующего утверждения, представляющего самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 3. Пусть α — максимальный элемент в $\mathfrak{M}$ относительно отношения порядка $<$. Предположим, что найдется вектор $\beta \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющий условиям

- (1) $\beta > 0$ и β линейно независим с α ,
- (2) из равенства $s\alpha + \beta = \tau_1 + \dots + \tau_{s+1}$, где $\tau_i \in \mathfrak{M}$, вытекает, что $\tau_k = \beta$ и $\tau_j = \alpha$ ($j \neq k$),
- (3) $m\langle \alpha, \alpha \rangle + 2\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$ при всех целых $m \geq 0$.

Тогда гамильтонова система (2) неинтегрируема по Биркгофу.

Сделаем некоторые замечания.

1) Для выполнения условия (2) достаточно потребовать, чтобы β был максимальным линейно независимым с α вектором из $\mathfrak{M}$.

2) Теорема 3 справедлива и в том случае, когда метрика $\langle, \rangle$ псевдоевклидова.

Теорема 3 будет доказана в § 3. А сейчас мы выведем из нее теорему 1.

На векторном пространстве W^* можно ввести естественную аффинную структуру и поэтому можно рассматривать $\mathfrak{M}$ как конечный набор точек аффинного пространства. Через $\mathcal{E}(\mathfrak{M})$ обозначим выпуклую оболочку множества $\mathfrak{M}$. Ясно, что $\mathcal{E}(\mathfrak{M})$ — выпуклый многогранник в n -мерном аффинном пространстве. Необходимые сведения из теории выпуклых тел можно найти, например, в [17].

ЛЕММА 2. Пусть α и β — две соседние (соединенные ребром) вершины многогранника $\mathcal{E}(\mathfrak{M})$, линейно независимые как векторы из W^* . Если гамильтонова система интегрируема, то при некотором целом $m \geq 0$ выполнено равенство $m\langle \alpha, \alpha \rangle + 2\langle \alpha, \beta \rangle = 0$.

Доказательство. Пусть γ — отрезок, соединяющий точки α и β . Ясно, что γ — ребро выпуклого многогранника $\mathcal{E}(\mathfrak{M})$. Так как α и β , как векторы W^* , линейно независимы и $\mathcal{E}(\mathfrak{M})$ — выпуклый многогранник, то

существует гиперплоскость Γ , не проходящая через точки $0 \in W^*$ и такая, что пересечение $\Gamma \cap \mathcal{E}(\mathcal{M})$ совпадает с ребром γ . При этом имеются две возможности: гиперплоскость Γ разделяет или не разделяет многогранник $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ и точки $0 \in W^*$. В первом случае выбираем следующий базис в W^* : $e_1^* = \alpha$, e_2^* — вектор, с началом в точке β и концом в точке α , $e_3^*, \dots, e_n^*$ — векторы в гиперплоскости Γ , линейно независимые с e_2^* . Во втором случае в качестве базиса выбираем набор векторов $(-e_1^*), e_2^*, \dots, e_n^*$.

Ясно, что в выбранном базисе вектор α является максимальным элементом множества $\mathcal{M}$. Пусть α' — наибольший элемент в $\mathcal{M} \setminus \{\alpha\}$. Очевидно, что α' , как точка аффинного пространства, является ближайшей к α точкой из множества $(\mathcal{M} \setminus \{\alpha\}) \cap \gamma$. Утверждается, что угол между векторами α и α' не меньше $\pi/2$. Действительно, в противном случае α и α' удовлетворяют условиям (1) — (3) теоремы 3 и, следовательно, рассматриваемая гамильтонова система будет неинтегрируемой. Пусть β' — ближайшая к вершине β точка из множества $(\mathcal{M} \setminus \{\beta\}) \cap \gamma$. Аналогично доказывается, что угол между векторами β и β' не меньше $\pi/2$. Так как векторы α и β по предположению независимы, то угол между ними строго меньше π . Следовательно, точка α' на самом деле совпадает с вершиной β , а точка β' совпадает с вершиной α . Отсюда вытекает, что векторы α и β удовлетворяют условиям (1) и (2) теоремы (3). Если будет выполнено условие (3), то система окажется неинтегрируемой вопреки предположению. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть исходная гамильтонова система интегрируема по Биркгофу. Тогда

- 1) все точки $\mathcal{M}$ лежат на лучах с началом в точке $0 \in W^*$ и проходящих через вершины выпуклого многогранника $\mathcal{E}(\mathcal{M})$,
- 2) углы между этими лучами не меньше $\pi/2$.

Доказательство. Пусть δ — точка из $\mathcal{M}$. Тогда найдется вершина σ многогранника $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ такая, что угол между σ и δ острый. В противном случае все вершины лежат в полупространстве $\Pi_\delta = \{y \in W^*: \langle y, \delta \rangle \leq 0\}$. Следовательно, $\mathcal{E}(\mathcal{M}) \subset \Pi_\delta$ и поэтому $\delta \notin \mathcal{E}(\mathcal{M})$. Получаем противоречие. Будем считать, что δ не лежит на луче, задаваемом вектором σ . Значит, угол между σ и δ не равен нулю. Можно считать также, что σ имеет максимальную длину из всех векторов $\mathcal{M}$, сонаправленных с σ .

Пусть Γ — гиперплоскость, проходящая через точку σ (как точку аффинного пространства) ортогонально вектору σ . Через Π обозначим замкнутое полупространство с границей Γ , не содержащее точки 0 . Покажем, что $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ имеет с Π лишь одну общую точку σ . Действительно, в противном случае имеется еще одна такая точка $\tau \neq \sigma$. Но тогда найдется точка μ — вершина $\mathcal{E}(\mathcal{M})$, соединенная с σ ребром и лежащая в Π . Докажем это утверждение от противного. Ясно, что $\mathcal{E}(\mathcal{M}) = M_1 \cup M_2$, где M_1 — выпуклая оболочка вершин $\mathcal{E}(\mathcal{M})$, кроме σ , а M_2 — выпуклая оболочка ребер, выходящих из σ .

Рассмотрим отрезок γ , соединяющий σ и τ . Пусть указанной точки μ не существует. Тогда $\gamma \cap M_2 = \Pi \cap M_2 = \sigma$, множество $\gamma \cap M_1$ замкнуто и не содержит σ . Но это противоречит соотношению $\gamma \subset (M_1 \cup M_2)$. Итак, точка μ , действительно, существует. Угол между σ и μ острый и отличен от нуля. Следовательно, согласно лемме 2, система неинтегрируема.

Итак, $\mathcal{E}(\mathcal{M}) \cap \Pi = \{\sigma\}$. Рассмотрим базис $\{e_i^*\}$ в W^* : $e_1^* = \sigma$, а $e_2^*, \dots, e_n^*$ — независимые векторы в Π . Пусть $<$ — соответствующее отно-

шение лексикографического порядка. Очевидно, что σ — максимальный элемент $\mathfrak{M}$ и $\delta > 0$. Пусть δ' — максимальный линейно независимый с σ элемент множества $\mathfrak{M}$. Так как $\delta' \geq \delta$, то $\langle \sigma, \delta' \rangle > 0$ и поэтому угол между σ и δ' также острый. Согласно замечанию 1 к теореме 3 система неинтегрируема. Лемма доказана.

Теперь уже несложно доказать теорему 1. Согласно утверждению леммы 3, для любых двух линейно независимых векторов σ и τ из $\mathfrak{M}$ имеем $\langle \sigma, \tau \rangle \leq 0$. Пусть α, β — линейно независимые векторы из $\mathfrak{M}$, причем вектор α является максимальным. Выберем в W^* базис $\{e_i^*\}$: $e_1^* = \alpha$, $e_2^* = \beta$, векторы $e_3^*, \dots, e_n^*$ ортогональны α и β . Пусть $\tau = \sum \tau_i e_i^* \in \mathfrak{M}$. Покажем, что $\tau_1 \leq 0$, если τ и α линейно независимы. Действительно,

$$\begin{aligned}\langle \tau, \alpha \rangle &= \tau_1 \langle e_1^*, e_1^* \rangle + \tau_2 \langle e_2^*, e_1^* \rangle \leq 0, \\ \langle \tau, \beta \rangle &= \tau_1 \langle e_1^*, e_2^* \rangle + \tau_2 \langle e_2^*, e_2^* \rangle \leq 0.\end{aligned}$$

Если $\tau_1 > 0$, то из первого неравенства получаем, что $\tau_2 > 0$. Следовательно,

$$\tau_1 \langle \tau, e_1^* \rangle + \tau_2 \langle \tau, e_2^* \rangle \leq 0.$$

С другой стороны, последнее неравенство можно записать в следующем виде:

$$\tau_1^2 \langle e_1^*, e_1^* \rangle + 2\tau_1\tau_2 \langle e_1^*, e_2^* \rangle + \tau_2^2 \langle e_2^*, e_2^* \rangle \leq 0.$$

Это, однако, противоречит свойству положительной определенности матрицы Грама $\|\langle e_i^*, e_j^* \rangle\|$; $i, j = 1, 2$.

Таким образом, отношение порядка $<$, соответствующее базису $\{e_i^*\}$, таково, что α — наибольший элемент множества $\mathfrak{M}$ и $\beta > 0$. Более того, если $\tau \geq \beta$, то τ сонаправлен с вектором α или вектором β . Из этих свойств векторов α и β вытекает справедливость условий (1) и (2) теоремы 3. Таким образом, по теореме 3, если гамильтонова система интегрируема, то при некотором целом $m \geq 0$

$$m\langle \alpha, \alpha \rangle + 2\langle \alpha, \beta \rangle = 0. \quad (10)$$

Пусть теперь β — максимальный по длине из векторов $\mathfrak{M}$, имеющих с β одинаковое направление. При некотором целом $k \geq 0$ получаем аналогичное соотношение

$$k\langle \beta, \beta \rangle + 2\langle \beta, \alpha \rangle = 0. \quad (11)$$

Из (10) и (11) заключаем, что угол φ между векторами α и β равен одному из следующих: $2\pi/3$, $3\pi/4$, $5\pi/6$, причем если $\varphi = 2\pi/3$, то $|\alpha| = |\beta|$, если $\varphi = 3\pi/4$, то или $|\alpha| = \sqrt{2}|\beta|$, или $|\beta| = \sqrt{2}|\alpha|$, если, наконец, $\varphi = 5\pi/6$, то или $|\alpha| = \sqrt{3}|\beta|$, или $|\beta| = \sqrt{3}|\alpha|$ (ср. со следствием 2 из теоремы 1).

Рассмотрим теперь случай, когда имеется вектор $\beta' \in \mathfrak{M}$, сонаправленный с β , причем $|\beta'| < |\beta|$. При некотором целом $l \geq 0$, по доказанному выше, должно выполняться соотношение

$$l\langle \alpha, \alpha \rangle + 2\langle \alpha, \beta' \rangle = 0. \quad (12)$$

Пусть $\varphi = 2\pi/3$. Тогда из (12) получаем соотношение $|\beta'| = l|\alpha|$. Так как в этом случае $|\alpha| = |\beta| > |\beta'|$ и $l \geq 1$, то приходим к противоречию. Итак, если $\varphi = 2\pi/3$, то β' на самом деле не существует.

Пусть теперь $\varphi = 3\pi/4$. Тогда из (12) получаем равенство $|\beta'| = l|\alpha|/\sqrt{2}$. Если $|\alpha| = \sqrt{2}|\beta|$, то $|\beta'| = l|\beta|$. Так как $l \geq 1$, то это равенство про-

считаем, что $a \neq 0$: постоянные слагаемые в этой формуле можно отнести к функции K_1 . Будем искать решение в виде суммы экспонент

$$S_1 = \sum_i S_1^a \exp(a, x).$$

Тогда, очевидно,

$$S_1^a = -h^a / \langle v, a \rangle. \quad (15)$$

Коэффициенты суммы S_1 не определены на «резонансных» гиперплоскостях $\langle v, a \rangle = 0$, $a \in \mathfrak{M}$. Объединение всех таких плоскостей обозначим B_1 и назовем *вековым множеством первого порядка*.

Уравнение для S_2 имеет тот же вид, что и уравнение для S_1 . Функции

$$\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S_1}{\partial x}, \frac{\partial S_1}{\partial x} \right\rangle \quad (16)$$

есть конечная сумма экспонент, однако ее коэффициенты уже зависят от новых импульсов v . Будем искать S_2 в виде суммы

$$\sum S_2^\tau \exp(\tau, x).$$

Слагаемые в (16), не зависящие от x , отнесем к функции K_2 . Из второго уравнения системы (14) с учетом соотношений (15) найдем, что

$$S_2^\tau = - \frac{1}{2 \langle v, \tau \rangle} \sum_{\sigma + \delta = \tau} \frac{\langle \sigma, \delta \rangle h^\sigma h^\delta}{\langle v, \sigma \rangle \langle v, \delta \rangle}.$$

Вековым множеством 2-го порядка B_2 назовем множество всех $v \in \mathbf{R}^n$ таких, что $\langle v, \tau \rangle = 0$ ($\tau \neq 0$) и $\langle v, \tau \rangle S_2^\tau \neq 0$.

Уравнения для $S_3, S_4, \dots$ решаются последовательно по той же схеме. Положим

$$S_m = \sum S_m^\tau(v) \exp(\tau, x), \quad S_m^\tau \neq 0. \quad (17)$$

Коэффициенты в этой сумме находятся по следующей рекуррентной формуле:

$$S_m^\tau = - \frac{1}{2 \langle v, \tau \rangle} \sum_{\substack{p+q=m \\ \sigma+\delta=\tau}} \langle \sigma, \delta \rangle S_p^\sigma S_q^\delta. \quad (18)$$

Эта формула — следствие системы (14) и (17).

Введем *вековое множество m -го порядка* B_m . Оно состоит из всех $v \in \mathbf{R}^n$ таких, что

$$(1) \langle v, \tau \rangle = 0, \tau \neq 0,$$

$$(2) \langle v, \tau \rangle S_m^\tau(v) \neq 0.$$

Положим

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

и назовем это множество *вековым множеством* гамильтоновой системы (13). Вековое множество определено в $\mathbf{R}^n = \{v\}$. отождествляя декартовы пространства $\mathbf{R}^n = \{v\}$ и $\mathbf{R}^n = \{y\}$, получаем множество точек в пространстве $\{y\}$. Это множество в дальнейшем также будет обозначаться через B .

Целесообразность введения и изучения векового множества ясна из следующего утверждения.

Предложение 4. *Предположим, что гамильтонова система (3) имеет n полиномиальных по импульсам интегралов с коэффициентами*

вида (6). Тогда их старшие однородные формы не зависят от координат x и являются зависимыми функциями во всех точках множества $\mathbf{B}$.

Строение векового множества описывает

ЛЕММА 4 (основная). Предположим, что выполнены все условия теоремы 3. Тогда вековое множество $\mathbf{B}_k$ содержит гиперплоскость $\langle k\alpha + \beta, y \rangle = 0$. В частности, вековое множество $\mathbf{B}$ состоит из бесконечного числа различных гиперплоскостей и его замыкание содержит гиперплоскость $\langle y, \alpha \rangle = 0$.

Так как старшие однородные формы полиномиальных интегралов являются аналитическими функциями в $\mathbf{R}^n = \{y\}$ (предложение 4), то из предложения 4 и основной леммы вытекает теорема 3. Действительно, якобиан старших однородных форм есть аналитическая функция в $\mathbf{R}^n = \{y\}$, обращающаяся в нуль на бесконечном множестве гиперплоскостей, проходящих через начало координат. Следовательно, якобиан тождественно равен нулю, и поэтому старшие однородные формы n полиномиальных интегралов всюду зависимы. Основная лемма будет доказана в § 4. А сейчас мы докажем предложение 4.

В гамильтоновой системе (3) сделаем подстановку

$$x \mapsto x, \quad y \mapsto y/\sqrt{\varepsilon}, \quad t \mapsto \sqrt{\varepsilon}t. \quad (19)$$

После такой подстановки система (3) перейдет в систему (13), а полиномиальный интеграл (с точностью до несущественного постоянного множителя) станет равным $F + \sqrt{\varepsilon}\Phi$, где F и Φ — аналитические по ε функции. Ясно, что F и Φ — интегралы системы (13), причем один из свободных членов $F_0 = F|_{\varepsilon=0}$ или $\Phi_0 = \Phi|_{\varepsilon=0}$ совпадает со старшей однородной формой исходного полиномиального интеграла.

Мы докажем усиленный вариант предложения 4 для гамильтоновой системы (13), обладающей n формально-аналитическими по ε интегралами

$$F^{(1)} = F_0^{(1)} + \varepsilon F_1^{(1)} + \dots, \quad \dots, \quad F^{(n)} = F_0^{(n)} + \varepsilon F_1^{(n)} + \dots$$

Коэффициенты этих степенных рядов — функции $F_i^{(j)}$ — являются конечными суммами экспонент

$$\sum f^b(y) \exp(b, x), \quad (20)$$

причем функции f^b аналитичны в $\mathbf{R}^n = \{y\}$. Такой вид имеют, в частности, интегралы гамильтоновых уравнений (13), получающиеся из полиномиальных интегралов системы (3) с помощью подстановки (19). В дальнейшем многократно будет использован следующий очевидный факт: две функции вида (20) совпадают при всех значениях x, y тогда и только тогда, когда совпадают все коэффициенты f^b .

Покажем, что функции $F_0^{(1)}, \dots, F_0^{(n)}$ не зависят от x . Действительно, пусть

$$\sum_{s=0}^{\infty} F_s \varepsilon^s$$

— формальный интеграл системы (13). Ясно, что F_0 — интеграл «невозмущенной» системы с гамильтонианом H_0 . Пусть F_0 имеет вид конечной

суммы (20). Дифференцируя функцию F_0 вдоль решений невозмущенной задачи, приходим к равенству

$$\sum f^b(y) \langle b, y \rangle \exp(b, x) \equiv 0.$$

Так как (по предположению теоремы 3) квадратичная форма H_0 невырождена, то

$$\langle b, y \rangle = \left(b, \frac{\partial H_0}{\partial y} \right) \neq 0$$

при $b \neq 0$. Поэтому $f^b \equiv 0$ для ненулевых векторов b . Следовательно, $F_0 = f^0(y)$, что и требовалось показать.

Символом $\{, \}$ обозначим стандартную скобку Пуассона, заданную каноническими координатами $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$.

ЛЕММА 5. Пусть

$$F = F_0 + \varepsilon F_1 + \dots, \quad G = G_0 + \varepsilon G_1 + \dots$$

— два формальных интеграла уравнений (13) с коэффициентами вида (20). Тогда формальный ряд

$$\{F, G\} = \sum_s \left(\sum_{k+m=s} \{F_k, G_m\} \right) \varepsilon^s \quad (21)$$

равен нулю.

Следствие. Полиномиальные интегралы гамильтоновой системы (3) находятся в инволюции.

Мы уже доказали, что функции F_0 и G_0 не зависят от x . Следовательно, $\{F_0, G_0\} = 0$, и поэтому свободный коэффициент формального ряда (21) равен нулю. Выполним каноническую замену переменных $x, y \rightarrow u, v$ вида

$$y = v + \varepsilon \frac{\partial S'}{\partial x}, \quad u = x + \varepsilon \frac{\partial S'}{\partial v}; \quad S' = S_1 + \dots + \varepsilon^{m-1} S_m, \quad (22)$$

где $S_1, \dots, S_m$ — решения первых m уравнений системы (14). В новых переменных функция Гамильтона станет равной

$$K_0(v) + \varepsilon K_1(v) + \dots + \varepsilon^m K_m(v) + \varepsilon^{m+1} K_{m+1}(u, v) + \dots,$$

причем $K_0(v) \equiv H_0(v)$ и все функции $K_s, s \geq 1$, являются конечными суммами экспонент по переменным u , коэффициенты которых аналитичны в $\mathbf{R}^n \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_m)$. Пусть $\sum F_s(x, y) \varepsilon^s$ — формальный интеграл гамильтоновой системы (13) с коэффициентами вида (20). В новых переменных u, v интеграл будет иметь тот же вид $\sum F'_s(u, v) \varepsilon^s$, причем функции F'_s также будут суммами экспонент по координатам u , аналитичными по v в области $\mathbf{R}^n \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_m)$. Так как при $\varepsilon = 0$ замена (22) является тождественной, то функция F'_0 не будет зависеть от u (по доказанному выше). Ряд $\sum F'_s \varepsilon^s$ — формальный интеграл гамильтоновой системы с функцией Гамильтона $\sum K_s \varepsilon^s$. Поэтому

$$\left\{ \sum F'_s \varepsilon^s, \sum K_s \varepsilon^s \right\} = \sum_s \left(\sum_{m+l=s} \{F'_m, K_l\} \right) \varepsilon^s \equiv 0.$$

Приравнявая нулю первые m коэффициентов этого ряда, получим серию равенств:

$$\{F'_0, K_1\} + \{F'_1, K_0\} = 0, \quad \dots, \quad \{F'_m, K_0\} + \dots + \{F'_0, K_m\} = 0.$$

Так как функции $K_0, \dots, K_m$ зависят лишь от v , а $F_1', \dots, F_m'$ — суммы экспонент по u , то из этих равенств получаем, что функции $F_1', \dots, F_m'$ также не зависят от u . Если теперь $G = \sum G_s \varepsilon^s$ — другой формальный интеграл уравнений (13), то в новых переменных u, v первые m коэффициентов этого ряда $\sum G_s' \varepsilon^s$ также не зависят от u . Но тогда, очевидно, первые m коэффициентов формального ряда (21) обращаются в нуль. Лемма 5 доказана.

Докажем теперь, что функции $F_0^{(1)}, \dots, F_0^{(n)}$ зависимы в точках множества B . Пусть точка y^0 принадлежит B . Предположим, что якобиан

$$\frac{\partial (F_0^{(1)}, \dots, F_0^{(n)})}{\partial (y_1, \dots, y_n)} \neq 0 \quad (23)$$

в точке y^0 . Рассмотрим систему уравнений в частных производных

$$F_0^{(s)} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) + \varepsilon F_1^{(s)} \left(\frac{\partial S}{\partial x}, x \right) + \dots = F_0^{(s)}(v) + \sum_{k \geq 1} f_k^{(s)}(v) \varepsilon^k, \quad 1 \leq s \leq n, \quad (24)$$

где функции $f_k^{(s)}$ являются пока неизвестными аналитическими функциями. При $\varepsilon = 0$ уравнения будут выполнены, если положить $S = (v, x)$. Так как согласно (23) в точке $v = y^0$ якобиан функций $F_0^{(1)}(v), \dots, F_0^{(n)}(v)$ отличен от нуля, то при заданных $f_k^{(s)}, k \geq 1$, уравнения

$$F_0^{(s)}(y) + \varepsilon F_1^{(s)}(y, x) + \dots = F_0^{(s)}(v) + \varepsilon f_1^{(s)}(v) + \dots$$

имеют единственное решение в виде формального ряда

$$y = v + \sum_{k \geq 1} g_k(v, x) \varepsilon^k,$$

причем коэффициенты g_k — конечные суммы вещественных экспонент по координатам x , аналитические по v в малой окрестности точки y_0 . Утверждается, что дифференциальная форма

$$y dx = \sum_{i=1}^n y_i dx_i \quad (25)$$

точна, т. е. является дифференциалом по x некоторого формального ряда $\sum S_m(x, v) \varepsilon^m$. Этот ряд, очевидно, представляет собой решение системы (24). Для доказательства точности формы (25) заметим прежде всего, что функции

$$G_i = y_i - v_i - \sum_{k \geq 1} g_{ik}(v, x) \varepsilon^k, \quad i = 1, \dots, n,$$

при фиксированных значениях v находятся в инволюции. Этот факт — простое следствие инволютивности интегралов $\sum F_k^{(s)} \varepsilon^k$ ($1 \leq s \leq n$) (лемма 5). Далее,

$$\{G_i, G_j\} = \sum_{k \geq 1} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right) \varepsilon^k \equiv 0.$$

Отсюда следует, что форма $y dx$ замкнута и поэтому точна в $\mathbf{R}^{2n} = \{x, v\}$.

Подходящим выбором функций $f_k^{(s)}(v)$ можно добиться того, чтобы в разложениях $g_k(v, x)$ в суммы экспонент отсутствовали слагаемые, не зависящие от x . Действительно, уравнение для g_1 имеет следующий вид:

$$J(v) g_1 = f_1 - F_1, \quad (26)$$

где J — матрица Якоби функций $F_0^{(1)}, \dots, F_0^{(n)}$; f_1 — вектор с компонентами $f_1^{(1)}, \dots, f_1^{(n)}$, а F_1 — вектор с компонентами $F_1^{(1)}, \dots, F_1^{(n)}$. Полагая f_1 равным слагаемому в F_1 , не зависящему от x . Уравнения для g_k при $k \geq 1$ имеют вид (26), причем в правую часть входят функции g_m и f_m ($m < k$), которые уже известны.

Из равенства

$$\sum_{k \geq 1} g_k(v, x) \varepsilon^k = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k \geq 1} S_k(v, x) \varepsilon^k$$

можно найти функции $S_k(v, x)$ в виде суммы экспонент, у которых также отсутствуют слагаемые, не зависящие от x . Пусть S обозначает формальный ряд

$$(v, x) + \sum_{k \geq 1} S_k(v, x) \varepsilon^k.$$

Разложим выражение

$$H_0\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) + \varepsilon H_1(x)$$

в ряд по степеням ε ; пусть это будет $K_0 + \varepsilon K_1 + \dots$. Покажем, что функции $K_0, K_1, \dots$ не зависят от x . Для этого выполним формальное каноническое преобразование $x, y \mapsto u, v$ с производящей функцией S . В новых переменных гамильтониан имеет следующий вид:

$$H_0(y) + \varepsilon H_1(x)|_{u,v} = K'_0(u, v) + \varepsilon K'_1(u, v) + \dots$$

Координаты $v_1, \dots, v_n$ являются первыми интегралами системы с формальным гамильтонианом $\sum K'_s \varepsilon^s$:

$$\left\{v_i, \sum_s K'_s \varepsilon^s\right\} = \sum_s \{v_i, K'_s\} \varepsilon^s \equiv 0.$$

Следовательно, $\{v_i, K'_s\} \equiv 0$ при всех i, s , и поэтому функции K'_s не зависят от $u_1, \dots, u_n$. Отсюда получаем, что функции $K_s = K'_s|_{u,x}$ зависят только от переменных $v_1, \dots, v_n$.

Таким образом, функции $S_m, m \geq 1$, удовлетворяют системе уравнений (14), причем S_m — конечные суммы экспонент с аналитическими в окрестности точки $y^0 \in B$ коэффициентами. Однако это противоречит определению векового множества B . Предложение 4 доказано.

§ 4. Структура векового множества

В этом параграфе доказывается основная лемма из § 3. Пусть $<$ — отношение лексикографического порядка, фигурирующее в теореме 3.

ЛЕММА 6. *Функции $S_r^\tau \equiv 0$ для всех $\tau > r\alpha$.*

Доказательство проводится индукцией по r . Для $r=1$ справедливость леммы вытекает из формулы (15) и определения вектора α как наибольшего элемента $\mathfrak{M}$. Предположим, что лемма справедлива для всех $r \leq m$. Функция S_{r+1}^τ вычисляется по формуле (18). Пусть $\tau > (r+1)\alpha$. Покажем, что в любом слагаемом в правой части (18) должен присутствовать сомножитель S_w^τ при $\tau > w\alpha, w \leq r$, который равен нулю по предположению индукции. Действительно если $\sigma \leq p\alpha$ и $\delta \leq q\alpha$, то $\sigma + \delta \leq (p+q)\alpha = (r+1)\alpha < \tau$. Но это противоречит условию суммирования $\sigma + \delta = \tau$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7.

$$S_m^{\alpha} = - \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2m \langle v, \alpha \rangle} \sum_{p+q=m} pq S_p^{\alpha} S_q^{\alpha}. \quad (27)$$

Доказательство. Выведем (27) из (18), положив $\tau = m\alpha$. Будем рассматривать лишь ненулевые слагаемые, стоящие справа. Согласно лемме 6, справедливы соотношения: $\sigma \leq p\alpha$, $\delta \leq q\alpha$, $\sigma + \delta = m\alpha = (p+q)\alpha$. Откуда $\sigma = p\alpha$ и $\delta = q\alpha$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 8.

$$S_m^{\alpha} = R_m \left(- \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{\langle v, \alpha \rangle} \right)^{m-1} (S_1^{\alpha})^m, \quad (28)$$

где

$$R_1 = 1, \quad R_m = \sum_{p+q=m} \frac{pq R_p R_q}{2m}. \quad (29)$$

Доказательство проводится индукцией по m . При $m=1$ формула (28) является тривиальным тождеством. Пусть при $m \leq r$ лемма 8 справедлива. Тогда

$$\begin{aligned} S_{r+1}^{(r+1)\alpha} &= - \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle \sum_{p+q=r+1} pq R_p R_q}{2(r+1) \langle v, \alpha \rangle} \left(- \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{\langle v, \alpha \rangle} \right)^{p+q-2} (S_1^{\alpha})^{p+q} = \\ &= R_{r+1} \left(- \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{\langle v, \alpha \rangle} \right)^r (S_1^{\alpha})^{r+1}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 9.

$$S_{m+1}^{m\alpha+\beta} = - \frac{1}{\langle v, m\alpha + \beta \rangle} \sum_{\substack{p+q=m \\ p>0, q \geq 0}} \langle p\alpha, q\alpha + \beta \rangle S_p^{\alpha} S_{q+1}^{q\alpha+\beta}. \quad (30)$$

Доказательство. Из (18) несложно вывести (например, по индукции), что если $S_k^{\tau} \neq 0$, то $\tau = \tau_1 + \dots + \tau_k$, $\tau_j \in \mathfrak{M}$, $j=1, \dots, k$. Положим в (18) $\tau = m\alpha + \beta$. Тогда для ненулевых слагаемых в сумме (18) имеем $\sigma = \tau_1 + \dots + \tau_p$, $\delta = \tau_1' + \dots + \tau_q'$, где $\tau_j, \tau_k' \in \mathfrak{M}$; $j=1, \dots, p$; $k=1, \dots, q$. Кроме того, $\sigma + \delta = m\alpha + \beta$. Таким образом, в силу условия 2) теоремы 3 получаем $\sigma = p\alpha$, $\delta = (q-1)\alpha + \beta$ или $\sigma = (p-1)\alpha + \beta$, $\delta = q\alpha$. Для завершения доказательства осталось воспользоваться симметрией формулы (18) по σ и δ . Лемма доказана.

Преобразуем формулу (30):

$$\langle v, m\alpha + \beta \rangle S_{m+1}^{m\alpha+\beta} = \sum_{\substack{p+q=m \\ p>0, q \geq 0}} - \frac{\langle \alpha, q\alpha + \beta \rangle}{\langle v, q\alpha + \beta \rangle} p S_p^{\alpha} \langle v, q\alpha + \beta \rangle S_{q+1}^{q\alpha+\beta}. \quad (31)$$

Введем следующие обозначения:

$$x_m = m S_m^{\alpha}, \quad y_{m+1} = \langle v, m\alpha + \beta \rangle S_{m+1}^{m\alpha+\beta}, \quad l_q = - \frac{\langle \alpha, q\alpha + \beta \rangle}{\langle v, q\alpha + \beta \rangle}.$$

Тогда (31) можно записать в следующем виде:

$$y_{m+1} = \sum_{\substack{p+q=m \\ p>0, q \geq 0}} l_q x_p y_{q+1}.$$

ЛЕММА 10.

$$y_{m+1} = \omega_m x_1^m y_1, \quad (32)$$

где

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_m = \sum_{\substack{p+q=m \\ p>0, q\geq 0}} p R_p h^{p-1} \omega_q l_q, \quad h = -\frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{\langle v, \alpha \rangle}.$$

Доказательство проводится индукцией по m с применением формулы (28).

Положим $pR_p = r_p$. Из формулы (29) получаем

$$r_1 = 1, \quad r_m = \sum_{\substack{p+q=m \\ p>0, q>0}} \frac{r_p r_q}{2}. \quad (33)$$

С учетом нового обозначения

$$\omega_m = \sum_{\substack{p+q=m \\ p>0, q\geq 0}} r_p h^{q-1} \omega_q l_q. \quad (34)$$

$$\text{ЛЕММА 11. } 1 - (1 - 2z)^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} r_n z^n.$$

$$\text{Следствие. } r_m = \frac{(2m-3)!!}{m!!} \text{ при } m > 1.$$

Доказательство леммы 11. Из (33) следует, что степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n z^n$$

удовлетворяет уравнению $f^2 - 2f + 2z = 0$. Так как $f(0) = 0$, то $f(z) = 1 - (1 - 2z)^{1/2}$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 12. При $m \geq 1$

$$\omega_m = \sum_k \sum_{0=j_0 < j_1 < \dots < j_k < m} r_{j_1-j_0} r_{j_2-j_1} \dots r_{m-j_k} h^{m-k-1} l_{j_0} l_{j_1} \dots l_{j_k}. \quad (35)$$

Формула (35) просто выводится из (34) индукцией по m .

Приступим к анализу векового множества. Так как векторы α и β по предположению линейно независимы, то гиперплоскости $\langle v, \alpha \rangle = 0$ и $\Gamma_m = \{v: \langle v, m\alpha + \beta \rangle = 0\}$ не совпадают. Согласно лемме 6 функции S_r^α аналитичны почти всюду на Γ_m при $r < m+1$. Для того чтобы выяснить, принадлежит ли гиперплоскость Γ_m вековому множеству B_{m+1} , необходимо исследовать неравенство $y_{m+1} \neq 0$. Воспользуемся формулой (32). В этой формуле $x_1 = S_1^\alpha$, $y_1 = \langle v, \beta \rangle S_1^\beta$. Коэффициенты S_1^α и S_1^β отличны от нуля согласно формуле (15) и определению векторов α и β . Если $\langle v, \beta \rangle = 0$ на гиперплоскости Γ_m , то векторы α и β должны быть коллинеарными. Это, однако, не так. Следовательно, $x_1 \neq 0$ и $y_1 \neq 0$. Поэтому $y_{m+1} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\omega_m \neq 0$.

Рассмотрим два случая: $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$ и $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$. В первом случае $h = 0$ и (по лемме 8) $\omega_m = l_0 l_1 \dots l_{m-1}$. Так как (согласно предположению теоремы 3) $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$, то все $l_s \neq 0$ и, следовательно, $\omega_m \neq 0$. Во втором случае введем число $\lambda = \langle \alpha, \beta \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$. В точках гиперплоскости Γ_m выполнено равенство $\langle v, \beta \rangle = -m \langle v, \alpha \rangle$ и поэтому $l_q = \frac{\lambda + q}{q - m} h$. Так как в рассматриваемом случае $h \neq 0$, то из формулы (35) следует, что $\omega_m = 0$ тогда и только тогда, когда λ является корнем многочлена

$$P_m(x) = \sum_k \sum_{0=j_0 < j_1 < \dots < j_k < m} r_{j_1-j_0} \dots r_{m-j_k} \frac{(x+j_0) \dots (x+j_k)}{(j_0-m) \dots (j_k-m)}. \quad (36)$$

ЛЕММА 13.

$$P_m(x) = \frac{(-1)^m}{m!} x \left(x + \frac{1}{2}\right) \dots \left(x + \frac{m-1}{2}\right). \quad (37)$$

Для доказательства леммы 13 рассмотрим новые многочлены

$$Q_n(y) = \frac{P_n(x)}{-x} \Big|_{x=n-y}, \quad Q_0 = -\frac{1}{y}. \quad (38)$$

ЛЕММА 14. Справедливо рекуррентное соотношение

$$mQ_m = \sum_{\substack{p+q=m \\ p>0, q\geq 0}} r_p(q-y)Q_q. \quad (39)$$

Доказательство. В формуле (36) сделаем замену: $m-j_l = i_{k-l+1}$. Тогда

$$P_m(x) = -\frac{x}{m}r_m + \sum_k \sum_{0 < i_1 < \dots < i_k < m} r_{m-i_k} r_{i_k-i_{k-1}} \dots r_{i_1} \frac{x}{-m} \cdot \frac{x+m-i_k}{-i_k} \dots \frac{x+m-i_1}{-i_1}.$$

Выделив отдельно суммирование по i_k , получаем

$$P_m(x) = -\frac{x}{m} \sum_{i_k=0}^{m-1} P_{i_k}(x) r_{m-i_k}, \quad P_0 = 1.$$

Это соотношение можно переписать в следующем виде:

$$m \frac{P_m}{x} = \sum_{k=0}^{m-1} (k-m-x) \frac{P_k}{x+m-k} r_{m-k}.$$

Полагая $x+m=y$ и $P_n = (n-y)Q_n$, приходим к равенству

$$mQ_m(y) = \sum_{k=0}^{m-1} r_{m-k} (k-y)Q_k(y), \quad Q_0 = -\frac{1}{y},$$

которое эквивалентно (39).

ЛЕММА 15. Справедливо тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^n = -\frac{1}{y} \left(\frac{1+(1-2z)^{1/2}}{2} \right)^{2y}. \quad (40)$$

Доказательство. Положим $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^n$. Соотношение (39) приводит к следующему дифференциальному уравнению для функции g :

$$z \frac{dg}{dz} = \left(z \frac{dg}{dz} - yg \right) f.$$

Здесь f — функция из леммы 11. Решая это линейное дифференциальное уравнение с начальным условием $g(0) = -1/y$, получим

$$g(z) = -\frac{1}{y} \left(\frac{1+(1-2z)^{1/2}}{2} \right)^{2y},$$

что и требовалось доказать.

Функция (40) аналитична при малых z . Найдем ее ряд Маклорена. Положим $g(z) = F(\varphi^{-1}(z))$, где

$$F(z) = -\frac{1}{y} \left(\frac{1+z}{2} \right)^{2y}, \quad \varphi = \frac{1-z^2}{2}.$$

Так как $\varphi'(1) \neq 0$, то можно воспользоваться теоремой Бюрмана [20]:

$$g(z) = g(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \Big|_{z=1} [F'(z) \{\Psi(z)\}^m], \quad (41)$$

где $\Psi(z) = \frac{z-1}{\varphi(z)} = -\frac{2}{1+z}$. Из формул (40) и (41) легко получаем

$$m! Q_m = \left(\frac{2m-1}{2} - y \right) \left(\frac{2m-2}{2} - y \right) \dots \left(\frac{m+1}{2} - y \right).$$

Возвращаясь к старой переменной x и используя соотношение (38), приходим к формуле (37) для многочлена P_m . Лемма 13 доказана.

Продолжим анализ векового множества. Лемма 13 дает нам, что функция $\omega_m \equiv 0$ на гиперплоскости Γ_m тогда и только тогда, когда $\lambda = \langle \alpha, \beta \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ совпадает с одним из следующих чисел: $0, -1/2, -1, \dots, -(m-1)/2$. Однако, согласно предположению теоремы 3, $\lambda \neq -m/2$ при всех целых $m \geq 0$. Следовательно, гиперплоскость $\Gamma_m = \{v: \langle v, m\alpha + \beta \rangle = 0\}$ принадлежит вековому множеству $B_{m+1} \subset B$. При $m \rightarrow \infty$ гиперплоскости Γ_m накапливаются, очевидно, у предельной плоскости $\langle v, \alpha \rangle = 0$. Доказательство основной леммы завершено.

Литература

1. Toda М. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984.
2. Богоявленский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астрономии и газовой динамике. М.: Наука, 1980.
3. Henon М. Integrals of the Toda lattice//Phys. Rev. 1974. В. 9. Р. 1921—1923.
4. Flaschka Н. The Toda Lattice. I. Existence of integrals//Phys. Rev. 1974. В. 9. Р. 1924—1925.
5. Манаков С. В. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах//ЖЭТФ. 1974. Т. 67, вып. 2. С. 543—555.
6. Bogoyavlensky О. I. On perturbations of the periodic Toda lattices//Commun. Math. Phys. 1976. V. 51. Р. 201—209.
7. Olshanetsky М., Perelomov А. Explicit solutions of classical generalized Toda models//Invent. Math. 1979. V. 54, № 3. Р. 261—269.
8. Kostant В. The solution of a generalized Toda lattice and representation theory//Adv. Math. 1979. V. 34. Р. 195—338.
9. Sklyanin Е. К. Boundary conditions for integrable quantum systems. Preprints/LOMI. L., 1986.
10. Adler М., van Moerbeke Р. Kowalewski's Asymptotic Method, Кас — Moody Lie Algebras and Regularization//Commun. Math. Phys. 1982. V. 83. Р. 83—106.
11. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки: Сб., посвященный памяти С. В. Ковалевской. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1940.
12. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.—Л.: Гостехиздат, 1941.
13. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.
14. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972.
15. Helgason S. Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces. New York: Academic Press, 1978.
16. Adler М., van Moerbeke Р. Completely Integrable Systems, Euclidean Lie Algebras and Curves//Adv. Math. 1980. V. 38. Р. 267—317.
17. Берже М. Геометрия. М.: Мир, 1984.
18. Козлов В. В. К теории возмущений гамильтоновых систем с некомпактными инвариантными поверхностями//Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. 1988, № 1.
19. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Т. I, II//Избранные труды. Т. I. М.: Наука, 1971.
20. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. 1. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
15.VI.1987