

УДК 531.01

В. В. Козлов

ПРИНЦИПЫ ДИНАМИКИ И СЕРВОСВЯЗИ

1. Пусть x_1, \dots, x_n — обобщенные координаты механической системы, T — ее кинетическая энергия, F_1, \dots, F_n — обобщенные силы. Если система является «свободной» (координаты x и скорости \dot{x} не связаны каким-либо нетривиальным соотношением), то ее движения описываются уравнениями Лагранжа

$$[T]=F, \tag{1}$$

[f] обозначает вариационную производную

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Если имеется связь $\Phi(\dot{x}, x, t) = 0$ (в приложениях функция Φ линейна по \dot{x}), то уравнения (1) обычно заменяются более общими:

$$[T] = F + \lambda \partial \Phi / \partial \dot{x}, \quad \Phi = 0, \quad (2)$$

где λ — пока не определенный множитель. Пусть $\partial \Phi / \partial \dot{x} \neq 0$. Тогда, не решая (2), множитель λ можно представить в виде явной функции от \dot{x} , x и t .

Уравнения (2) эквивалентны принципу Даламбера—Лагранжа:

$$([T] - F) \delta x = 0, \quad \Phi = 0, \quad (3)$$

где возможные перемещения (вариации по Гато) δx удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} = 0. \quad (4)$$

При построении динамики со связями обычно исходят из принципа Даламбера—Лагранжа. Некоторые авторы (Гаусс, Пуансо, Якоби, Кирхгоф и др.) рассматривали принцип Даламбера—Лагранжа как самостоятельный принцип, доказывать который не нужно (см. [1, 2]). Однако при традиционном способе изложения динамики этот принцип устанавливается с помощью принципа освобожденности и аксиомы идеальности связи. Принцип освобожденности утверждает, что систему со связью можно считать свободной, при этом к внешним силам F надо добавить еще реакцию связи

$$R = [T] - F. \quad (5)$$

Аксиома идеальности связи выражается равенством

$$R \delta x = 0. \quad (6)$$

Соотношения (5) и (6) вместе с уравнением связи $\Phi = 0$ эквивалентны, конечно, (3). Но сами по себе уравнения (3) без уравнения (4), задающего возможные перемещения, не определяют однозначно уравнений движения. Поэтому при таком способе построения динамики в число аксиом следует включить определение возможных перемещений. Как будет показано ниже, эта аксиома независима от аксиом (5) и (6). Доказательство использует тот факт, что динамика систем с сервосвязями существенно зависит от физического способа их реализации.

В качестве простого примера рассмотрим движение по прямой двух материальных точек с массами m_1 и m_2 , причем на точку m_2 действует сила F . Пусть x_1 и x_2 — координаты этих точек. Если m_1 и m_2 соединены твердым невесомым стержнем, то вся система движется с ускорением $F / (m_1 + m_2)$. Связь задается уравнением

$$x_2 - x_1 = \text{const} \text{ или, что то же самое, } \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = 0. \quad (7)$$

Из (4) получим уравнение возможных перемещений

$$\delta x_2 - \delta x_1 = 0. \quad (8)$$

Эта связь является идеальной.

Ту же самую связь можно реализовать и так: считая m_1 и m_2 свободными, приложим к точке m_1 «следящую» силу $R = m_1 F / m_2$. Если в начальный момент времени $\dot{x}_1 = \dot{x}_2$, то последнее соотношение будет выполнено при всех значениях t и система точек будет двигаться как твердое тело с иным ускорением F/m_2 . Реакцией связи (7) (являющейся сервосвязью) будет сила R , и ее работа на возможных перемещениях (8), как правило, отлична от нуля. В этом случае обычно говорят, что связь (7) здесь уже неидеальна [3, п. 53].

Однако можно рассуждать по-другому. Вместо соотношения (8) зададим возможные перемещения другим уравнением

$$\delta x_1 = 0. \quad (9)$$

Тогда динамика рассматриваемой системы с сервосвязью (7) будет подчиняться старым аксиомам (5) и (6), а также новой аксиоме (9).

Таким образом, даже в простейшем случае стационарной интегрируемой связи определение возможных перемещений есть независимая аксиома динамики. Поэтому «выводы» уравнений возможных перемещений, фигурирующие в руководствах по динамике, в лучшем случае являются лишь разъяснениями принимаемых определений. Конечно, эти определения можно доказать с использованием других независимых аксиом. Так, например, Н. Г. Четаев получил соотношение (4) из аксиом (5), (6) и принципа Гаусса [4].

2. Рассмотрим свободную систему и предположим, что с помощью дополнительных управляемых сил вида λM , $M = (M_1, \dots, M_n)$, требуется осуществить движение этой системы, подчиняющееся связи $\Phi = 0$. Здесь λ пока не известная функция времени. Задача сводится к разрешимости системы уравнений

$$[T] = F + \lambda M, \quad \Phi = 0. \quad (10)$$

Продифференцируем уравнение связи по t :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} \ddot{x} = \varphi. \quad (11)$$

Здесь φ — некоторая известная функция от \dot{x} , x , и t . Полагая

$$A = \|\|\partial^2 T / \partial \dot{x}^2\|\|,$$

из (10) и (11) получим линейное уравнение для множителя

$$\lambda (A^{-1} M, \partial \Phi / \partial \dot{x}) = g$$

с известной правой частью.

Таким образом, условие реализуемости связи $\Phi = 0$ с помощью обобщенных сил вида λM сводится к неравенству

$$(A^{-1} M, \partial \Phi / \partial \dot{x}) \neq 0. \quad (12)$$

Оно заведомо выполняется, если $M = \partial \Phi / \partial \dot{x}$ и $\partial \Phi / \partial \dot{x} \neq 0$.

В качестве примера рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной точки и предположим, что с помощью регулируемого момента сил, направленного вдоль неподвижной в теле оси n , требуется осуществить движение твердого тела, при котором проекция его угловой скорости на неподвижную в теле ось l постоянно равна нулю. Нетрудно проверить, что условие (12) реализуемости такой сервосвязи нарушается лишь когда оси n и l ортогональны. Если оси n и l совпадают, то твердое тело совершает неголономное движение и мы получаем еще одну реализацию известной задачи Суслова [5, п. 298].

Уравнения движения (10) рассматриваемой системы с сервосвязью $\Phi=0$ можно представить в виде принципа Даламбера—Лагранжа (3), но только следует принять новое уравнение для возможных перемещений:

$$M\delta x=0. \quad (13)$$

В этом случае будут справедливы принцип освобожденности (реакция связи R равна λM) и аксиома идеальности связи. Возникает целое семейство моделей движения систем с сервосвязями, различающихся лишь определением возможных перемещений (13).

3. Как уже отмечалось в п. 1, уравнение для возможных перемещений (4) можно вывести из условия совместности принципов Даламбера—Лагранжа и Гаусса. Оказывается, для систем, подчиняющихся принципу Даламбера—Лагранжа (3), (13), справедлив обобщенный принцип Гаусса.

Действительным движением назовем функцию $x_d(t)$, удовлетворяющую уравнениям (10), освобожденным движением — функцию $x_0(t)$, удовлетворяющую уравнениям Лагранжа (1) и начальным данным $x_0(\tau)=x_d(\tau)$, $\dot{x}_0(\tau)=\dot{x}_d(\tau)$. Введем, наконец, семейство мыслимых движений $x_\mu(t)$, задаваемых условиями:

(i) действительное движение является одним из мыслимых,

(ii) $x_\mu(\tau)=x_d(\tau)$, $\dot{x}_\mu(\tau)=\dot{x}_d(\tau)$,

(iii) для любых мыслимых движений x_μ' и x_μ'' разность ускорений $\ddot{x}_\mu'(\tau)-\ddot{x}_\mu''(\tau)$ удовлетворяет уравнению (13).

Запас мыслимых движений достаточно широк. Действительно, пусть $M\omega=0$. Тогда функция

$$x_d(\tau)+\dot{x}_d(\tau)(t-\tau)+(\ddot{x}_d(\tau)-\omega)(t-\tau)^2/2$$

определяет одно из мыслимых движений.

Следуя Гауссу, введем функцию принуждения

$$Z_{\mu,0}=(A(\ddot{x}_\mu-\ddot{x}_0), (\ddot{x}_\mu-\ddot{x}_0)),$$

являющуюся мерой отклонения мыслимых движений от освобожденного при $t=\tau$. Ясно, что $Z_{\mu,0}$ — квадрат вектора $\ddot{x}_\mu-\ddot{x}_0$ во внутренней метрике, задаваемой кинетической энергией T . Положим еще

$$Z_{\mu,d}=(A(\ddot{x}_\mu-\ddot{x}_d), (\ddot{x}_\mu-\ddot{x}_d)).$$

Рассмотрим три вектора

$$a=\ddot{x}_\mu-\ddot{x}_0, \quad b=\ddot{x}_d-\ddot{x}_0, \quad c=\ddot{x}_\mu-\ddot{x}_d.$$

Ясно, что $a=b+c$. Покажем, что векторы b и c ортогональны во внутренней метрике. Действительно,

$$(Ab, c)=(A(\ddot{x}_d-\ddot{x}_0), (\ddot{x}_\mu-\ddot{x}_d))=\lambda M(\ddot{x}_\mu-\ddot{x}_d)=0$$

согласно условиям (i) и (iii). По теореме Пифагора $Z_{\mu,0}=Z_{d,0}+Z_{\mu,d}$. Так как $Z_{\mu,d}\geq 0$, то

$$Z_{d,0}\leq Z_{\mu,0}.$$

Это неравенство составляет обобщенный принцип Гаусса: действительным является то из мыслимых движений, которое наименее всего отклоняется от освобожденного движения.

Если положить $M=\partial\Phi/\partial\dot{x}$, то получим классический принцип Гаусса. При этом в качестве мыслимых движений можно принять движе-

ния, подчиняющиеся связи $\Phi=0$ и условию (ii). Условие (i) выполнено автоматически, а условие (iii) выводится из соотношений (4) и (11).

4. Способ реализации сервосвязей с помощью регулируемых обобщенных сил, изложенный в п. 2, не является единственно возможным. Оказывается, сервосвязи можно также осуществить с помощью подходящего изменения инерционных свойств системы.

Рассмотрим движение системы с измененной кинетической энергией $T_* = T + \lambda N + \mu$, где N — некоторая функция от \dot{x} , x и t , а λ и μ пока не известные функции времени. Параметр μ несущественный, так как он не входит в уравнение движения

$$[T_*] = F. \quad (14)$$

Параметр λ выберем из условия реализуемости связи $\Phi=0$. Тогда из (14) получим замкнутую систему уравнений для отыскания x и λ :

$$[T] = F - \dot{\lambda} \partial N / \partial \dot{x} - \lambda [N], \quad \Phi = 0. \quad (15)$$

С помощью соотношения (11) можно найти условие разрешимости системы (15) относительно \ddot{x} и $\dot{\lambda}$:

$$(A^{-1} \partial N / \partial \dot{x}, \partial \Phi / \partial \dot{x}) \neq 0. \quad (16)$$

Неравенство (16) является достаточным условием реализуемости связи $\Phi=0$. Отметим, что кроме начальных данных x_0 и \dot{x}_0 , удовлетворяющих уравнению связи, надо задать еще начальное значение параметра λ .

В качестве примера рассмотрим задачу о вращении твердого тела с неподвижной точкой из п. 2, но теперь регулируемое воздействие будет осуществляться с помощью симметричного маховика, вращающегося вокруг оси n . Его вращение не меняет, конечно, распределения масс всей системы. Снова поставим задачу о реализации вращений, при которых проекция угловой скорости на ось l обращается в нуль. Вращение маховика относительно тела меняет кинетическую энергию системы. Можно показать, что в этом случае условие (16) реализуемости указанной сервосвязи также выполняется, если оси n и l не ортогональны. Для однозначного задания вращения тела-носителя необходимо задать в начальный момент времени скорость маховика относительно твердого тела.

Положим $N = \Phi$. Если $\partial \Phi / \partial \dot{x} \neq 0$, то условие (16) заведомо выполнено. В задаче о вращении твердого тела условие $N = \Phi$ эквивалентно совпадению осей n и l . В этом случае движение подчиняется не принципу Даламбера—Лагранжа (3), (4), а обобщенному вариационному принципу Гамильтона—Остроградского:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt + \int_{t_1}^{t_2} F \delta x dt = 0, \quad \Phi = 0 \quad (17)$$

для всех вариаций δx с закрепленными концами, удовлетворяющих уравнению

$$\delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} (\delta \dot{x}) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta x = 0. \quad (18)$$

Принцип (17)—(18) лежит в основе вакономной динамики [6]. В [6] указаны способы «пассивной» реализации вакономных связей, основанные на эффекте присоединенных масс.

5. Наблюдения пунктов 2 и 4 можно обобщить. Предположим, что имеется измененная кинетическая энергия $T_* = T + \lambda(t)N$ и система находится под действием дополнительных обобщенных сил вида $\lambda'(t)M$. За счет выбора λ и λ' как функций времени требуется реализовать движение со связью $\Phi = 0$. Такую задачу в общем случае можно решить многими различными способами (ср. с. [7; 8, гл. 24]). Однако эту неопределенность можно исключить, задав некоторую априорную зависимость между параметрами λ и λ' . Простейшая из них — линейная: $\lambda' = k\lambda$, $k = \text{const}$. Можно считать, что $k = 1$; в противном случае M заменим на kM . В итоге движение системы с сервосвязью описывается уравнениями

$$[T] = F - \dot{\lambda} \partial N / \partial \dot{x} - \lambda [N] + \lambda M, \quad \Phi = 0. \quad (19)$$

Условие реализуемости сервосвязи $\Phi = 0$ имеет вид неравенства (16).

Уравнения (19) можно представить в форме обобщенного принципа Даламбера—Лагранжа. Положим

$$R = -\dot{\lambda} \partial N / \partial \dot{x} - \lambda [N] + \lambda M.$$

На каждом движении (задаваемом однозначно значениями x_0 , \dot{x}_0 и λ_0 в фиксированный момент времени) R является некоторой функцией времени. Будем трактовать R как реакцию связи. Так что будет выполнен принцип освобождаемости (5).

Пусть $\delta x(t)$ — гладкая функция, обращающаяся в нуль на концах интервала $[t_1, t_2]$. Подсчитаем работу силы реакции на этом промежутке времени:

$$\int_{t_1}^{t_2} R \delta x dt = \int_{t_1}^{t_2} \lambda (\delta N + M \delta x) dt.$$

Если вариации δx подчинить условию

$$\delta N + M \delta x = \frac{\partial N}{\partial x} (\delta x) + \frac{\partial N}{\partial x} \delta x + M \delta x = 0, \quad (20)$$

то

$$\int_{t_1}^{t_2} R \delta x dt = 0. \quad (21)$$

Равенство (21) можно трактовать как условие идеальности связи, а равенство (20) — как определение возможных перемещений. Если $N = 0$, то (20) и (21) эквивалентны соответственно (13) и (6).

Для уравнений (19) также справедлив обобщенный принцип Гамильтона—Остроградского (17), но только уравнение (18) для вариаций надо заменить уравнением (20).

Соотношения между λ и λ' могут быть заданы в дифференциальной форме. Пусть, например, $\lambda' = k\lambda$, $k = \text{const}$. Снова можно считать, что $k = 1$. В этом случае уравнения движения приобретают вид

$$[T] = F - \dot{\lambda} \partial N / \partial \dot{x} - \lambda [N] + \dot{\lambda} M, \quad \Phi = 0. \quad (22)$$

Условие реализуемости сервосвязи сводится к неравенству

$$(A^{-1}(\partial N / \partial \dot{x} - M), \partial \Phi / \partial \dot{x}) \neq 0.$$

Уравнение (22) представимо в виде обобщенного принципа Даламбера—Лагранжа

$$\int_{t_1}^{t_2} ([T] - F) \delta x dt = 0,$$

где возможные перемещения $\delta x(t)$ обращаются в нуль на концах интервала $[t_1, t_2]$ и удовлетворяют уравнению

$$\delta N - (M \delta x)' = 0.$$

Совершенно аналогично рассматривается общий случай, когда λ и λ' связаны произвольным линейным соотношением, включающим производные любых порядков. При этом определение возможных перемещений содержит условие обращения в нуль функций $\delta x(t)$ в точках t_1 и t_2 вместе со своими производными до некоторого порядка.

6. Для систем с сервосвязями общего вида справедлив интегральный аналог принципа Гаусса. Для определенности рассмотрим систему, динамика которой описывается уравнениями (19).

Пусть $t \rightarrow x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ — некоторый гладкий путь, удовлетворяющий уравнению связи. Его вариации $\delta x(t)$ задаются уравнением (20) и обращаются в нуль на концах интервала $[t_1, t_2]$. Положим $R(t) = ([T] - F)_{x(t)}$. Оказывается, путь $x(t)$ является движением тогда и только тогда, когда для всех его вариаций δx справедливо неравенство

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (A^{-1}(R + A \delta x), R + A \delta x) dt \geq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (A^{-1}R, R) dt. \quad (23)$$

Необходимость вытекает из равенства (21). Достаточность можно вывести из условия минимума функционала

$$\int_{t_1}^{t_2} (A^{-1}(R + A \delta x), R + A \delta x) dt$$

при $\delta x = 0$ на линейном подпространстве функций δx , удовлетворяющих (20). Для этого воспользуемся методом множителей Лагранжа: считая λ новым переменным, составим вариационное уравнение с лагранжианом

$$(A^{-1}(R + A \delta x), R + A \delta x)/2 - \lambda \delta N - \lambda M \delta x.$$

Простое вычисление приводит к соотношению

$$-(\lambda \delta N / \delta \dot{x})' = R + A \delta x - \lambda \delta N / \delta x - \lambda M,$$

которое должно выполняться при $\delta x = 0$. В результате получим первое уравнение системы (19). Что и требовалось.

Если $N = 0$, то при $t_2 - t_1 \rightarrow 0$ из (23) можно вывести локальный обобщенный принцип Гаусса, установленный в п. 3. Подчеркнем, что вариационный принцип (23) справедлив для любой положительно определенной матрицы A .

7. В заключение сделаем ряд замечаний исторического характера. Сервосвязи открыты Бегеном и описаны в его диссертации 1922 г. (имеется русский перевод [7]). Беген рассмотрел класс сервосвязей, которые можно осуществить с помощью регулируемых обобщенных

сил (ср. с п. 2). Сервосвязи из п.п. 4—5 не охватываются теорией Бегена. Кроме того, в классических работах [7; 8, гл. 24] не указывались в явном виде условия их реализуемости. Обобщенные уравнения Аппеля для систем с сервосвязями Бегена [8, п. 470] легко получить из обобщенного принципа Гаусса (п. 3). Идея введения новых возможных перемещений вида (13) принадлежит Бегену. Однако теория систем с сервосвязями не была в должной мере раскрыта с позиций общих принципов динамики. В частности, не было замечено, что определение возможных перемещений является независимой аксиомой динамики: разные способы введения возможных перемещений порождают различные модели систем со связями. На это обстоятельство указано в работе [6, V].

Автор признателен Я. В. Татаринovu за обсуждение затронутых в статье вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Якоби К. Лекции по динамике. М.; Л., 1936.
2. Кирхгоф Г. Механика. М., 1962.
3. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. Т. II, ч. 1. М., 1951.
4. Четаев Н. Г. О принципе Гаусса//Изв. физ.-матем. о-ва при Казанском ун-те. Сер. 3. 1932—33. 6. 68—71.
5. Суслев Г. К. Теоретическая механика. М.; Л., 1946.
6. Козлов В. В. Динамика систем с неинтегрируемыми связями. I—V// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1982. № 3. 92—100; 1982. № 4. 70—76; 1983. № 3. 102—111; 1987. № 5. 76—83; 1988. № 6. 51—54.
7. Беген А. Теория гироскопических компасов Аншютца и Сперри и общая теория систем с сервосвязями. М., 1967.
8. Аппель П. Теоретическая механика. Т. II. М., 1960.

Поступила в редакцию
06.02.89