Математические заметки

т. 46, № 5 (1989)

ЧИСЛА КОВАЛЕВСКОЙ ОБОБЩЕННЫХ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ

В. В. Козлов, Д. В. Трещев

1. Числа Ковалевской. Рассмотрим сначала простой пример системы уравнений Гамильтона:

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial y},\quad \dot{y}=-\frac{\partial H}{\partial x};\qquad H=\frac{y^2}{2}+f_{n+1}(x), \tag{1}$$

где $f_{n+1}(x)=-ax^{n+1}+bx^n+\ldots\quad (a\neq 0)$ — многочлен с постоянными коэффициентами, и обсудим вопрос о наличии у этой системы формально мероморфных решений:

$$x=\frac{X_{-\alpha}}{t^\alpha}+\frac{X_{-\alpha+1}}{t^{\alpha-1}}+\ldots,\ y=\frac{Y_{-\beta}}{t^\beta}+\frac{Y_{-\beta+1}}{t^{\beta-1}}+\ldots \tag{2}$$

Здесь α и β — целые неотрицательные числа, причем $\alpha+\beta\geqslant 1$; коэффициенты $X_{-\alpha},\ X_{-\alpha+1},\ldots,Y_{-\beta},\ldots\ (X_{-\alpha}\neq 0, Y_{-\beta}\neq 0)$ могут принимать комплексные значения. Нас будет интересовать «полное» решение системы (1); в этом случае коэффициенты разложения (2) должны содержать «модуль» — произвольный параметр. Второй свободный параметр возникает при замене времени t на $t-t_0$. *Числом Ковалевской* k системы (1) назовем количество различных однопараметрических семейств мероморфных решений вида (2). Оказывается, если $n=-1;0;1$ или $n\geqslant 4$, то $k=0$, если $n=2$, то $k=1$, и, наконец, при $n=3$ число k равно 2.

Действительно, подставляя ряды Лорана (2) в уравнения (1) и приравнивая коэффициенты при старших степенях $1/t$, приходим к линейным соотношениям $\beta=\alpha+1$, $\beta+1=n\alpha$. Если $n=-1$ или $n=0$, то $\beta<0$, а при $n=1$ эта система несовместна. Далее, число $\alpha=2/(n-1)$ должно быть целым. Следовательно, $n\leqslant 3$. Итак, если $n\neq 2$ и $n\neq 3$, то гамильтонова система (1) вообще не имеет мероморфных решений. На самом деле при $n\leqslant 1$ все решения являются целыми функциями на $\mathbf{C}=\{t\}$, а при $n\geqslant 4$ общее решение многозначно. Пусть $n=2$. Тогда $\alpha=2$, $\beta=3$ и

$$X_{-2}=6/a,\quad Y_{-3}=-12/a.$$

Подставляя ряды (2) в левую и правую части уравнений Гамильтона и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим индуктивную цепочку алгебраических соотношений для последовательного нахождения пар коэффициентов X_λ и $Y_{\lambda-1}$. При $\lambda \neq 4$ каждая из этих систем разрешается однозначно, а при $\lambda = 4$ она вырождается в одно уравнение $4X_4 = Y_3$. Поэтому коэффициент X_4 (или Y_3) можно считать произвольным параметром (модулем) и, следовательно, при $n = 2$ число Ковалевской равно 1. Если $n = 3$, то $\alpha = 1$, $\beta = 2$ и

$$X_{-1} = \pm\sqrt{2/a}, \quad Y_{-2} = \mp\sqrt{2/a}.$$

При каждом из двух возможных выборов знаков уравнение (1) допускает однопараметрические семейства формально мероморфных решений. Роль произвольного параметра играет в обоих случаях, например, коэффициент X_3. Поскольку эти два семейства различны (так как различны коэффициенты при старших степенях $1/t$), то здесь $k = 2$.

Отметим, что при $n = 2$ и $n = 3$ общее решение системы (2) выражается через эллиптические функции времени. Причем в первом случае в параллелограмме периодов у функции $x(t)$ имеется единственный полюс второго порядка, а во втором случае — два полюса первого порядка, вычеты в которых отличаются знаками. Поэтому ввиду периодичности при $n = 2$ имеется лишь одно семейство мероморфных решений, а при $n = 3$ таких семейств ровно два.

Эти наблюдения можно обобщить на случай произвольной системы дифференциальных уравнений в $\mathbf{C}^n = \{z\}$ с полиномиальными правыми частями. Подставляя формальные ряды Лорана для переменных z_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ в уравнения и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, найдем, во-первых, ограничения на полюсы разложений z, а во-вторых, получим бесконечную цепочку полиномиальных уравнений на коэффициенты рядов Лорана функций z_j, в каждое из которых будет входить лишь конечное число неизвестных коэффициентов. Все эти соотношения в совокупности выделят в бесконечномерном пространстве коэффициентов формальных рядов Лорана некоторое алгебраическое множество. Ввиду автономности рассматриваемой системы уравнений, его размерность не превосходит $n - 1$. *Числом Ковалевской* k полиномиальной системы дифференциальных уравнений назовем количество связных компонент этого алгебраического множества, каждое из которых имеет размерность $n - 1$. Числа Ковалевской — простейшие топологические инварианты аналитических систем дифференциальных уравнений. Можно рассматривать и более тонкие инварианты построенного выше алгебраического множества. Отметим, что некоторые его связные компоненты могут иметь коразмерность $\geqslant 2$. Если $k = 0$, то общее решение исходной системы уравнений, очевидно, не может быть мероморфным. На этом простом замечании основан метод Ковалевской, впервые примененный к уравнениям вращения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Оказалось, что в этой задаче $k \neq 0$ лишь в интегрируемых случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской [1]. Метод Ковалевской с успехом используется для отыскания новых интегрируемых задач классической механики и математической физики (см., например, [2—5]).

2. Обобщенные цепочки Тоды. Применим эти общие соображения к гамильтоновым системам с гамильтонианами:

$$H=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} y_k^2+\sum_{l=1}^{N} v_l \exp\,(a_l, x). \tag{3}$$

Здесь $v_l \in \mathbf{R}$, $a_1, \ldots, a_N$ — векторы из $\mathbf{R}^n$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — канонические координаты, сопряженные с $y=(y_1, \ldots, y_n)$, $(\ ,\ )$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$. Системы такого вида часто встречаются в приложениях (см. [6, 7]).

Систему с гамильтонианом (3) назовем *обобщенной цепочкой Тоды*, если выполнены следующие условия:

i) *векторы* $a_1, \ldots, a_{n+1}$ *таковы, что любая их подсистема из* n *векторов линейно независима и* $\sum_1^{n+1} p_s a_s = 0$, *где все* $p_s > 0$;

ii) *векторы* $a_1, \ldots, a_N$ *группируются в семейства* F_s $(s = 1, \ldots$ $\ldots, n+1)$ *такие, что каждый вектор* a_j *из* F_s *имеет одинаковое направление с* a_s *и* $|a_j| \leqslant |a_s|$;

iii) $v_s \neq 0$ *для всех* $s = 1, \ldots, n+1$.

Сюда относятся обычные замкнутые цепочки Тоды и их интегрируемые обобщения, найденные в работах [8, 3, 4].

Отметим, что во всех проинтегрированных случаях импульсы $y_1, \ldots, y_n$ и экспоненты $\exp\,(a_1, x), \ldots, \exp\,(a_N, x)$ оказываются мероморфными функциями комплексифицированного времени t. В связи с этим замечанием возникает интересная задача об условиях существования у гамильтоновой системы

$$\dot{x} = H_y', \quad \dot{y} = -H_x'$$

с функцией Гамильтона (3) k различных семейств формально мероморфных решений вида

$$\begin{gathered} y=\sum_{s=-M}^{\infty} b_s t^s, \exp\,(a_l, x)=\sum_{s=-M_l}^{\infty} A_s^l t^s, \\ b_s \in \mathbf{C}^n, A_s^l \in \mathbf{C}, b_{-M} \neq 0, M > 0, \end{gathered} \tag{4}$$

коэффициенты которых зависят от $2n-1$ «свободных» параметров. Такая задача рассматривалась ранее в работе [2] для некоторых типов цепочек на плоскости ($n = 2$ и $k = 1$), а также в работе [4] для произвольного n и $k = n$ в предположении, что каждое из множеств F_s состоит из единственного вектора a_s. Оказалось, что если уравнения Гамильтона имеют достаточное количество различных семейств мероморфных решений, то они допускают n независимых и полиномиальных по импульсам интегралов и поэтому являются интегрируемыми по Лиувиллю. Обратное утверждение не имеет места. Действительно, при $n = 1$ каждая система интегрируема по Лиувиллю, однако, как будет показано в п. 3, предположение $k \geqslant 1$ налагает довольно жесткие ограничения на структуру множества векторов $a_1, \ldots, a_N$.

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. *Неравенство* $k \geqslant k_0$ *имеет место тогда и только тогда, когда существует множество* $I \subset \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $\operatorname{card} I = k_0$, *такое, что*:

(1) *для любого индекса* $s \in I$ *множество* $F_s \setminus \{a_s\}$ *либо пусто, либо содержит единственный вектор* $a_s/2$;

(2) *для любых* $S \in I$ *и* $1 \leqslant r \leqslant N$, $a_r \notin F_s$ *выполняются соотношения*

$$\frac{2(a_s, a_r)}{(a_s, a_s)} \in -\mathbf{Z}_+, \text{ где } \mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}. \tag{5}$$

Следствие. $k \leqslant n+1$.

Рассмотрим более подробно обобщенные цепочки Тоды с максимально возможным числом Ковалевской ($k = n+1$). В этом случае условия (1) и (2) теоремы 1 принимают следующий вид:

(1) *для любого* $1 \leqslant s \leqslant n+1$ *множество* $F_s \setminus \{a_s\}$ *либо пусто, либо состоит из одного вектора* $a_s/2$;

(2) *для любых двух линейно независимых векторов* a_s *и* a_r, $1 \leqslant s \leqslant n+1$, *выполняется соотношение* (5).

Эти два свойства позволяют классифицировать обобщенные цепочки Тоды с $k = n+1$. Цепочку назовем *полной*, если к гамильтониану (3) нельзя добавить экспоненциальное слагаемое $u \exp(b, x)$, $u \neq 0$, $b \neq a_j$ $(1 \leqslant j \leqslant N)$, не нарушая условий i) — iii) из п. 2, а также условий (1), (2) теоремы 1. Ясно, что любая обобщенная цепочка, для которой $k = n+1$, получается из некоторой полной цепочки, если отбросить часть векторов вида $a_s/2$, $1 \leqslant s \leqslant n+1$.

Пусть $n = 1$. Тогда, согласно теореме 1, набор векторов $\{a_j\}$ полной одномерной цепочки Тоды с максимальным числом Ковалевской $k = 2$ совпадает с одним из трех множеств

$$1)\ -2\mu,\ -\mu,\ \mu,\ 2\mu;\quad 2)\ -\mu,\ \mu,\ 2\mu;\quad 3)\ -2\mu,\ -\mu,\ \mu,$$

где μ — некоторое положительное число. Случаи 2) и 3) можно не различать, так как после канонической замены $x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$ соответствующие гамильтонианы переходят друг в друга.

ТЕОРЕМА 2. *Рассмотрим полную цепочку Тоды с числом Ковалевской* $k = n+1$. *Если* $n \geqslant 2$, *то схема Дынкина системы векторов* $a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbf{R}^n$ *изоморфна одной из схем на* с. 21.

Доказательство. Система $n+1$ векторов $a_1, \ldots, a_{n+1}$ удовлетворяет двум свойствам:

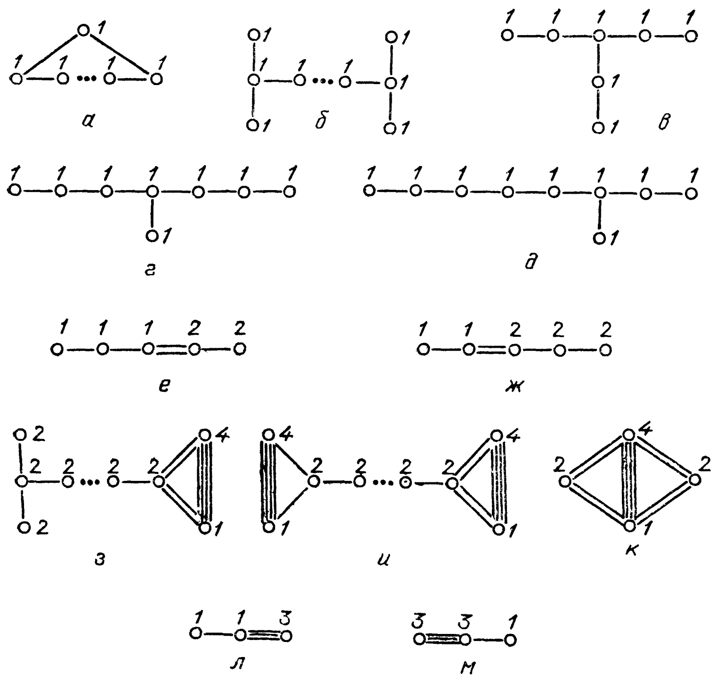
(a) *каждая собственная подсистема линейно независима*,

(b) *для любой пары векторов* $a_s \neq a_r$ *выполняется соотношение* (5).

Все такие системы расклассифицированы [9]. Гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}\sum_1^n y_s^2 + \sum_1^{n+1} v_s \exp(a_s, x)$$

отвечает «неполной» цепочке с максимальным числом Ковалевской. «Полные» диаграммы Дынкина а)—м) получены из диаграмм работы [9] с учетом возможности добавления векторов вида $a_s/2$.



В случаях а)—ж), а также и), л), м) уравнения Гамильтона допускают полный набор (в количестве n) полиномиальных интегралов в инволюции (см. [8, 4, 10]). Цепочки з) и к) являются новыми. Графу к) отвечает гамильтонова система с двумя степенями свободы и функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3 + v_4e_4,$$
$$e_1 = \exp x_1, e_2 = \exp x_2, e_3 = \exp(-x_1 - x_2),$$
$$e_4 = \exp\left(-\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

При всех значениях коэффициентов $v_1, \ldots, v_4$ она имеет дополнительный интеграл четвертой степени по импульсам:

$$y_1^2y_2^2 + 2v_2y_1^2e_2 + 2v_3y_1y_2e_3 + 2v_4y_1y_2e_4 + 2v_1y_2^2e_1 +$$
$$+ v_2v_3e_2e_3 + 2v_1v_3e_1e_3 + 4v_1v_2e_1e_2 + v_3^2e_3^2 + 2v_3v_4e_3e_4 + v_4^2e_4^2.$$

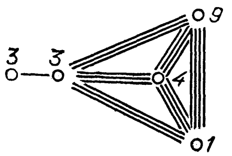
Если $v_3 = 0$ или $v_4 = 0$, то получаем неполные цепочки, интегрируемость которых установлена в работах [8, 4].

В случае з) уравнения Гамильтона также, по-видимому, интегрируемы по Лиувиллю. Полная интегрируемость соответствующих неполных цепочек Тоды доказана в [8, 4].

В работе [11] рассмотрена задача о наличии у гамильтоновой системы (3) полного набора (в количестве n) независимых интегралов в виде полиномов по импульсам $y_1, \ldots, y_n$, коэффициенты которых являются рядами вещественных экспонент

$$\sum_\lambda c_\lambda \exp(b_\lambda, x), \qquad c_\lambda \in \mathbf{R}, b_\lambda \in \mathbf{R}^n.$$

Такой вид имеют первые интегралы во всех проинтегрированных цепочках Тоды. В [11] дана полная классификация цепочек Тоды, которые могут иметь полный набор полиномиальных интегралов. При этом не предполагалось, что система (3) удовлетворяет условиям i) — iii) из п. 2. Оказалось, что список связных диаграмм Дынкина систем с полиномиальными интегралами практически совпадает со списком диаграмм из теоремы 2: при $n \geqslant 2$ к диаграммам а)—к) надо добавить диаграмму



Эта диаграмма является «пополнением» диаграмм л) и м). По всей видимости, гамильтонова система с диаграммой (6) имеет дополнительный полиномиальный интеграл лишь в частных случаях л) и м). Методом работы [11] это установить не удалось. Однако можно показать, что в общем случае система с диаграммой (6) не имеет полиномиального интеграла степени $\leqslant 6$.

Если каждое из семейств векторов F_s (см. п. 2) состоит из единственного вектора a_s, то гамильтонова система (3) имеет полный набор независимых полиномиальных интегралов тогда и только тогда, когда ее число Ковалевской равно $n+1$. Этот результат отмечен впервые в работе [12].

4. Доказательство теоремы 1. Проверим сначала необходимость условий теоремы. Пусть $y(t)$, $x(t)$ — решение вида (4). Запишем уравнения Гамильтона в явном виде:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sum_{l=1}^{N} v_l a_l \exp(a_l, x). \tag{7}$$

Из первого уравнения (7) находим

$$x = b_{-M} t^{1-M}/(1-M) + \ldots + b_{-1} \ln t + b' + b_0 t + \ldots,$$

где b' — постоянная интегрирования.

Так как функции $\exp(a_l, x)$ должны быть формально мероморфными, то $b_j = 0$ при всех $j < -1$. Коэффициент b_{-1} отличен от нуля (иначе решение будет формально голоморфным). В силу равенства

$$\exp(a_l, x) = t^{(a_l, b_{-1})} \exp(a_l, b' + b_0 t + \ldots)$$

все величины (a_l, b_{-1}), $l = 1, \ldots, N$, являются целыми числами. Второе уравнение (7) принимает вид

$$-b_{-1} t^{-2} + b_1 + 2b_2 t + \ldots =$$
$$= -\sum_{l=1}^{N} a_l v_l t^{(a_l, b_{-1})} \exp(a_l, b' + b_0 t + \ldots). \tag{8}$$

ЛЕММА 1. *Пусть* $m = \min\limits_l (a_l, b_{-1})$. *Тогда*:

1) *если* $(a_j, b_{-1}) = m$, *то* $j \leqslant n+1$;

2) $(a_s, b_{-1}) > 0$ *при некотором* $s \leqslant n+1$;

3) $m = -2$.

Доказательство. 1) Если $(a_j, b_{-1}) = m$ при $j > n + 1$, то в силу условия ii) существует вектор a_s, $s \leqslant n+1$, такой, что $a_s = ua_j$, $u > 1$, следовательно, $(a_s, b_{-1}) < m$.

2) Пусть для всех $1 \leqslant l \leqslant n+1$ имеем $(a_l, b_{-1}) < 0$. Умножим равенство $\sum_1^{n+1} p_j a_j = 0$ скалярно на b_{-1}. Получаем $\sum_1^{n+1} p_j (a_j, b_{-1}) = 0$, что противоречит положительности величин p_j.

3) Так как $b_{-1} \neq 0$, то в силу равенства (8) величина m не больше -2. Пусть векторы $a_{j_1}, \ldots, a_{j_\mu}$ таковы, что $(a_{j_s}, b_{-1}) = m$, $s = 1, \ldots, \mu$; $(a_l, b_{-1}) > m$, $l \notin \{j_1, \ldots, j_\mu\}$. В силу 1), 2) имеем $j_s \leqslant n+1$, $\mu < n+1$. Таким образом, можно считать, что $j_s = s$, $s = 1, \ldots, \mu$. Пусть $m < -2$. Тогда из уравнения (8) получаем

$$\sum_{j=1}^{\mu} a_j v_j \exp(b', a_j) = 0.$$

Но в силу свойства i) это равенство может выполняться лишь в случае $\mu = n+1$, следовательно, $m \geqslant -2$. Итак, $m = -2$ и лемма 1 доказана полностью.

Пусть $a_1, \ldots, a_\mu$, $\mu < n+1$, — векторы такие, что $(a_1, b_{-1}) = \ldots = (a_\mu, b_{-1}) = -2$; $(a_l, b_{-1}) > -2$, $l > \mu$. Пусть множество $W = \{c_1, \ldots, c_\nu\} \subset \{a_1, \ldots, a_N\}$ таково, что $(c_1, b_{-1}) = \ldots = (c_\nu, b_{-1}) = -1$ и для всех $a_j \notin W$ имеем $(a_j, b_{-1}) \neq -1$.

ЛЕММА 2. $\nu \leqslant \mu$ *и* $c_j = a_{l(j)}/2$, $j = 1, \ldots, \nu$; $l(j) \leqslant \mu$.

Доказательство. В силу (8) выполняется равенство

$$0 = \sum_{j=1}^{\mu} a_j v_j \exp(b', a_j)\cdot(a_j, b_0) + \sum_{j=1}^{\nu} c_j v_j' \exp(b', c_j),$$

где v_j' — коэффициенты при $\exp(c_j, x)$ в (3). Так как любой вектор c_s параллелен какому-нибудь вектору a_l, $l \in \{1, \ldots, n+1\}$, то последнее равенство имеет вид $\sum_{s=1}^{n+1} a_s w_s = 0$, где w_s — некоторые коэффициенты. Все векторы из множества $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ в этой сумме не могут присутствовать с ненулевыми коэффициентами (в силу п. 2, леммы 1 хотя бы для одного из этих векторов его скалярное произведение с b_{-1} положительно), следовательно, все величины w_s равны нулю. Это может быть лишь в случае $\nu \leqslant \mu$,

$$\begin{aligned} &c_j = a_{l(j)}/2, \quad j = 1, \ldots, \nu; \ l(j) \leqslant \mu, \\ &v_j' = -2v_{l(j)} \exp[(b', a_{l(j)})/2]\cdot(a_{l(j)}, b_0), \end{aligned} \qquad (9)$$

$(a_s, b_0) = 0$, если $s \leqslant \mu$ и $s \neq l(q)$, $q \in \{1, \ldots, \nu\}$.

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. $\mu = 1$.

Доказательство. Покажем, что в случае $\mu > 1$ не удастся «набрать» $2n - 1$ произвольных постоянных в решении уравнений (7).

В самом деле, вектор b_{-1} фиксирован; в силу равенства

$$b_{-1} = \sum_{j=1}^{\mu} a_j v_j \exp(b', a_j) \tag{10}$$

(см. (8)) на вектор b' наложено μ условий, значит b' содержит не более $n - \mu$ свободных параметров. Равенства (9) дают μ условий на компоненты вектора b_0. Таким образом b_0 также содержит не более $n - \mu$ свободных параметров.

Приравнивая коэффициенты при t^j, $j = 1, 2, \ldots$, в уравнении (8), получаем соотношения вида

$$b_j + Gb_j/[j(j+1)] = Q_j, \tag{11}$$

где линейный оператор G имеет вид

$$Gb = \sum_{s=1}^{\mu} a_s v_s \cdot (a_s, b) \cdot \exp(b', a_s), \tag{12}$$

а функции Q_j не зависят от b_s, $s \geqslant j$.

Оператор G переводит пространство, ортогональное к линейной оболочке векторов $a_1, \ldots, a_\mu$ в нуль. Следовательно, уравнение $\det(E - \lambda G) = 0$ имеет не более μ действительных корней. Таким образом, из уравнений (11) можно извлечь не более μ свободных параметров. (Подчеркнем, что мы пока не интересуемся разрешимостью этих уравнений.)

Итак, свободных параметров набирается не более $n - \mu + n - \mu + \mu = 2n - \mu$, значит $\mu \leqslant 1$. Из равенства (10) следует, что $\mu \geqslant 1$. Лемма доказана.

Мы показали, что для существования $(2n - 1)$-параметрического формально мероморфного решения уравнений (7) необходимо выполнение условий:

(a) $(b_{-1}, a_s) = -2$ для некоторого $s \in \{1, \ldots, n+1\}$,

(b) $(b_{-1}, v_l) \in \mathbf{Z}_+$ для всех $a_l \notin F_s$,

(c) семейство F_s кроме a_s может содержать лишь один вектор $a_s/2$.

Из равенства (10) и условия (a) находим

$$(a_s, a_s) \cdot v_s \exp(b', a_j) = -2, \tag{13}$$

$$b_{-1} = -2a_s/(a_s, a_s). \tag{14}$$

Таким образом, условие (b) представляется в виде

$$\frac{2(a_s, a_l)}{(a_s, a_s)} \in -\mathbf{Z}_+ \quad \text{при} \quad a_l \notin F_s.$$

Итак, каждому $(2n - 1)$-параметрическому формально мероморфному решению уравнений (7) отвечает индекс s, удовлетворяющий условиям (1) и (2) теоремы 1. Необходимость условий (1) и (2) тем самым доказана.

Теперь проверим достаточность этих условий. Для этого сопоставим каждому индексу $s \in I$ $(2n - 1)$-параметрическое формально мероморфное решение. Пусть b_{-1} удовлетворяет равенству (14), величины b', b_0 стеснены соотношениями (9), (10), в которых положено $j = l(j) = \mu = 1$. Необходимо доказать разрешимость уравнений (11) и возможность извлечь из них один свободный параметр.

Пусть $s = 1$. Будем считать, что $a_1/2 \in \{a_1, \ldots, a_N\}$ (в противном случае коэффициент v'_1 перед $\exp(a_1/2, x)$ в (3) положим равным нулю). Из соотношений (13), (12) получаем

$$Gb = -2a_1(a_1, b)/(a_1, a_1).$$

Ранг оператора G равен единице, причем его ненулевое собственное значение равно -2: $Ga_1 = -2a_1$. Таким образом, операторы $E + G/[j(j+1)]$ невырождены при $j = 2, 3, \ldots$ и уравнения (11) имеют единственное решение при $j \neq 1$.

Запишем уравнение (11) при $j = 1$ более подробно:

$$b_1 - a_1(a_1, b_1)/(a_1, a_1) = -a_1 v_1 \exp(b', a_1)\cdot(a_1, b_0)^2/2 -$$
$$- \frac{a_1}{2} v'_1 \exp(b', a_1/2)\cdot\left(\frac{a_1}{2}, b_0\right) - \sum f_l v''_l \exp(f_l, b_{-1}), \qquad (15)$$

где f_l — векторы из семейства $\{a_1, \ldots, a_N\}$ такие, что $(f_l, a_1) = 0$, а v''_l — соответствующие коэффициенты в гамильтониане (3). В силу равенства (9) первые два слагаемых правой части уравнения (15) взаимно уничтожаются. Следовательно, решением уравнения (15) является вектор

$$b_1 = -\sum f_l v''_l \exp(f_l, b_{-1}) + \xi\cdot a_1,$$

где ξ — нужный нам свободный параметр.

Теорема 1 доказана.

Д о б а в л е н и е. **Однозначные решения и полиномиальные интегралы.** Оказывается, можно указать простые необходимые условия однозначности общего решения систем с экспоненциальным взаимодействием (частным случаем которых являются обобщенные цепочки Тоды из п. 1) и связать их с наличием дополнительных полиномиальных интегралов. Итак, рассмотрим гамильтонову систему с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\sum_1^n y_i^2 + \sum_1^N c_i \exp(a_i x), \qquad c_i \neq 0.$$

Вводя избыточные координаты

$$v_j = \exp(a_j, x), \; u_j = (a_j, y), \; 1 \leqslant j \leqslant N,$$

запишем дифференциальные уравнения Гамильтона

$$\dot{x}_i = \partial H/\partial y_i, \; \dot{y}_i = -\partial H/\partial x_i, \; 1 \leqslant i \leqslant n,$$

в виде системы с полиномиальными правыми частями:

$$\dot{u}_i = \sum_1^N M_{ij} v_j, \quad \dot{v}_i = v_i u_i, \quad M_{ij} = -c_j(a_i, a_j); \quad 1 \leqslant i, j \leqslant N. \qquad (1)$$

Эти уравнения кроме интеграла энергии имеют ряд тривиальных интегралов. Действительно, пусть $\sum_1^N \alpha_k a_k = 0$, $\alpha_k \in \mathbf{R}$. Тогда функции

$$F = \sum_1^N \alpha_k u_k, \quad \Phi = \prod_1^N v_k^{\alpha_k} \tag{2}$$

являются, очевидно, интегралами (1). Для действительных движений $F = 0$, $\Phi = 1$. Уравнения вида (1) использовались ранее в работе [4].

Исследуем вопрос об условиях однозначности решений системы (1) в плоскости комплексного времени. Для этой цели воспользуемся методом Ляпунова, основанным на рассмотрении уравнений в вариациях [13]. Уравнения (1) имеют частные мероморфные решения:

$$\begin{gathered} u_i = U_i/t, \quad v_i = V_i/t^2, \quad 1 \leqslant i \leqslant N; \\ U_i = -2M_{ik}/M_{kk}; \quad V_i = 0, i \neq k, \quad V_k = 2/M_{kk}. \end{gathered} \tag{3}$$

Запишем уравнения в вариациях для системы (1) в окрестности решений (3):

$$(\delta u_i)^{\cdot} = \sum_1^N M_{ij}\delta v_j, \quad (\delta v_i)^{\cdot} = U_i \delta v_i/t + V_i \delta u_i/t^2.$$

Их решения ищем в следующем виде:

$$\delta u_i = \xi_i t^{\rho-1}, \quad \delta v_i = \eta_i t^{\rho-2}.$$

Для отыскания ξ_i, η_i получаем линейную однородную систему уравнений со спектральным параметром ρ:

$$(\rho - 2)\eta_i = \eta_i U_i + \xi_i V_i, \quad (\rho - 1)\xi_i = \sum_j M_{ij}\eta_j, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant N.$$

С учетом формул (3) можно найти все корни соответствующего характеристического уравнения: $\rho = 1$ (кратности $N - 1$), $\rho = -1$, $\rho = 2$, а также $\rho = 2 - 2(a_i, a_k)/(a_k, a_k)$, $i \neq k$.

Если общее решение системы (1) однозначно при комплексных значениях t, то все корни ρ должны быть целыми числами. Отсюда следует, что для всех значений i, j

$$\frac{2(a_i, a_j)}{(a_j, a_j)} \in \mathbf{Z}. \tag{4}$$

Если векторы $a_1, \ldots, a_N$ составляют корневую систему, то условие (4) заведомо выполнено. Не исключено, что в этом случае общее решение (1), действительно, представляется однозначными (но не обязательно мероморфными) функциями t (ср. с теоремой 1 п. 3).

Обсудим еще задачу о наличии у системы (1) дополнительных первых интегралов, являющихся полиномами по переменным u, v. Нетрудно показать, что каждый такой интеграл является конечной суммой квазиоднородных полиномиальных интегралов, степени квазиоднородности которых по переменным u, v равны соответственно 1 и 2. Итак, пусть $F(u, v)$ — квазиоднородный интеграл системы (1) степени m. Используя результаты работы [14], можно показать, что если точка $u_i = U_i$, $v_i = V_i$, где U_i, V_i определяются из (3), не является критической точкой функции F, то число m совпадает с одним из указанных выше характеристических корней ρ. Следует отметить, что не все интегралы удовлетворяют этому условию. Исключение составляют тривиальные интегралы Φ из серии (2). Если имеются k квазиоднородных интегралов одной и той же степени m, независимых в точке $(u, v) = (U, V)$, то корень $\rho = m$ имеет кратность не меньше k (ср. с [14]).

Предположим, что имеется «хороший» квазиоднородный интеграл степени $m \geqslant 2$, независимый с интегралом энергии в точках вида $u_i = -2M_{ik}/M_{kk}$; $v_i = 0$, $i \neq k$; $v_k = 2/M_{kk}$. Тогда для каждого значения $i = 1, \ldots, N$ найдется $j \neq i$ такое, что

$$\frac{2(a_i, a_j)}{(a_j, a_j)} \in \mathbf{Z}_+, \tag{5}$$

причем все эти числа равны между собой. Пока неясно, является ли данное условие достаточным для существования «хорошего» квазиоднородного интеграла. Все интегралы степени $m = 1$ имеют вид (2).

Условия существования k дополнительных «хороших» полиномиальных интегралов степени $m \geqslant 2$ интересно сравнить с условиями существования k «полномерных» семейств мероморфных решений. Такое сравнение проще всего осуществить для обобщенных цепочек Тоды, у которых $N = n + 1$. С этой целью рассмотрим матрицу L размером $(n+1) \times (n+1)$ с элементами

$$L_{ij} = 2(a_i, a_j)/(a_j, a_j), \quad i \neq j, \quad L_{ii} = 0.$$

Если имеется k дополнительных к интегралу энергии независимых квазиоднородных интегралов степени $m \geqslant 2$, то в каждой строке матрицы L имеется по меньшей мере k целых неположительных чисел. Если же число Ковалевской такой системы не меньше k, то, согласно теореме 1, в матрице L имеются по крайней мере k строк, все элементы которых являются целыми неположительными числами. Эти условия совпадают лишь при $k = n + 1$.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
05.04.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ковалевская С. В. Научные работы. М.: Изд-во АН СССР, 1948.
[2] Bountis T., Segur H., Vivaldi F. Integrable Hamiltonian systems and the Painlevé property // Phys. Rev. A. General Physics. 1982. V. 25, № 3. P. 1257—1264.

[3] Chang Y. F., Greene J. M., Tabor M., Weiss J. The analytic structure of dynamical systems and self-similar natural boundaries // Physica D. 1983. V. 8, № 1. P. 183—207.
[4] Adler M., Moerbeke P. van. Kowalewski's asymptotic method, Kac-moody Lie algebras and regularization // Commun. Math. Phys. 1982. V. 83, № 1. P. 83—106.
[5] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
[6] Тода М. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984.
[7] Богоявленский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астродинамике и газовой динамике. М.: Наука, 1980.
[8] Bogoyavlenski O. I. On perturbations of the periodic Toda lattices // Commun. Math. Phys. 1976. V. 51. P. 201—209.
[9] Helgason S. Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces. New York: Academic Press, 1978.
[10] Sklyanin E. K. Boundary conditions for integrable quantum systems/ LOMI. Prepr. Leningrad, 1986.
[11] Козлов В. В., Трещёв Д. В. Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1989. Т. 53, № 3. С. 537—556.
[12] Козлов В. В. К теории возмущений гамильтоновых систем с некомпактными инвариантными поверхностями // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1988. № 2. С. 55—61.
[13] Ляпунов А. М. Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР. 1954. Т. I. С. 402—417.
[14] Yoshida H. Necessary condition for the existence of algebraic first integrals. I, II // Cel. Mech. 1983. V. 31, № 4. P. 363—379; P. 381—399.