

В. В. Козлов, Д. В. Трещев

БИЛЛИАРДЫ

ГЕНЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ
В ДИНАМИКУ СИСТЕМ
С УДАРАМИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1991

Козлов В. В., Трещев Д. В. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. — М.: Изд-во МГУ, 1991. — 168 с.

ISBN 5—211—01566—5.

В книге в доступной форме излагаются основные идеи и методы динамики систем с односторонними связями. Явление удара о связь рассматривается с точки зрения общего лагранжева формализма. С позиций конструктивного подхода проводится обоснование различных моделей ударного взаимодействия. Исследуются вопросы существования и устойчивости периодических траекторий в системах с ударами. В консервативном случае широко используются вариационные принципы и методы. Особое место занимает исследование с качественной точки зрения различных билиардных задач. В частности, обсуждается широкий набор интегрируемых билиардов (в том числе и многомерных), а также приводятся результаты о неинтегрируемости типичного билиарда. Книга содержит исторический очерк развития основных идей теории удара.

Для специалистов в области аналитической механики и теории динамических систем; может быть полезна студентам механико-математических специальностей.

Рецензенты: профессор А. П. Маркеев,
канд. физ.-мат. наук С. В. Болотин

*Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета
Московского университета*

1603030000—056
К $\frac{\quad}{077(02)—91}$ 80—91

ISBN 5—211—01566—5

© Козлов В. В., Трещев Д. В.,
1991 г.

<i>Предисловие</i>	4
<i>Введение. Элементы теории удара</i>	6
<i>Задачи</i>	31
Глава 1. Генетический метод в динамике систем с односторонними связями	34
§ 1. Односторонние и двусторонние связи	34
§ 2. Неупругий удар и среда Кельвина — Фойгта	39
§ 3. Теорема о предельном переходе	42
§ 4. Усреднение в системах с ударами	49
§ 5. Некоторые обобщения	53
<i>Задачи</i>	54
Глава 2. Периодические траектории бильярда Биркгофа	57
§ 1. Теорема Биркгофа	57
§ 2. Доказательство теоремы Биркгофа	59
§ 3. Некоторые обобщения	65
§ 4. Матрицы Гессе и Пуанкаре	66
§ 5. Мультипликаторы и гессиан	71
§ 6. Условия устойчивости периодических траекторий	74
<i>Задачи</i>	81
Глава 3. Уравнение Хилла	83
§ 1. Уравнения в вариациях	83
§ 2. Константа Ляпунова	89
§ 3. Условия устойчивости	92
§ 4. Метод Хилла	95
<i>Задачи</i>	98
Глава 4. Интегрируемые задачи	99
§ 1. Эллиптический бильярд	99
§ 2. Интегрируемые бильярды на эллипсоидах	104
§ 3. Параболический бильярд	109
§ 4. Гармонический осциллятор и эллиптический бильярд	111
§ 5. Бильярды в камерах Вейля	113
<i>Задачи</i>	118
Глава 5. Неинтегрируемые бильярды	120
§ 1. Неинтегрируемость типичного бильярда Биркгофа	120
§ 2. Полиномиальные интегралы и топология бильярдов	133
§ 3. Интегрируемые бильярды на поверхностях постоянной кривизны	137
§ 4. Эргодические свойства бильярдов	145
<i>Задачи</i>	148
<i>Добавление 1. Системы с упругими отражениями и КАМ-теория</i>	149
<i>Добавление 2. О связи динамических и геометрических свойств периодических траекторий</i>	156
<i>Литература</i>	164
<i>Предметный указатель</i>	167

В связи с бильярдной игрой... возникают различные динамические задачи, решение которых содержится в этом произведении. Я думаю, что люди, знающие теоретическую механику, вроде учеников Политехнической школы, с интересом познакомятся с объяснениями всех оригинальных явлений, которые можно наблюдать во время движения бильярдных шаров.

Г. Кориолис. Математическая теория явлений бильярдной игры

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена математическим аспектам теории динамических систем бильярдного типа. Начиная с работ Дж. Биркгофа, бильярды являются популярной темой исследования, где естественным образом переплетаются различные сюжеты из эргодической теории, теории Морса, КАМ-теории и т. д. С другой стороны, бильярдные системы замечательны еще и тем, что естественно возникают в ряде важных задач механики и физики (виброударные системы, дифракция коротких волн и др.).

Как указывает подзаголовок этой книги, основным методом изложения избран генетический подход. Авторы стремятся объяснить генезис основных идей и понятий теории динамических систем с ударными взаимодействиями, а также продемонстрировать их естественность и эффективность. Ключевым моментом являются найденные недавно теоремы о предельном переходе, обосновывающие различные математические модели теории удара. Их суть заключается в следующем. Односторонняя связь, наложенная на систему, заменяется полем упругих и диссипативных сил. Затем коэффициенты упругости и вязкости некоторым согласованным способом устремляются к бесконечности. Доказывается, что движение такой «свободной» системы с фиксированными начальными данными стремится на каждом конечном промежутке времени к движению с ударами. При отсутствии диссипации энергии получаем упругий удар, а при надлежащем выборе диссипативной функции Рэлея (задающей структуру сил трения) можно получить в пределе модель Ньютона и более общий удар с вязким трением. Идея реализации связей с помощью предельного перехода в полных уравнениях динамики восходит к работам Клейна, Прандтля, Каратеодори и Куранта. Эти результаты позволяют, в частности, решить ряд новых задач об устойчивости периодических движений с ударами, а также исследовать эволюцию бильярдных систем при неупругих столкновениях, когда имеется слабая диссипация энергии.

Особое место в книге занимают вопросы существования и устойчивости периодических траекторий упругих бильярдных систем. Дано вариационное доказательство известной теоремы Биркгофа об

оценке числа различных периодических траекторий выпуклого бильярда. Обсуждаются интересные вопросы, восходящие к Пуанкаре, о связи устойчивости периодической траектории со свойствами соответствующей критической точки функционала действия. Оказывается, например, что индекс Морса невырожденной четно-звенной периодической траектории эллиптического типа всегда нечетный. Результаты такого сорта получаются из одной общей формулы, связывающей характеристические показатели периодического решения с определителем Гессе функции периметра в соответствующей критической точке.

Значительное внимание уделено интегрируемым бильярдам. Кроме известных интегрируемых задач (эллиптический бильярд, бильярды в аффинных камерах Вейля) указаны новые: гармонический осциллятор внутри эллипса, некоторые бильярды на поверхностях постоянной кривизны и ряд других. Обсуждается проблема интегрируемости систем бильярдного типа. Дан краткий обзор работ по бильярдам с эргодическим поведением.

При написании последней главы неоценимую помощь нам оказали беседы с С. В. Болотиным. Мы дружески его благодарим.

1. *Удар* — кратковременное взаимодействие тел. Считается, что удар происходит практически мгновенно, положения соударяющихся тел в момент удара не изменяются, а их скорости получают конечные приращения. Таким образом, центральным пунктом теории удара является нахождение зависимости между скоростями до и после удара. Закон преобразования скоростей при ударном взаимодействии может быть представлен в чисто геометрическом виде, и поэтому в наиболее простых случаях (например, при движении по инерции) при описании движения систем с ударами можно обойтись вполне элементарными средствами. Это обстоятельство привело к тому, что законы удара были установлены до открытия основных принципов динамики.

Первое детальное исследование явления удара было предпринято в 1668 г. по предложению Лондонского королевского общества. Три выдающихся механика и математика Валлис, Рен и Гюйгенс представили свои работы, в которых они независимо друг от друга изложили законы движения соударяющихся тел. Они рассмотрели простейший случай, когда сталкиваются два тела с массами m_1 и m_2 , двигавшиеся по инерции по одной прямой со скоростями v_1 и v_2 . В мемуаре Валлиса обсуждается абсолютно *неупругий* удар, после которого тела m_1 и m_2 слипаются, образуя затем одно целое. Рен и Гюйгенс, наоборот, рассматривали противоположный случай абсолютно *упругого* удара. Валлис и Рен для расчетов движения тел после удара постулировали сохранность полного импульса системы

$$m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

В своем мемуаре Рен упоминает о проведенной им экспериментальной проверке законов соударения. На эти опыты ссылался Ньютон в своих знаменитых «Математических началах натуральной философии», опубликованных в 1687 г.

Мемуар Гюйгенса, несправедливо оставленный Лондонским королевским обществом неопубликованным, производит по сравнению с сочинениями Рена и Валлиса более сильное впечатление. Гюйгенс исходит из принципа относительности Галилея, используя его для фактического вывода закона сохранения суммарного импульса. Тем самым Гюйгенс предвосхитил идеи Софуса Ли и Эммы Нётер о связи законов сохранения с симметриями пространства-времени.

2. Мы воспроизведем идею доказательства теоремы Гюйгенса о сохранности суммарного импульса для абсолютно неупругого удара (сам Гюйгенс рассматривал упругие соударения). В этом

случае после удара «слипшееся» тело суммарной массы $m_1 + m_2$ движется со скоростью

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

Другими словами, центр масс точек m_1 и m_2 до и после удара движется с одной и той же скоростью.

Сначала напомним определение *инерциальной системы отсчета* и формулировку *принципа относительности*. Под системой отсчета S можно понимать платформу, снабженную линейкой и часами. С ее помощью можно определять положение тел m_1 и m_2 и течение времени. Эта платформа сама может перемещаться по прямой, на которой постоянно расположены соударяющиеся тела m_1 и m_2 . Принцип относительности постулирует существование инерциальных систем отсчета, в которых все законы механики (в том числе и законы удара) имеют одинаковый вид. В частности, любое тело, не взаимодействующее с другими телами, движется относительно любой инерциальной системы отсчета равномерно и прямолинейно (*закон инерции* Галилея — Ньютона). Приведенная выше формулировка принципа относительности является очень общей: она справедлива и в релятивистской механике. Специфика ньютоновской механики проявляется в определении связи между различными инерциальными системами отсчета.

Пусть S — одна из инерциальных систем. Предположим, что в этой системе отсчета тело m_1 в момент времени t_1 имеет координату x_1 . Относительно новой системы S' то же тело m_1 имеет координату x'_1 в (уже другой) момент времени t'_1 . Это высказывание следует понимать так: когда в системе S тело m_1 занимает положение, отвечающее координате x_1 , и часы показывают время t_1 , в системе S' тело имеет координату x'_1 и часы системы S' показывают время t'_1 . Пространственно-временные координаты другого тела m_2 в системах отсчета S и S' обозначим соответственно x_2 , t_2 и x'_2 , t'_2 . По определению система S' будет инерциальной, если выполнены следующие условия:

- 1) координаты x , t связаны с координатами x' , t' линейными соотношениями;
- 2) $|t_1 - t_2| = |t'_1 - t'_2|$;
- 3) если $t_1 = t_2$ (или, что то же самое, $t'_1 = t'_2$), то $|x_1 - x_2| = |x'_1 - x'_2|$.

Нетрудно получить явные формулы преобразования координат и времени при переходе от системы S к системе S' . Действительно, согласно 1) имеем формулы:

$$x = kx' + vt' + a, \quad t = lx' + nt' + b, \quad (2)$$

где k , v , a , l , n , b — некоторые постоянные. Так как

$$t_1 = lx'_1 + nt'_1 + b, \quad t_2 = lx'_1 + nt'_2 + b,$$

то

$$|t_1 - t_2| = |l(x'_1 - x'_2) + n(t'_1 - t'_2)|. \quad (3)$$

Положим в этой формуле $t'_1 = t'_2$. Тогда, согласно свойству 2), $t_1 = t_2$. Следовательно, $|l(x'_1 - x'_2)| = 0$. Так как тела m_1 и m_2 могут занимать различные положения, то в общем случае $x'_1 \neq x'_2$ и поэтому $l = 0$. Из свойства 2) и формулы (3) заключаем, что $n = \pm 1$. Используя формулы

$$x_1 = kx'_1 + vt'_1 + a, \quad x_2 = kx'_2 + vt'_2 + a$$

и полагая $t'_1 = t'_2$, приходим к соотношению

$$|x_1 - x_2| = |k(x'_1 - x'_2)|.$$

Согласно 3) $k = \pm 1$. Итак, формулы (2) имеют следующий явный вид:

$$x = \pm x' + vt' + a, \quad t = \pm t' + b. \quad (4)$$

Нетрудно понять, что $|v|$ имеет смысл величины скорости движения системы S' относительно системы S . В частности, если система S' движется относительно инерциальной системы S равномерно и прямолинейно, то она также является инерциальной. Формулы (4) носят название *преобразований Галилея*. В релятивистской механике они заменяются преобразованиями Лоренца — Пуанкаре.

Обратимся теперь к выводу формулы (1). Рассуждения Гюйгенса включают анализ нескольких случаев.

а) Рассмотрим сначала простейшую ситуацию, когда сталкиваются два одинаковых тела с массой m , двигающиеся навстречу друг другу со скоростями v и $-v$. В силу предположения о неупругом характере удара, тела «слипаются», образуя одно тело массой $2m$. По соображениям симметрии это тело после удара будет очевидно, покоиться.

б) Рассмотрим теперь более сложный случай, когда сталкиваются два тела с одинаковой массой m , имеющие до момента удара произвольные скорости v_1 и v_2 . Перейдем к новой инерциальной системе отсчета S' , которая движется относительно исходной системы S с постоянной скоростью $v = (v_1 + v_2)/2$. В системе S' будем иметь случай а): тела одинаковой массы сближаются с равными по величине скоростями $(v_1 - v_2)/2$ и $(v_2 - v_1)/2$. Согласно принципу относительности и заключения п. а) после удара тело массой $2m$ покоится в системе S' . Следовательно, относительно исходной системы S оно движется со скоростью $(v_1 + v_2)/2$. Этот результат устанавливает формулу (1) в частном случае, когда $m_1 = m_2$.

в) Пусть имеются теперь три одинаковых тела, масса каждого из них равна m (рис. 1). В начальный момент все они покоятся, причем тела 1 и 2 соприкасаются. Предположим, что (например, в результате взрыва) тела 1 и 2 разлетаются в разные стороны. Ввиду симметрии их скорости равны по величине. Первое тело будет затем беспрепятственно двигаться влево с некоторой скоростью $-v$, а второе будет двигаться вправо со скоростью v , и через время $\Delta t = s/v$ (s — расстояние между телами 2 и 3) тело 2 столкнется с телом 3. Считая удар абсолютно неупругим, получим, что (согласно результату п. б)) тело «2+3» массой $2m$ будет после удара двигаться вправо со скоростью $v/2$. Если расстояние s очень мало, то столкновение и слипание тел 2 и 3 произойдет практически мгновенно. Поэтому можно считать, что с самого начала тела 2 и 3 образовывали одно целое, и мы приходим к следующему выводу: если в начальный момент два тела массами m и $2m$ соприкасались и затем начали разлетаться в разные стороны, то скорость тела массой $2m$ будет в два раза меньше скорости тела массой m .

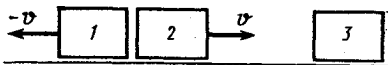


Рис. 1

г) Рассмотрим теперь случай, когда два тела массами m и $2m$ движутся навстречу друг другу со скоростями v и $-v/2$ соответственно. Утверждается, что после абсолютно неупругого удара слипшееся тело массой $3m$ будет покоиться (что как раз соответствует формуле (1)). Этот результат вытекает из результата п. в). Действительно, мы можем вообразить новую систему отсчета S' , в которой часы идут в «другую сторону». Относительно системы S' все тела будут двигаться в противоположном направлении с той же по абсолютной величине скоростью. Так как система S' инерциальная, то нам остается воспользоваться принципом относительности и результатом п. в).

д) Теперь обратимся к случаю, когда тела массами m и $2m$ движутся с произвольными скоростями v_1 и v_2 . Как и в рассуждении п. б), перейдем к новой системе отсчета S' , которая движется относительно S со скоростью $(v_1 + 2v_2)/3$. Именно с этой скоростью движется их общий центр масс. В системе S' центр масс тел m и $2m$ покоится, тело m подлетает к нему со скоростью

$$v'_1 = \frac{v_1 + 2v_2}{3} - v_1 = -\frac{2}{3}(v_1 - v_2),$$

а второе тело $2m$ — со скоростью

$$v'_2 = \frac{v_1 + 2v_2}{3} - v_2 = \frac{1}{3}(v_1 - v_2).$$

Видим, что относительные скорости v'_1 и v'_2 отличаются знаками и $|v'_1| = |2v'_2|$. Следовательно, согласно п. г) после столкно-

вения тело массой $3m$ будет покоиться в системе S' , а относительно исходной системы S оно будет двигаться со скоростью

$$v = \frac{mv_1 + 2mv_2}{3m} = \frac{v_1 + 2v_2}{3}.$$

Таким образом, формула (1) установлена в случае, когда $m_2 = 2m_1$.

Используя метод индукции и рассуждая точно так же, можем обосновать формулу (1) для случая рационального отношения масс m_1 и m_2 . Ее обоснование для иррациональных отношений m_1/m_2 носит уже формальный характер и связано со строгим введением вещественных чисел.

С математической точки зрения рассуждения Гюйгенса, быть может, нельзя признать вполне строгими. Но мы и не стремились к этому. У нас была иная цель: показать, что идеи Гюйгенса с необходимостью приводят к закону сохранения импульса и указывают на глубокую связь этого закона с симметриями пространства-времени. Подчеркнем, что мы исходили лишь из принципа относительности Галилея и не использовали основные принципы динамики Ньютона (например, закон равенства действия и противодействия). Более того, попутно мы пришли к целесообразности введения важнейшей динамической величины — массы тела как меры количества вещества — и установили ее аддитивный характер.

3. При неупругих столкновениях кинетическая энергия системы тел, конечно, не сохраняется. Поэтому естественно ввести разность

$$\Delta T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2},$$

которую обычно называют «потерянной» кинетической энергией. Ее свойства впервые были изучены Лазаром Карно.

Первая теорема Карно. Потерянная кинетическая энергия равна энергии движения точки массой

$$\mu = \frac{1}{1/m_1 + 1/m_2},$$

скорость которой равна разности скоростей точек до удара:

$$\Delta T = \frac{\mu(v_1 - v_2)^2}{2}. \quad (5)$$

Масса μ часто встречается в динамике: она называется *приведенной массой* системы точек m_1 и m_2 . Введем «потерянные» скорости $u_1 = v - v_1$, $u_2 = v - v_2$.

Вторая теорема Карно. Потерянная кинетическая энергия равна кинетической энергии потерянных скоростей:

$$\Delta T = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (6)$$

Соотношения (5) и (6) представляют собой любопытные тождества, связанные с преобразованиями квадратичных форм. Они проверяются прямым вычислением.

Вторая теорема Карно имеет прозрачную геометрическую интерпретацию. Введем линейное пространство V скоростей на плоскости и снабдим его скалярным произведением

$$\langle \xi, \eta \rangle = m_1 \xi_1 \eta_1 + m_2 \xi_2 \eta_2,$$

$$\xi, \eta \in V, \xi = (\xi_1, \xi_2), \eta = (\eta_1, \eta_2).$$

Рассмотрим три вектора

$$v = (v_1, v_2), u = (u_1, u_2), w = (v, v).$$

Ясно, что $v = w - u$. Векторы u и w ортогональны, поскольку

$$\langle u, w \rangle = (m_1 u_1 + m_2 u_2) v = [(m_1 + m_2) v - m_1 v_1 - m_2 v_2] v = 0$$

ввиду равенства (1). Легко сообразить, что тождество (6) можно переписать в виде равенства

$$\langle v, v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle,$$

что представляет собой теорему Пифагора в евклидовом пространстве $(V, \langle, \rangle)$.

Таким образом, Карно фактически оперировал с абстрактным понятием евклидова пространства, общая теория которых была создана лишь в XIX в.

4. Рассмотрим теперь противоположный случай абсолютно упругого удара. По определению здесь кроме суммарного импульса сохраняется еще кинетическая энергия:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 (v_1')^2 + m_2 (v_2')^2,$$

где v_1' и v_2' — скорости точек m_1 и m_2 после удара. Из этого соотношения, а также из закона сохранения импульса легко выводится, что

$$v_1 - v_2 = -(v_1' - v_2'), \quad (7)$$

т. е. относительные скорости тел до и после удара равны по величине и противоположны по направлению.

Скорости точек до и после удара связаны линейными соотношениями

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2, \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

с определителем, равным -1 . В частном случае, когда $m_1 = m_2$, эти формулы приобретают особенно простой вид:

$$v_1' = v_2, \quad v_2' = v_1.$$

Следовательно, в момент абсолютно упругого удара происходит «обмен» скоростями. Этот эффект впервые описан Иоханнесом Марци, профессором медицины Пражского университета, в 1639 г.

5. На практике, однако, чаще встречаются случаи, когда в момент удара тела не слипаются, однако их суммарная энергия не сохраняется. В этой ситуации обычно принимают *гипотезу Ньютона*, заменяя соотношение (7) следующим соотношением:

$$e(v_1 - v_2) = -(v'_1 - v'_2). \quad (8)$$

Здесь e — некоторый безразмерный коэффициент, заключенный в промежутке от 0 до 1 и определяемый обычно из эксперимента. Так, например, Ньютон нашел, что при соударении стекла о стекло $e=15/16$, при соударении мячиков, набитых шерстью, $e=5/9$, при соударении железа о железо e тоже приблизительно равно $5/9$. Число e называется *коэффициентом восстановления*. При $e=0$ будем иметь абсолютно неупругий удар, а при $e=1$ удар будет абсолютно упругим.

Пусть u_1 и u_2 снова обозначают потерянные скорости. Справедлива

Обобщенная теорема Карно:

$$\Delta T = \frac{1-e}{1+e} \left(\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \right). \quad (9)$$

При $e=0$ получаем вторую теорему Карно, а при $e=1$ потери энергии вообще не происходит.

Гипотеза Ньютона о коэффициенте восстановления оказалась весьма плодотворной и была подтверждена многочисленными экспериментами.

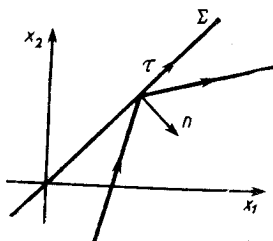


Рис. 2

6. Соударение тел m_1 и m_2 можно описать по-другому. Пусть x_1 и x_2 — координаты m_1 и m_2 , причем $x_1 \geq x_2$ (тело m_1 находится справа от m_2). Положение этих тел изображается точкой в координатной плоскости $R^2 = \{x_1, x_2\}$ (точнее, в полуплоскости $x_1 \geq x_2$) (см. рис. 2). Снабдим плоскость R^2 «внутренней» метрикой

$$2T = m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2. \quad (10)$$

Она уже была использована нами в п. 3.

До и после столкновения траектория точки $x = (x_1, x_2)$ является прямой. Моменту столкновения отвечает некоторое положение точки x на границе $\Sigma = \{x_1 = x_2\}$. Пусть τ — единичный вектор, касательный к Σ в точке $x \in \Sigma$. Нетрудно сосчитать, что этот вектор имеет компоненты

$$\frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}}.$$

Введем еще вектор нормали $\mathbf{n}$ к Σ в метрике (10); он имеет компоненты

$$\frac{m_2}{\sqrt{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}}, \quad -\frac{m_1}{\sqrt{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}}.$$

Вектор скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ (где $v_1 = \dot{x}_1$, $v_2 = \dot{x}_2$) естественно разложить по векторам $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$ как по базису:

$$\mathbf{v} = v_{\boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{\tau} + v_{\mathbf{n}} \mathbf{n}.$$

Ясно, что

$$v_{\boldsymbol{\tau}} = \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau} \rangle = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / \sqrt{m_1 + m_2},$$

$$v_{\mathbf{n}} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = \sqrt{\mu} (v_1 - v_2), \quad (11)$$

где μ — приведенная масса (см. п. 3). Пусть $\mathbf{v}^-$ и $\mathbf{v}^+$ — скорости системы до и после удара. Тогда, используя сохранение импульса и гипотезу Ньютона (8), из (11) получаем следующие соотношения:

$$v_{\boldsymbol{\tau}}^+ = v_{\boldsymbol{\tau}}^-, \quad v_{\mathbf{n}}^+ = -e v_{\mathbf{n}}^-. \quad (12)$$

Кроме этого, мы свели задачу о движении по прямой двух тел m_1 и m_2 к изучению некоторой системы с двумя степенями свободы, на которую наложена *односторонняя связь* (ограничение) $x_1 \geq x_2$. При $e=1$ удар о границу $\Sigma = \{x_1 = x_2\}$ происходит по закону «угол падения равен углу отражения», а при $e=0$ в момент удара налагается *двусторонняя связь* $x_1 = x_2$. Эти наблюдения позволяют распространить постановку задачи об ударе на случай общей системы со многими степенями свободы.

Рассмотрим механическую систему с n степенями свободы, на которую наложена односторонняя связь:

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq 0.$$

Граничная поверхность

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = 0\}$$

предполагается регулярной: $df \neq 0$ в точках, где $f=0$. Пусть

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x}) \dot{x}_i \dot{x}_j$$

— кинетическая энергия системы (матрица $\|g_{ij}\|$ положительно определена при всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$), а $F_1, \dots, F_n$ — обобщенные силы (зависящие в общем случае от скоростей $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$, координат $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и времени t). В области $f(\mathbf{x}) > 0$ движение системы описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = F_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (13)$$

Пусть $t \mapsto x(t)$ — решение этой системы, такое, что $f(x(t)) > 0$ при $t < 0$, $f(x(0)) = 0$ и

$$\dot{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i < 0$$

при $t=0$. Следовательно, в момент времени $t=0$ имеет место явление удара: скорость $x(t)$ терпит разрыв при $t=0$ (так как в противном случае $f(x(t)) < 0$ для малых положительных значений t). Продолжение решения $x(t)$ в область $t > 0$ существенно зависит от принимаемой гипотезы о характере ударного взаимодействия. Приведем инвариантную формулировку математической модели удара, основанной на обобщении гипотезы Ньютона.

Пусть $v^- = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ — скорость точки $x(t)$ в момент удара: $v^- = \lim_{t \rightarrow -0} \dot{x}(t)$. Введем скалярное произведение, задаваемое кинетической энергией в точке $x_0 = x(0)$:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x_0) \xi_i \eta_j.$$

Пусть n — единичный вектор нормали к Σ в точке x_0 (в метрике $\langle, \rangle$). Разложим скорость на касательную и нормальную составляющие:

$$v^- = v_{\tau}^- + v_n^-,$$

где $v_n^- = \langle v^-, n \rangle n$, $v_{\tau}^- = v^- - v_n^-$. Пусть v^+ — скорость точки после удара и

$$v^+ = v_{\tau}^+ + v_n^+.$$

Обобщая соотношение (12), положим

$$v_{\tau}^+ = v_{\tau}^-, \quad v_n^+ = -e v_n^-, \quad (14)$$

где e — постоянный числовой множитель из интервала $[0, 1]$, который снова будем называть коэффициентом восстановления. При $t > 0$ движение описывается системой уравнений Лагранжа и начальными данными:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v^+.$$

Если $e=0$ (удар абсолютно неупругий), то при $t > 0$ движение системы естественно описывать в рамках теории односторонних связей (если, конечно, после удара система не покидает сразу поверхность Σ).

Необходимо иметь в виду, что соотношения (14) являются не более чем гипотезой, естественность применения которой должна быть подтверждена либо теоретическими рассуждениями, либо результатами экспериментов.

7. Рассмотрим более подробно случай абсолютного упругого удара, когда $e=1$. Соотношения (14) означают, что

1) векторы $\mathbf{v}^-$ и $\mathbf{v}^+$ лежат в одной (двумерной) плоскости, ортогональной поверхности Σ ;

2) векторы $\mathbf{v}^+$ и $-\mathbf{v}^-$ образуют равные углы с вектором нормали $\mathbf{n}$.

Предположим, что на систему действуют лишь потенциальные силы с потенциальной энергией V :

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

В этом случае уравнения (13) принимают вид вариационных уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}$$

с функцией Лагранжа (лагранжианом) $L = T - V$. Они допускают интеграл энергии

$$[T + V]_{\mathbf{x}(t)} = \text{const.}$$

Из соотношений (14) при $e=1$ вытекает сохранение полной энергии и в момент удара.

Согласно принципу Гамильтона уравнения системы, траектории которых целиком лежат в области $\dot{f} > 0$, совпадают с экстремалами вариационной задачи

$$\delta I = 0, \quad I = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad \delta \mathbf{x}(t_1) = \delta \mathbf{x}(t_2) = 0.$$

Оказывается, принцип Гамильтона справедлив и для движений с ударами.

Для доказательства рассмотрим некоторое движение

$$\hat{\mathbf{x}} : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

такое, что

(а) $f(\hat{\mathbf{x}}(t)) > 0$ при всех $t \in [t_1, t_2] \setminus \{\hat{t}\}$, где $\hat{t}$ — точка интервала (t_1, t_2) ;

(б) $f(\hat{\mathbf{x}}(\hat{t})) = 0$.

Рассмотрим вариацию кривой $t \mapsto \hat{\mathbf{x}}(t)$. По определению это семейство непрерывных кривых

$$\mathbf{x}_\alpha(t) : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

определенных при всех $\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (ε — некоторое положительное число), удовлетворяющее условиям:

(1) $\mathbf{x}_0(t) \equiv \hat{\mathbf{x}}(t)$ для всех $t_1 \leq t \leq t_2$;

(2) $\mathbf{x}_\alpha(t_1) = \hat{\mathbf{x}}(t_1)$ и $\mathbf{x}_\alpha(t_2) = \hat{\mathbf{x}}(t_2)$ для всех $\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)$;

(3) $f(\mathbf{x}_\alpha(t_\alpha)) = 0$, где t_α — некоторая гладкая функция параметра α , принимающая при $\alpha = 0$ значение $\hat{t}$;

(4) функция двух переменных $x_\alpha(t): [t_1, t_2] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ является гладкой в областях

$\{t, \alpha: -\varepsilon < \alpha < \varepsilon, t_1 \leq t \leq t_\alpha\}$ и $\{t, \alpha: -\varepsilon < \alpha < \varepsilon, t_\alpha \leq t \leq t_2\}$.

В частности, из (4) вытекает, что при каждом α кривая $x_\alpha(t)$ гладко зависит от t при $t \in [t_1, t_\alpha]$ и $t \in [t_\alpha, t_2]$. Для всех значений $\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ определено действие

$$I(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{x}_\alpha(t), x_\alpha(t)) dt.$$

Вычислим его вариацию — производную по α при $\alpha=0$.

Лемма о вариации действия.

$$\begin{aligned} \delta I = \langle v^- - v^+, w \rangle - \left(\frac{\langle v^-, v^- \rangle}{2} - \frac{\langle v^+, v^+ \rangle}{2} \right) s + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)' \right]_{\hat{x}(t)} \delta x dt, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$w = \frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} [x_\alpha(t_\alpha)], \quad s = \frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} t_\alpha, \quad \delta x(t) = \frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} x_\alpha(t).$$

Так как для всех α

$$f(x_\alpha(t_\alpha)) = 0,$$

то

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\hat{x}(\hat{t})}, w \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\hat{x}(\hat{t})} w_i = 0$$

и, следовательно, w — касательный вектор к поверхности Σ в точке $\hat{x}(\hat{t})$.

Из (15) вытекает

Теорема (вариационный принцип Гамильтона). Кривая $\hat{x}(\cdot)$ является движением тогда и только тогда, когда она является стационарной точкой функционала действия.

Необходимость вытекает из формулы (15) и соотношений (14), в которых надо положить $e=1$. Для доказательства достаточности сначала рассмотрим вариации, для которых $\hat{t}_\alpha \equiv \hat{t}$ и $x_\alpha(\hat{t}) \equiv \hat{x}(\hat{t})$ для всех α . Так как в открытых интервалах $(t_1, \hat{t})$ и $(\hat{t}, t_2)$ вариации δx могут быть произвольными, то из (15) вытекает, что в этих интервалах кривая $\hat{x}(\cdot)$ удовлетворяет уравнениям Лагранжа (т. е. является движением). Рассмотрим теперь вариации, для которых $\hat{t}_\alpha \equiv \hat{t}$ для всех α , а в остальном произвольные. Из уравнения $\delta I = 0$ получим тогда, что

$$\langle v^+ - v^-, w \rangle = 0$$

для всех векторов w , касающихся Σ в точке $\hat{x}(\hat{t})$. Следовательно,

$$v_{\tau}^{+} = v_{\tau}^{-}. \quad (16)$$

Рассматривая, наконец, вариации общего вида, из (15) получаем соотношение

$$\langle v^{+}, v^{+} \rangle = \langle v^{-}, v^{-} \rangle,$$

откуда с учетом (16) $v_n^{+} = \pm v_n^{-}$. Так как $f(\hat{x}(t)) \geq 0$, то получаем окончательно, что $v_n^{+} = -v_n^{-}$. Теорема доказана.

Нам осталось доказать лемму о вариации действия. Так как в точке t_{α} функция $x_{\alpha}(t)$ может не иметь производных по t , то естественно сначала вычислить

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \int_{t_1}^{t_{\alpha}} L dt &= \int_{t_1}^{t_{\alpha}} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}_{\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \alpha} \right] dt + L \frac{dt_{\alpha}}{d\alpha} = \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x_{\alpha}) \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \alpha} \Big|_{t_1}^{t_{\alpha}} + L \frac{dt_{\alpha}}{d\alpha} - \int_{t_1}^{t_{\alpha}} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \right]_{x_{\alpha}(t)} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \alpha} dt. \end{aligned}$$

Положим в этой формуле $\alpha=0$. Согласно свойству (2) вариаций

$$\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \alpha}(t_1) = 0.$$

Используя правило дифференцирования сложной функции, вычислим

$$\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \alpha}(t_{\alpha}) = \frac{d}{d\alpha} [x_{\alpha}(t_{\alpha})] - \frac{dx_{\alpha}}{dt} \frac{dt_{\alpha}}{d\alpha},$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x_{\alpha}) \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \alpha}(t_{\alpha}) + L \frac{dt_{\alpha}}{d\alpha} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x_{\alpha}) \frac{d}{d\alpha} [x_{\alpha}(t_{\alpha})] + \\ &+ \left[L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x_{\alpha}) \frac{dx_{\alpha}}{dt} \right] \frac{dt_{\alpha}}{d\alpha}. \end{aligned} \quad (17)$$

Полагая в формуле (17) $\alpha=0$ и используя тождества

$$L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} = -(T + V),$$

получаем

$$\frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \int_{t_1}^{t_{\alpha}} L dt = \langle v^{-}, w \rangle - \left[\frac{\langle v^{-}, v^{-} \rangle}{2} + V(\hat{x}(\hat{t})) \right] s.$$

Аналогично,

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \int_{t_1}^{t_2} L dt = - \langle v^+, w \rangle + \left[\frac{\langle v^+, v^+ \rangle}{2} + V(\hat{x}(\hat{t})) \right] s.$$

Из двух последних формул вытекает (15). Лемма доказана.

8. Следуя известной схеме, выведем из принципа Гамильтона для движений с упругими ударами вариационный принцип Мопертюи. С этой целью зафиксируем значение полной энергии h и рассмотрим движение с заданным запасом энергии. Из интеграла энергии и неравенства $T \geq 0$ вытекает, что траектории расположены в области

$$B_h = \{x: V(x) \leq h\}. \quad (18)$$

Функционал

$$I^* = \int_{t_1}^{t_2} 2 \sqrt{(h - V)T} dt = I - \int_{t_1}^{t_2} (\sqrt{T} - \sqrt{h - V})^2 dt,$$

определенный для кусочно-гладких кривых $x: [t_1, t_2] \rightarrow B$, называется укороченным действием, или действием по Мопертюи. Подынтегральное выражение в I^* является однородной функцией скорости степени 1. Следовательно, величина укороченного действия I^* не зависит от параметризации пути интегрирования.

Предположим (для простоты), что граничная поверхность связи Σ целиком лежит строго внутри области (18). Снова рассмотрим путь $\hat{x}(t): [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$, такой что

- (1) функция $\hat{x}(\cdot)$ гладкая в интервалах $[t_1, \hat{t}]$ и $[\hat{t}, t_2]$, где $t_1 < \hat{t} < t_2$;
- (2) $f(\hat{x}(\hat{t})) > 0$ при всех $t \in [t_1, t_2] \setminus \{\hat{t}\}$;
- (3) $f(\hat{x}(\hat{t})) = 0$;
- (4) $[T + V]_{x(t)} \equiv h$ для всех $t \in [t_1, t_2] \setminus \{\hat{t}\}$.

Теорема (принцип Мопертюи). Кривая $\hat{x}(\cdot)$ является траекторией движения с упругим ударом тогда и только тогда, когда эта кривая является стационарной точкой функционала укороченного действия.

Доказательство. Пусть $\hat{x}(\cdot)$ — движение. Тогда

$$\begin{aligned} \delta I^* = \delta I - 2 \int_{t_1}^{t_2} (\sqrt{T} - \sqrt{h - V}) \delta (\sqrt{T} - \sqrt{h - V}) dt - \\ - [(\sqrt{T} - \sqrt{h - V})_-^2 - (\sqrt{T} - \sqrt{h - V})_+^2] s = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

так как $\delta I = 0$ согласно принципу Гамильтона и $\sqrt{T} = \sqrt{h - V}$ согласно интегралу энергии.

Обратно, пусть $x: [s_1, s_2] \rightarrow B$ — некоторый кусочно-гладкий путь, являющийся стационарной точкой функционала I^* . Положим

$$t = \int_{s_1}^s \sqrt{T} / \sqrt{h - V} d\tau.$$

Тогда, очевидно, путь $x(s(t)): [t_1, t_2] \rightarrow B$ удовлетворяет уравнению $\sqrt{T} = \sqrt{h - V}$. Если $\delta I^* = 0$, то из формулы (19) вытекает, что $\delta I = 0$. Теорема доказана.

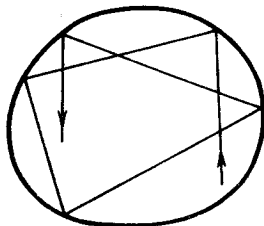


Рис. 3

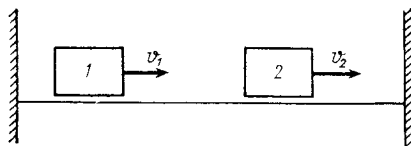


Рис. 4

Полезно отметить, что принципы Гамильтона и Мопертюи справедливы и в том случае, когда в интервале $[t_1, t_2]$ имеется любое конечное число моментов удара.

В качестве примера рассмотрим движение материальной точки по инерции в области на двумерной плоскости, ограниченной замкнутой регулярной кривой. Траектория движения будет ломаной линией, которая в случае упругого удара образует с границей области равные углы (рис. 3). В этой задаче укороченное действие совпадает с обычной длиной, и поэтому, согласно принципу Мопертюи, траектория движения имеет стационарную длину среди всех кусочно-гладких кривых с теми же концами.

Такие системы впервые изучал Дж. Биркгоф [42; 43]; они называются *бильярдами Биркгофа*. Можно рассматривать более общие случаи, когда граница невыпуклая кусочно-гладкая или движение происходит в ограниченной области многомерного пространства.

С этой точки зрения полезно рассмотреть задачу о движении двух тел, заключенных между стенками (см. рис. 4). Тела сталкиваются не только между собой, но и со стенками; все удары считаются упругими. Пусть тела m_1 и m_2 с координатами $x_1 \leq x_2$ заключены внутри отрезка $0 \leq x \leq a$. Тогда их положение однозначно определяется точкой из треугольника (см. рис. 5)

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq a.$$

Этот треугольник является прямоугольным не только в «стандартной» метрике плос-

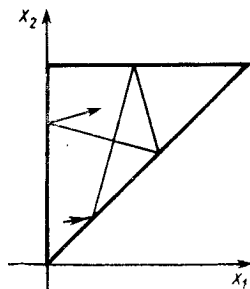


Рис. 5

кости $R^2 = \{x_1, x_2\}$, но и во «внутренней» метрике, задаваемой кинетической энергией

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2.$$

Если $m_1 \neq m_2$, то он не будет равнобедренным. Таким образом, задача двух тел, заключенных между упругими стенками, сводится к бильярду Биркгофа внутри прямоугольного треугольника. Эту конструкцию нетрудно распространить на любое число тел.

Сам Биркгоф рассматривал бильярды как предел задачи о геодезических линиях выпуклой поверхности, которая непрерывно деформируется в область на плоскости. В общем случае строгий анализ такого предельного перехода является довольно деликатной проблемой; насколько нам известно, она не изучена до сих пор. Однако в ряде конкретных случаев (например, деформация эллипсоида, когда две его полуоси неизменны, а меньшая стремится к нулю) можно действительно показать, что почти все геодезические линии переходят в траектории бильярда Биркгофа.

9. Эксперименты показывают, что касательная составляющая скорости после удара на самом деле тоже может изменяться. Поэтому математическую модель удара, основанную на гипотезе Ньютона, следует обобщить. Такое обобщение можно осуществить в разных направлениях (в зависимости от физической природы сил трения, возникающих в момент удара). Мы сейчас изложим математическую модель удара с вязким трением.

Воспользуемся обозначениями п. 6. Разложим скорости до и после удара, происходящие в точке $x_0 \in \Sigma$, на нормальные и касательные составляющие:

$$v^- = v_n^- + v_\tau^-, \quad v^+ = v_n^+ + v_\tau^+.$$

Согласно гипотезе удара с вязким трением имеется самосопряженный относительно метрики (задаваемой кинетической энергией системы) линейный оператор Λ (зависящий от точки $x_0 \in \Sigma$), такой, что

$$v^+ = \Lambda v^-, \quad v_n^+ = \Lambda v_n^-, \quad v_\tau^+ = \Lambda v_\tau^-. \quad (20)$$

Считается, что после удара кинетическая энергия не увеличивается. Поэтому оператор Λ удовлетворяет неравенству

$$\langle \Lambda^2 v, v \rangle \leq \langle v, v \rangle \quad (21)$$

для всех векторов $v \in R^n$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис оператора Λ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — соответствующие собственные значения (они все вещественны ввиду самосопряженности Λ). Из (21) вытекают неравенства для собственных значений: $|\lambda_i| \leq 1$. В силу (20) оператор Λ переводит касательную плоскость к Σ в себя и одним из его собственных векторов является нормаль n ; будем считать, что $e_1 = n$. Так как пос-

ле удара точка $x(t)$ будет снова двигаться в полупространстве $f(x) \geq 0$, то векторы v_n^+ и v_n^- направлены в разные стороны. Поэтому $\lambda_1 \leq 0$. Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ естественно назвать коэффициентами восстановления, а сам оператор Λ — оператором восстановления. Если в касательной плоскости к Σ оператор Λ является тождественным, то получим гипотезу Ньютона о неупругом ударе.

Решая уравнения движения с начальными данными $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = v^+$, получим закон движения системы при $t > 0$.

Изучим вопрос о потере кинетической энергии

$$\Delta T = \frac{\langle v^-, v^- \rangle}{2} - \frac{\langle v^+, v^+ \rangle}{2}.$$

Полагая $u = v^- - v^+$, введем, следуя Карно, кинетическую энергию потерянных скоростей

$$T^* = \langle u, u \rangle / 2.$$

Положим

$$\kappa = \max_{\lambda_i \neq 1} \lambda_i, \quad \nu = \min \lambda_i,$$

Ясно, что $-1 \leq \nu \leq \kappa < 1$.

Теорема [23]. Справедливы неравенства

$$\frac{1+\nu}{1-\nu} T^* \leq \Delta T \leq \frac{1+\kappa}{1-\kappa} T^*. \quad (22)$$

Если $\nu = \kappa$, то неравенства (22) превращаются в равенство. Например, в условиях гипотезы Ньютона о неупругом ударе $\lambda_1 = -e$, $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$, где $e \in [0, 1]$ — коэффициент восстановления. В этом случае $\nu = \kappa = -e$ и неравенства (22) дают классическую теорему Карно:

$$\Delta T = \frac{1-e}{1+e} T^*. \quad (23)$$

Если положить $e=0$, то формула (23) будет совпадать с теоремой Пифагора в пространстве $R^n = \{v\}$ с евклидовой метрикой $\langle, \rangle$. Неравенства (22) естественно назвать *неравенствами Карно*.

Доказательство теоремы. Положим $v^- = \sum v_i^- e_i$. Тогда $v^+ = \sum \lambda_i v_i^- e_i$. В силу ортонормированности базиса $\{e_i\}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta T &= \sum (1 - \lambda_i^2) v_i^2 / 2 = \sum_{\lambda_i \neq 1} \frac{1 + \lambda_i}{1 - \lambda_i} (1 - \lambda_i)^2 v_i^2 / 2, \\ T^* &= \sum_{\lambda_i \neq 1} (1 - \lambda_i)^2 v_i^2 / 2. \end{aligned} \quad (24)$$

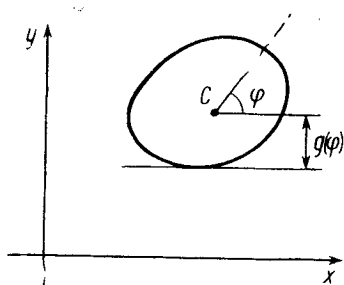


Рис. 6

Так как функция $(1+x)/(1-x)$ монотонно возрастает в полуинтервале $[-1, 1)$, то для всех $\lambda_i \neq 1$

$$0 \leq (1+v)/(1-v) \leq (1+\lambda_i)/(1-\lambda_i) \leq (1+\kappa)/(1-\kappa).$$

Для доказательства неравенств (22) осталось воспользоваться формулами (24).

10. В качестве приложения общих соотношений теории удара рассмотрим задачу об ударе плоского выпуклого твердого тела о прямую (рис. 6). Эта система имеет три степени свободы. В качестве обобщенных координат примем декартовы координаты центра масс тела x, y и угол его поворота φ , отсчитываемый, скажем, от оси x . Кинетическая энергия равна, очевидно,

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2},$$

где m — масса тела, а I — момент инерции относительно центра масс. Рассмотрим удар этого тела о прямую $y=0$ (ось x) и будем считать, что тело находится в полуплоскости $y \geq 0$. Введем расстояние g от центра масс тела до касательной, параллельной оси x и расположенной между центром масс и осью x . Ясно, что g — 2π -периодическая функция φ , однозначно задающая форму тела. Уравнение односторонней связи принимает вид

$$f(x, y, \varphi) = y - g(\varphi) \geq 0,$$

а граничная поверхность Σ задается уравнением $y - g(\varphi) = 0$. Ясно, что Σ регулярна во всех своих точках. Касательные векторы к Σ в точке (x, y, φ) имеют вид

$$\tau = (\alpha, g'\beta, \beta),$$

где α и β — произвольные вещественные числа. Нетрудно найти вектор нормали; он равен

$$n = (0, I\gamma, -mg'\gamma), \quad \gamma = 1 / \sqrt{mI(I + mg'^2)}.$$

Разложим вектор скорости $v = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi})$ на нормальную и касательную составляющие:

$$v = v_n + v_\tau, \quad v_n = \sqrt{\frac{mI}{I + mg'^2}} (\dot{y} - g'\dot{\varphi}) n;$$

$$v_\tau = \left(\dot{x}; \frac{g'}{I + mg'^2} (mg'\dot{y} + I\dot{\varphi}); \frac{1}{I + mg'^2} (mg'\dot{y} + I\dot{\varphi}) \right). \quad (25)$$

Разность $\dot{y} - g'\dot{\varphi}$ представляет собой скорость сближения тела с прямой $y=0$. Можно показать, что сумма $I\dot{\varphi} + mg'y$ является кинетическим моментом тела относительно (подвижной) точки пересечения горизонтальной оси, проходящей через центр масс, и вертикальной оси, проходящей через ближайшую к прямой $y=0$ точку твердого тела.

В случае абсолютно упругого удара скорость $\lambda = \dot{x}$, момент $k = I\dot{\varphi} + mg'y$ сохраняют свои величины, а скорости сближения $\mu = (y - g(\varphi))'$ меняют знак. В частности, движение точки с координатами $(x, y - g(\varphi))$ в момент удара о прямую $y=0$ подчиняется закону упругого отражения.

Если справедлива гипотеза Ньютона, то скорость μ после удара меняет знак и уменьшается в $1/e$ раз (e — коэффициент восстановления), а величины λ и k по-прежнему не меняются. Такой удар называют еще ударом без трения.

В координатах x, y, φ оператор Λ действует следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^+ \\ \dot{y}^+ \\ \rho\dot{\varphi}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 & 0 \\ 0, & \frac{g'^2 - e\rho^2}{g'^2 + \rho^2}, & \frac{(1+e)\rho g'}{g'^2 + \rho^2} \\ 0, & \frac{(1+e)\rho g'}{g'^2 + \rho^2}, & \frac{-eg'^2 + \rho^2}{g'^2 + \rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}^- \\ \dot{y}^- \\ \rho\dot{\varphi}^- \end{pmatrix},$$

где $\rho = \sqrt{I/m}$ — радиус инерции тела.

11. В различных задачах могут возникать модели удара, в которых некоторые из коэффициентов восстановления $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ оказываются отрицательными. Например, если пренебречь диссипацией энергии, то плоское движение каучукового мячика, прыгающего по твердому полу, качественно правильно описывается следующей моделью.

В момент удара скорость точки мячика, соприкасающейся с полом, меняется на противоположную:

$$(x^+ - r\dot{\varphi}^+, \dot{y}^+) = -(\dot{x}^- - r\dot{\varphi}^-, \dot{y}^-),$$

где r — радиус мячика. Вместе с законом сохранения энергии

$$\frac{m}{2} (\dot{x}^{+2} + \dot{y}^{+2} + \rho^2 \dot{\varphi}^{+2}) = \frac{m}{2} (\dot{x}^{-2} + \dot{y}^{-2} + \rho^2 \dot{\varphi}^{-2})$$

это соотношение дает следующие формулы:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^+ \\ \dot{y}^+ \\ \rho\dot{\varphi}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2}, & 0, & \frac{2r\rho}{r^2 + \rho^2} \\ 0, & -1, & 0 \\ \frac{2r\rho}{r^2 + \rho^2}, & 0, & \frac{-r^2 + \rho^2}{r^2 + \rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}^- \\ \dot{y}^- \\ \rho\dot{\varphi}^- \end{pmatrix}.$$

Два собственных значения матрицы Λ в данном случае равны -1 , а одно равно 1 .

Посмотрим, как будет двигаться мячик под действием силы тяжести. Ясно, что в промежутках между ударами его центр масс будет описывать параболы, которые однозначно определяются соответствующими скоростями $\dot{x}^+$, $\dot{y}^+$. Обозначим скорости мячика до и после j -го удара соответственно символами $\dot{x}_j^-$, $\dot{y}_j^-$, $\dot{\varphi}_j^-$ и $\dot{x}_j^+$, $\dot{y}_j^+$, $\dot{\varphi}_j^+$. Очевидно, что

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_j^+ \\ \dot{y}_j^+ \\ \rho\dot{\varphi}_j^+ \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \dot{x}_j^- \\ \dot{y}_j^- \\ \rho\dot{\varphi}_j^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_{j+1}^- \\ \dot{y}_{j+1}^- \\ \rho\dot{\varphi}_{j+1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_j^+ \\ -\dot{y}_j^+ \\ \rho\dot{\varphi}_j^+ \end{pmatrix}.$$

Так как отображение Λ в плоскости $\dot{x}$, $\rho\dot{\varphi}$ является симметрией, то Λ^2 — тождественный оператор. Откуда легко следует, что $(\dot{x}_{j+2}^+, \dot{y}_{j+2}^+, \rho\dot{\varphi}_{j+2}^+) = (\dot{x}_j^+, \dot{y}_j^+, \rho\dot{\varphi}_j^+)$, т. е. параболы Π_j — траектории центра масс мячика в промежутках между ударами с номерами j и $j+1$ таковы, что Π_{j+2} получается из Π_j сдвигом вдоль оси x на некоторый вектор, не зависящий от j (см. рис. 7).

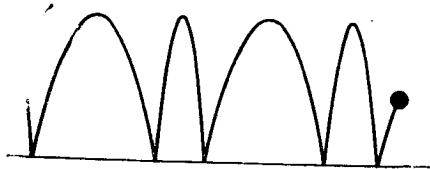
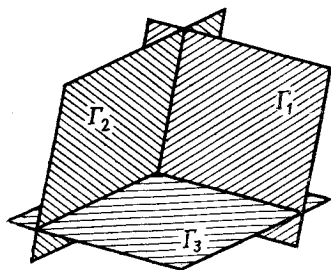


Рис. 7

Рис. 8



12. Предположим теперь, что на механическую систему с n степенями свободы наложены k односторонних связей

$$f_1(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \dots, f_k(x_1, \dots, x_n) \geq 0. \quad (26)$$

Поверхности $\Sigma_j = \{x: f_j(x) = 0\}$ считаются регулярными во всех своих точках. Предположим, что $f_j(0) = 0$ для всех $1 \leq j \leq k$. Разложим функции f_j в ряды Маклорена

$$f_j = \langle c_j, x \rangle + o(|x|), \quad c_j \in \mathbb{R}^n,$$

и рассмотрим линейные неравенства

$$\langle c_1, x \rangle \geq 0, \dots, \langle c_k, x \rangle \geq 0. \quad (27)$$

Предположим, что эти неравенства выделяют в $\mathbb{R}^n$ n -мерную область γ_+ . Такие области называются *симплициальными конусами*. Внутренность γ_+ (обозначим ее γ_+^0) называется *камерой* (рис. 8),

или, более точно, камерой пространства $\mathbb{R}^n$ относительно множества гиперплоскостей

$$\Gamma_i = \{x: \langle c_i, x \rangle = 0\}. \quad (28)$$

В малой окрестности начала координат исходные неравенства (26) будут задавать замкнутую n -мерную область σ_+ , которую можно назвать «криволинейным» симплицальным конусом.

Рассмотрим движение механической системы $x(t)$, траектория которой при $t < 0$ лежит строго внутри области σ_+ . Если в момент времени $t=0$

$$x(0) \in \Sigma_i \setminus \left(\bigcup_{l \neq i} \Sigma_l \right),$$

то в этот момент имеет место удар об одну из граничных поверхностей Σ_i , причем наличие других односторонних связей никак не сказывается на движении системы при малых значениях $t > 0$.

Совершенно иначе обстоит дело в случае, когда $x(0) = 0$. Здесь как бы происходит одновременный удар системы сразу о k поверхностей $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$. Для того, чтобы все связи действительно участвовали в ударе, достаточно предположить, чтобы скорость

$$v^- = \lim_{t \rightarrow -0} \dot{x}(t)$$

была трансверсальна всем поверхностям Σ_i . Такой удар называется *кратным*.

Пусть $x(0) \in \Sigma_{i_1} \cap \Sigma_{i_2} \cap \dots \cap \Sigma_{i_m}$, $m \geq 2$, и вектор скорости v^- не касается ни одной из поверхностей $\Sigma_{i_1}, \dots, \Sigma_{i_m}$. Тогда в момент времени $t=0$ также будем иметь кратный удар о „ребро“ конуса σ_+ .

Можно ли в случае кратного удара дать содержательное с механической точки зрения определение движения системы для значений времени $t > 0$? Так как мы будем интересоваться исключительно законами соударения, то поверхности Σ_i можно заменить их касательными плоскостями в точке $x=0$, кинетическую энергию — квадратичной формой с постоянными коэффициентами $\Sigma g_{ij}(0) \dot{x}_i \dot{x}_j / 2$ и можно считать, что движение происходит по инерции. Касательные плоскости к Σ_i в точке $x=0$ мы обозначили выше через Γ_i (см. (28)). Ясно, что конус γ_+ является пересечением k полупространств, расположенных по одну сторону от плоскостей $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$. Пусть γ_- — симплицальный конус, являющийся образом конуса γ_+ при отражении $x \mapsto -x$. Вектор скорости до удара v^- лежит как раз в γ_- , а в γ_+ должен лежать вектор скорости v^+ после удара.

Может так случиться, что не все гиперплоскости Γ_1 пересекают γ_+ по $(n-1)$ -мерным граням. Эти гиперплоскости можно далее не рассматривать, поскольку неравенства (27) с соответствующими индексами являются следствием остальных. Будем считать, что среди гиперплоскостей Γ_i нет «несущественных».

В дальнейших построениях важную роль будет играть группа Кокстера W — группа ортогональных преобразований $\mathbb{R}^n$ (в метрике $\langle, \rangle$), порожденная отображениями s_i относительно гиперплоскостей Γ_i . Квадрат каждого из отражений s_i есть тождественное преобразование; в общем случае s_i и s_j при разных i, j не коммутируют. Каждый элемент из W есть произведение конечного числа элементов из набора $\{s_1, \dots, s_k\}$. Ясно, что число элементов W не более чем счетно. Для каждого $s \in W$ множество $s(\gamma_+)$ является симплицальным конусом в $\mathbb{R}^n$. Можно показать, что

$$\bigcup_{s \in W} s(\gamma_+) = \mathbb{R}^n.$$

Обсудим сначала случай абсолютно упругого удара. При этом предположении в γ_+ возникает бильярдная система: траектории точки x в камере γ_+^0 являются прямыми, а при обычном однократном ударе о стенку Γ_j скорость точки до удара v^- меняется на вектор $v^+ = s_j(v^-)$. В более общем виде, пусть точка $x(t)$ в моменты времени $t_1, \dots, t_m$ совершает однократные удары о стенки $\Gamma_{i_1}, \dots, \Gamma_{i_m}$. Тогда при $t > t_m$ точка начнет двигаться в γ_+ по прямой с постоянной скоростью

$$v^+ = s_{i_m} \dots s_{i_1}(v^-).$$

Перенесем вектор v^+ параллельно в начало координат. Если $v^+ \in \gamma_+^0$, то при $t > t_m$ точка $x(t)$ будет двигаться в камере γ_+^0 без ударов.

Ясно, что состояние системы $(x_0, v_0) \in \gamma_+^0 \times \mathbb{R}^n$ в фиксированный момент t_0 однозначно определяет последующее движение: $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0$. Нетрудно доказать, что для почти всех начальных данных x_0, v_0 последующее движение $x(t)$ корректно определено для всех $t \geq t_0$ (ни при каком t точка $x(t) \notin \Gamma_i \cap \Gamma_j, i \neq j$). Исключительное множество начальных данных имеет лебегову меру нуль. В частности, его дополнение всюду плотно в $\gamma_+^0 \times \mathbb{R}^n$.

Бильярд в камере γ_+^0 назовем *регуляризуемым*, если функцию $x(t, x_0, v_0)$ при всех значениях t можно доопределить по непрерывности на всем $\gamma_+^0 \times \mathbb{R}^n$. В частности, в случае кратного удара получаем корректно определенный закон упругого отражения

$$v^- \mapsto v^+, \quad (29)$$

причем $|v^+| = |v^-|$. Регуляризация бильярда в γ_+^0 возможна далеко не всегда. В качестве примера рассмотрим случай $n=2$, и пусть угол между прямыми Γ_1 и Γ_2 равен 120° . В этой ситуации невозможно дать физически корректное определение закона отражения (29) при кратном ударе: траектории системы, расположенные по обе стороны от биссектрисы угла γ_+ , резко различаются после однократного удара о прямые Γ_1 и Γ_2 (см. рис. 9).

Теорема 1. Пусть γ_+ — фундаментальная область конечной группы Кокстера. Тогда бильярд в γ_+^0 *регуляризуем*.

Конечность группы Кокстера эквивалентна предположению, что все двугранные углы камеры γ_+ являются целыми частями π , т. е. равны π/m , $m=1, 2, \dots$ (см. [46]).

Доказательство теоремы 1 основано на использовании известных свойств конечных групп, порожденных отражениями (см. [46]). Во-первых, симплициальный конус γ_+ является фундаментальной областью группы W : образы камеры γ_+^0 при действии различных элементов из W не пересекаются и замыкание их объединения совпадает с $\mathbb{R}^n$. Таким образом, все $\mathbb{R}^n$ можно «замостить» конусами вида $s(\gamma_+)$, $s \in W$, причем для каждой камеры $\gamma_+^{0'}$ (вида $s(\gamma_+^0)$) найдется лишь один элемент $s' \in W$, такой, что $s'(\gamma_+^0) = \gamma_+^{0'}$. Во-вторых, при некотором $s \in W$ имеем

$$s(\gamma_+^0) = \gamma_-^0. \quad (30)$$

Пусть $x(t)$ — движение с однократными ударами в моменты времени $t_1, t_2, \dots$, причем $x(t) \in \gamma_+^0$ при $t < t_1$, и пусть $x(t_j) \in \Gamma_{ij}$. Этому движению можно однозначно поставить в соответствие движение по инерции $\hat{x}(t)$ в $\mathbb{R}^n$ по следующему правилу

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x(t) \text{ при } t \leq t_1; \\ \hat{x}(t) &= s_{i_1}(x(t)) \text{ при } t_1 \leq t \leq t_2; \\ \hat{x}(t) &= s_{i_2} s_{i_1}(x(t)) \text{ при } t_2 \leq t \leq t_3, \dots \end{aligned} \quad (31)$$

При этом прямая $t \rightarrow \hat{x}(t)$ не пересекает ни одной $(n-2)$ -мерной грани ни одного из конусов $s(\gamma_+)$, $s \in W$. Обратно, если прямолинейное равномерное движение $\hat{x}(t)$ в $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет последнему условию и $\hat{x}(t) \in \gamma_+^0$ при всех $t < t_1$, то найдется единственное движение $x(t)$ бильярдной системы с однократными ударами, такое, что выполнены (31) (см. рис. 10). Так как $\hat{x}(t)$, очевидно, непрерывно по начальным данным, то соответствие $x(t) \rightarrow \hat{x}(t)$ задает искомую регуляризацию бильярда в γ_+ .

Если $\hat{x}(t) \in \gamma_-^0$ при всех $t < t_*$, то $\hat{x}(t) \in \gamma_-^0$ при всех достаточно больших t . Следовательно, отвечающее $\hat{x}(t)$ типичное движение $x(t)$ таково, что общее число однократных ударов конечно. Таким образом, при сколь угодно малом возмущении

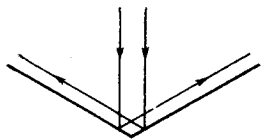


Рис. 9

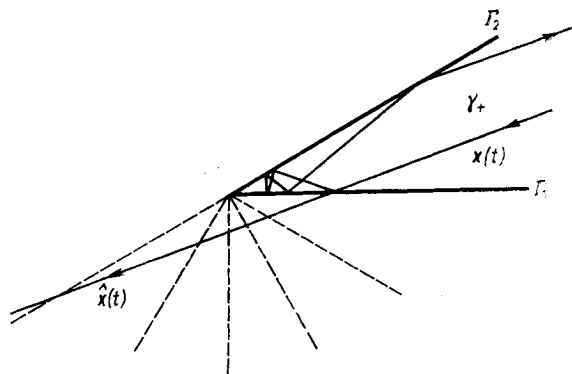


Рис. 10

кратный удар как бы „распадается“ в последовательность следующих друг за другом однократных ударов. Линейное отображение, обратное к (30), как раз задает закон упругого отражения при кратном ударе. Его конкретный вид зависит от формы камеры γ_+^0 .

При $n=2$ теорема 1 допускает уточнение. В этом случае группа Кокстера является *диэдральной группой* порядка $2m$, где $m = \pi/\phi$, ϕ — угол между прямыми Γ_1 и Γ_2 . Оказывается,

- 1) если m четно, то $\mathbf{v}^+ = -\mathbf{v}^-$; если m нечетно, то векторы $\mathbf{v}^+$ и $-\mathbf{v}^-$ симметричны относительно биссектрисы угла γ_+ ;
- 2) если траектория движения $\mathbf{x}(t)$ в γ_+ не проходит через начало координат, то количество однократных ударов при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ равно m .

Таким образом, в этом случае кратный удар при возмущении распадается в серию m однократных ударов. Число m естественно назвать *кратностью удара*. При $m=1$ получаем обычный некрatный удар.

Свойства 1) и 2) вытекают из известных результатов о строении диэдральных групп (см. [46, гл. IV и VI]): преобразование s из (30) имеет вид:

$$(s_1 s_2)^{m/2} \text{ или } (s_2 s_1)^{m/2}, \text{ если } m \text{ четно;}$$

$$(s_1 s_2)^{(m-1)/2} s_1 \text{ или } (s_2 s_1)^{(m-1)/2} s_2, \text{ если } m \text{ нечетно.}$$

При четном m преобразование s сохраняет ориентацию, а при нечетном — меняет ее. В том и другом случае элемент s разлагается в произведение m инволюций s_1 и s_2 , причем эти разложения неприводимы. Остается заметить, что каждому из отражений s_i в этих произведениях отвечает удар о прямую Γ_i .

На рисунках 11, 12 показаны образы сектора γ_- при последовательных отображениях s_1 и s_2 относительно прямых Γ_1 и Γ_2 для случаев $m=3$ и $m=4$. Стрелками указана ориентация. Сплошной

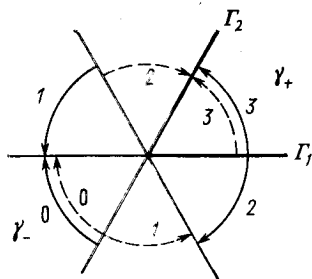


Рис. 11

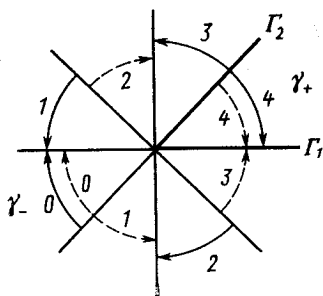


Рис. 12

(пунктирной) линией отмечены образы сектора γ_- при отображениях $s_1, s_2 s_1, s_1 s_2 s_1, \dots$ ($s_2, s_1 s_2, s_2 s_1 s_2, \dots$). Цифры на рисунках обозначают номер итерации отображений.

Приведем поучительный пример, иллюстрирующий кратный удар. Для этого вспомним задачу из п. 8 о движении двух тел с массами m_1 и m_2 по оси x между двумя стенками $x=0$ и $x=a$. Пусть x_1 и x_2 их координаты. Тогда положение системы задается точкой в прямоугольном треугольнике

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq a. \quad (32)$$

Здесь возможны два типа кратных ударов:

- (1) точка $x = (x_1, x_2)$ попадает в прямой угол;
- (2) точка x попадает в острый угол треугольника (32).

В первом случае тела одновременно ударяются о разные стенки и затем отражаются от них с равными, но противоположно направленными скоростями. Здесь, очевидно, справедлив закон отражения $\mathbf{v}^+ = -\mathbf{v}^-$, корректность которого с физической точки зрения очевидна.

Во втором случае корректность кратного удара имеет место лишь при специальных ограничениях на массы соударяющихся тел. Корректное продолжение движения системы при кратном ударе о стенку $x=0$ возможно при условии, что

$$\sqrt{m_2/(m_1 + m_2)} = \cos \pi/m, \quad m = 3, 4, \dots \quad (33)$$

Аналогичный вид имеет условие корректности удара о стенку $x=a$:

$$\sqrt{m_1/(m_1 + m_2)} = \cos \pi/k, \quad k = 3, 4, \dots \quad (34)$$

Из (33) и (34) вытекает, что бильярд в треугольнике (32) регуляризуем в целом, если $m_1 = m_2$, $m_1 = 3m_2$ или $3m_1 = m_2$. В первом случае прямоугольный треугольник (32) равнобедренный, а в остальных случаях его углы равны 30° и 60° . Такими треугольниками, очевидно, можно «замостить» плоскость $R^2 = \{x_1, x_2\}$.

Задача о регуляризации билиардов в многогранных областях изучалась в работе С. И. Пидкуйко [28], где установлена регуляризуемость билиардов в *аффинных камерах Вейля* корневых систем (в книге [46] эти камеры называются *альковами*). Согласно *теореме Штифеля*, все $\mathbb{R}^n$ можно замостить образами алькова при последовательном отражении относительно граней. Относительно классификации альковов см. [46]. При $n=2$ билиард регуляризируем в прямоугольнике, равностороннем треугольнике и в двух треугольниках из рассмотренного выше примера.

Рассмотрим теперь более общий случай неупругого удара, связанный с гипотезой Ньютона: при ударе о грань Γ_i камеры γ_+^0 (см. (27)) касательная составляющая скорости не меняется, а нормальная меняет знак и уменьшается в $1/e_i$ раз, где e_i — коэффициент восстановления.

Теорема 2. Если грани $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ попарно ортогональны, то билиард в γ_+^0 регуляризуем.

Доказательство основано на простом соображении: в этом случае группа Кокстера коммутативна, причем отражения s_j относительно Γ_j коммутируют с преобразованиями

$$v^- \rightarrow v^+ : v_{\tau_i}^+ = v_{\tau_i}^-, \quad v_{n_i}^+ = -e_i v_{n_i}^-,$$

где n_i — вектор нормали к грани Γ_i , а τ_i направлен по касательной к Γ_i .

Координаты в $\mathbb{R}^n$ всегда можно выбрать так, чтобы конус γ_+ задавался системой неравенств

$$x_1 \geq 0, \dots, x_k \geq 0.$$

Пусть $v^- = (v_1^-, \dots, v_n^-)$ — скорость системы в момент кратного удара. Тогда, очевидно,

$$v^+ = (v_1^+, \dots, v_n^+), \text{ где } v_i^+ = -e_i v_i^-, \quad i \leq k \text{ и } v_i^+ = v_i^-, \quad i > k.$$

Примером корректного закона неупругого отражения при кратном ударе снова служит задача о движении в треугольнике (32): при одновременном ударе тел m_1 и m_2 о стенки $x=0$ и $x=a$ их скорости v_1^- и v_2^- становятся равными $v_1^+ = -e_1 v_1^-$ и $v_2^+ = -e_2 v_2^-$, где e_1 и e_2 — коэффициенты восстановления при неупругих ударах о неподвижные стенки $x=0$ и $x=a$.

В более общем случае удара с вязким трением (п. 9) достаточное условие регуляризуемости билиарда в области (27) включает помимо предположения о взаимной ортогональности граней Γ_j еще предположение о коммутируемости операторов восстановления Λ_i (при однократном ударе о грани Γ_i) между собой и с отражениями s_j .

ЗАДАЧИ

1. По прямой движется по инерции несколько одинаковых шариков. Предположим, что соударения между ними абсолютно упругие и в каждом соударении участвуют только два шарика. Доказать, что общее число соударений конечно.

2. Имеются три шара S_1, S_2, S_3 с центрами на одной прямой, первый из них движется, а остальные два неподвижны. Происходит удар сначала между S_1 и S_2 , затем между S_2 и S_3 . Докажите, что при фиксированных значениях масс шаров S_1 и S_3 скорость шара S_3 максимальна, если масса S_2 равна среднему геометрическому масс шаров S_1 и S_3 (Х. Гюйгенс). Обобщите этот результат на случай произвольного числа шаров.

Ответ: пусть $m_1, \dots, m_{n+1}$ — массы шаров $S_1, S_2, \dots, S_{n+1}$; тогда

$$m_2 = m_1^{n-1/n} m_{n+1}^{1/n}; \quad m_3 = m_1^{n-2/n} m_{n+1}^{2/n}; \quad \dots; \quad m_n = m_1^{1/n} m_{n+1}^{n-1/n}.$$

Любопытно отметить, что $m_k = \sqrt{m_{k-1} m_{k+1}}$ ($k=2, \dots, n-1$).

3. Рассмотрим бесконечную цепочку первоначально покоящихся материальных точек $\{m_n\}_0^\infty$ конечной суммарной массы $M = \sum_0^\infty m_n$. Зафиксируем массу m_0 и энергию E_0 ударяющей частицы m_0 . Пусть в результате первого взаимодействия частиц m_{n-1} и m_n частица m_n приобрела энергию E_n .

1) Найти распределение масс $\{m_n\}$, при котором

$$E_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$$

принимает максимальное значение.

Ответ:

$$m_n = m_0(1-\varepsilon) / [(1+(n-1)\varepsilon)(1+n\varepsilon)], \quad (35)$$

$$E_\infty = (1-\varepsilon)E_0, \quad \varepsilon = m_0/M.$$

2) Доказать, что при условии (35) после бесконечного числа соударений вся цепочка движется, как твердое тело с суммарной энергией E_0 (А. Н. Голубятников, С. И. Плотников).

У к а з а н и е: Из законов упругого соударения получаем равенства:

$$p'_n + p_{n+1} = p_n, \quad E'_n + E_{n+1} = E_n, \quad E_n = p_n^2 / 2m_n, \quad (36)$$

где штрихом обозначены оставшиеся величины импульса и энергии частицы после ее столкновения с последующей частицей. Так как E_∞ конечна, то $p_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда в силу (36) имеют место предельные соотношения, справедливые и при наличии последующих столкновений в цепочке:

$$\sum_0^\infty E'_n + E_\infty = E_0, \quad \sum_0^\infty p'_n = p_0.$$

Согласно неравенству Коши — Буняковского

$$2M \sum_0^\infty E'_n \geq (\sum_0^\infty p'_n)^2 = p_0^2,$$

причем равенство достигается при постоянных скоростях $v'_n = p'_n/m_n = p_0/M$. Последующих столкновений нет.

4. Твердое тело вращается вокруг неподвижной точки O . В некоторый момент, когда угловая скорость тела равна ω^- , мгновенно закрепляется некоторая прямая тела, проходящая через точку O с единичным направляющим вектором e . Доказать, что угловая скорость вращения тела вокруг этой оси после удара равна

$$\langle I\omega^-, e \rangle / \langle Ie, e \rangle,$$

где I — оператор инерции твердого тела относительно точки O .

5. Предположим, что твердый шарик движется по инерции между стенками, одна из которых неподвижна, а другая совершает медленное движение: расстояние между стенками $l(t)$ равно $f(\epsilon t)$, где $f(\cdot)$ — гладкая функция, а ϵ — малый параметр. Удар шарика о стенки абсолютно упругий. Доказать, что произведение $I(t) = v(t)l(t)$ (v — скорость шарика) является *адиабатическим инвариантом*: для любого $\kappa > 0$ найдется $\epsilon_0 > 0$, такое, что при всех $|\epsilon| < \epsilon_0$, $0 < t < 1/\epsilon$ справедливо неравенство

$$|I(t) - I(0)| < \kappa.$$

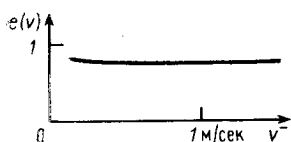


Рис. 13

В термодинамике адиабатическим процессом называется процесс, проходящий без выделения и поглощения тепла. Понятие адиабатического инварианта ввел П. Эренфест; поучительное обсуждение этих вопросов можно найти в [1].

6. Как указывают эксперименты, коэффициент восстановления e на самом деле зависит от скоростей соударяющихся тел. На рис. 13 показана экспериментальная зависимость отношения $e(v^-) = -v^+/v^-$ для стального шарика диаметром 1 дюйм (2,54 см), ударяющего о стальную плиту [51]. Видно, что при приближении v^- к нулю значения e начинают возрастать.

Доказать, что если $e_0 \leq e(v^-) \leq e_1 < 1$, то тяжелый шарик, опущенный с высоты h , будет отскакивать от плиты в течение времени

$$\frac{1+e_0}{1-e_0} \sqrt{\frac{2h}{g}} \leq t \leq \frac{1+e_1}{1-e_1} \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

после чего он остановится.

Предположим, что

$$\lim_{v \rightarrow 0} e(v) = 1, \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{de}{dv} \neq \infty.$$

Доказать, что в этом случае соударения шарика с горизонтальной плитой никогда не прекратятся (А. А. Панов).

7. Предположим, что в области $f(\mathbf{x}) > 0$ движение механической системы описывается уравнениями Лагранжа с лагранжианом

$$L = T + \Gamma \cdot \dot{\mathbf{x}} - V, \quad \Gamma \cdot \dot{\mathbf{x}} = \sum_1^n \Gamma_i(\mathbf{x}) \dot{x}_i.$$

Введение дополнительных слагаемых, линейных по скоростям, эквивалентно действию обобщенных сил

$$F_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Gamma_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x_j} \right) \dot{x}_j, \quad 1 \leq i \leq n,$$

которые называются *гироскопическими*. Они могут иметь различную природу. Гироскопические силы появляются при переходе во вращающуюся систему отсчета, при понижении порядка систем с симметриями ([3], гл. 3), в задачах о движении заряженных тел в магнитном поле. Гироскопические силы не влияют на сохранность полной энергии $T + V$.

Доказать, что для упругих соударений справедливы принцип Гамильтона

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

и обобщенный принцип Мопертюи

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (2\sqrt{(h - V)T} + \Gamma \cdot \dot{\mathbf{x}}) dt = 0.$$

8. Плоское твердое тело в форме треугольника упруго ударяется о прямолинейную преграду. Всегда ли возможно корректное определение закона отражения?

— — —

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ДИНАМИКЕ СИСТЕМ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

§ 1. ОДНОСТОРОННИЕ И ДВУСТОРОННИЕ СВЯЗИ

Пусть

$$T = \left(\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) \dot{x}_i \dot{x}_j \right) / 2$$

— кинетическая энергия системы с n степенями свободы, на которую действуют обобщенные силы $F = (F_1, \dots, F_n)$ — функции от положения системы $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, ее скорости $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ и времени t . Уравнения движения этой «свободной» системы описываются известными уравнениями Лагранжа

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right)' - \frac{\partial T}{\partial x} = F. \quad (1.1)$$

Пусть $f(\mathbf{x})$ — гладкая функция, причем $df \neq 0$ в точках, где $f=0$. Если принять уравнение $f(\mathbf{x})=0$ в качестве уравнения связи, наложенной на систему, то движения такой «несвободной» системы с $n-1$ степенями свободы описываются, как известно, уравнениями Лагранжа с множителем λ :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right)' - \frac{\partial T}{\partial x} = F + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f=0. \quad (1.2)$$

Эти уравнения обычно получают с помощью принципа Даламбера — Лагранжа. В формально-аксиоматической схеме обоснования динамики принцип Даламбера — Лагранжа выводится из принципа освобождаемости связи и аксиомы об ее идеальности. Однако при этом остается невыясненным происхождение исходных аксиом. С содержательной точки зрения более перспективным является генетический метод обоснования динамики систем со связями, основанный на анализе различных физических способов реализации связей.

Элементы генетического подхода к обоснованию теории геометрических связей были намечены в работах Ф. Клейна [59] и Л. Прандтля [68], посвященных анализу парадоксов сухого трения, обнаруженных Пенлеве (см. [65]). Их идея состоит в выполнении предельного перехода к случаю жестких связей в решениях полных уравнений движения. Вот что писал по этому поводу Прандтль: «Если рассматривать как существенную задачу меха-

ники — возможно более верное изображение явлений, входящих в ее область, причем в интересах возможности достижения поставленной цели приходится вводить подходящие упрощения основных положений, то при обосновании механики мы должны прежде всего рассматривать тела как деформируемые (каковыми они в сущности всегда и являются) и затем в качестве упрощенного образа твердого тела ввести понятие об абсолютно твердом теле, которое можно получить из понятия твердого тела, приближая модуль упругости к пределу $E = \infty$.

В обычных случаях позволено сделать этот предельный переход уже в дифференциальных уравнениях, причем таким образом получают общеизвестные удобные законы...

Следуя этой идее, заменим связь $f=0$ полем упругих сил с потенциальной энергией $V_N = Nf^2/2$. Здесь N («модуль упругости») является постоянным параметром, который затем будет устремлен к бесконечности. Рассмотрим свободную систему (1.1), находящуюся под действием дополнительных потенциальных сил:

$$(\partial T / \partial \dot{x}) - \partial T / \partial x = F - \partial V_N / \partial x. \quad (1.3)$$

Теорема 1. *Предположим, что поле F потенциально: $F = -\partial V / \partial x$. Пусть $x_N(t)$ — решение системы (1.3) с фиксированными начальными данными $x_N(0) = x_0$, $\dot{x}_N(0) = \dot{x}_0$, удовлетворяющими соотношениям*

$$f(x) = 0, \quad (\partial f / \partial x)x = 0. \quad (1.4)$$

Тогда на каждом конечном интервале времени существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_N(t) = \hat{x}(t),$$

причем предельное движение $t \mapsto \hat{x}(t)$ удовлетворяет уравнениям (1.2).

Эта теорема высказана Р. Курантом. Ее доказательство, данное в работе [70], существенно использует консервативность системы (1.3). Однако, по-видимому, теорема 1 справедлива и в случае непотенциального поля сил F .

В качестве иллюстративного примера рассмотрим движение точки единичной массы в плоскости декартовых координат x, y под действием непотенциальной силы F с компонентами $0, x$. Согласно теореме 1 связь $y=0$ можно реализовать с помощью упругого поля сил с компонентами $0, -Ny$. Можно показать, что движение с начальными данными

$$x(0) = y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0$$

задается формулами

$$x_N(t) = t, \quad y_N(t) = \frac{t}{N} - \frac{1}{N^{3/2}} \sin \sqrt{N} t.$$

При $N \rightarrow \infty$ получаем движение со связью $y=0$, причем семейство функций $y_N(t)$ стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$ равномерно лишь на конечном промежутке времени.

В случае односторонней связи уравнение $f(x)=0$ заменяется неравенством $f(x) \geq 0$. Снова рассмотрим движение системы (1.2) с начальными данными, удовлетворяющими соотношениям (1.4), и пусть $\lambda(t)$ — значения параметра λ вдоль этого движения. Из механики известно, что если $\lambda(t) < 0$ для всех $t \geq 0$, то точка $x(t)$ все время остается на поверхности $f=0$. Наоборот, если же после некоторого момента времени τ функция $\lambda(t)$ принимает положительные значения, то при $t=\tau$ точка $x(t)$ покинет поверхность $f=0$ (подчеркнем, что случай $\tau=0$ не исключается) и для значений $t > \tau$ динамика системы будет описываться обычными уравнениями Лагранжа (1.1). На практике наиболее типичным является случай, когда $\lambda(\tau)=0$ и $\dot{\lambda}(\tau) > 0$.

Следует иметь в виду, что задача о движении системы с регулярной односторонней связью разрешима не всегда. Простым примером служит движение точки единичной массы по инерции в плоскости x, y с односторонней связью $y \geq g(x)$, где функция g определяется следующим образом:

$$g = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0; \\ e^{-1/x^2} \cos 1/x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$



Рис. 14

Эта функция бесконечно дифференцируема при всех значениях x , но не является аналитической. Ее график изображен на рис. 14. Движение с двусторонней связью $y = g(x)$ описывается уравнениями (1.2):

$$\ddot{x} = -\lambda g', \quad \ddot{y} = \lambda, \quad y = g(x),$$

откуда находим множитель Лагранжа

$$\lambda = g'' x^2 / (1 + g'^2). \quad (1.5)$$

Зависимость x от t определяется квадратурой с помощью интеграла энергии

$$x^2(1 + g'^2) = 2h, \quad h = \text{const}. \quad (1.6)$$

Пусть $x(0)=0$ и $\dot{x}(0) > 0$. Тогда, в частности, функция $x(t)$ монотонно возрастает. Из (1.5) и (1.6) получаем, что

$$\lambda = 2hg''/(1 + g'^2)^2.$$

Так как функция g'' бесконечно много раз меняет знак при $x \rightarrow +0$, то множитель $\lambda(t)$, являющийся гладкой функцией t , также бесконечно много раз меняет знак, когда $t \rightarrow +0$. Законы динамики не позволяют дать разумное определение движения точки с односторонней связью $y \geq g(x)$ при $t > 0$.

Вернемся к анализу общего случая. Для того чтобы реализовать одностороннюю связь $\dot{f}(x) \geq 0$, введем в рассмотрение дополнительное силовое поле с потенциальной энергией

$$V_N = \begin{cases} Nf^2/2, & \text{если } \dot{f} < 0; \\ 0, & \text{если } \dot{f} \geq 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Движение свободной системы задается уравнениями Лагранжа

$$(\partial T / \partial \dot{x}) - \partial T / \partial x = F - \partial V_N / \partial x. \quad (1.8)$$

Дополнительная обобщенная сила — $(V_N)'$ непрерывна, но является лишь кусочно-гладкой. Однако ее компоненты непрерывно дифференцируемы, в частности удовлетворяют условиям Липшица, и поэтому для уравнений (1.8) справедлива теорема существования и единственности решений.

Теорема 2 [21]. *Предположим, что внешние силы F потенциальны и пусть $x(t)$, $0 \leq t \leq a_*$, — движение системы с односторонней связью $\dot{f}(x) \geq 0$ и начальными данными, удовлетворяющими соотношениям (1.4). Предположим, что имеется не более одного $\tau \in [0, a_*)$, такого, что $\dot{f}(x(t)) = 0$ при $0 \leq t \leq \tau$ и $\dot{f}(x(t)) > 0$ при $\tau < t \leq a < a_*$. Тогда если $x_N(t)$ — движение системы (1.8) с теми же начальными данными $x(0)$ и $\dot{x}(0)$, то для достаточно больших N оно определено при $0 \leq t \leq a$ и стремится на этом интервале к функции $x(t)$, когда $N \rightarrow \infty$.*

Это утверждение можно доказать методом работы [70]. Подчеркнем, что теорема 2 справедлива как в случае $\tau = 0$ (точка $x(t)$ сразу покидает поверхность $\dot{f} = 0$), так и в случае $\tau > a_*$ (точка $x(t)$ движется по поверхности $\dot{f} = 0$). Не исключено, что теорема 2 справедлива без предположения о потенциальности поля сил F . Аналогичный результат справедлив и в том случае, если вместо (1.7) ввести потенциальную энергию $V_N = \exp(-Nf)$ и затем устремить N к бесконечности. Это замечание может оказаться полезным в аналитических исследованиях ввиду свойства бесконечной дифференцируемости функции V_N .

Проиллюстрируем теорему 2 простым примером. Рассмотрим движение точки единичной массы в плоскости x, y , причем в левой полуплоскости (где $x \leq 0$) на точку действует сила с компонентами $0, -g$ ($g = \text{const} > 0$), а в правой полуплоскости (где $x > 0$) — сила с компонентами $0, g$. Это силовое поле потенциально, но разрывно. Если при $t = t_*$ точка попала на вертикальную прямую $x = 0$, то ее состояние в момент времени $t = t_*$ принимается за начальное для определения ее последующего движения в другой полуплоскости. Рассматривается движение с освобождающей связью $y \geq 0$. Пусть при $t = 0$ точка имеет следующее начальное состояние:

$$x = -1, \quad y = 0, \quad \dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 0. \quad (1.9)$$

Тогда имеем следующий закон ее движения:

$$x(t)=t-1; y(t)=0, t \leq 1, y(t)=g(t-1)^2/2, t > 1. \quad (1.10)$$

В момент времени $t=1$ точка покидает связь.

Освободим теперь систему от связи и заменим ее действие упругой силой с компонентами $0, -Ny$ ($y \leq 0$). В верхней полуплоскости эта сила полагается равной нулю. Тогда решение новых уравнений движения с начальными данными (1.9) задается при $t \leq 1$ следующими формулами:

$$x(t)=t-1, \quad y(t)=\frac{g}{N}(\cos \sqrt{N}t-1).$$

Следовательно, при $0 \leq t \leq 1$ точка движется в узкой полосе $-2g/N \leq y \leq 0$, совершая колебания с большой частотой $\sqrt{N}$ (рис. 15). Затем в некоторый момент времени $\tau = 1 + O(N^{-1/2})$ точка попадает на ось $y=0$, причем $x(\tau) = O(N^{-1/2})$, $\dot{y}(\tau) = O(N^{-1/2})$. При $t > \tau$ точка будет двигаться по параболе в верхней полуплоскости. В пределе (когда $N \rightarrow \infty$) движение точки будет описываться как раз формулами (1.10).

В работе [21] можно найти обсуждение других механизмов реализации односторонних связей, основанных на эффекте присоединенных масс и введении анизотропного вязкого трения.

Теорема 2 применима, разумеется, не во всех случаях. В задаче о движении точки по инерции с односторонней связью, граница которой изображена на рис. 14, также можно ввести потенциальную энергию вида (1.7) и пытаться перейти к пределу в решениях «полных» уравнений движения при $N \rightarrow \infty$. Однако в этом случае, по всей видимости, предела не существует и поэтому вопрос о сходе точки со связи не является корректно поставленным.

Имея в виду подобного сорта возможности, Л. Прандтль писал: «...принимая во внимание получение... законов при помощи предельного перехода, не приходится удивляться, что в некоторых случаях решение становится неопределенным; простая рекомендация для перехода ко всем этим случаям это — подождать с предельным переходом до получения результата, иными словами, до выполнения интеграции. Только в том случае, когда и этот путь

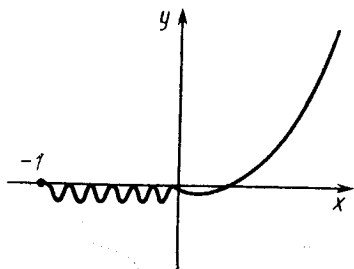


Рис. 15

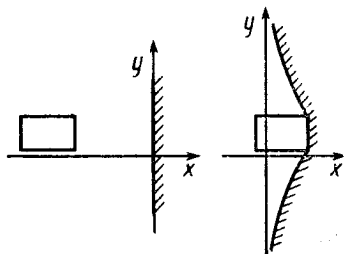


Рис. 16

привел бы к неопределенному ответу, можно было бы сказать, что поставленный вопрос теряет свой смысл для абсолютно твердого тела».

§ 2. НЕУПРУГИЙ УДАР И СРЕДА КЕЛЬВИНА—ФОЙГТА

В динамике систем с односторонними связями нас интересует прежде всего явление удара. В этом параграфе рассмотрим вопросы физической реализации различных математических моделей теории удара в простейшей ситуации: тело массой m движется по инерции вдоль оси x и в некоторый момент времени (скажем, при $t=0$) ударяется со скоростью $v>0$ о неподвижную стенку (рис. 16). Уравнение односторонней связи имеет вид $x\leq 0$.

При $t>0$ начинается процесс деформирования преграды и на тело уже будет действовать сила сопротивления p . Конкретный вид силы p зависит от физических свойств материала стенки. Для упругого материала $p=-Nx$, где x — величина деформации, а N — коэффициент (модуль) упругости. Ясно, что при больших значениях N тело m практически мгновенно покидает «запретную» область $x>0$ и будет двигаться влево с той же самой скоростью v (в силу сохранности энергии). Эти простые соображения приводят при $N\rightarrow\infty$ к математической модели абсолютно упругого удара.

Однако реальные тела обладают вязкоупругими свойствами: в процессе деформирования происходит рассеяние энергии. В механике имеется несколько различных моделей вязкоупругого поведения материалов (модели Кельвина — Фойгта, Максвелла и др.). В простейшей из них — модели Кельвина — Фойгта — сила сопротивления p имеет вид $-2k\dot{x}-c x$, где k и c — некоторые положительные постоянные, характеризующие физические свойства среды, заполняющей область $x>0$.

Для того чтобы затем перейти к пределу в решениях уравнения движения, положим

$$p = -2k\sqrt{N}\dot{x} - cNx. \quad (2.1)$$

Здесь N — некоторый безразмерный параметр, который затем будет устремлен к бесконечности. Решением уравнения движения $m\ddot{x} = p$ с начальным состоянием $x(0)$ и $\dot{x}(0)=v$ является функция

$$x(t) = \frac{v}{\lambda_+ - \lambda_-} (e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}), \quad (2.2)$$

где

$$\lambda_{\pm} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - mc}}{m} \sqrt{N}.$$

Считаем, что сила, действующая со стороны стенки на движущееся тело, всегда неположительна, т. е. стенка может выталки-

вать тело, но не может его удерживать (что довольно естественно с физической точки зрения). Из этого условия следует, что взаимодействие тела и преграды прекратится в момент времени t' , когда величина p (или $\dot{x}$) сменит знак с отрицательного на положительный. Величина t' удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x}(t') = \lambda_+^2 e^{\lambda_+ t'} - \lambda_-^2 e^{\lambda_- t'} = 0.$$

Отсюда получаем

$$t' = \frac{m \ln(\lambda_-/\lambda_+)}{\sqrt{k^2 - cm} \sqrt{N}},$$

причем в случае комплексно сопряженных $\lambda_{\pm}$ величину $\ln(\lambda_-/\lambda_+)$ следует выбирать таким образом, чтобы t' было наименьшим положительным числом.

Скорость тела в момент времени t' вычисляется по формуле

$$\dot{x}(t') = \frac{vm}{2\sqrt{k^2 - cm}\sqrt{N}} (\lambda_+ e^{\lambda_+ t'} - \lambda_- e^{\lambda_- t'}),$$

откуда получаем

$$\dot{x}(t') = -v \exp\left(-\frac{k}{\sqrt{k^2 - cm}} \ln \frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right). \quad (2.3)$$

Положим $v = cm/k^2$. Величина v принимает любые положительные значения, причем v близка к нулю, если диссипативные силы доминируют над упругими силами, и v велика — в противном случае.

Из формулы (2.3) получаем

$$\dot{x}(t') = -v \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{1-v}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-v}}{1 - \sqrt{1-v}}\right).$$

Пусть теперь $N \rightarrow \infty$. Тогда продолжительность соударения $t' \rightarrow 0$ и в пределе получаем модель Ньютона неупругого удара (см. введение, п. 5). График коэффициента восстановления

$$e(v) = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{1+v}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-v}}{1 - \sqrt{1-v}}\right)$$

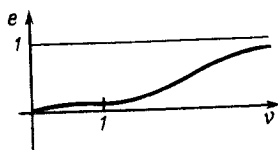


Рис. 17

приведен на рис. 17. Его величина заключена в интервале $(0, 1]$. Если $k=0$, то $v = +\infty$ и $e=1$. В этом случае удар будет абсолютно упругим.

Отметим, что аналогичный подход развивается в монографии В. Л. Рагульскене [29]: твердые тела заменяются упруго-пластическими с соответствующим

щими конечными коэффициентами k , c и затем решаются уравнения движения с учетом одностороннего характера ограничений. При этом в решениях уравнений движения не производится предельного перехода, и поэтому моменты удара имеют ненулевую длительность. Такой метод оказался весьма эффективным при решении широкого круга задач с линейными односторонними связями (см. [29]).

В дальнейшем пользуемся упрощенной моделью, в которой предполагается, что взаимодействие тела с преградой происходит в течение всего времени пребывания тела в области $x > 0$. Ясно, что это время больше значения t' из предыдущей задачи, и для моментов времени $t > t'$ получаем физически абсурдную картину: стенка «удерживает» тело m , когда оно движется от стенки в отрицательном направлении. Таким образом, вторая модель не претендует на физическое обоснование теории удара. Однако (как показано ниже) в результате некоторого предельного перехода она также приводит к модели удара с трением, изложенной во введении, а простота получающихся при этом формул позволяет развить эффективный метод решения ряда задач устойчивости движения в системах с неудерживающими связями (см. гл. 3). Идея метода состоит в следующем: односторонние связи заменяются средой Кельвина — Фойгта, и в решениях полученных уравнений движения совершается предельный переход, при котором коэффициенты упругости и диссипации некоторым согласованным образом устремляются к бесконечности. В пределе получается движение системы с неупругим ударом, причем характеристики среды Кельвина — Фойгта определяются по заданному с самого начала коэффициенту восстановления. Такой подход позволяет при решении задач о движении систем с ударами использовать обычные дифференциальные уравнения динамики с дополнительными силами определенного вида. Основным результатом здесь являются теоремы о предельном переходе из § 3, позволяющие обосновать различные модели удара в нелинейных системах.

Представление о некоторых других методах исследования динамики систем с ударами можно почерпнуть из добавления 1.

Итак, предположим, что мы находимся в условиях второй модели. Пусть коэффициенты упругости и диссипации связаны соотношением $mc > k^2$. Тогда решение уравнения движения $m\ddot{x} = p$ с начальными условиями $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = v$ удобно записать в виде

$$x(t) = \frac{v}{\omega \sqrt{N}} e^{-\lambda \sqrt{N} t} \sin \omega \sqrt{N} t,$$

где $\omega = \sqrt{mc - k^2}/m$, $\lambda = k/m > 0$. Через промежуток времени $\Delta t = \pi/(\omega \sqrt{N})$ координата x снова станет равной нулю, а скорость $\dot{x}$ будет равна $-ev$, где

$$e = \exp(-\pi\lambda/\omega). \quad (2.4)$$

Пусть теперь $N \rightarrow \infty$. Тогда продолжительность соударения $\Delta t \rightarrow 0$, и в пределе снова получаем модель Ньютона неупругого удара (см. введение, п. 5). Коэффициент восстановления дается формулой (2.4). Он выражается через физические постоянные среды Кельвина — Фойгта. Если $k=0$, то $e=1$. В этом случае удар будет абсолютно упругим.

Пусть теперь $k^2 > mc$. Тогда интересующее нас движение принимает вид (2.3). В рассматриваемом случае λ_+ и λ_- — вещественные отрицательные числа, причем $\lambda_{\pm} \sim \sqrt{N}$. Как видно из (2.3), функция $x(t) > 0$ при $t > 0$ и неограниченно убывает до нуля при $t \rightarrow +\infty$. Максимального значения она достигает в некоторой точке $t_* \sim 1/\sqrt{N}$, причем $x(t_*) \sim 1/\sqrt{N}$. Следовательно, при достаточно больших значениях N практически мгновенно деформация достигает максимальной величины, а затем происходит медленная релаксация к равномерному состоянию. В этом случае при $N \rightarrow \infty$ получаем математическую модель абсолютно неупругого удара. В промежуточном варианте, когда $k^2 = mc$, в пределе также имеем абсолютно неупругий удар.

§ 3. ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ

Укажем некоторые возможности физической реализации теории удара с трением, основанные на выполнении предельного перехода в полных уравнениях движения. Заодно будут найдены условия и границы применимости основных соотношений теории удара. С этой целью освободим механическую систему от связи $f \geq 0$ и введем в области $f < 0$ дополнительные потенциальные и диссипативные силы. Положим

$V_N = 0$, если $f \geq 0$ и $V_N = cNf^2/2$, если $f \leq 0$ ($c = \text{const} > 0$). (3.1)
Потенциал V_N порождает в полупространстве $f < 0$ «упругое» поле сил $-cNf\partial f/\partial x_i$, направленное к поверхности $\Sigma = \{f(x) = 0\}$. Силы вязкого трения определяются диссипативной функцией Рэля — неотрицательной квадратичной формой

$$\Phi_N = \sqrt{N} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \dot{x}_i \dot{x}_j. \quad (3.2)$$

Силы трения, как известно, равны $-\partial \Phi_N / \partial \dot{x}$. Они линейны по скоростям. Из механики известно, что если система совершает движение в потенциальном силовом поле с потенциальной энергией V под действием дополнительных сил вязкого трения с функцией Рэля Φ , то вдоль каждого движения $(T + V)' = -2\Phi$. В модельной задаче, рассмотренной в § 2, функция Рэля Φ_N равна $k\sqrt{N}\dot{x}^2$.

В формулах (3.1) и (3.2) присутствует безразмерный параметр N , который затем будет устремлен к бесконечности.

С диссипативной функцией (3.2) связана билинейная форма

$$(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \eta_j. \quad (3.3)$$

Пусть $\{e_i\}$ — ортонормированный базис $R^n = \{v\}$ (относительно метрики $\langle, \rangle$, задаваемой кинетической энергией), причем e_1 совпадает с вектором нормали n к поверхности Σ , а $e_2, \dots, e_n$ лежат в касательной плоскости к Σ . Предположим, что

$$(e_1, e_i) = 0 \quad (3.4)$$

для всех $i \geq 2$. Это условие накладывает ограничение на вид диссипативной функции Φ_N .

В качестве важного частного случая рассмотрим диссипативную функцию Рэлея

$$\Phi_N = k \sqrt{N} (\dot{x})^2 = k \sqrt{N} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i \right)^2. \quad (3.5)$$

Коэффициенты a_{ij} в общей формуле (3.2) равны, очевидно, $\partial f / \partial x_i, \partial f / \partial x_j$, а билинейная форма (3.3) принимает вид произведения

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \xi \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \eta \right).$$

Так как векторы базиса $e_2, \dots, e_n$ лежат в касательной плоскости к Σ , то

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} e_i \right) = 0, \quad i \geq 2.$$

Следовательно, для любого вектора ξ каждое скалярное произведение

$$(\xi, e_i) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \xi \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x} e_i \right), \quad i \geq 2,$$

равно нулю. Поэтому для функции Рэлея (3.5) условие (3.4) заведомо выполнено. Отметим, что если движение происходит по поверхности $f = \text{const}$, то силы трения с функцией Рэлея (3.5) не рассеивают энергию.

В области $f \geq 0$ движение механической системы описывается уравнениями (1.1), а в области $f < 0$ — уравнениями

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = F_i - \frac{\partial V_N}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_N}{\partial \dot{x}_i}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3.6)$$

При заменах обобщенных координат обе части этой системы уравнений преобразуются по ковариантному закону.

Рассмотрим решение системы (3.6) с начальными данными $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v$, причем

$$f(0) = 0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \bigg|_0 v_i < 0. \quad (3.7)$$

Следуя § 2, рассмотрим две модели взаимодействия точки с преградой Σ . В первой (физической) модели предполагается, что взаимодействие продолжается до тех пор, пока

$$\left\langle \frac{\partial V_N}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_N}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle_* > 0. \quad (3.8)$$

Скалярное произведение ковекторов $\partial V_N / \partial x + \partial \Phi_N / \partial x$ и $\partial f / \partial x$ вычисляется в метрике, двойственной метрике $\langle, \rangle$ и задается матрицей, обратной к g_{ij} . Условие (3.8) означает, что сила реакции преграды может быть направлена лишь в сторону возрастания функции f .

Во второй (упрощенной) модели предполагается, что взаимодействие системы с преградой имеет место во всей области $f(x) < 0$.

При достаточно малых $t > 0$ точка $x(t)$ заведомо попадет в область $f(x) < 0$. Оказывается, в момент времени $t_N \sim 1/\sqrt{N}$ точка $x(t)$ перестанет взаимодействовать с преградой, причем при $N \rightarrow \infty$ скорость v' в этот момент линейно зависит от v ($v' = \Lambda v$), и собственные значения оператора восстановления Λ можно выразить через физические параметры задачи.

Рассмотрим ковектор p с координатами $p_i = \partial f / \partial x_i(0)$. Пусть $\langle, \rangle_*$ — метрика в двойственном пространстве $R^n = \{p\}$, определяемая матрицей, обратной к $g_{ij}(0)$ (ср. с обозначением в формуле (3.8)). Положим $|p|_*^2 = \langle p, p \rangle_*$. Пусть $v_1, \dots, v_n$ — корни характеристического уравнения $|a_{ij}(0) - v g_{ij}(0)| = 0$ и $e_1, \dots, e_n$ — соответствующие собственные векторы матрицы $\|a_{ij}(0)\|$ относительно матрицы $\|g_{ij}(0)\|$. В силу условия (3.4) одним из собственных векторов является вектор нормали n к Σ в точке $x=0$. Будем считать, что $e_1 = n$.

Пусть

$$t' = \frac{\ln(\lambda_-/\lambda_+)}{\sqrt{v_1^2 - c|p|_*^2} \sqrt{N}}, \quad \mu = \frac{c|p|_*^2}{v_1^2},$$

где $\lambda_{\pm}$ — корни уравнения

$$\lambda^2 + 2v_1\lambda + |p|_*^2 c = 0, \quad (3.9)$$

причем в случае комплексных $\lambda_{\pm}$ опять условимся величину $\ln(\lambda_-/\lambda_+)$ выбирать таким образом, чтобы t'_N было наименьшим положительным числом.

Теорема 3. В рамках первой модели

- 1) в интервале времени $0 < t < t_N$, $t_N = t' + o(1/\sqrt{N})$ функция $f(x(t))$ отрицательна,
- 2) существует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \dot{x}_N(t_N) = \Lambda v, \quad (3.10)$$

где Λ — постоянный линейный оператор с собственными направлениями $e_1, \dots, e_n$ и собственными значениями

$$\lambda_1 = -\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\mu}} \ln \frac{1+\sqrt{1-\mu}}{1-\sqrt{1-\mu}}\right),$$

$$\lambda_i = \exp\left(-\frac{2v_i}{v_1 \sqrt{1-\mu}} \ln \frac{1+\sqrt{1-\mu}}{1-\sqrt{1-\mu}}\right).$$

Теорема 4. Рассмотрим вторую модель взаимодействия тела с преградой. Предположим, что $c|p|_*^2 > v_1^2$. Тогда

- 1) в интервале времени $0 < t < t_N$, $t_N = \pi/(\omega \sqrt{N}) + o(1/\sqrt{N})$, $\omega = \sqrt{c|p|_*^2 - v_1^2}$ функция $f(x(t))$ отрицательна и $x(t_N) \in \Sigma$,
- 2) существует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \dot{x}_N(t_N) = \Lambda v,$$

где Λ — постоянный линейный оператор с собственными направлениями $e_1, \dots, e_n$ и собственными значениями

$$\lambda_1 = -\exp\left(-\frac{\pi v_1}{\omega}\right), \quad \lambda_i = \exp\left(-\frac{2\pi v_i}{\omega}\right). \quad (3.11)$$

Левая часть соотношения (3.10) равна как раз v' — скорости точки $x(t)$ после удара. Таким образом, теорема 3 дает физическое обоснование аксиоматической теории удара с трением (введение, п. 9). Если $\Phi_N = 0$ (диссипация отсутствует), то $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$ и (3.10) является основным соотношением теории абсолютно упругого удара. При $c|p|_*^2 \leq v_1^2$ в рамках второй модели не происходит отскока точки $x(t)$ от поверхности Σ ; в этом случае удар будет абсолютно неупругим (ср. с задачей, рассмотренной в § 2).

Обсудим более подробно случай, когда диссипативная функция Рэля задана формулой (3.5). Покажем, что каждый касательный к Σ вектор является собственным для матрицы

$$\|a_{ij}\| = k \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|$$

с нулевым собственным значением. Действительно, если вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ касается Σ , то

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_j} \xi_j = 0.$$

Поэтому

$$\sum_i a_{ij} \xi_j = k \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \xi_j = k \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \xi_j \right) = 0$$

для всех значений i . Так как $\dim \Sigma = n-1$, то среди корней $v_1, v_2, \dots, v_n$ характеристического уравнения последние $n-1$ равны нулю. Поэтому оператор Λ оставляет на месте все касательные векторы к Σ в точке $x=0$, и, в частности, $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$. Таким образом, для функции Рэля (3.5) в пределе при $N \rightarrow \infty$ получаем классическую модель Ньютона для неупругого удара (введение, п. 5).

Теорема 4 установлена в работе [23]. Частный случай функции Рэля вида (3.5) рассмотрен ранее в [21]. Доказательство теоремы 3 проводится методом работы [23].

Лемма 1 [30]. Пусть $f(0)=0$ и $df(0) \neq 0$. Тогда в окрестности точки $x=0$ существуют локальные координаты $x_1, \dots, x_n$, такие, что $f(x) = x_1$ и $g_{ij}(x) = 0$ для всех $j \geq 2$.

В римановой геометрии координаты с такими свойствами называются *полугеодезическими*. Отметим, что в силу предположения (3.4) $a_{ij}(x) = 0$, когда $j \geq 2$.

Доказательство леммы. Перейдем к новым координатам $q_1, \dots, q_n$ по формулам

$$x_k = \varphi_k(q_1, \dots, q_n), \quad 1 \leq k \leq n; \quad \varphi_1(q) = q_1.$$

В новых переменных кинетическая энергия имеет вид

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Оказывается, функции $\varphi_2, \dots, \varphi_n$ можно подобрать таким образом, чтобы $A_{1m} = 0$ для всех $m \geq 2$. Действительно,

$$\dot{x}_k = \sum_m \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_m} \dot{q}_m, \quad \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_m}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A_{1m} &= \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_m} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\sum_{i,j=2}^n \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_i \dot{x}_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_m} \right) = \\ &= \sum_{i,j=2}^n \left(a_{ij} + \sum_{l=2}^n a_{il} \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_1} \right) \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_m}. \end{aligned}$$

Рассмотрим обыкновенную систему дифференциальных уравнений

$$\sum_{i \geq 2} a_{ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_1} = -a_{1j}, \quad j \geq 2,$$

где a_{kl} — известные функции от $\varphi_1 = q_1$ и $\varphi_2, \dots, \varphi_n$. Так как

$$|a_{ij}| > 0, \quad i, j = 2, \dots, n,$$

то эту систему можно однозначно разрешить относительно производных $\partial \varphi_i / \partial q_1$. Решая ее с начальными данными

$$\varphi_i(0, q_2, \dots, q_n) = q_i \quad (i \geq 2),$$

получим требуемую невырожденную замену переменных.

Лемма доказана.

Запишем в явном виде уравнения (3.6) в полугеодезических координатах:

$$g_{11}\ddot{x}_1 + \sum_{k,l} \Psi_{kl}^1(x) \dot{x}_k \dot{x}_l = F_1 - cN\dot{x}_1 - 2\sqrt{N} a_{11}\dot{x}_1, \quad (3.12)$$

$$\sum_{j \geq 2} g_{ij}\ddot{x}_j + \sum_{k,l} \Psi_{kl}^i(x) \dot{x}_k \dot{x}_l = F_i - 2\sqrt{N} \sum_{j \geq 2} a_{ij}\dot{x}_j, \quad i \geq 2.$$

Выполним замену времени $\tau = \sqrt{N} t$. Обозначая штрихом дифференцирование по τ , получим: $\dot{\varphi} = \varphi' \sqrt{N}$, $\ddot{\varphi} = \varphi'' N$. Вводя малый параметр $\varepsilon = 1/\sqrt{N}$, перепишем уравнения (3.12):

$$g_{11}x_1'' + 2a_{11}x_1' + cx_1 = -\sum \Psi_{kl}^1 x_k' x_l' + \varepsilon^2 F_1$$

$$\sum_{j \geq 2} g_{ij}x_j'' + 2 \sum_{j \geq 2} a_{ij}x_j' = -\sum \Psi_{kl}^i x_k' x_l' + \varepsilon^2 F_i, \quad i \geq 2. \quad (3.13)$$

Выполним еще постановку $x_i = \varepsilon z_i$ ($1 \leq i \leq n$). В новых переменных z_i уравнения (3.13) примут следующий вид:

$$g_{11}^0 z_1'' + 2a_{11}^0 z_1' + cz_1 = \varepsilon \Theta_1(z, z', \tau, \varepsilon), \quad (3.14)$$

$$\sum_{j \geq 2} g_{ij}^0 z_j'' + 2 \sum_{j \geq 2} a_{ij}^0 z_j' = \varepsilon \Theta_i(z, z', \tau, \varepsilon), \quad i \geq 2,$$

где $g_{ij}^0 = g_{ij}(0)$, $a_{ij}^0 = a_{ij}(0)$, Θ_i — гладкие функции от $z_1, \dots, z_n, z_1', \dots, z_n', \tau$ и ε . Так как в начальный момент нового времени $x_i(0) = 0$, $x_i'(0) = \varepsilon v_i(0) = \varepsilon v_i$, то уравнения (3.14) надо решать с начальными данными

$$z_i(0) = 0, \quad z_i'(0) = v_i. \quad (3.15)$$

Наряду с системой уравнений (3.14) рассмотрим линейную систему

$$g_{11}^0 z_1'' + 2a_{11}^0 z_1' + cz_1 = 0, \quad (3.16)$$

$$\sum_{j \geq 2} g_{ij}^0 z_j'' + 2 \sum_{j \geq 2} a_{ij}^0 z_j' = 0, \quad i \geq 2,$$

которая получается из (3.14) при $\varepsilon=0$, и ее решения с теми же самыми начальными данными (3.15). Из известной теоремы о сравнении решений систем уравнений с мало различающимися правыми частями вытекает, что решения невозмущенной системы (3.16) аппроксимируют решение $z(\tau, \varepsilon)$ полной системы (3.14) с точностью до $O(\varepsilon)$ на любом фиксированном промежутке времени.

Изучим более подробно решения линейной системы (3.16). Уравнения для переменных z_1 и $z_2, \dots, z_n$ разделяются, и их можно решать отдельно. Так как $v_1 = |v_n|$, то искомое решение первого уравнения системы (3.16) имеет следующий вид:

$$z_1 = \frac{|v_n|}{\lambda_+ - \lambda_-} (e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}), \quad (3.17)$$

где $\lambda_{\pm}$ — корни характеристического уравнения

$$g_{11}^0 \lambda^2 + 2a_{11}^0 \lambda + c = 0.$$

В силу равенств $v_1 = a_{11}^0 / g_{11}^0$, $1/g_{11} = |p|_*^2$ они удовлетворяют уравнению (3.8).

Из результатов § 2 (формула (2.3)) и теоремы сравнения вытекает, что в момент времени

$$t = \frac{\ln(\lambda_- / \lambda_+)}{\sqrt{v_1^2 - c|p|_*^2} \sqrt{N}} + o \frac{1}{\sqrt{N}}$$

ускорение

$$\ddot{x}_1(t) = \left\langle \frac{\partial V_N}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_N}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle_*$$

сменит знак и взаимодействие точки x с преградой прекратится. Если $\hat{v}_n$ — нормальная составляющая скорости в этот момент, то

$$\hat{v}_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{v}_n(t_N) = -v_n \exp \left(- \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 - c|p|_*^2}} \ln \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right). \quad (3.18)$$

Следовательно,

$$\hat{v}_n = \lambda_1 v_n, \quad \lambda_1 = - \exp \left(- \frac{1}{\sqrt{1-\mu}} \ln \frac{1+\sqrt{1-\mu}}{1-\sqrt{1-\mu}} \right),$$

$$\mu = c|p|_*^2 / v_1^2, \quad -1 \leq \lambda_1 < 0.$$

Решим теперь уравнения для $z_2, \dots, z_n$. Так как матрица $G = \|g_{ij}^0\|$ положительно определена, а матрица $A = \|a_{ij}^0\|$ симметрична, то линейной заменой переменных $z_2, \dots, z_n \mapsto y_2, \dots, y_n$

матрица G приводится к единичной, а A — к диагональной $\text{diag}[\nu_2, \dots, \nu_n]$. Ясно, что ν_i являются корнями характеристического уравнения $|A - \nu G| = 0$. Так как функция Рэлея F_N неотрицательна, то все $\nu_i \geq 0$. В новых переменных у уравнения (3.16) разделятся:

$$y_i'' + 2\nu_i y_i' = 0, \quad i \geq 2.$$

*Решая их с начальными условиями $y_i(0) = 0$, $y_i' = u_i$, получим

$$y_i = \frac{u_i}{2\nu_i} (1 - e^{-2\nu_i \tau}), \quad i \geq 2.$$

Следовательно, значение скорости y_i' в момент времени

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\nu_1^2 - c|p_*|^2}} \ln \frac{\lambda_-}{\lambda_+} = \frac{1}{\nu_1 \sqrt{1-\mu}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-\mu}}{1 - \sqrt{1-\mu}}$$

равно

$$u_i \exp \left(- \frac{2\nu_i}{\nu_1 \sqrt{1-\mu}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-\mu}}{1 - \sqrt{1-\mu}} \right).$$

Ясно, что числа

$$\lambda_i = \exp \left(- \frac{2\nu_i}{\nu_1 \sqrt{1-\mu}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-\mu}}{1 - \sqrt{1-\mu}} \right), \quad 0 < \lambda_i \leq 1, \quad i \geq 2$$

являются собственными числами ограничения оператора Λ на касательную плоскость к Σ в точке $x=0$. Теорема 3 доказана.

§ 4. УСРЕДНЕНИЕ В СИСТЕМАХ С УДАРАМИ

В дальнейшем нас уже не будут интересовать вопросы физического обоснования теории удара. Поэтому, не оговаривая особо, мы будем использовать упрощенную модель взаимодействия точки с преградой (см. § 2, 3).

Теорема 4 дает возможность исследования движения механических систем с ударами на больших интервалах времени, основываясь на использовании дифференциальных уравнений определенного вида. Поясним эту идею на некоторых модельных задачах.

Рассмотрим классическую задачу о движении точки между параллельными стенками с абсолютно упругими отражениями. Если расстояние между стенками l медленно меняется со временем ($l=f(\epsilon t)$, где f — гладкая функция, ϵ — малый параметр), то произведение скорости точки v на расстояние l является адиабатическим инвариантом: на временах t порядка ϵ^{-1} справедливо неравенство $|v(t)l(t) - v(0)l(0)| < c\epsilon$, $c = \text{const} > 0$ (введение, задача 5).

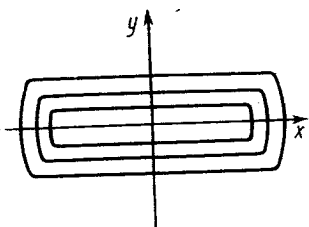


Рис. 18

Результат об адиабатической инвариантности произведения νl можно получить с помощью метода § 3. С этой целью заменим односторонние связи упругими силами с потенциалом

$$V_N = Nx^2/2, \quad x \leq 0; \quad V_N = 0, \quad 0 \leq x \leq l; \quad (4.1)$$

$$V_N = N(x-l)^2/2, \quad x \geq l.$$

Динамика точки будет описываться уравнениями Гамильтона с гамильтонианом $H = y^2/2 + V_N$, зависящим от медленно меняющегося параметра l . При фиксированных значениях l получим интегрируемую систему с одной степенью свободы. Ее фазовый портрет изображен на рис. 18. Хорошо известно, что переменная действие

$$I(h) = \frac{1}{2\pi} \oint_{H \leq h} dx dy$$

является адиабатическим инвариантом (когда гамильтониан H медленно зависит от времени; см., например, [3, гл. 5]). Исторически этот результат сыграл важную роль в развитии квантовой механики: согласно правилу квантования Бора — Зоммерфельда переменные действия полагались целыми кратными постоянной Планка. Основанием для такого правила было свойство «нечувствительности» адиабатических инвариантов по отношению к «плавным» изменениям параметров системы.

Вычисления показывают, что в нашем случае

$$I = \sqrt{2H} \, l/\pi + H/\sqrt{N}. \quad (4.2)$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$ и замечая, что в этом случае $2H = v^2$, получаем классическую формулу $I = vl/\pi$.

Используя формулу (4.2), рассмотрим задачу об эволюции переменной I в случае, когда удар является почти абсолютно упругим: коэффициент восстановления $e < 1$ мало отличается от 1. Предположим для простоты, что расстояние между стенками не меняется. Кроме упругого потенциала (4.1) введем еще силу сопротивления $-2k\sqrt{N}x$ ($x \leq 0$ и $x \geq l$) с малым коэффициентом вязкости k . Для того чтобы сразу получить предельную формулу (когда $N \rightarrow \infty$), будем пренебрегать членами $O(1/\sqrt{N})$. Из (4.2) получим

$$\dot{I} = \frac{l}{\pi \sqrt{2H}} \dot{H} = 0, \quad \text{если } 0 \leq x \leq l; \quad (4.3)$$

$$\dot{I} = -\frac{2lk\sqrt{N}}{\pi \sqrt{2H}} x^2, \quad \text{если } x \leq 0 \text{ или } x \geq l.$$

Воспользуемся *принципом усреднения*, применявшимся еще Гауссом при анализе возмущений кеплеровых орбит планет (см. [3, гл. 5]). Для этого усредним правую часть уравнения (4.3) по периоду невозмущенного периодического движения

$$x(t) = -\frac{v}{\sqrt{N}} \sin \sqrt{N} t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\sqrt{N}}; \quad x(t) = 0,$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{N}} \leq t \leq \frac{\pi}{\sqrt{N}} + \frac{l}{v}.$$

Значения функции $x(t)$ указаны на ее полупериоде. Замечая, что при $N \rightarrow \infty$ справедливы формулы $l = v l / \pi$ и $H = v^2 / 2$ (см. (4.2)), приходим к усредненному уравнению для скорости:

$$\dot{v} = -\frac{k\pi}{l} v^2. \quad (4.4)$$

При малых значениях k из формулы (2.4) получим, что $k\pi = -\ln e$. Интегрируя (4.4), приходим к искомому закону эволюции скорости

$$v = v_0 l / [l - (\ln e) v_0 t].$$

Так как $\ln e < 0$, то скорость медленно убывает. Согласно результатам теории возмущений ([3, гл. 5]), эта формула удовлетворительно описывает эволюцию движения на временах порядка $1/(1-e)$. Поэтому (ввиду близости e к 1) здесь можно заменить $\ln e$ на $e-1$.

Применим этот результат для исследования более сложной задачи об эволюции движения точки по инерции внутри окружности в случае, когда коэффициенты восстановления ударов с трением близки к единице. Положим для простоты массу точки и радиус окружности равными единице. В соответствии с рассмотрениями § 3 введем в области $x^2 + y^2 \geq 1$ поле упругих сил с потенциалом

$$V_N = cN(x^2 + y^2)/2, \quad c = \text{const} > 0,$$

и диссипативные силы с функцией Рэлея

$$\Phi_N = \varepsilon k \sqrt{N} (a \mathbf{v}_\tau^2 + b \mathbf{v}_n^2),$$

где $k = \text{const} > 0$, a, b — безразмерные положительные постоянные, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\mathbf{v}_n$ и $\mathbf{v}_\tau$ — радиальная и касательные составляющие вектора скорости. При $\varepsilon = 0$ будем иметь невозмущенную интегрируемую задачу с двумя степенями свободы — центральное движение материальной точки по плоскости. Ее первыми интегралами будут полная механическая энергия H и кинетический момент K точки относительно начала координат. Составим уравнения движения вида (1.1) и (3.6) и перейдем к *переменным действие — угол* невозмущенной задачи. Так как невозмущен-

ная задача невырожденна, то можно воспользоваться принципом усреднения и усреднить правые части невозмущенных уравнений по обеим быстрым угловым переменным (относительно обоснования этой процедуры см. [3, гл. 5]). При $N \rightarrow \infty$ усредненные уравнения для медленных переменных H и K принимают следующий вид:

$$\dot{K} = -\varepsilon g a K, \quad \dot{H} = -\varepsilon g \left[\left(a - \frac{b}{2} \right) K^2 + b H \right],$$

$$g = \frac{\pi k}{\sqrt{c}} \frac{2H}{\sqrt{2H - K^2}} > 0. \quad (4.5)$$

В переменных H, K^2 получим фазовый портрет линейной системы дифференциальных уравнений, у которой положение равновесия $H=K=0$ является устойчивым узлом (поскольку $a, b > 0$).

Особенно просто система (4.5) выглядит в случае, когда $b = 2a$: функция H/K^2 является ее первым интегралом. Этот факт эквивалентен постоянству угла отскока точки от границы бильярда.

Коэффициенты восстановления можно выразить через параметры задачи с помощью формул (3.10). Действительно, для коэффициента восстановления по нормали λ_n имеем

$$\nu_n = b\varepsilon, \quad \omega = \sqrt{c} + O(\varepsilon). \quad (4.6)$$

Из (3.10) и (4.6) получаем, что $\lambda_n = -1 + \pi k b \varepsilon / \sqrt{c} + o(\varepsilon)$. Для коэффициента восстановления по касательной получаем аналогично формулу: $\lambda_\tau = 1 - 2\pi k a \varepsilon / \sqrt{c} + o(\varepsilon)$. Если $b = 2a$, то $\lambda_\tau = -\lambda_n + o(\varepsilon)$. В случае равенства $|\lambda_\tau| = |\lambda_n|$, очевидно, угол падения равен углу отражения.

На фазовой плоскости переменных K^2, H движение может происходить в области

$$2H > K^2 \geq 0.$$

Эта область инвариантна относительно фазового потока системы (4.5). Фазовые портреты изображены на рис. 19, а, б, в. Все траектории входят в начало координат $H=K=0$. Если $b > 2a$, то они касаются прямой $2H=K^2$, а при $b < 2a$ — оси $K=0$.

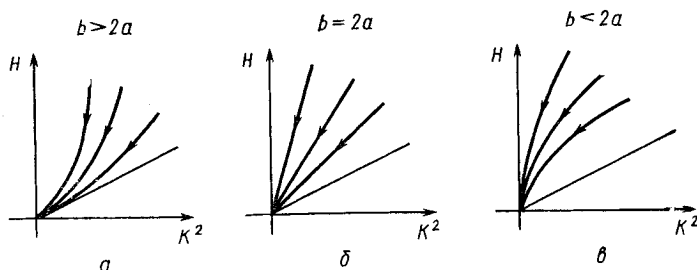


Рис. 19. а) $b > 2a$, б) $b = 2a$, в) $b < 2a$

На рис. 20, а, б изображены фазовые портреты системы (4.5) в вырожденных случаях, когда один из параметров a, b равен нулю. Если $a=0$, то через конечное время точка будет двигаться по окружности $x^2+y^2=1$ с постоянной скоростью. Если $b=0$, точка будет асимптотически стремиться к движению по диаметру этой окружности.

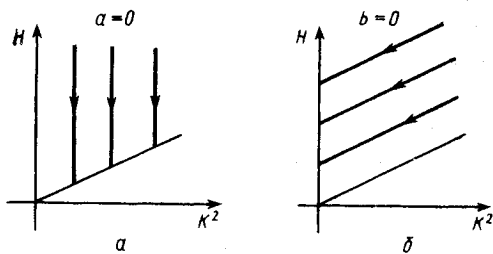


Рис. 20

§ 5: НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

В области $f \geq 0$ снова зададим потенциальное силовое поле с потенциалом (3.1) и дополнительные силы

$$\Phi_N^i = -2\sqrt{N} \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \dot{x}_j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5.1)$$

линейные по скоростям. Матрица $\|a_{ij}\|$ уже не предполагается симметричной. Силы (5.1) будем считать диссипативными: $\sum \Phi_N^i x_i \leq 0$. Это условие, очевидно, эквивалентно неравенству

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \dot{x}_i \dot{x}_j \geq 0$$

или неотрицательной определенности матрицы $\|a_{ij} + a_{ji}\|$. Если матрица $\|a_{ij}\|$ симметрична, то силы (5.1) можно задать с помощью функции Рэля (3.2).

В области $f \geq 0$ движение системы описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = F_i - \frac{\partial V_N}{\partial x_i} + \Phi_N^i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (5.2)$$

Рассмотрим решение $x(t)$ системы (5.2) с начальными данными $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=v$, удовлетворяющими неравенству (3.7). Вводя полугеодезические координаты $x_1, \dots, x_n$ ($f \equiv x_1$) и выполняя подстановки $t = \varepsilon \tau$, $x_i = \varepsilon z_i$ ($\varepsilon = 1/\sqrt{N}$), получим систему уравнений, обобщающую (3.14)

$$g_{11}^0 \ddot{z}_1'' + 2 \sum_j a_{1j}^0 \dot{z}_j' + c z_1 = \varepsilon \Theta_1(z, z', \tau, \varepsilon),$$

$$\sum_j g_{ij}^0 \ddot{z}_j'' + 2 \sum_j a_{ij}^0 \dot{z}_j' = \varepsilon \Theta_i(z, z', \tau, \varepsilon). \quad (5.3)$$

Здесь снова $g_{ij}^0 = g_{ij}(0)$, $a_{ij}^0 = a_{ij}(0)$.

Рассмотрим сначала случай, когда

$$a_{ij}^0 = 0, \quad j \geq 2; \quad a_{i1}^0 = 0, \quad i \geq 2. \quad (5.4)$$

В этом случае невозмущенные линейные уравнения для z_1 и $z_2, \dots, z_n$ снова разделяются. Если $cg_{11} > (a_{11}^0)^2$, то для z_1 получаем соотношения (3.17) — (3.18). Можно проверить выполнение предельного соотношения (3.9), причем оператор Λ переводит касательную плоскость к Σ в себя и в этой инвариантной плоскости он задается матрицей

$$\exp\left(-\frac{2\pi}{\omega} G^{-1} A\right),$$

где $A = \|a_{ij}^0\|$, $G = \|g_{ij}\|$; $i, j = 2, \dots, n$. Так как матрица A в общем случае несимметрична, то $\Lambda^T \neq \Lambda$.

Если вместо (5.4) потребовать лишь выполнения равенств $a_{ij}^0 = 0$ ($j \geq 2$), то оператор Λ уже не будет переводить касательную плоскость Σ в себя, хотя по-прежнему вектор нормали n будет его собственным вектором. В самом общем случае (когда $a_{1j}^0 \neq 0$) при выполнении определенных условий будет справедливо предельное соотношение (3.9), однако при этом вектор нормали n к поверхности Σ уже не будет собственным вектором оператора восстановления.

В заключение отметим одно любопытное явление. При нарушении соотношений (5.4) для некоторых скоростей $\dot{x}(0) = v$, удовлетворяющих неравенству (3.7), произойдет абсолютно неупругий удар (в пределе, при $N \rightarrow \infty$), причем одновременно будут существовать направления скоростей v , подчиняющихся (3.7), при которых точка $x(t)$ мгновенно отразится от поверхности Σ . Это явление имеет место уже для $n=2$, когда $a_{21} = 0$, а $a_{12} \neq 0$.

ЗАДАЧИ

1. Пусть

$$\Sigma_i = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0\}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

— регулярные гиперповерхности, попарно ортогонально пересекающиеся (во внутренней метрике $\langle, \rangle$) в точке $x=0$. Введем функции

$$V_{N_i} = \begin{cases} 0, & \text{если } f_i \geq 0; \\ N_i f_i^2 / 2, & \text{если } f_i \leq 0, \end{cases}$$

$$\Phi_{N_i} = \begin{cases} 0, & \text{если } f_i \geq 0; \\ k_i \sqrt{N_i} (f_i)^2, & \text{если } f_i \leq 0. \end{cases}$$

Здесь $N_i = \text{const} > 0$, $k_i = \text{const} \geq 0$. Пусть $\mathbf{x}_{N_1 \dots N_m}(t)$ — решение уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} = F - \sum_{i=1}^m \frac{\partial V_{N_i}}{\partial \mathbf{x}} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Phi_{N_i}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$$

с начальными данными

$$\mathbf{x}_N(0) = 0, \quad \dot{\mathbf{x}}_N(0) = \mathbf{v}^-,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(0) v_i^- < 0, \quad 1 \leq i \leq m;$$

где для краткости набор $N_1, \dots, N_m$ обозначен через N .

Доказать, что при достаточно больших значениях N_i через конечный промежуток времени t_N точка $\mathbf{x}_N(t)$ попадает в область

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f_1(\mathbf{x}) \geq 0, \dots, f_m(\mathbf{x}) \geq 0\},$$

причем существует

$$\lim_{N_1, \dots, N_m \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{x}}(t_N) = \mathbf{v}^+.$$

Соответствие $\mathbf{v}^- \rightarrow \mathbf{v}^+$ дает корректный закон отражения при кратном ударе.

2. Вывести неравенства Карно из теоремы 4.

3. Герц исследовал статическую задачу о вдавливании твердого шара в упругое полупространство и показал, что при этом возникает упругая сила, пропорциональная смещению, возведенному в степень $3/2$. В соответствии с этим результатом заменим формулу (2.1) для силы сопротивления формулой

$$p = -2k\dot{x} - c\dot{x}^{3/2}, \quad k > 0, \quad c > 0.$$

Пусть $x(t)$ — решение уравнения $m\ddot{x} = p$ с начальными данными $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v^- > 0$. Через $\tau > 0$ обозначим первый положительный нуль функции $x(t)$ и положим

$$v^+ = \dot{x}(\tau) < 0, \quad e(v) = -v^+/v^-.$$

Доказать, что $0 < e < 1$ и

$$\lim_{v^- \rightarrow 0} e(v^-) = 0, \quad \lim_{v^- \rightarrow \infty} e(v^-) = 1$$

(ср. этот результат с экспериментальной зависимостью e от скорости на рис. 13).

4. Для вязкоупругой среды Максвелла смещение x и сила p связаны соотношением

$$\nu p + \frac{1}{c} \dot{p} = \dot{x},$$

где коэффициент $c(\nu)$ характеризует упругость (вязкость) среды. Следуя § 2, рассмотрите задачу об ударе тела о преграду, считая полупространство $x \geq 0$ средой Максвелла, и найдите выражение для коэффициента восстановления через физические параметры задачи.

Глава 2

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ БИЛЛИАРДА БИРКГОФА

Простейший класс движений бильярдных систем составляют периодические движения; их траектории, очевидно, замкнуты. На первый взгляд может показаться, что периодические траектории не могут представлять реального интереса, поскольку лишь с нулевой вероятностью начальные условия движения будут в точности отвечать начальным условиям периодического решения. Однако может случиться, что эти данные мало отличаются друг от друга. Тогда можно взять траекторию периодического решения за начальное приближение и изучить поведение «возмущенных» траекторий в ее окрестности. Такой путь оказывается весьма плодотворным. С другой стороны, согласно гипотезе Пуанкаре (пока не доказанной в полном объеме), в типичной ситуации периодические траектории консервативных систем всюду плотно заполняют компактные поверхности уровня интеграла энергии. По мнению Пуанкаре, особая ценность периодических решений заключается в том, что они являются единственной брешью, через которую мы можем проникнуть на территорию динамических систем, не поддающихся точному интегрированию ([66, п. 36]).

§ 1. ТЕОРЕМА БИРКГОФА

Напомним, что бильярдом Биркгофа называется динамическая система следующего вида. Пусть имеется замкнутая выпуклая кривая на плоскости. В области, ограниченной этой кривой, движется точка. Внутри области движение происходит равномерно и прямолинейно, а отскок от кривой является абсолютно упругим (угол падения равен углу отражения).

Интересными являются вопросы исследования периодических траекторий бильярда. Любой периодической траектории соответствует вписанная замкнутая ломаная. Числом звеньев траектории будем называть число звеньев этой ломаной.

Условимся считать, что длина кривой бильярда равна единице (иначе воспользуемся преобразованием подобия с соответствующим коэффициентом, которое сохранит качественную картину движения). Введем натуральный параметр $\varphi \bmod 1$.

Пусть последовательность точек $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ задает n -звенную периодическую траекторию бильярда. Величины $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ определены с точностью до добавления целого числа. Пусть они выбраны таким образом, что все разности

$\Phi_2 - \Phi_1, \Phi_3 - \Phi_2, \dots, \Phi_n - \Phi_{n-1}, \Phi_1^* - \Phi_n$ заключены между 0 и 1, где $\Phi_1^* = \Phi_1 \bmod 1$. Назовем целое число $k = \Phi_1^* - \Phi_1$ *числом оборотов* периодической траектории вокруг кривой билиярда. Очевидно, число k инвариантно связано с траекторией и $0 < k < n$.

В настоящей главе будет дано вариационное доказательство теоремы Биркгофа о существовании периодических траекторий билиярда в следующей уточненной формулировке.

Теорема 1. Пусть дана гладкая замкнутая выпуклая плоская кривая, имеющая в любой точке ненулевую кривизну. Тогда для любых $n, k \in \mathbb{N}; n > k$ существуют по крайней мере две геометрически различные периодические траектории билиярда Биркгофа, имеющие n звеньев и совершающие k оборотов вокруг кривой. Для одной из этих траекторий соответствующая вписанная замкнутая n -звенная ломаная имеет максимальную длину среди всех близких вписанных замкнутых n -звенных ломаных. Если этот максимум — изолированная критическая точка функции длины L на множестве n -звенных вписанных ломаных, то ломаная, соответствующая другой периодической траектории, изолированным максимумом функции L не является.

Существование двух периодических траекторий установлено Биркгофом с помощью последней теоремы Пуанкаре: всякое отображение двумерного кольца на себя, сохраняющее площадь и вращающее границы кольца в противоположных направлениях, имеет не менее двух геометрически различных неподвижных точек [67]. Эта теорема была высказана Пуанкаре. Ее доказательство дано Биркгофом (см. [42]). Ниже приводится вариационное доказательство теоремы 1 из работы [34].

Задача отыскания периодических траекторий сводится к некоторой вариационной задаче. Каждой замкнутой вписанной n -звенной ломаной можно сопоставить (неоднозначно) точку n -мерного тора $T^n = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \bmod 1\}$, где упорядоченный набор $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ представляет координаты соответствующих вершин ломаной. Сразу виден произвол в выборе переменных φ : одной и той же ломаной соответствуют точки тора, отличающиеся друг от друга циклической перестановкой координат.

Рассмотрим множество $D = \{\varphi \in T^n : \varphi_k \neq \varphi_{k+1} \text{ для любого } k \in \mathbb{Z}_n\}$, где $\mathbb{Z}_n$ — кольцо вычетов по модулю n . Нумерация элементами множества $\mathbb{Z}_n$ взята для того, чтобы охватить случай $\varphi_n = \varphi_{n+1} \equiv \varphi_1$. На торе T^n определена непрерывная функция L , сопоставляющая каждой ломаной ее периметр, причем на области D функция L , очевидно, гладкая.

Несложно заметить, что L перестает быть дифференцируемой в точках, принадлежащих множеству $T^n \setminus D$. В самом деле, пусть точка φ_k проходит через φ_{k+1} (см. рис. 21). Тогда длины всех звеньев ломаной, кроме звена $\varphi_k \varphi_{k+1}$, изменяются гладко, а длина звена $\varphi_k \varphi_{k+1}$ с точностью до членов второго порядка малости по $(\varphi_k - \varphi_{k+1})$ равна $|\varphi_k - \varphi_{k+1}|$, где функция $|\cdot|$ есть расстояние в ев-

клидовой метрике окружности T^1 до нуля. Таким образом появляется недифференцируемость типа модуля аргумента ($x \mapsto |x|$).

Предложение 1. Любой n -звенной периодической траектории бильярда Биркгофа соответствует (неоднозначно) критическая точка функции L в области D и любой критической точке функции L в области D соответствует (однозначно) n -звенная периодическая траектория бильярда.

Следует заметить, что это утверждение фактически использовал, не доказывая подробно, Биркгоф [42]. Доказательство предложения 1 сразу следует из принципа Мопертюи для систем с упругими отражениями (см. введение, п. 8).

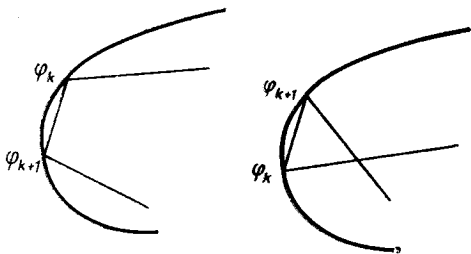


Рис. 21

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ БИРКГОФА

Итак, задача отыскания периодических n -звенных траекторий бильярда свелась к задаче отыскания критических точек функции L в области D . Изучим сначала структуру этой области.

Лемма 1. Область D состоит из $(n-1)$ -й связной компоненты, каждая из которых гомеоморфна прямому произведению окружности T^1 и $(n-1)$ -мерного диска.

Доказательство. Зададим непрерывное отображение g из области D в $\mathbb{R}^n$ следующим образом: точке $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in D$ сопоставим точку $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ так, что

$$\alpha_m = \varphi_{m+1} - \varphi_m, \quad \alpha_m \in (0, 1), \quad m \in \mathbb{Z}_n.$$

Пусть $k(\alpha) = \sum_{m=1}^n \alpha_m$. Ясно, что множеством значений функции $k \circ g$ является множество $\{1, 2, \dots, n-1\}$, так как величина $k(g(\varphi))$ есть число оборотов, совершенных замкнутой ломаной, отвечающей точке $\varphi \in D$, вокруг нашей кривой.

Функция g , а значит, и функция $k \circ g$ непрерывна в D . Таким образом, область D является несвязным объединением $n-1$ открытых множеств $D_1, \dots, D_{n-1}$ — прообразов значений $1, \dots, n-1$.

Легко видеть, что функция g отображает каждое сечение множества D_k $(n-1)$ -мерным тором $\varphi_1 = \text{const}$ взаимно однозначно на множество точек $\mathbb{R}_+^n$, таких, что $\alpha_m \in (0, 1)$, $m \in \mathbb{Z}_n$.

$\sum_{m=1}^n \alpha_m = k$. Последнее является $(n-1)$ -мерным многообразием с краем. Как пересечение выпуклых множеств оно выпукло и поэтому гомеоморфно $(n-1)$ -мерному диску. Остается отметить, что области D_k переходят в себя при поворотах $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \mapsto (\varphi_1 + \varphi, \dots, \varphi_n + \varphi)$, $\varphi \in T^1$. Лемма доказана.

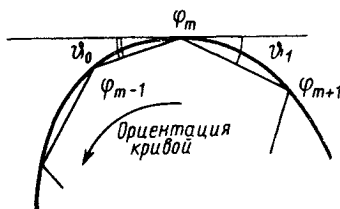


Рис. 22

(см. рис. 22). При этом изменяются лишь длины звеньев $\varphi_{m-1}\varphi_m$, $\varphi_m\varphi_{m+1}$, причем легко заметить, что

$$\frac{\partial|\varphi_{m-1}, \varphi_m|}{\partial\varphi_m} = -\cos \vartheta_0, \quad \frac{\partial|\varphi_m, \varphi_{m+1}|}{\partial\varphi_m} = \cos \vartheta_1,$$

где ϑ_0 — угол между отрезком $\varphi_{m-1}\varphi_m$ и касательной к кривой в точке φ_m , а ϑ_1 — угол между этой касательной и отрезком $\varphi_m\varphi_{m+1}$. Значит,

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi_m} = \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_0.$$

Но при стремлении φ_m к φ_{m-1} угол ϑ_0 стремится к нулю, и производная $\partial L/\partial\varphi_m$ становится отрицательной.

Однако на этом пути возникают принципиальные трудности, когда точка границы области D_h характеризуется совпадением более чем двух соседних координат φ_i . Чтобы преодолеть эти затруднения, «обрежем» области D_h по краям.

Для каждого $m \in \mathbb{Z}_n$ введем $n-1$ ε -условий:

- 1) $|\varphi_m - \varphi_{m+1}| > \varepsilon$;
- 2) Если φ_{m+1} лежит на наименьшей из дуг, ограниченных на кривой точками φ_m и φ_{m+2} , то $|\varphi_m - \varphi_{m+2}| > 3\varepsilon$;
- 3) Если φ_{m+1} и φ_{m+2} лежат на наименьшей из дуг, ограниченных на кривой точками φ_m и φ_{m+3} в порядке $\varphi_m, \varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \varphi_{m+3}$ при одном из направлений обхода кривой, то $|\varphi_m - \varphi_{m+3}| > 3^2\varepsilon$.
-
- $n-1$) Если $\varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \dots, \varphi_{m+n-2}$ лежат на наименьшей из дуг, ограниченных на кривой точками φ_m и φ_{m+n-1} в порядке $\varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots, \varphi_{m+n-1}$ при одном из направлений обхода кривой, то $|\varphi_m - \varphi_{m+n-1}| > 3^{n-2}\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое малое число, величина которого будет уточнена далее.

На рис. 23, а, б изображены ломаные, удовлетворяющие ε -условиям, а на рис. 23, в — ломаная не удовлетворяет ε -условиям 2) и 3) ($m=1$).

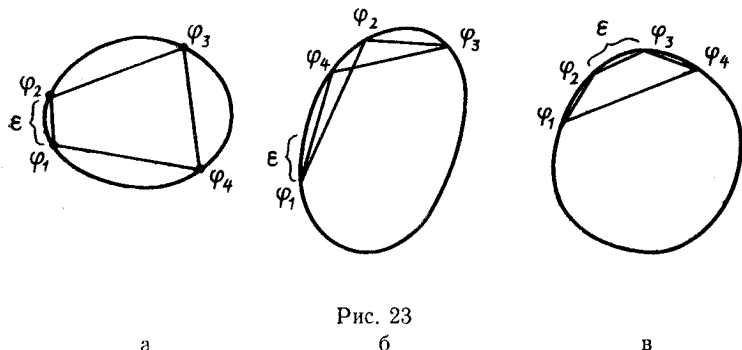


Рис. 23

а

б

в

Предложение 2. Пусть граничная кривая в любой точке имеет ненулевую кривизну. Тогда существует такое $\delta_0 > 0$, что для любого $0 < \delta < \delta_0$ и для любых трех точек φ' , φ_0 , φ'' , таких, что φ_0 лежит на наименьшей дуге, соответствующей точкам φ' , φ'' и выполняются соотношения $|\varphi_0 - \varphi'| = \delta$, $|\varphi'' - \varphi'| \geq 3\delta$ (см. рис. 24) верно неравенство

$$\left. \frac{\partial(|\varphi', \varphi| + |\varphi, \varphi''|)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi = \varphi_0} > 0, \quad (2.1)$$

где величина $|\varphi'' - \varphi'|$ равна длине дуги $\varphi'\varphi_0\varphi''$, а за положительное направление изменения φ взято направление движения от φ' к φ_0 по кратчайшей дуге.

Доказательство. Проведем окружность, которая имеет с нашей кривой касание второго порядка в точке φ_0 . Зададим на окружности натуральный параметр φ^* так, чтобы в точке φ_0 значение этого параметра тоже равнялось φ_0 и ориентация окружности была та же, что и у исходной кривой. Тогда выполнено соотношение $|\varphi, \varphi^*| = |\varphi - \varphi_0|^3 \cdot \alpha_{\varphi_0}(\varphi - \varphi_0)$; где φ, φ^* — соответственно точки кривой и окружности с одинаковыми значениями параметров; $\alpha_{\varphi_0}(x)$ — функция, непрерывная по обоим

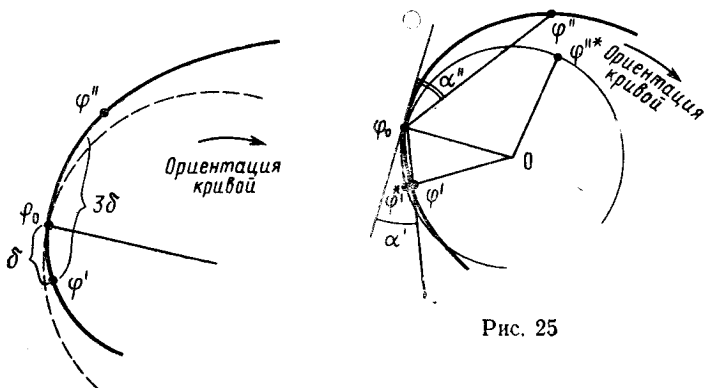


Рис. 25

Рис. 24

аргументам на множестве $\varphi_0 \in T^1$, $x \in [-R_{\min}, R_{\min}]$, где $R_{\min}$ — минимальный радиус кривизны нашей кривой по всем ее точкам.

Таким образом, для любого φ , такого, что $|\varphi - \varphi_0| \leq R_{\min}$, справедливо неравенство $|\varphi, \varphi^*| \leq |\varphi - \varphi_0|^3 A$, где

$$A = \max_{\substack{x' \in T^1 \\ x \in [-R_{\min}, R_{\min}]}} \alpha_{\varphi'}(x).$$

Пусть α' — угол между отрезком $\varphi'\varphi_0$ и касательной l к кривой в точке φ_0 ; α'' — угол между отрезком $\varphi''\varphi_0$ и прямой l (см. рис. 25). Тогда

$$\left. \frac{\partial|\varphi', \varphi|}{\partial\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} = \cos \alpha', \quad \left. \frac{\partial|\varphi, \varphi''|}{\partial\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} = -\cos \alpha''.$$

Значит, для выполнения неравенства (2.1) необходимо, чтобы имело место соотношение $\cos \alpha' > \cos \alpha''$. Так как угол между отрезком $\varphi'\varphi_0$ и прямой l равен половине угла $\varphi'O\varphi_0$, выполняются следующие равенства:

$$\alpha' = \frac{1}{2} \varphi'^* O\varphi_0 - \varphi'^* \varphi_0 \varphi', \quad \alpha'' = \frac{1}{2} \varphi''^* O\varphi_0 - \varphi''^* \varphi_0 \varphi''.$$

Напомним, что $|\varphi_0 - \varphi'| = \delta$, $|\varphi'' - \varphi'|^* \geq 3\delta$. Можно считать, что $|\varphi'' - \varphi'|^* = 3\delta$; при этом $\cos \alpha''$ может только уменьшаться. Из треугольника $\varphi'\varphi_0\varphi'^*$ находим

$$\varphi'^* \varphi_0 \varphi' < A\delta^3/(\delta + o(\delta)) < 2A\delta^2$$

при достаточно малых δ . Аналогично $\varphi''^* \varphi_0 \varphi'' < 2A\delta^2 \cdot 4$.

Кроме того, если R_{φ_0} — радиус кривизны исходной кривой в точке φ_0 , то

$$\varphi'^* O\varphi_0 = \delta/R_{\varphi_0}, \quad \varphi''^* O\varphi_0 = 2\delta/R_{\varphi_0}.$$

Итак, имеем

$$\begin{aligned} \cos \alpha' - \cos \alpha'' &> \cos(\delta/(2R_{\varphi_0}) + 2A\delta^2) - \\ &- \cos(2\delta/(2R_{\varphi_0}) - 2A \cdot 4\delta^2) > 3\delta^2/(8R_{\max}^2) + O(\delta^3) > 0 \end{aligned}$$

при малых δ . Здесь $R_{\max} < \infty$ — максимальный радиус кривизны. Предложение доказано.

Обозначим максимальные подобласти областей D_k , в которых выполняются ε -условия, символами D_k^ε . Теперь мы уже готовы доказать тот факт, что вектор $\text{grad } L$ (имеется в виду евклидова метрика тора T^n) на границе D_k^ε направлен внутрь этой области для любого $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Возьмем ε , удовлетворяющее неравенству $0 < \varepsilon < \min\{3^{2-n}\delta_0, 3^{-n}\}$, где δ_0 было определено в предложении 2. Гра-

ница области D_k^ε характеризуется превращением неравенств в одном или нескольких ε -условиях в равенства.

Пусть, например, равенство имеет место в ε -условии 1) для некоторого $m \in \mathbb{Z}_n$, а в остальных условиях стоят строгие неравенства (см. рис. 26).

Пусть для определенности $\varphi_{m+1} = \varphi_m + \varepsilon$ (случай $\varphi_m = \varphi_{m+1} + \varepsilon$ рассматривается аналогично). Тогда внутренняя нормаль к границе области D_k^ε существует и имеет вид

$$\mathbf{n} = (0, \dots, 0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0),$$

где ненулевые координаты имеют номера m и $m+1$. Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\partial L}{\partial \varphi_m} + \frac{\partial L}{\partial \varphi_{m+1}} \right).$$

Заметим, что

$$-\frac{\partial L}{\partial \varphi_m} = - \left(\frac{\partial |\varphi_{m-1}, \varphi_m|}{\partial \varphi_m} + \frac{\partial |\varphi_m, \varphi_{m+1}|}{\partial \varphi_m} \right).$$

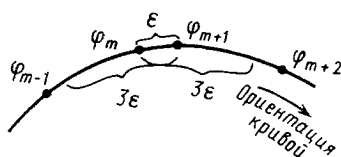


Рис. 26

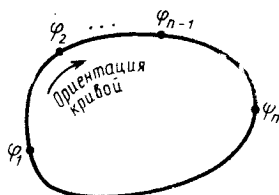


Рис. 27

В силу ε -условия 2) имеем $|\varphi_{m+1} - \varphi_{m-1}| > 3|\varphi_{m+1} - \varphi_m| = 3\varepsilon$. Тогда, положив $\varphi_{m-1} = \varphi''$, $\varphi_m = \varphi_0$, $\varphi_{m+1} = \varphi'$, мы будем находиться в условиях предложения 2; таким образом, $-\partial L / \partial \varphi_m > 0$. Аналогично $\partial L / \partial \varphi_{m+1} > 0$. В итоге $\partial L / \partial \mathbf{n} > 0$.

Таким же образом можно рассмотреть случаи, когда равенство имеет место в одном из ε -условий 2), 3), и т. д. Остановимся подробнее на ε -условии $n-1$).

Пусть $m=1$ и выполняется соотношение $\varphi_n - \varphi_1 = 3^{n-2}\varepsilon$ (см. рис. 27). В остальных ε -условиях пусть стоят строгие неравенства. Тогда внутренняя нормаль к границе D имеет вид

$$\mathbf{n} = \{-1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0, 1/\sqrt{2}\}.$$

Имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial L}{\partial \varphi_n} \right).$$

Производная $-\partial L / \partial \varphi_1$ равна

$$-\frac{\partial |\varphi_1, \varphi_2|}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial |\varphi_1, \varphi_n|}{\partial \varphi_1}.$$

В силу определения ε верны неравенства

$$2|\varphi_2 - \varphi_1| < 2|\varphi_n - \varphi_1| = 2 \cdot 3^{n-2}\varepsilon < 1 - 3^{n-2}\varepsilon = |\varphi_n - \varphi_1|^*,$$

где величина $|\varphi_n - \varphi_1|^*$ обозначает «расстояние» от φ_n до φ_1 , измеренное вдоль дуги, дополнительной к дуге $\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_{n-1}\varphi_n$. Положив $\varphi_m = \varphi''$, $\varphi_1 = \varphi_0$, $\varphi_2 = \varphi'$, мы опять оказываемся в условиях предложения 2, значит, $-\partial L / \partial \varphi_1 > 0$. Аналогично $\partial L / \partial \varphi_n > 0$. В итоге $\partial L / \partial \mathbf{n} > 0$.

Особо нужно уделить внимание ситуации, когда сразу в нескольких ε -условиях достигаются равенства. В этом случае точка может лежать на «угле» границы D_k^ε и условие того, что $\text{grad } L$ направлен внутрь области, имеет вид:

$$\partial L / \partial \mathbf{n}_1 > 0, \dots, \partial L / \partial \mathbf{n}_l > 0, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_l$ — векторы нормалей, задаваемые ε -условиями, в которых имеют место равенства. Неравенства (2.2) выполняются автоматически в силу предложения 2 и ε -условий.

Осталось проверить, что у областей D_k при обрезании не изменилась топологическая структура. Рассмотрим еще раз отображение $g: D \rightarrow \mathbf{R}_\alpha^n$, определенное при доказательстве леммы 1. Легко видеть, что ε -условия в пространстве $\mathbf{R}_\alpha^n$ имеют вид: для всех $m \in \mathbf{Z}_n$

$$1^*) \varepsilon < \alpha_m < 1 - \varepsilon,$$

$$2^*) 3\varepsilon < \alpha_m + \alpha_{m+1} < 2 - 3\varepsilon,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(n-1)^*) 3^{n-2}\varepsilon < \alpha_m + \dots + \alpha_{m+n-2} < n-1-3^{n-2}\varepsilon.$$

Образ области D_k^ε при отображении g есть пересечение выпуклых множеств, задаваемых неравенствами $1^*), \dots, (n-1)^*)$

и соотношениями $\alpha_m \in (0, 1)$, $m \in \mathbf{Z}_n$; $\sum_{m=1}^n \alpha_m = k$, значит, он является тоже выпуклым множеством и одновременно $(n-1)$ -мерным многообразием с краем. Следовательно, он гомеоморфен диску. Так как ε -условия $1^*), \dots, (n-1)^*)$ инвариантны относительно поворотов $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \mapsto (\varphi_1 + \varphi, \dots, \varphi_n + \varphi)$, $\varphi \in T^1$, заключаем, что g — гомеоморфизм сечения области D_k^ε тором $\varphi_1 = \text{const}$ на этот диск.

Итак, все множества D_k^ε гомеоморфны прямому произведению $(n-1)$ -мерного диска и окружности. Вектор $\text{grad } L$ в любой точке границы D_k^ε направлен внутрь этой области, откуда в силу теории Люстерника—Шнирельмана [16] функция L имеет на D_k^ε по крайней мере две критические точки, причем одна из них будет максимумом.

Критические точки функции L на D_k^ε не могут быть все изолированными максимумами. Действительно, иначе малой деформацией функции L можно было бы сделать эти точки невырожденными максимумами и при этом не добавить новых

критических точек. Эйлерова характеристика u областей D_k^e (как и u окружности) равна нулю, значит, $\sum_{\lambda \geq 0} (-1)^\lambda \mu_\lambda(L') = 0$, где L' — результат деформации функции L (L' — функция Морса на D_k^e), $\mu_\lambda(L')$ — число критических точек индекса λ для L' (см. [16]). Но если все критические точки L' — невырожденные максимумы, то это равенство выполняться не может.

Таким образом, критическим точкам функции L на D_k^e соответствуют по крайней мере два геометрически различных периодических решения, совершающих k оборотов в заданном направлении вокруг нашей кривой. Конечно, если n не взаимно просто с k , то может так случиться, что ломаная несколько раз пройдет сама по себе и мы такое решение уже получали при меньших n .

Примечательным является тот факт, что оценки количества периодических решений биллиарда, полученные Биркгофом [42], и в теореме 1 совпадают, хотя получены совершенно разными методами. Это наводит на мысль, что, по-видимому, для любых $n, k \in \mathbb{N}$, $n > k$, существует биллиард Биркгофа, имеющий ровно два геометрически различных периодических решения, совершающих k оборотов вокруг кривой, имея n звеньев; по крайней мере для $n=2, k=1$ это, очевидно, верно.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Рассмотрим выпуклую область в $\mathbb{R}^3$. Ее граница Γ гомеоморфна сфере S^2 . Представим себе поверхность Γ изнутри зеркальной и рассмотрим траектории луча света внутри нее. Очевидно, получившаяся динамическая система является естественным трехмерным обобщением биллиарда Биркгофа. Аналогично можно определить биллиарды более высокой размерности.

Идеи доказательства теоремы 1 могут быть использованы для оценки количества периодических траекторий в многомерных биллиардах. Однако в случае размерностей больших чем два возникает ряд новых трудностей.

Первая из них состоит в невозможности определить число оборотов, совершенных периодической траекторией. Таким образом, отличать друг от друга траектории с одинаковым числом звеньев значительно сложнее; в частности, если найдена периодическая траектория, число звеньев которой не является простым, то нет никакой гарантии, что она не является несколько раз пройденной траекторией с меньшим числом звеньев.

Вторая, более существенная, трудность состоит в том, что область

$$D_n = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in S^m \times \dots \times S^m : \varphi_i \neq \varphi_{i+1}, i \in \mathbb{Z}_n\},$$

на которой функция L длины n -звенной ломаной является гладкой, имеет очень сложную топологическую структуру, так что ис-

следование геометрии области D_n становится наиболее содержательной частью задачи.

Рассмотрим диэдральную подгруппу G_n в группе подстановок. Группа G_n задается двумя своими образующими

$$\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ 2, 3, \dots, 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ n, n-1, \dots, 1 \end{pmatrix}.$$

Ее действие на D_n задается следующим образом:

$$g(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = (\varphi_{g(1)}, \dots, \varphi_{g(n)}); \varphi_i \in S^m, g \in G_n,$$

причем при простом n действие G_n на D_n — свободное и естественная проекция $D_n \rightarrow D_n/G_n$ является $2n$ -листным накрытием. Недавно И. К. Бабенко получил следующий результат:

Теорема 2. 1) *Количество геометрически различных n -звенных периодических траекторий многомерного бильярда для простых n оценивается снизу числом $\text{cat}(D_n/G_n)$, где cat — категория Люстерника—Шнирельмана.*

2) *В случае трехмерного бильярда и простого n выполняются неравенства*

$$n \leq \text{cat}(D_n/G_n) \leq n+1.$$

Следствие. *Трехмерный выпуклый бильярд имеет при простых n не менее n геометрически различных периодических n -звенных траекторий.*

Отметим, что довольно просто можно оценить количество двузвенных траекторий трехмерного бильярда. Действительно, сопоставим каждой точке φ выпуклой поверхности Γ , задающей бильярд, длину отрезка $[\varphi, \varphi_1]$, $\varphi_1 \in \Gamma$, ортогонального к Γ в точке φ . Получаем гладкую функцию l на сфере S^2 . Типичным критическим точкам функции l соответствуют периодические траектории бильярда. Функция l достигает максимума в некоторой точке $\varphi \in \Gamma \cong S^2$. Но тогда соответствующая точка φ_1 также является максимумом для l . Аналогично l имеет два минимума на S^2 . Так как эйлерова характеристика сферы S^2 равна 2, то l не может иметь в качестве критических точек только два изолированных максимума и два изолированных минимума, следовательно, у функции l имеется еще одна критическая точка. Таким образом, мы получили, что выпуклый трехмерный бильярд в общем случае имеет по крайней мере три двузвенные периодические траектории: «максимальную», «минимальную» и «седловую». Отметим, что теорема 2 гарантирует существование лишь двух таких траекторий.

§ 4. МАТРИЦЫ ГЕССЕ И ПУАНКАРЕ

В силу принципа Мопертюи каждой n -звенной периодической траектории бильярда Биркгофа соответствует критическая точка функции длины L на торе T^n . С другой стороны, периодические решения динамических систем являются неподвижными точками отображения Пуанкаре.

Свойства критических точек гладких функций характеризуются *индексом Морса*, а неподвижным точкам отображения Пуанкаре сопоставляют характеристические показатели, от которых зависит динамическая устойчивость траектории. Оставшаяся часть этой главы посвящена описанию связи между этими двумя характеристиками периодической траектории бильярда.

Пусть $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0, \dots$ — некоторая траектория бильярда Биркгофа. Очевидно, она однозначно задается углами φ_1^0, φ_2^0 , если взять их за начальные условия. Таким образом, движение системы характеризуется последовательностью точек $(\varphi_1^0, \varphi_2^0), (\varphi_2^0, \varphi_3^0), \dots$ на торе $T^2 = \{(\varphi_1, \varphi_2) \bmod 1\}$.

Пусть имеется n -звенная периодическая траектория с начальным условием $(\varphi_1^0, \varphi_2^0) \in T^2$. Рассмотрим отображение $\Psi^n: T^2 \rightarrow T^2$, сопоставляющее каждой точке тора точку, получающуюся после n отражений от кривой бильярда. Тогда $\Psi^n(\varphi_1^0, \varphi_2^0) = (\varphi_1^0, \varphi_2^0)$ и для рассматриваемого периодического решения Ψ^n является отображением Пуанкаре.

Одним из важнейших понятий, возникающих при изучении неподвижных точек отображения Пуанкаре, является понятие невырожденности, введенное в [66].

Определение 1. Периодическое решение с начальным условием $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$, имеющее n звеньев, называется невырожденным по Пуанкаре, если спектр матрицы $\|d\Psi^n/d\varphi\| = P$ в точке $\varphi = (\varphi_1^0, \varphi_2^0)$ не содержит единицы.

Матрицу P назовем матрицей Пуанкаре.

Сразу возникает вопрос о корректности определения 1, поскольку в качестве начального условия можно брать точки $(\varphi_2^0, \varphi_3^0), (\varphi_3^0, \varphi_4^0)$ и т. д. В данном случае корректность несложно доказать непосредственно, но мы получим ее как одно из следствий теоремы 3.

Хорошо известно, что критические точки гладких функций тоже могут быть вырожденными или невырожденными. Важность этих понятий особенно хорошо видна в теории Морса [16].

Определение 2. Периодическая n -звенная траектория $\varphi_1^0, \dots, \varphi_n^0$ называется невырожденной по Морсу, если в соответствующей критической точке $\varphi^0 \in T^n$ гессиан $\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right\|$, $i, j = 1, \dots, n$, отличен от нуля.

Это определение уже заведомо корректно, так как функция L сохраняется при циклической перестановке аргументов и, следовательно, не важно, какую (из n возможных) критическую точку на T^n сопоставить данному периодическому решению.

Одним из важных следствий теоремы 2 будет эквивалентность невырожденности (вырожденности) по Морсу и по Пуанкаре. Отсюда, кстати, и будет следовать корректность определения 1.

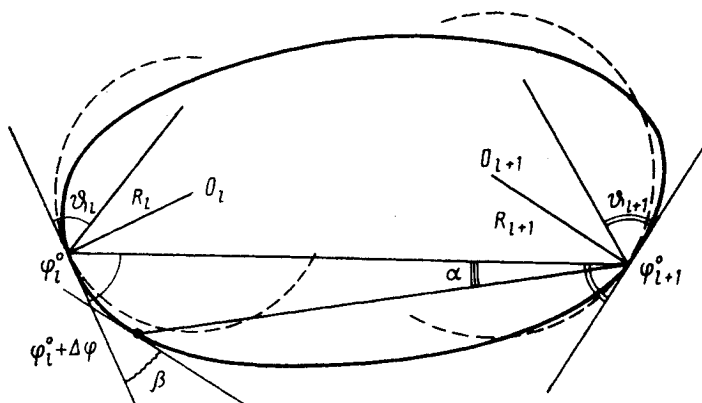


Рис. 28

Элементы матрицы Гессе $||\partial^2 L / \partial \varphi^2||$ в критической точке $\varphi_0 \in T^n$ можно выразить через характеристики кривой биллиарда и периодического решения.

Предложение 3. Пусть $\varphi_1^0, \dots, \varphi_n^0$ — критическая точка функции длины L на T^n . Пусть $R_1, \dots, R_n$ — радиусы кривизны кривой в точках $\varphi_1^0, \dots, \varphi_n^0$, $\alpha, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ — соответствующие «углы падения» (см. рис. 28). Тогда при $\varphi = \varphi^0$ для всех $l \in Z_n$ верны следующие формулы:

$$\frac{\partial^2 |\varphi_l, \varphi_{l+1}|}{\partial \varphi_l^2} = \sin \vartheta_l \left(\frac{\sin \vartheta_l}{|\varphi_l^0, \varphi_{l+1}^0|} - \frac{1}{R_l} \right),$$

$$\frac{\partial^2 |\varphi_l, \varphi_{l+1}|}{\partial \varphi_l \partial \varphi_{l+1}} = \frac{\sin \vartheta_l \sin \vartheta_{l+1}}{|\varphi_l^0, \varphi_{l+1}^0|},$$

$$\frac{\partial^2 |\varphi_l, \varphi_{l+1}|}{\partial \varphi_{l+1}^2} = \sin \vartheta_{l+1} \left(\frac{\sin \vartheta_{l+1}}{|\varphi_l^0, \varphi_{l+1}^0|} - \frac{1}{R_{l+1}} \right).$$

Доказательство. Как уже было выяснено в § 1,

$$\frac{\partial |\varphi_l, \varphi_{l+1}|}{\partial \varphi_l} = -\cos \vartheta_l, \quad \frac{\partial |\varphi_l, \varphi_{l+1}|}{\partial \varphi_{l+1}} = \cos \vartheta_{l+1}.$$

Имеем

$$\frac{\partial(-\cos \vartheta_l)}{\partial \varphi_l} = \sin \vartheta_l \frac{\partial \vartheta_l}{\partial \varphi_l}.$$

Найдем производную $\partial \vartheta_l / \partial \varphi_l$.

Пусть окружность с центром O_l и радиус R_l имеет в точке φ_l^0 касание второго порядка с кривой биллиарда. Пусть точка φ_l^0 получила приращение $\Delta\varphi$. Тогда $\Delta\vartheta_l = \alpha - \beta$ (см. рис. 28), где

$$\alpha = \frac{\Delta\varphi \sin \vartheta_l}{|\varphi_l^0, \varphi_{l+1}^0|} + o(\Delta\varphi)$$

— угол между векторами $\overrightarrow{\varphi_{l+1}^0, \varphi_l^0}$ и $\overrightarrow{\varphi_{l+1}^0, \varphi_l^0 + \Delta\varphi}$; $\beta = \Delta\varphi/R_l + o(\Delta\varphi)$ — угол между касательными к кривой в точках φ_l^0 и $\varphi_l^0 + \Delta\varphi$. Таким образом,

$$\frac{\partial^2 |\varphi_l, \varphi_{l+1}|}{\partial \varphi_l^2} = (\sin \vartheta_l) \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\alpha - \beta}{\Delta\varphi} = \sin \vartheta_l \left(\frac{\sin \vartheta_l}{|\varphi_l^0, \varphi_{l+1}^0|} - \frac{1}{R_l} \right).$$

Аналогично находится $\partial^2 |\varphi_l, \varphi_{l+1}| / \partial \varphi_{l+1}^2$. Найдем теперь $\partial^2 |\varphi_l, \varphi_{l+1}| / (\partial \varphi_l \partial \varphi_{l+1})$. Имеем

$$\frac{\partial \cos \vartheta_{l+1}}{\partial \varphi_l} = -\sin \vartheta_{l+1} \frac{\partial \vartheta_{l+1}}{\partial \varphi_l}.$$

Дадим точке φ_l^0 приращение $\Delta\varphi$. Тогда $\Delta\vartheta_{l+1} = -\alpha$, и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 |\varphi_l, \varphi_{l+1}|}{\partial \varphi_l \partial \varphi_{l+1}} = \frac{\sin \vartheta_l \sin \vartheta_{l+1}}{|\varphi_l^0, \varphi_{l+1}^0|}.$$

Предложение 3 доказано.

В главе 5 нам понадобится следующее

Следствие. Если критическая точка $\varphi^0 \in T^n$ функции длины вырождена, то как угодно малым изменением радиусов кривизны $R_1, \dots, R_n$ ее можно сделать невырожденной.

Действительно, легко видеть, что гессиан $\det \|\partial^2 L / \partial \varphi^2\|$ имеет вид

$$\prod_{l=1}^n \sin^2 \vartheta_l \begin{vmatrix} \frac{1}{|\varphi_n^0, \varphi_1^0|} + \frac{1}{|\varphi_1^0, \varphi_2^0|} - \frac{2}{R_1 \sin \vartheta_1} & \frac{1}{|\varphi_1^0, \varphi_2^0|} & \dots & \frac{1}{|\varphi_n^0, \varphi_1^0|} \\ \frac{1}{|\varphi_1^0, \varphi_2^0|} & \frac{1}{|\varphi_1^0, \varphi_2^0|} + \frac{1}{|\varphi_2^0, \varphi_3^0|} - \frac{2}{R_2 \sin \vartheta_2} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{1}{|\varphi_2^0, \varphi_3^0|} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{|\varphi_n^0, \varphi_1^0|} & 0 & \dots & \frac{1}{|\varphi_{n-1}^0, \varphi_n^0|} + \frac{1}{|\varphi_n^0, \varphi_1^0|} - \frac{2}{R_n \sin \vartheta_n} \end{vmatrix},$$

откуда следует, что он является многочленом степени n относительно величин $1/R_1, \dots, 1/R_n$ с отличным от нуля коэффициентом при $1/(R_1 \dots R_n)$.

Если бы следствие не было справедливым, то целую окрестность в пространстве переменных $R_1, \dots, R_n$ этот многочлен отображал бы в нуль, что возможно лишь при условии тождественного равенства его нулю. Полученное противоречие доказывает следствие.

Пусть $\varphi = \varphi_0$, $l \in \mathbb{Z}_n$. Введем следующие обозначения:

$$a_l = \frac{\partial^2(|\varphi_{l-1}, \varphi_l| + |\varphi_l, \varphi_{l+1}|)}{\partial \varphi_l^2}, \quad b_l = \frac{\partial^2|\varphi_l, \varphi_{l+1}|}{\partial \varphi_l \partial \varphi_{l+1}},$$

$$H_n = \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right\|; \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Таким образом, имеем

$$H_2 = \left\| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 + b_2 \\ b_2 + b_1 & a_2 \end{array} \right\|; \quad H_n = \left\| \begin{array}{cccccc} a_1 & b_1 & 0 & \dots & b_n \\ b_1 & a_1 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & 0 & 0 & \dots & a_n \end{array} \right\| \text{ при } n \geq 3. \quad (4.1)$$

Кроме того, положим

$$P_{l, l+1} = \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} (\varphi_l^0, \varphi_{l+1}^0) \right\|.$$

Пусть $\Psi(\varphi_l, \varphi_{l+1}) = (\varphi_{l+1}, \varphi_{l+2})$. Найдем элементы матрицы $P_{l, l+1}$. Для этого достаточно вычислить производные $\partial \varphi_{l+2} / \partial \varphi_l$, $\partial \varphi_{l+2} / \partial \varphi_{l+1}$.

Из вариационного принципа Мопертюи следует, что

$$d \frac{\partial}{\partial \varphi_{l+1}} (|\varphi_l, \varphi_{l+1}| + |\varphi_{l+1}, \varphi_{l+2}|) = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 |\varphi_l, \varphi_{l+1}|}{\partial \varphi_l \partial \varphi_{l+1}} d\varphi_l + \frac{\partial^2 (|\varphi_l, \varphi_{l+1}| + |\varphi_{l+1}, \varphi_{l+2}|)}{\partial \varphi_{l+1}^2} d\varphi_{l+1} + \\ + \frac{\partial^2 |\varphi_{l+1}, \varphi_{l+2}|}{\partial \varphi_{l+1} \partial \varphi_{l+2}} d\varphi_{l+2} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\partial \varphi_{l+2} / \partial \varphi_l = -b_l / b_{l+1}$, $\partial \varphi_{l+2} / \partial \varphi_{l+1} = -a_{l+1} / b_{l+1}$ и

$$P_{l, l+1} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -b_l / b_{l+1} & -a_{l+1} / b_{l+1} \end{array} \right\|. \quad (4.2)$$

Заметим, что в силу предложения 3 все величины $b_l, l \in \mathbb{Z}_n$, больше нуля.

Легко понять, что матрица Пуанкаре P равна $P_{n,1} \cdot \dots \cdot P_{2,3} \cdot P_{1,2}$. Таким образом,

$$\det P = \prod_{l \in \mathbb{Z}_n} \det P_{l,l+1} = \prod_{l \in \mathbb{Z}_n} b_l / b_{l+1} = 1.$$

Значит, произведение корней характеристического уравнения $\det(P - \lambda E) = 0$ равно 1 (здесь E — единичная матрица размером 2×2). Его корни λ_1, λ_2 называются *мультипликаторами*.

Если они действительны и не равны по модулю единице, то периодическое решение называется *гиперболическим*. Оно является неустойчивым.

Если λ_1 и λ_2 не лежат на действительной прямой, то периодическое решение называется *эллиптическим*. Оно устойчиво в первом приближении.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, то решение *вырождено* по Пуанкаре. Оставшийся случай $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ назовем *параболическим*.

В дальнейшем для сокращения обозначений будем отождествлять периодическую траекторию с соответствующей критической точкой функции длины L на T^n .

§ 5. МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ И ГЕССИАН

Теорема 3 [61, 35]. Для всякого n -звенного периодического решения $\varphi^0 \in T^n$ имеет место равенство:

$$\det(P - E) = -\det(-H_n) \cdot (b_1 \cdot \dots \cdot b_n)^{-1}.$$

Замечание 1. Теорема 3 верна для любых билиардов, ограниченных гладкой или кусочно-гладкой кривой, причем выпуклость кривой не существенна. Важно только, чтобы кривая была гладкой в точках $\varphi_1^0, \dots, \varphi_n^0$. Радиусы кривизны $R_1, \dots, R_n$ при вычислении матрицы H_n необходимо брать с соответствующими знаками в зависимости от локальной выпуклости или вогнутости кривой.

Замечание 2. Теорема 3 остается верной и в случае ненатурального параметра φ .

Действительно, при доказательстве теоремы 3 выпуклость нигде не используется, а натуральность параметра была использована лишь при вычислении элементов матрицы H_n в предложении 3, причем его формулировка к натуральному параметру не апеллирует.

Теорема 3 имеет несколько важных следствий.

Следствие 1. *Невырожденность (вырожденность) по Пуанкаре равносильна невырожденности (вырожденности) по Морсу.*

Любой невырожденной n -звенной периодической траектории $\varphi^0 \in T^n$ однозначно сопоставляется *индекс Морса* $\text{ind} \varphi^0$ — целое число, равное количеству отрицательных собственных значений матрицы H_n .

Следствие 2. *Невырожденная n -звенная периодическая траектория φ^0 имеет гиперболический тип, если величина $n - \text{ind} \varphi^0$ четна.*

В частности,

- а) индекс Морса невырожденной эллиптической четнозвенной периодической траектории бильярда — нечетный;
- б) если n -звенное периодическое решение, соответствующее максимуму функции длины L на T^n (существование которого обеспечивает теорема 1), невырождено, то оно является гиперболическим (в данном случае $\text{ind} \varphi^0 = n$).

Доказательство следствия 2. Характеристический многочлен $\det(P - \lambda E)$ стремится к $+\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. При $\lambda = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\det(P - \lambda E)) &= -\text{sgn}(\det(-H_n)(b_1 \dots b_n)^{-1}) = \\ &= (-1)^{n+1} \text{sgn}(\det H_n) = (-1)^{n+1 - \text{ind} \varphi^0} = -1. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Значит, существует вещественный корень $\lambda_1 > 1$. Следствие доказано.

Каждой n -звенной периодической траектории $\varphi^0 \in T^n$ соответствует $2n$ -звенная периодическая траектория $\bar{\varphi}^0 \in T^{2n}$, полученная из исходной „удвоением“, т. е. прохождением два раза. Если траектории φ^0 соответствует матрица Пуанкаре P , то траектории $\bar{\varphi}^0$, очевидно, соответствует матрица Пуанкаре P^2 . Таким образом, мультипликаторы $\bar{\varphi}^0$ равны квадратам мультипликаторов φ^0 , значит, периодические решения φ^0 и $\bar{\varphi}^0$ одновременно являются эллиптическими и гиперболическими. Траектория $\bar{\varphi}^0$ вырождена в том и только в том случае, если φ^0 вырождена или ее мультипликаторы равны -1 .

Следствие 3 (критерий гиперболичности и эллиптичности). *Невырожденная периодическая траектория φ^0 является гиперболической (эллиптической) тогда и только тогда, когда $\bar{\varphi}^0$ невырождена и $\text{ind} \bar{\varphi}^0$ четный (нечетный).*

Доказательство следствия 3. Если $\text{ind} \bar{\varphi}^0$ четный, то в силу следствия 2 и четности числа $2n$ заключаем, что $\bar{\varphi}^0$, а следовательно, и φ^0 гиперболичны.

Наоборот, пусть φ^0 гиперболична, тогда мультипликаторы $\bar{\varphi}^0$ действительны и положительны. Один из них больше единицы, другой — меньше. Значит, $\text{sgn}(\det(P^2 - E)) = -1$, откуда в силу (5.1) $(-1)^{2n+1 - \text{ind} \bar{\varphi}^0} = -1$, следовательно, $\text{ind} \bar{\varphi}^0$ — четный. Следствие доказано.

Теорема 3 дает еще один критерий гиперболичности (эллиптичности) периодической траектории.

Следствие 4. *Периодическая траектория $\varphi^0 \in T^n$ является гиперболической, если $|2 + \det(-H_n) \cdot (b_1 \dots b_n)^{-1}| > 2$, и эллиптической, если $|2 + \det(-H_n) \cdot (b_1 \dots b_n)^{-1}| < 2$.*

Доказательство основано на простой формуле $\det(P-E)=2-\text{Tr}P$. Действительно, пусть

$$P = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Так как $\det P=1$, имеем

$$\det(P-E)=ad-bc+1-a-d=2-\text{Tr}P.$$

Тогда в силу теоремы 3, $\text{Tr}P=2+\det(-H_n)(b_1\dots b_n)^{-1}$. С другой стороны, величина $\text{Tr}P$ равна сумме мультипликаторов. Значит, при $|\text{Tr}P|>2$ траектория имеет гиперболический тип, а при $|\text{Tr}P|<2$ — эллиптический.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Следуя Маккею и Мейсу [61], рассмотрим матрицу $H_n(\lambda)$ следующего вида:

$$H_2(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 & \lambda^{-1}(b_1+b_2) \\ \lambda(b_1+b_2) & a_2 \end{vmatrix};$$

$$H_n(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & \lambda^{-1}b_n \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda b_n & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}, \quad n \geq 3.$$

Очевидно, $H_n(1)=H_n$ (см. (4.1)). Пусть λ — мультипликатор и

$$P \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Рассмотрим последовательность величин v_j , заданных индуктивно формулой

$$\begin{pmatrix} v_{j+1} \\ v_{j+2} \end{pmatrix} = P_{j,j+1} \begin{pmatrix} v_j \\ v_{j+1} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

В силу (5.2) имеем

$$v_{n+1} = \lambda v_1, \quad v_{n+2} = \lambda v_2.$$

Покажем, что матрица $H_n(\lambda)$ вырождена.

В самом деле, положим

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T, \quad \mathbf{u} = H_n(\lambda)\mathbf{v}.$$

Из соотношений (5.3), (4.2) легко следует, что $u_2 = \dots = u_{n-1} = 0$. Далее, имеем

$$u_1 = a_1 v_1 + b_1 v_2 + \lambda^{-1} b_n v_n = \lambda^{-1} (a_1 v_{n+1} + b_1 v_{n+2} + b_n v_n),$$

$$u_n = \lambda b_n v_1 + b_{n-1} v_{n-1} + a_n v_n = b_n v_{n+1} + b_{n-1} v_{n-1} + a_n v_n.$$

Откуда, используя (5.3), (4.2), получаем, что $u_1 = u_n = 0$. Таким образом, $H_n(\lambda)v = 0$ и $\det H_n(\lambda) = 0$.

В силу равенства

$$\det H_n(\lambda) = \det H_n(1) + (\lambda - 1)(-1)^{n-1} \prod_1^n b_j + \\ + (\lambda^{-1} - 1)(-1)^{n-1} \prod_1^n b_j = 0$$

имеем

$$-\det(-H_n)(b_1 \dots b_n)^{-1} = 2 - \lambda - \lambda^{-1} = \det(P - E).$$

Последнее равенство следует из того, что λ и λ^{-1} — мультипликаторы и $\det P = 1$.

Теорема доказана.

§ 6. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ

1. В качестве примера найдем тип (гиперболический или эллиптический) произвольной двузвенной траектории бильярда (рис. 29).

Матрица Гессе H_2 в силу предложения 3 имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2/l - 2R_1 & 2/l \\ 2/l & 2/l - 2/R_2 \end{vmatrix}.$$

где $l = |\varphi_1^0, \varphi_2^0|$, $b_1 = b_2 = 1/l$, $\sin \vartheta_1 = \sin \vartheta_2 = 1$. Несложно вычислить

$$\text{Tr } P = 2 + \det(-H_2) \cdot \frac{1}{b_1 b_2} = 2 - \frac{4l}{R_1} - \frac{4l}{R_2} + \frac{4l^2}{R_1 R_2}.$$

Пусть $R_2 \geq R_1$, тогда имеем

- 1) $|\text{Tr } P| < 2$ при $0 < l < R_1$ или $R_2 < l < R_1 + R_2$;
- 2) $|\text{Tr } P| > 2$ при $R_1 < l < R_2$ или $l > R_1 + R_2$.

Таким образом, в силу следствия 4 теоремы 3 справедливо

Предложение 4. Двузвенная траектория бильярда Биркгофа при выполнении одного из неравенств $l > R_1 + R_2$ или $R_1 < l < R_2$ имеет гиперболический тип, а в случае $0 < l < R_1$ или $R_2 < l < R_1 + R_2$ имеет эллиптический тип.

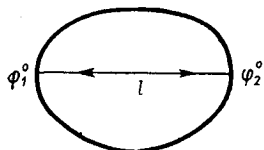


Рис. 29

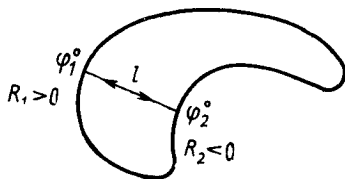


Рис. 30

Условия устойчивости двузвенной траектории в случае выпуклой границы были впервые получены в связи с задачами дифракции коротких волн (см. [6]). Заметим, что предложение 4 верно и в случае наличия среди R_1 и R_2 отрицательных величин (см. рис. 30). В частности, если R_1 и R_2 меньше нуля, то $l > 0 > R_1 + R_2$, и решение является гиперболическим.

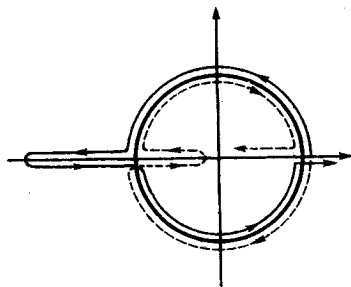


Рис. 31

Используя критерий Сильвестра, несложно обнаружить, что при $(l - R_1 - R_2)/(R_1 R_2) < 0$, точка φ^0 является седловой для функции длины L на T^2 , а если $(l - R_1 - R_2)/(R_1 R_2) > 0$, то при $l/R_2 > 1$ точка φ^0 — максимум, а при $l/R_2 < 1$ — минимум функции L .

Зафиксируем радиусы кривизны R_1 , R_2 и будем изменять длину l периодической траектории от нуля до бесконечности. Полученные выше формулы позволяют проследить за динамикой мультипликаторов λ_1 и λ_2 на комплексной плоскости $C = \{\lambda\}$ при изменении l . Когда $l \rightarrow +0$, то $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 1$. Будем увеличивать длину l . Тогда мультипликаторы начнут двигаться по единичной окружности в разных направлениях. При $l = R_1$ они столкнутся в точке $\lambda = -1$. Если $R_1 < R_2$, то при дальнейшем увеличении l мультипликаторы продолжат движение по вещественной оси в противоположные стороны, оставаясь все время отрицательными числами. Это движение продолжается до тех пор, пока $l < (R_1 + R_2)/2$. В этом момент их «скорость» обращается в нуль, и затем они начинают сближаться. При $l = R_2$ они вновь сталкиваются в точке $\lambda = -1$ и затем продолжают движение по единичной окружности в разные стороны. Наконец, когда $l = R_1 + R_2$, то они сталкиваются последний раз в точке $\lambda = 1$ и затем расходятся по вещественной оси. При $l \rightarrow \infty$ один из них уходит в бесконечность, а второй неограниченно стремится к нулю (см. рис. 31).

В частном случае, когда $R_1 = R_2$, после столкновения в точке $\lambda = -1$ мультипликаторы остаются на единичной окружности и сразу же начинают двигаться в противоположных направлениях.

2. Рассмотрим гладкую выпуклую кривую, инвариантную относительно поворота плоскости на угол $2\pi/n$ ($n \in \mathbb{N}$) относительно точки O . Вписанные замкнутые n -звенные ломаные, инвариантные относительно этого поворота, образуют однопараметрическое семейство I . Функция длины L имеет на I по крайней мере две критические точки (минимум и максимум).

Пусть φ^0 — критическая точка функции L на I . Тогда φ^0 также является критической точкой на множестве всех замкнутых вписанных n -звенных ломаных. Действительно, все n компонент градиента $\partial L / \partial \varphi$ в точке $\varphi^0 \in I$ одинаковы, условие экстремальности L на I в точке φ^0 имеет вид

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \varphi_j}(\varphi^0) = 0,$$

откуда $\partial L / \partial \varphi = 0$ в точке φ^0 .

Предложение 5. Пусть φ^0 — n -звенная периодическая траектория, соответствующая критической точке функции L на I . Тогда следующие три условия эквивалентны:

- i) траектория φ^0 гиперболична,
- ii) функция $L|_I$ имеет в точке φ^0 невырожденный максимум,
- iii) радиусы R_j кривизны граничной кривой в точках φ_j^0 , $j = 1, \dots, n$ меньше радиуса окружности, описанной вокруг ломаной φ^0 .

Замечание. Очевидно, все радиусы R_j равны между собой и в силу выпуклости $R_1 = \dots = R_n = R > 0$. В случае невыпуклой граничной кривой максимум функции $L|_I$ может не задавать периодическую траекторию бильярда, так как звенья $\varphi_j^0 \varphi_{j+1}^0$ ломаной могут пересекать граничную кривую. Если все же критическая точка $\varphi^0 \in I$ функции $L|_I$ задает периодическую траекторию бильярда и $R < 0$, то, как легко показать (см. п. 4 настоящего параграфа), траектория φ^0 также гиперболична и минимальна.

Докажем сначала равносильность условий ii) и iii). Пусть радиусы кривизны граничной кривой в точках φ_j^0 равны R , углы между звеньями $\varphi_j^0 \varphi_{j+1}^0$ и касательными к граничной кривой в точках φ_j^0 («углы падения») равны ϑ , длины звеньев $\varphi_j^0 \varphi_{j+1}^0$ равны l .

Используя предложение 3, получаем, что матрица Гессе H_n в точке φ^0 имеет вид (4.1), где

$$a_j = \frac{2 \sin^2 \vartheta}{l} - \frac{2 \sin \vartheta}{R}, \quad b_j = \frac{\sin^2 \vartheta}{l}. \quad (6.1)$$

Точка φ^0 является невырожденным максимумом функции $L|_I$ тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$e^T H_n e < 0,$$

где $e^T = (1, 1, \dots, 1)$ и T — операция транспонирования. Имеем

$$e^T H_n e = 2n \sin \vartheta \left(\frac{2 \sin \vartheta}{l} - \frac{1}{R} \right).$$

Следовательно, критерием максимальности является соотношение $0 < R < R_0$, где $R_0 = l / (2 \sin \vartheta)$. Как нетрудно убедиться, R_0 равно радиусу окружности, описанной вокруг ломаной φ^0 .

Доказательство равносильности условий i) и iii) опирается на вспомогательное утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Предложение 6. Пусть λ и λ^{-1} — мультипликаторы траектории φ^0 и $s=2l/R\sin\theta$. Тогда

$$\lambda + \lambda^{-1} = Q_n(s),$$

где полиномы Q_n связаны с хорошо известными полиномами Чебышева T_n соотношениями

$$Q_n(s) = 2T_n(s/2 - 1). \quad (6.2)$$

В частности, имеем

$$Q_2(s) = s^2 - 4s + 2, \quad Q_3(s) = s^3 - 6s^2 + 9s - 2,$$

$$Q_4(s) = s^4 - 8s^3 + 20s^2 - 16s + 2.$$

Графики этих полиномов приведены на рис. 32.

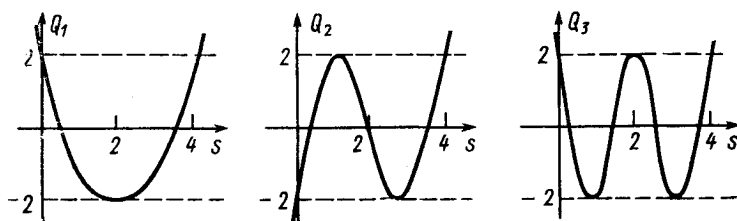


Рис. 32

Воспользуемся известной формулой

$$T_n(z) = \cos(n \arccos z), \quad z \in [-1, 1].$$

Следовательно, $|T_n(z)| \leq 1$ при $|z| \leq 1$, причем $|T_n(z)| = 1$ лишь при

$$z = \cos(k\pi/n), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6.3)$$

Так как T_n — многочлен n -й степени и каждое из уравнений $T_n(z) = 1$, $T_n(z) = -1$ имеет ровно n корней (с учетом кратности) в интервале $-1 \leq z \leq 1$, то при $|z| > 1$ справедливо неравенство $|T_n(z)| > 1$.

Следовательно, $|Q_n(s)| > 2$ при $s > 4$ (когда $0 < R < R_0$) и $|Q_n(s)| < 2$ при $0 \leq s \leq 4$ (когда $R > R_0$). Так как неравенство $|\lambda + \lambda^{-1}| > 2$ является критерием гиперболичности, то равносильность условий i) и iii) следует из предложения 6.

З а м е ч а н и е. Из формулы (6.2) и (6.3) вытекает, что мультипликаторы периодической траектории бильярда Биркгофа, инвариантной относительно поворотов на угол $2\pi/n$, вещественны и по абсолютной величине равны единице тогда и только тогда, когда

$$l/(R \sin \theta) = 1 + \cos(k\pi/n), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При четных k эта траектория вырождена, а при нечетных k она имеет параболический тип.

Докажем теперь предложение 6. В силу теоремы 3

$$\lambda + \lambda^{-1} = 2 - \det(P - E) = 2 + \det(-H_n)(b_1 \dots b_n)^{-1},$$

где матрица H_n имеет вид (4.1), а величины a_j, b_j удовлетворяют соотношениям (6.1). Положим $D_n = \det(-H_n)(b_1 \dots b_n)^{-1}$.

Несложно показать, что

$$D_n = \det \begin{vmatrix} s-2, & -1, & 0 & , & \dots & , & -1 \\ -1, & s-2, & -1 & , & \dots & , & 0 \\ 0, & -1, & s-2 & , & \dots & , & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1, & 0, & 0 & , & \dots & , & s-2 \end{vmatrix}, \quad n \geq 3, \quad (6.4)$$

$$D_{2'} = \det \begin{vmatrix} s-2, & -2 \\ -2, & s-2 \end{vmatrix}.$$

Установим справедливость соотношений

$$2 + D_n(s) = Q_n(s). \quad (6.5)$$

Для этого воспользуемся рекуррентной формулой для многочленов Чебышева

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Для многочленов Q_n в силу (6.2) имеем

$$Q_{n+1}(s) = (s-2)Q_n(s) - Q_{n-1}(s). \quad (6.6)$$

Для $s=2, 3$ равенство (6.5) легко доказать непосредственно. Пусть оно доказано для $s \leq k$. Необходимо показать, что $D_{k+1}(s) = Q_{k+1}(s) - 2$. В силу (6.6) и предложения индукции

$$\begin{aligned} Q_{k+1}(s) - 2 &= (s-2)Q_k(s) + Q_{k-1}(s) - 2 = \\ &= (s-2)(2 + D_k(s)) - 2 - D_{k-1}(s) - 2. \end{aligned}$$

Итак, нужно проверить равенство

$$D_{k+1}(s) = (s-2)(2 + D_k(s)) - D_{k-1} - 4, \quad k \geq 3. \quad (6.7)$$

Пусть $B_l, l < n$, — определитель главного углового минора размера $l \times l$ матрицы, фигурирующей в формуле (6.3); примем, что $B_0 = 0$.

Раскладывая определитель D_m по строке, имеем

$$D_m = (s-2)B_{m-1} - 2B_{m-2} - 2.$$

Равенство (6.7) теперь принимает вид

$$(s-2)B_k = ((s-2)^2 + 2)B_{k-1} - 3(s-2)B_{k-2} + 2B_{k-3}, \quad k \geq 3.$$

Справедливость этого соотношения легко следует из формулы

$$B_l = (s-2)B_{l-1} - B_{l-2},$$

которая получается после разложения определителя B_l по строке. Предложения 5 и 6 доказаны.

3. Используя теорему 3 и предложение 3, можно получить общую формулу, связывающую мультипликаторы периодической траектории с геометрическими характеристиками этой траектории и граничной кривой билиарда.

Пусть $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ — n -звенная периодическая траектория, $l_{i, i+1}$ — длины звеньев $\Phi_j \Phi_{j+1}$; ϑ_j и R_j — соответственно углы падения и радиусы кривизны кривой в точках Φ_j (см. рис. 33). Положим

$$\rho_j = \frac{R_j \sin \vartheta_j}{2}; L_{ij} = l_{i, i+1} + l_{i+1, i+2} + \dots + l_{j-1, j}; i, j \in \mathbb{Z}_n.$$

В частности, $L_{l, i+1} = l_{l, i+1}$, $L_{ii} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} l_{j, j+1}$. Последовательность

$\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ элементов $\mathbb{Z}_n$ назовем возрастающей, если существует последовательность $0 < \delta_1 < \dots < \delta_{k-1} < n$ натуральных чисел, такая, что $\sigma_{j+1} = \sigma_1 + \delta_j$; $j = 1, \dots, k-1$.

Пусть $\mathfrak{M}_k$ — множество возрастающих последовательностей в $\mathbb{Z}_n$, состоящих из k элементов.

Предложение 7. Имеет место следующая формула:

$$\lambda + \lambda^{-1} = (-1)^n \left(2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \sum_{\sigma \in \mathfrak{M}_k} \frac{L_{\sigma_1 \sigma_2} \cdot L_{\sigma_2 \sigma_3} \cdot \dots \cdot L_{\sigma_k \sigma_1}}{\rho_{\sigma_1} \rho_{\sigma_2} \dots \rho_{\sigma_k}} \right). \quad (6.8)$$

Действительно, в силу теоремы 3

$$\lambda + \lambda^{-1} = \text{Tr } P = 2 + \det(-H_n)(b_1 \cdot \dots \cdot b_n)^{-1}.$$

Используя предложение 3, правую часть этого равенства можно представить в виде

$$2 + \prod_{j \in \mathbb{Z}_n} l_{j, j+1} \det \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \frac{1}{l_{n, 1}} + \frac{1}{l_{1, 2}} - \frac{1}{\rho_1}, & \frac{1}{l_{1, 2}}, & 0, & \dots, & \frac{1}{l_{n, 1}} \\ \frac{1}{l_{1, 2}}, & \frac{1}{l_{1, 2}} + \frac{1}{l_{2, 3}} - \frac{1}{\rho_2}, & \frac{1}{l_{2, 3}}, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{l_{n, 1}}, & 0, & 0, & \dots, & \frac{1}{l_{n-1, n}} + \frac{1}{l_{n, 1}} - \frac{1}{\rho_n} \end{vmatrix}.$$

Далее доказательство ведется по индукции, и мы его не приводим из-за громоздкости.

4. Интересными свойствами обладают периодические траектории бильярда внутри многоугольника. Так как все радиусы $R_1, \dots, \dots, R_n$ в этом случае равны бесконечности, матрица Гессе H_n всегда неотрицательно определена.

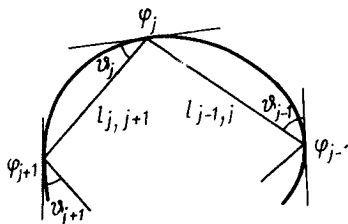


Рис. 33

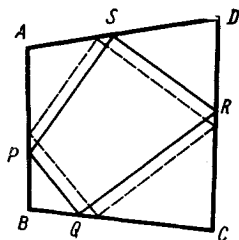


Рис. 34

В самом деле, соответствующая квадратичная форма

$\sum_{i,j=1}^n (H_n)_{ij} x_i x_j$ имеет вид

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}_n} \frac{(x_l \sin \vartheta_l + x_{l+1} \sin \vartheta_{l+1})^2}{|\varphi_l^0, \varphi_{l+1}^0|}.$$

Если n нечетно, то матрица H_n положительно определена, а если n четно, то H_n вырождена, так как имеет собственный вектор $\mathbf{v} \neq 0$ с нулевым собственным значением

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sin \vartheta_1}, -\frac{1}{\sin \vartheta_2}, \frac{1}{\sin \vartheta_3}, \dots, -\frac{1}{\sin \vartheta_n} \right)^T.$$

Более того, каждому четно-звенному периодическому решению соответствует семейство периодических решений того же типа (см. рис. 34).

В случае нечетного n периодическое семейство будет существовать у «удвоенной» траектории.

Рисунок 34 можно сделать более подробным (см. рис. 35). Здесь пары четырехугольников $ABCD$ и $A'B'CD$; $A'B'CD$ и $A''B'CD'$; $A''B'CD'$ и $A'''B'C'D''$; $A'''B'C'D''$ и $A''''B''C''D''$ симметричны относительно общих сторон; причем четырехугольник $A''B''C''D''$ оказывается результатом параллельного переноса $ABCD$ вдоль прямой $l = SR$. Периодическое решение $PQSR$ «выпрямляется» в последовательность точек $S, R, Q', R', \dots$ на l . С помощью рис. 35 легко понять, почему любой периодической траектории соответствует периодическое семейство. Кроме того, ясно, что траектория $PQRS$ неустойчива. Действительно, траектория SR_1 , где точка $R_1 \neq R$ близка к R , задаст прямую l_1 , которая со временем уйдет далеко от l .

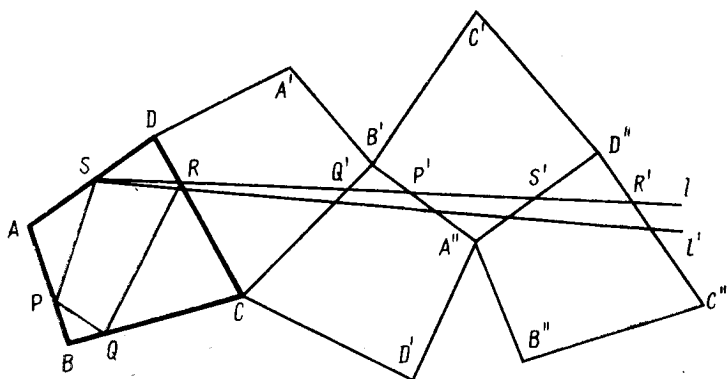


Рис. 35

Итак, периодическая траектория бильярда внутри многоугольника всегда неустойчива и имеет локально минимальную длину на соответствующем торе T^n , причем при четном n минимум вырожден.

Мультипликаторы такой траектории равны $(-1)^n$, что легко следует, например, из формулы (6.8). Действительно, в нашем случае величины ρ_{σ_j} равны бесконечности, следовательно, $\lambda + \lambda^{-1} = (-1)^n \cdot 2$.

В случае *рассеивающих бильярдов* (бильярдов Синая [31]) (см. рис. 36) все величины $R_1, \dots, R_n$ меньше нуля. Следовательно, периодические траектории таких систем имеют локально минимальную длину. Тем же свойством обладают их «удвоения», значит, в силу следствия 3 получаем следующий хорошо известный факт: периодические траектории рассеивающих бильярдов гиперболичны, следовательно, неустойчивы.

ЗАДАЧИ

1. Между двумя параллельными стенками движется по инерции выпуклое твердое тело; удар о стенки предполагается абсолютно упругим (см. введение, п. 10). Доказать, что для любого целого m существует хотя бы одно периодическое движение, при котором тело за период совершит ровно m полных оборотов.

2. Доказать, что число $N(n)$ геометрически различных периодических траекторий бильярда Биркгофа с числом звеньев, не превосходящим n , удовлетворяет оценке

$$N(n) \geq 3n^2/\pi^2 + O(n \ln n).$$

Указание: воспользоваться теоремой 1.

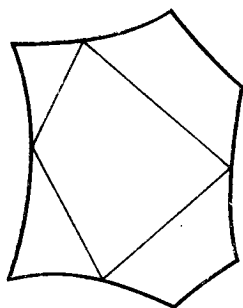


Рис. 36

3. Доказать, что для выпуклого бильярда в трехмерном пространстве справедлива оценка (И. К. Бабенко)

$$N(n) \geq n^2 / (2 \ln n) + O(n^2 / \ln^2 n).$$

Указание: воспользоваться теоремой 2 и асимптотической формулой для числа простых чисел, не превосходящих n .

4. Пусть Γ — гладкая регулярная кривая на поверхности кругового цилиндра Π и γ — круговое сечение этого цилиндра, ортогонально пересекающее Γ ровно в одной точке. Рассмотрим бильярд на Π с границей Γ ; ясно, что γ — одна из периодических траекторий этого бильярда. Может ли она быть эллиптической?

5. Доказать, что бильярд в остроугольном треугольнике имеет хотя бы одну периодическую траекторию (Г. Шварц).

Генетический метод в динамике систем с ударами, развитый в гл. 1, оказывается достаточно эффективным средством исследования устойчивости периодических режимов колебаний. В частности, с его помощью можно получить условия устойчивости периодических траекторий бильярда Биркгофа, обсуждавшиеся в гл. 2.

§ 1. УРАВНЕНИЯ В ВАРИАЦИЯХ

В качестве модельной задачи рассмотрим движение материальной точки массы m в вертикальной плоскости с декартовыми координатами x, y (ось y направлена вверх) не ниже кривой $y = f(x)$, где f — гладкая функция, такая, что $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) > 0$. Пусть g — ускорение свободного падения. Эта задача допускает семейство периодических движений, при которых точка m остается все время на оси y . В качестве параметра можно взять скорости точки v в момент удара о кривую. В работе [19] указан критерий эллиптичности этого решения:

$$0 < f''(0) < g/v^2. \quad (1.1)$$

Следуя методу гл. 1, заменим одностороннюю связь $y \geq f(x)$ полем упругих сил с потенциалом

$$V_N = mgy, \quad y \geq f(x); \quad V_N = mgy + mN(y - f(x))^2/2, \quad y < f(x).$$

Задача о движении точки m в поле с потенциалом V_N имеет семейство периодических решений периода P :

$$x_0(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq P; \quad y_0(t) = \frac{g}{N} (\cos \sqrt{N} t - 1) - \frac{v}{\sqrt{N}} \sin \sqrt{N} t, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$y_0(t) = vt - gt^2/2, \quad \tau \leq t \leq \tau + 2v/g, \quad (1.2)$$

$$\tau = \frac{2}{\sqrt{N}} \operatorname{arccctg} \left(-\frac{g}{v\sqrt{N}} \right), \quad P = \tau + 2v/g.$$

где $v > 0$ — величина скорости точки m в положении $x = y = 0$. Ясно, что при $N \rightarrow \infty$ периодическое решение (1.2) переходит в периодическое решение с ударами.

При изучении фазовых траекторий в окрестности положения равновесия системы дифференциальных уравнений используют

операцию линеаризации: правые части заменяют линейными формами их разложений Тейлора. По свойствам характеристических чисел линеаризованной системы можно судить об устойчивости положения равновесия исходной нелинейной системы. При исследовании устойчивости периодических движений также естественно воспользоваться операцией линеаризации. Пусть $t \mapsto z(t)$ — P -периодическое решение нелинейной автономной системы

$$\dot{z} = F(z), \quad z \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

Положим $z = \hat{z} + \delta z$. При малых $|\delta z|$ имеем разложение Тейлора

$$F(z) = F(\hat{z}) + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{\hat{z}} \delta z + o(\delta z).$$

Так как $(\hat{z})' = F(\hat{z})$, по из (1.3) в линейном приближении получаем уравнение

$$(\delta z)' = A(t)\delta z, \quad A = \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{\hat{z}(t)}. \quad (1.4)$$

Матрица A размера $m \times m$, очевидно, P -периодична по времени. Линейные уравнения (1.4) называются *уравнениями в вариациях* исходного периодического решения $t \mapsto \hat{z}(t)$. Уравнения в вариациях введены Пуанкаре [66].

Пусть квадратная матрица $\Omega(t)$ является решением матричного уравнения

$$\dot{\Omega} = A\Omega$$

и $\Omega(0) = E$. Ясно, что столбцы Ω образуют базис в линейном пространстве всех решений уравнений (1.4). Матрица $\Lambda = \Omega(P)$ называется *матрицей монодромии* периодического решения $\hat{z}(\cdot)$, ее собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — *мультипликаторами* этого решения. Так как система (1.3) автономна, то один из мультипликаторов всегда равен единице. Действительно, наряду с решением $\hat{z}(t)$ система (1.3) имеет решение $\hat{z}(t+\alpha)$, где α — произвольный вещественный параметр. Следовательно, справедливо тождество

$$\frac{d}{dt} \hat{z}(t+\alpha) = F(\hat{z}(t+\alpha)).$$

Дифференцируя его по α и полагая затем $\alpha = 0$, получаем уравнение

$$\dot{u} = A(t)u, \quad u = \partial \hat{z} / \partial \alpha |_{\alpha=0}.$$

Понятно, что $u(t) = (\hat{z})' = F(\hat{z}(t))$. Так как $u(\cdot)$ — нетривиальное P -периодическое решение уравнения в вариациях (1.4), то

$$\Lambda u_0 = u_0, \quad u_0 = u(0) = u(P) \neq 0. \quad (1.5)$$

Что и требовалось показать.

Количество единичных мультипликаторов увеличивается, если уравнения (1.3) допускают первые интегралы $\Phi(z)$, для которых точки периодической траектории $\hat{z}(\cdot)$ не являются критическими. Этот результат принадлежит Пуанкаре [66]. Его доказательство несложно. Так как Φ — первый интеграл (1.3), то функция

$$(v, \delta z), \quad v(t) = \partial\Phi/\partial z|_{\hat{z}(t)}$$

— первый интеграл уравнений в вариациях (1.4). Общее решение линейной системы, как известно, имеет вид $\Omega(t)c$, где c — произвольный постоянный вектор из R^m . С учетом P -периодичности вектора $v(t)$ и соотношения $\Omega(0) = E$ получаем, что

$$(v_0, c) = (v_0, \Lambda c) = (\Lambda^T v_0, c), \quad v_0 = v(0) = v(P).$$

Так как вектор c произвольный, то

$$\Lambda^T v_0 = v_0. \quad (1.6)$$

Из тождества

$$\Phi = (\partial\Phi/\partial z, F) \equiv 0$$

вытекает очевидное равенство

$$(v_0, u_0) = 0. \quad (1.7)$$

Покажем, что $\lambda = 1$ — двукратный корень характеристического уравнения $|\Lambda - \lambda E| = 0$.

Действительно, разложим пространство R^m в прямую сумму собственных подпространств оператора Λ :

$$R^m = \Pi_1 \oplus \Pi_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \Pi_{\lambda_k}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \neq 1 \text{ при } i \neq j.$$

Предположим, что пространство Π_1 одномерно. Тогда Π_1 является линейной оболочкой вектора u_0 . В силу равенства (1.7) вектор v_0 ортогонален пространству Π_1 . Но вектор v_0 ортогонален также любому из пространств Π_{λ_i} . В самом деле, пусть $u \in \Pi_{\lambda_i}$. Тогда $(\Lambda - \lambda_i E)^m u = 0$. Таким образом,

$$0 = (v_0, (\Lambda - \lambda_i E)^m u) = ((\Lambda^T - \lambda_i E)^m v_0, u) = (1 - \lambda_i)^m (v_0, u).$$

Итак, вектор $v_0 \neq 0$ ортогонален пространствам $\Pi_1, \Pi_{\lambda_1}, \dots, \Pi_{\lambda_k}$, следовательно, он ортогонален всему R^m . Полученное противоречие означает, что $\dim \Pi_1 > 1$. Получаем требуемое.

В частности, если система (1.3) гамильтонова, то по меньшей мере два мультипликатора каждого из ее периодических решений равны единице. Один из мультипликаторов равен 1 из-за свойства автономности, а другой — из-за наличия интеграла энергии. При этом используется очевидный факт, что на траектории периодического решения, не совпадающего с неподвижной точкой, функция Гамильтона не имеет критических точек.

Если среди мультипликаторов имеются такие, что $|\lambda| > 1$, то периодическое решение $\hat{z}$ неустойчиво. Более детально с теорией уравнений в вариациях можно познакомиться, например, по книге [14].

В нашей задаче уравнение для x -координаты имеет следующий вид:

$$\ddot{x} = 0, \quad y > f; \quad \ddot{x} = Nf'(x)(y-f), \quad y \leq f.$$

Запишем уравнение в вариациях для периодического решения (1.2)

$$(\delta x)'' + p(t)\delta x = 0;$$

$$p(t) = -Nf''(0)y_0(t), \quad 0 \leq t \leq \tau; \quad p(t) = 0, \quad \tau \leq t \leq P. \quad (1.8)$$

Зависимость y_0 от t указана в (1.2). Видим, что уравнение для δx отделилось и поэтому его можно изучать отдельно от полной системы уравнений в вариациях. По поведению решений уравнения (1.8) можно судить об устойчивости периодических колебаний (1.2) по отношению к смещениям в горизонтальном направлении.

Линейное уравнение вида (1.8) с периодическим коэффициентом $p(t)$ общего вида впервые получено американским астрономом Дж. Хиллом в связи с задачей о движении перигея Луны и теперь носит его имя [55]. Дж. Хилл предложил метод решения этого уравнения с использованием определителей бесконечного порядка. Метод Хилла обсуждается в § 4. Обобщение теории Хилла на случай системы уравнений дано Д. В. Трещевым и С. В. Боло-тиным; оно изложено в добавлении 2.

Уравнение Хилла часто встречается в задачах об устойчивости периодических движений с ударами. В качестве еще одного примера рассмотрим вопрос об устойчивости двузвенной периодической траектории бильярда Биркгофа: точка движется по отрезку длины l , периодически упруго отражаясь от кривой. Эта задача решена в § 6 гл. 2. Обозначим радиусы кривизны граничной кривой бильярда в концевых точках отрезка через R_1 и R_2 ; пусть $R_1 \leq R_2$. Снова вводя поле упругих сил, получим уравнения в вариациях, аналогичных условию (1.8):

$$\ddot{\xi} + p(t)\xi = 0,$$

$$p(t) = \begin{cases} \frac{v\sqrt{N}}{R_1} \sin \sqrt{N}t, & 0 \leq t \leq \pi/\sqrt{N}; \\ \frac{v\sqrt{N}}{R_2} \sin \sqrt{N}(t+\tau), & \tau \leq t \leq \tau + \frac{\pi}{\sqrt{N}}, \quad \tau = \frac{\pi}{\sqrt{N}} + \frac{l}{v}; \\ 0, & \frac{\pi}{\sqrt{N}} \leq t \leq \tau, \quad \tau + \frac{\pi}{\sqrt{N}} \leq t \leq \tau + \frac{\pi}{\sqrt{N}} + \frac{l}{v}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Здесь v — постоянная скорость движения точки внутри бильярда Биркгофа; значения функции $p(t)$ указаны на ее периоде. Величина ξ характеризует смещение точки в направлении, ортогональном отрезку невозмущенной периодической траектории.

Нас интересует поведение решений уравнений (1.8) и (1.9) при достаточно больших значениях N . Нетрудно подметить одно важное свойство периодического коэффициента p : эта функция отлична от нуля лишь на небольших интервалах времени (порядка $1/\sqrt{N}$), причем значение интеграла

$$\int_0^P p(t) dt$$

стремится к некоторой постоянной, когда $N \rightarrow \infty$. Это характерное свойство обобщенной δ -функции Дирака. Более точно, коэффициент p в уравнении (1.9) является линейной комбинацией функций вида

$$\mu_N(s) = \begin{cases} \sqrt{N} \sin \sqrt{N} s, & 0 \leq s \leq \pi/\sqrt{N}; \\ 0, & \text{для остальных } s. \end{cases}$$

Пусть φ — некоторая непрерывная функция времени. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \mu_N(t) dt = 2\varphi(0). \quad (1.10)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sqrt{N} \int_0^{\pi/\sqrt{N}} \varphi(t) \sin \sqrt{N} t dt &= \int_0^{\pi} \varphi(\tau/\sqrt{N}) \sin \tau d\tau \rightarrow \\ &\rightarrow \int_0^{\pi} \varphi(0) \sin \tau d\tau = 2\varphi(0), \end{aligned}$$

когда $N \rightarrow \infty$. Как известно, δ -функция Дирака определяется соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t) dt = \varphi(0), \quad (1.11)$$

справедливым для всех непрерывных функций φ . Следовательно, согласно (1.10) и (1.11), $\mu_N \rightarrow 2\delta$ при $N \rightarrow \infty$. Поэтому в пределе имеет место формальное соотношение

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2v \left[R_1^{-1} \delta \left(t + \frac{2nl}{v} \right) + R_2^{-1} \delta \left(t + \frac{(2n+1)l}{v} \right) \right]. \quad (1.12)$$

Аналогичный результат справедлив и для коэффициента p в уравнении Хилла (1.8). Эти наблюдения имеют решающее значение

при получении условий устойчивости периодических движений с ударами.

В заключение этого параграфа укажем простое, но важное свойство мультипликаторов уравнения Хилла $\ddot{x} + p(t)x = 0$. Это уравнение можно переписать в виде системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Заметим, что $\text{Tr} A = 0$. Воспользуемся формулой Лиувилля — Остроградского

$$|\Omega(t)| = |\Omega(0)| \exp \int_0^t \text{Tr} A(\tau) d\tau.$$

Отсюда вытекает, в частности, что $|\Lambda| = 1$. Следовательно, характеристическое уравнение $|\Lambda - \lambda E| = 0$ имеет следующий вид:

$$\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0, \quad a = \text{Tr} \Lambda. \quad (1.14)$$

Оно является возвратным. Последнее обстоятельство является частным случаем общего результата Пуанкаре — Ляпунова о возвратности характеристического уравнения для гамильтоновых систем (см., например, [2]).

Следует различать три случая: 1) $|a| > 2$; 2) $|a| < 2$; 3) $|a| = 2$. Если $|a| > 2$, то характеристическое уравнение (1.14) имеет два действительных корня, из которых один (λ_1) по абсолютной величине больше единицы, а другой (λ_2) меньше. Пусть $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ — соответствующие собственные векторы. Любой вектор $c \in \mathbb{R}^2$ можно разложить по этим векторам как по базису: $c = c_1 e_1 + c_2 e_2$. Следовательно, каждое решение системы (1.13) имеет вид

$$z = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = c_1 \Omega(t) e_1 + c_2 \Omega(t) e_2.$$

В частности, вектор $c = c_1 e_1 + c_2 e_2$ за время $t = P$ перейдет в

$$c_1 \Lambda e_1 + c_2 \Lambda e_2 = c_1 \lambda_1 e_1 + c_2 \lambda_2 e_2.$$

Итак, возникает линейное отображение плоскости $\mathbb{R}^2 = \{x, \dot{x}\}$ за период P , определяемое формулой

$$(c_1, c_2) \mapsto (\lambda_1 c_1, \lambda_2 c_2).$$

Оно является гиперболическим поворотом: так как $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, то гиперболы $c_1 c_2 = \text{const}$ переходят в себя. В этом случае исходное периодическое движение неустойчиво; будем называть его *гиперболическим*.

Во втором случае λ_1 и λ_2 комплексно сопряжены и их модули равны 1. Поэтому можно положить $\lambda_1 = \exp(i\alpha)$, $\lambda_2 = \exp(-i\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Корню λ_1 отвечает собственный вектор $e_1 = \xi + i\eta$, а корню

λ_2 — вектор $e_2 = \xi - i\eta$. Здесь ξ и η — некоторые вещественные линейно независимые векторы в $R^2 = \{x, \dot{x}\}$. Так как $Ae_j = \lambda_j e_j$, то

$$A\xi = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \quad A\eta = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha.$$

Если $c = c_1 \xi + c_2 \eta$, то

$$Ac = (c_1 \cos \alpha + c_2 \sin \alpha) \xi + (-c_1 \sin \alpha + c_2 \cos \alpha) \eta.$$

Эта формула определяет линейное отображение

$$(c_1, c_2) \mapsto (c_1 \cos \alpha + c_2 \sin \alpha, -c_1 \sin \alpha + c_2 \cos \alpha),$$

которое является поворотом вокруг начала координат на угол α . Здесь все решения уравнения Хилла ограничены и периодическое решение устойчиво в линейном приближении. Это решение называется *эллиптическим*.

В случае $|a| = 2$ мультипликаторы λ_1 и λ_2 совпадают. Они оба равны либо 1, либо -1 . Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ($a = 2$), то периодическое решение назовем *вырожденным*, а если $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ ($a = -2$) — *параболическим*.

Предложенная классификация периодических решений совпадает с классификацией неподвижных точек отображения Пуанкаре (§ 4, гл. 2).

Отметим еще, что периодические движения (1.2) являются решениями гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Поэтому два их мультипликатора равны единице, а остальные нетривиальные мультипликаторы определяются как корни характеристического уравнения (1.14), отвечающего уравнению Хилла (1.8). Аналогичное замечание относится и к задаче о двузвенной периодической траектории бильярда Биркгофа.

§ 2. КОНСТАНТА ЛЯПУНОВА

Вещественная постоянная a в характеристическом уравнении (1.14) называется *константой Ляпунова*. Как уже было сказано, ее значение определяет тип периодической траектории (в частности, свойство устойчивости или неустойчивости). А. М. Ляпунов получил общую формулу для константы a , из которой можно получить ряд важных результатов [27].

Построим матрицу решений уравнения Хилла

$$\Omega(t) = \begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \dot{\varphi} & \dot{\psi} \end{vmatrix}, \quad (2.1)$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — решения этого уравнения с начальными данными

$$\varphi(0) = 1, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad (2.2)$$

$$\psi(0) = 0, \quad \dot{\psi}(0) = 1. \quad (2.3)$$

Следуя Ляпунову, функции φ и ψ можно получить в виде сходящихся рядов. Для этого введем в уравнение Хилла параметр ε :

$$\ddot{x} - \varepsilon p(t)x = 0. \quad (2.4)$$

Разложим решения (2.4) в ряды по степеням ε и затем положим $\varepsilon = -1$. Пусть, например,

$$\varphi(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t) \varepsilon^k$$

— решение (2.4) с начальными данными (2.2). Подставляя этот ряд в (2.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим бесконечную цепочку уравнений для последовательного нахождения коэффициентов $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$:

$$\ddot{\varphi}_0 = 0, \quad \ddot{\varphi}_k = p \varphi_{k-1} \quad (k \geq 1). \quad (2.5)$$

Для этих функций введем следующие начальные данные:

$$\varphi_0(0) = 1, \quad \dot{\varphi}_0(0) = 0; \quad \varphi_k(0) = \dot{\varphi}_k(0) = 0 \quad (k \geq 1). \quad (2.6)$$

Тогда, очевидно, для функции $\varphi(t, \varepsilon)$ при всех значениях ε будут выполнены условия (2.2). Из (2.5) и (2.6) находим

$$\varphi_0(t) = 1, \quad \varphi_k(t) = \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} p(t_1) \varphi_{k-1}(t_1) dt_1 \quad (k \geq 1).$$

В последнем выражении интегрирование проводится по треугольнику $\{t_1, t_2: 0 \leq t_2 \leq t, 0 \leq t_1 \leq t_2\}$. Меняя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) &= \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t p(t_1) \varphi_{k-1}(t_1) dt_2 = \\ &= \int_0^t (t - t_1) p(t_1) \varphi_{k-1}(t_1) dt_1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Итак,

$$\begin{aligned} \varphi(t, \varepsilon) &= 1 + \varepsilon \int_0^t (t - t_1) p(t_1) dt_1 + \\ &+ \varepsilon^2 \int_0^t (t - t_1) p(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} (t_1 - t_2) p(t_2) dt_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

Исследуем сходимость этого ряда. Пусть $\sup |p(t)| = M$. Так как $\varphi_0 = 1$, то из (2.7) получаем неравенства

$$|\Phi_1(t)| \leq \int_0^t (t-t_1) M dt_1 = Mt^2/2!$$

$$|\Phi_2(t)| \leq \int_0^t (t-t_1) \frac{M^2 t_1^2}{2!} dt_1 = M^2 t^4/4!$$

.....

$$|\Phi_k(t)| \leq \int_0^t (t-t_1) \frac{M^k t_1^{2k-2}}{(2k-2)!} dt_1 = M^k t^{2k}/(2k)!$$

.....

Следовательно, степенной ряд (2.8) мажорируется рядом

$$1 + |\varepsilon| \frac{Mt^2}{2!} + \dots + \frac{|\varepsilon|^k M^k t^{2k}}{(2k)!} + \dots = \operatorname{ch}(t\sqrt{M|\varepsilon|}),$$

сходящимся для всех значений t и ε . Согласно признаку Вейерштрасса ряд (2.8) сходится равномерно и абсолютно в любой конечной области на плоскости переменных t, ε . Нетрудно проверить возможность почленного (многократного) дифференцирования ряда (2.8). Поэтому функция $\varphi(t, \varepsilon)$, представленная рядом (2.8), действительно, удовлетворяет уравнению Хилла.

Полагая $\varepsilon = -1$ получим окончательную формулу

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & 1 - \int_0^t (t-t_1) p(t_1) dt_1 + \\ & + \int_0^t (t-t_1) p(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} (t_1-t_2) p(t_2) dt_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Точно так же находится второе решение $\psi(t)$ с начальными данными (2.3):

$$\begin{aligned} \psi(t) = & t - \int_0^t (t-t_1) t_1 p(t_1) dt_1 + \\ & + \int_0^t (t-t_1) p(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} (t_1-t_2) t_2 p(t_2) dt_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

Полагая в формуле (2.1) $t=P$, получим искомое выражение для константы Ляпунова

$$a = \operatorname{Tг} \Lambda = \varphi(P) + \psi(P) = 2 - I_1 + I_2 - I_3 + \dots \quad (2.11)$$

где

$$I_1 = P \int_0^P p(t) dt,$$

$$I_k = \int_0^P dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k (P - t_1 + t_k)(t_1 - t_2) \dots$$

$$\dots (t_{k-1} - t_k) p(t_1) \dots p(t_k), \quad k \geq 1. \quad (2.12)$$

Из формул (2.11) и (2.12) получаем ряд важных следствий.

Следствие 1. Если $p(t) \leq 0$ и $p(t) \neq 0$, то периодическое решение гиперболическое.

Действительно, согласно (2.12) $I < 0$, а $(-1)^k I_k \geq 0$ для всех $k \geq 1$. Поэтому с учетом (2.11) $a > 2$.

Следствие 2 (интегральный признак Ляпунова [27]). Если $p(t) \geq 0$ и

$$0 < P \int_0^P p(t) dt < 4, \quad (2.13)$$

то периодическое решение эллиптическое.

Доказательство основано на использовании неравенств

$$I_1 > I_2 > I_3 > \dots > 0, \quad (2.14)$$

которые выводятся из (2.12) и (2.13). Следовательно, ряд $2 - I_1 + I_2 - I_3 + \dots$ является знакочередующимся и поэтому для его суммы справедливы оценки

$$2 - I_1 < a < 2.$$

Согласно (2.13) $0 < I_1 \leq 4$, откуда получаем, что $|a| < 2$. Вывод цепочки неравенств (2.14) можно найти в книге А. М. Ляпунова [27].

§ 3. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Применим результаты § 2 к задаче об устойчивости периодических подскоков тяжелой материальной точки над кривой $y = f(x)$. Воспользуемся интегральным признаком Ляпунова (2.13). Согласно (1.8) для этого надо подсчитать

$$-Pf''(0)N \int_0^{\tau} y_0(t) dt, \quad (3.1)$$

где $P = 2v/g + \tau$, $\tau = (2/\sqrt{N}) \arctg(-g/(v\sqrt{N}))$, а

$$y_0(t) = \frac{g}{N} (\cos \sqrt{N} t - 1) - \frac{v}{\sqrt{N}} \sin \sqrt{N} t.$$

Вычисление дает

$$-\left(\frac{2v}{g} + \tau\right) f''(0) \left[\frac{g \sin \sqrt{N} \tau}{\sqrt{N}} - g\tau + v(\cos \sqrt{N} \tau - 1) \right]. \quad (3.2)$$

Так как

$$\tau = \pi/\sqrt{N} + o(1/\sqrt{N}),$$

то при $N \rightarrow \infty$ из (2.13) и (3.2) получаем достаточное условие эллиптичности рассматриваемого периодического движения с ударами

$$0 < f''(0) < g/v^2. \quad (3.3)$$

Это условие совпадает с критерием эллиптичности (1.1), найденным в работе [19].

Совпадение достаточного (3.3) и необходимого (1.1) условий устойчивости приводит, между прочим, к известному результату Н. Е. Жуковского о невозможности увеличения постоянной в правой части неравенства Ляпунова (2.13).

Применим теперь интегральный признак (2.13) к задаче об устойчивости двузвенной траектории бильярда Биркгофа. Используя формулы (1.9) и переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем достаточное условие устойчивости (в первом приближении) двузвенной траектории

$$l \leq R_1 R_2 / (R_1 + R_2). \quad (3.4)$$

В общем случае оно не является необходимым. Критерий устойчивости двузвенной периодической траектории имеет следующий вид (см. § 6, гл. 2):

$$l < R_1 \text{ или } R_2 < l < R_1 + R_2. \quad (3.5)$$

Условие (3.5) переходит в (3.4), если $R_2 \rightarrow \infty$. В этом случае функция $p(t)$ в уравнении Хилла (1.9) имеет лишь один малый интервал положительности (как в уравнении (1.8)).

Условие устойчивости (3.5) можно получить из неравенства Ляпунова $|a| < 2$, где выражение для постоянной a дается формулами (2.11) и (2.12). Рассмотрим сначала частный случай, когда $R_2 = \infty$. Тогда $p(t) = R_1^{-1} \sqrt{N} \sin \sqrt{N} t$, $0 \leq t \leq \pi/\sqrt{N}$, а при $\pi/\sqrt{N} \leq t \leq P$ функция $p(t)$ равна нулю (величину скорости v без ущерба общности можно считать равной единице). Ясно, что $I_1 = 2PR_1^{-1}$, а для интегралов I_k , $k \geq 2$, справедлива оценка

$$|I_k| \leq 4P R_1^{-1} (2\pi R_1^{-1} \sqrt{N})^{k-1}. \quad (3.6)$$

Для доказательства этого неравенства воспользуемся формулой (2.12) и оценками $|P - t_1 + t_k| \leq 2P$, $|t_j - t_{j+1}| \leq \pi/\sqrt{N}$. Последнее неравенство вытекает из того обстоятельства, что ин-

тегрирование в (2.12) ведется лишь по малой области, где $0 \leq t_j \leq \pi/\sqrt{N}$. Из (2.12) получаем

$$|I_k| \leq 2P \left(\frac{\pi}{\sqrt{N}} \right)^{k-1} \int_0^{\pi/\sqrt{N}} p(t_1) dt_1 \dots \int_0^{\pi/\sqrt{N}} p(t_k) dt_k = \\ = \frac{4P}{R_1} \left(\frac{2\pi}{R_1 \sqrt{N}} \right)^{k-1}.$$

Отсюда вытекает оценка (3.6).

Согласно (2.11) и (3.6)

$$a = 2 - 2P/R_1 + O(1/\sqrt{N}).$$

При $N \rightarrow \infty$ период $P \rightarrow 2l$ и неравенство $|a| < 2$ перейдет в неравенство $l < R_1$ (отвечающее случаю $R_2 = \infty$ в (3.5)).

Рассмотрим теперь общий случай уравнения (1.9). Можно проверить, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_1 = 4l(R_2^{-1} + R_1^{-1}), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} I_2 = 4R_1^{-1}R_2^{-1}l^2,$$

а интегралы I_k , $k \geq 3$, допускают оценку $|I_k| \leq (c/\sqrt{N})^{k-3}$, $c = \text{const} > 0$. Поэтому при $N \rightarrow \infty$ неравенство $|a| < 2$ примет следующий вид:

$$|1 - 2l(R_1^{-1} + R_2^{-1}) + 2R_1^{-1}R_2^{-1}l^2| < 1.$$

Оно, очевидно, эквивалентно (3.5).

Тем же способом можно получить условие устойчивости периодического движения точки между вогнутыми стенками в поле силы тяжести (см. рис. 37). Пусть v_1 (v_2) — скорость точки в наименьшем (наивысшем) положении. Поскольку рассматривается движение с ударами, то предполагается, что $v_2^2 = v_1^2 - 2gl \geq 0$. Условие устойчивости в линейном приближении имеет следующий вид:

$$\left| 1 - \frac{2(v_1 - v_2)}{g} \left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} \right) + \frac{2(v_1 - v_2)^2}{g^2} \frac{v_1 v_2}{R_1 R_2} \right| < 1. \quad (3.7)$$

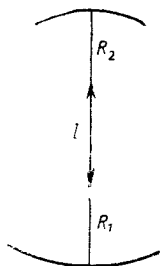


Рис. 37

Если $v_2 = 0$, то это условие эквивалентно (1.1). Устремим теперь g к нулю. В пределе будем иметь движение точки по инерции между двумя неподвижными стенками. В этом случае $v_i \rightarrow v$, $i = 1, 2$, и $v_1 - v_2 = gl/v + o(g)$. Переходя в неравенстве (3.7) к пределу при $g \rightarrow 0$, получим уже известное нам условие устойчивости (3.5).

Как уже было сказано в § 1, для периодических траекторий с ударами при $N \rightarrow \infty$ коэффициент $p(\cdot)$ представляет линейную комбинацию δ -функций Дирака. Так, например, для двузвенной периодической траектории $p(\cdot)$ справедлива фор-

мула (1.12). Если подставить в выражения для интегралов I_k это формальное соотношение и воспользоваться неравенством для константы Ляпунова $|a| < 2$, то получим условие устойчивости (3.5). Аналогичный результат справедлив, конечно, и в самом общем случае.

§ 4. МЕТОД ХИЛЛА

С точки зрения астрономических приложений наибольший интерес представляет случай, когда

$$p(t) = \vartheta_0 + 2\vartheta_1 \cos 2t + 2\vartheta_2 \cos 4t + \dots \quad (4.1)$$

Здесь $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots$ — вещественные постоянные, причем ряд $\sum_0^\infty \vartheta_k$ абсолютно сходится. Именно этот случай исследован Хиллом в его работе [55]. Тот факт, что период функции $p(\cdot)$ равен π , не имеет существенного значения: линейная замена времени $t \mapsto \pi t/P$ приводит уравнение Хилла

$$\ddot{x} + p(t)x = 0 \quad (4.2)$$

к уравнению с P -периодическим коэффициентом.

Тригонометрический ряд (4.1) можно представить в комплексной форме

$$p = \sum_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n e^{2int}, \quad \vartheta_{-n} = \vartheta_n.$$

Следуя Хиллу, ищем решение (4.2) в виде

$$x(t) = e^{\mu t} \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{2int}, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |b_n| \neq 0. \quad (4.3)$$

После подстановки в уравнение (4.2) найдем

$$\begin{aligned} & \sum_{-\infty}^{\infty} (\mu + 2ni)^2 b_n e^{(\mu+2ni)t} + \\ & + \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n e^{2nit} \right) \left(\sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{(\mu+2ni)t} \right) = 0. \end{aligned}$$

Перемножая тригонометрические ряды и приравнявая нулю коэффициенты при степенях $\exp(2it)$, получим бесконечную систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} & (\mu + 2ni)^2 b_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vartheta_m b_{n-m} = 0, \\ & n = \dots -2, -1, 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

Разделим каждое из этих уравнений на $\vartheta_0 - 4n^2$ (для обеспечения сходимости). Система (4.4) линейна относительно... b_{-n} , ..., b_n , ...; ее определитель равен

$$\Delta(i\mu) = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{(i\mu+4)^2 - \vartheta_0}{4^2 - \vartheta_0} & -\frac{\vartheta_1}{4^2 - \vartheta_0} & -\frac{\vartheta_2}{4^2 - \vartheta_0} & -\frac{\vartheta_3}{4^2 - \vartheta_0} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -\frac{\vartheta_1}{2^2 - \vartheta_0} & \frac{(i\mu+2)^2 - \vartheta_0}{2^2 - \vartheta_0} & -\frac{\vartheta_1}{2^2 - \vartheta_0} & -\frac{\vartheta_2}{2^2 - \vartheta_0} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -\frac{\vartheta_2}{0^2 - \vartheta_0} & -\frac{\vartheta_1}{0^2 - \vartheta_0} & \frac{(i\mu)^2 - \vartheta_0}{0^2 - \vartheta_0} & -\frac{\vartheta_1}{0^2 - \vartheta_0} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -\frac{\vartheta_3}{2^2 - \vartheta_0} & -\frac{\vartheta_2}{2^2 - \vartheta_0} & -\frac{\vartheta_1}{2^2 - \vartheta_0} & \frac{(i\mu-2)^2 - \vartheta_0}{2^2 - \vartheta_0} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

При $\mu=0$ все диагональные элементы равны 1. Хилл нашел явную формулу для определителя (4.5):

$$\Delta(i\mu) = \Delta(0) - \frac{\sin^2(\pi i\mu/2)}{\sin^2(\pi\sqrt{\vartheta_0}/2)}. \quad (4.6)$$

Корректность ее вывода была установлена впервые Пуанкаре [66, п. 185—188]. Доказательство обобщений равенства (4.6) содержится в добавлении 2.

Из формулы (4.3) видно, что $x(t)$ отличается экспоненциальным множителем $\exp(\mu t)$ от π -периодической функции. Следовательно (см. § 1), $\exp(\pi i\mu)$ является мультипликатором рассматриваемого решения. Таким образом, периодическое решение неустойчиво (устойчиво), если μ является вещественным ($\mu = i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\alpha \notin \mathbb{Z}$) числом.

Коэффициент μ определяется из уравнения Хилла $\Delta(i\mu) = 0$. Основная трудность в вычислении μ заключается в отыскании значения определителя Хилла при $\mu=0$.

В теории устойчивости периодических движений с ударами функция $p(\cdot)$ является комбинацией δ -функций Дирака. Рассмотрим в качестве примера случай, когда

$$p(t) = \lambda \left[1/2 + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(2x - 2k\pi) \right], \quad \lambda = \text{const} > 0. \quad (4.7)$$

Уравнение Хилла (4.2) с таким коэффициентом совпадает с уравнением в вариациях для двузвенной периодической траектории бильярда Биркгофа в частном случае, когда $R_2 = \infty$ (см. § 3). Критерий устойчивости может быть получен из неравенства Ляпунова (2.13)

$$\lambda < 4/\pi^2. \quad (4.8)$$

Ясно, что $\exp i\mu \neq R$ тогда и только тогда, когда

$$\pi^2 \lambda / 4 < 1.$$

Это условие совпадает как раз с неравенством (4.8), являющимся критерием эллиптичности рассматриваемой периодической траектории.

ЗАДАЧИ

1. Пусть $p(t)$ — периодическая функция периода P , которая при $0 \leq t \leq P$ является линейной комбинацией δ -функций Дирака:

$$p(t) = \sum_{j=1}^m a_j \delta(t - \tau_j),$$

где $a_j = \text{const}$, $\tau_j \in (0, P)$. Вычислить постоянную Ляпунова.

Ответ: $a = 2 - I_1 + I_2 - \dots + (-1)^m I_m$,

$$I_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1} \dots a_{i_k} \Delta_{i_1} \dots \Delta_{i_k},$$

где $i_1, \dots, i_k$ — возрастающая последовательность k чисел из набора $\{1, 2, \dots, m\}$; $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_k}$ — длины интервалов, на которые разбивается окружность $\{t \bmod P\}$ точками $\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_k} \bmod P$.

2. Найти условия устойчивости прямолинейной четырехзвенной периодической траектории, изображенной на рис. 38.

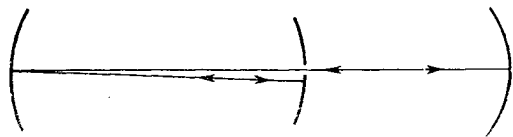


Рис. 38

3. Рассмотрим движение материальной точки в трехмерном пространстве $R^3 = \{x, y, z\}$ между двумя стенками, заданными уравнениями

$$z = -f_0 + a_1 x^2 + 2b_1 xy + c_1 y^2 + o(x^2 + y^2),$$

$$z = f_0 - a_2 x^2 - 2b_2 xy - c_2 y^2 + o(x^2 + y^2); \quad f_0 > 0.$$

Удары предполагаются абсолютно упругими. Найти условия устойчивости (в линейном приближении) двухзвенной траектории $x = y = 0$, $|z| \leq f_0$.

Уравнения динамики принято разделять на интегрируемые и неинтегрируемые. Интегрируемые системы имеют достаточно много независимых первых интегралов (например, для полной интегрируемости гамильтоновой системы с n степенями свободы достаточно знать n интегралов, попарно находящихся в инволюции; см. [3, гл. 4]). В соответствии с этим можно выделить интегрируемые бильярдные системы, обладающие полным набором независимых интегралов. Мы укажем основные известные интегрируемые бильярды, а также некоторые способы их точного интегрирования и исследования качественных особенностей движения.

§ 1. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ БИЛЛИАРД

Рассмотрим движение материальной точки по инерции в области евклидовой плоскости $R^2 = \{x, y\}$, ограниченной эллипсом

$$x^2/a + y^2/b = 1, \quad a \geq b. \quad (1.1)$$

Предполагается, что удары о границу являются абсолютно упругими. Эта динамическая система называется *эллиптическим бильярдом*. Согласно Биркгофу [42, гл. VIII] эллиптический бильярд получается из известной задачи Якоби о движении по геодезическим линиям на поверхности трехосного эллипсоида

$$x^2/a + y^2/b + z^2/c = 1, \quad (1.2)$$

когда одна из его полуосей (скажем, c) стремится к нулю. Задача Якоби интегрируема: кроме интеграла энергии $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = h$ уравнения геодезических

$$\ddot{x} = \mu x/a, \quad \ddot{y} = \mu y/b, \quad \ddot{z} = \mu z/b, \quad x^2/a + \dots = 1$$

имеют дополнительный интеграл

$$F = (x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)(\dot{x}^2/a + \dot{y}^2/b + \dot{z}^2/c). \quad (1.3)$$

Справедливость этого результата можно проверить непосредственным дифференцированием. Интеграл (1.3) впервые указан Иохимсталем.

Выразим z через x, y из уравнения (1.2) и подставим полученное выражение в (1.2). Нетрудно проверить, что существует

$$\lim_{c \rightarrow \infty} cF|_{x,y} = \dot{x}^2/a + \dot{y}^2/b - (\dot{x}y - x\dot{y})^2/ab. \quad (1.4)$$

Эта квадратичная по скоростям $\dot{x}$, $\dot{y}$ функция является, конечно, интегралом для эллиптического бильярда. При $a=b$ (когда эллипс превращается в окружность) получаем линейный интеграл момента $x\dot{y}-\dot{x}y$.

Движение точки с упругими ударами внутри эллипса может быть исследовано с помощью метода разделения переменных. С этой целью рассмотрим в плоскости $\mathbf{R}^2=\{x, y\}$ семейство софокусных коник

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} - 1 = 0, \quad a > b. \quad (1.5)$$

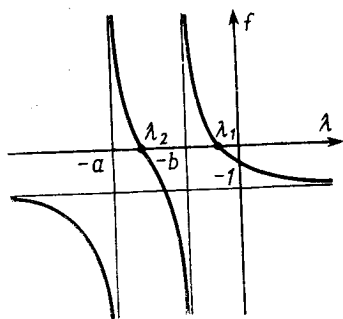


Рис. 39

При фиксированных ненулевых значениях x , y график f как функция λ изображен на рис. 39. Уравнение (1.5) имеет два различных корня λ_1 и λ_2 , заключенных в интервалах $(-b, +\infty)$ и $(-a, -b)$. При $\lambda_1=\lambda_2$ уравнение (1.5) задает эллипс, а при $\lambda=\lambda_2$ — гиперболу. Следовательно, через каждую точку плоскости $\mathbf{R}^2$ с ненулевыми координатами проходят ровно две коники из семейства (1.5). Таким образом, числа λ_1 и λ_2 могут быть выбраны в качестве новых криволинейных координат в $\mathbf{R}^2$. Эти координаты называются *эллиптическими*. Они введены Якоби (см. [56, гл. 26]). Эллиптические координаты Якоби можно определить и в многомерных евклидовых пространствах.

При $\lambda=0$ получаем границу рассматриваемого эллиптического бильярда (1.1). Так как материальная точка находится все время внутри эллипса (1.1), то координата λ_1 может изменяться от $-b$ до нуля.

При $\lambda=0$ получаем границу рассматриваемого эллиптического бильярда (1.1). Так как материальная точка находится все время внутри эллипса (1.1), то координата λ_1 может изменяться от $-b$ до нуля.

Из (1.5) легко получить явные формулы перехода к эллиптическим координатам

$$x^2 = \frac{(a+\lambda_1)(a+\lambda_2)}{a-b}, \quad y^2 = \frac{(b+\lambda_1)(b+\lambda_2)}{b-a} \quad (1.6)$$

и выражение для кинетической энергии

$$T = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{8\Delta_1} \dot{\lambda}_1^2 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{8\Delta_2} \dot{\lambda}_2^2, \quad \Delta_k = (a+\lambda_k)(b+\lambda_k).$$

Перейдем к сопряженным импульсам

$$\mu_k = \partial T / \partial \dot{\lambda}_k$$

и запишем выражение для функции Гамильтона

$$H = \frac{2\Delta_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_1^2 + \frac{2\Delta_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \mu_2^2 = 2h.$$

Переменные λ , μ разделяются:

$$\Delta_k \mu_k^2 - h\lambda_k = \gamma = \text{const}, \quad k = 1, 2. \quad (1.7)$$

С учетом этого обстоятельства выпишем замкнутую систему уравнения для λ_1 и λ_2 :

$$\dot{\lambda}_k = \pm 4 \sqrt{\Phi(\lambda_k)} / (\lambda_1 - \lambda_2); \quad k = 1, 2; \quad (1.8)$$

$$\Phi(z) = (a + z)(b + z)(hz + \gamma).$$

Переменные λ_1 и λ_2 изменяются в интервалах, где $\Phi(\lambda_k) \geq 0$. Возможны два основных случая: (A) $-b < -\gamma/h < 0$,

(B) $-a < -\gamma/h < -b$. В первом из них

$$-a \leq \lambda_2 \leq -b, \quad -\gamma/h \leq \lambda_1 \leq 0, \quad (1.9)$$

во втором —

$$-a \leq \lambda_2 \leq -\gamma/h, \quad -b \leq \lambda_1 \leq 0. \quad (1.10)$$

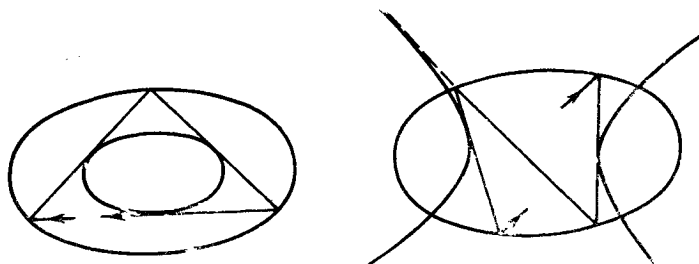


Рис. 40

В этих предположениях точка движется в криволинейных областях, ограниченных софокусными кониками. Они изображены на рис. 40.

Как же происходит движение? Предположим, что в начальный момент времени выполнены строгие неравенства (1.9) или (1.10). Если при $t=0$ в уравнениях (1.8) перед радикалами стоит знак «+», то в последующие моменты координаты λ_1 и λ_2 возрастают. Это происходит до тех пор, пока λ_1 (или λ_2) не достигнет максимального значения. В этот момент времени соответствующий радикал в уравнениях (1.8) меняет знак и координата λ_1 (или λ_2) начинает уменьшаться, пока не достигнет своего минимально возможного значения. И так далее.

Из этих простых наблюдений можно вывести важное свойство траекторий эллиптического биллиарда: отрезки прямых, из кото-

рых состоит траектория (или их продолжения), касаются одной и той же софокусной с эллипсом коники. Этот результат эквивалентен известной «малой теореме Понселе» (см. [41, гл. 17]). Его доказательство особенно просто выглядит в случае (А). Действительно, координата λ_1 попеременно принимает свои крайние значения $-\gamma/h$ и 0. При $\lambda_1=0$ происходит удар о границу бильярда, а при $\lambda_1=-\gamma/h$ мы находимся в точке касания отрезка прямой траектории с софокусным эллипсом

$$x^2/(a+\lambda_1) + y^2/(b+\lambda_1) = 1. \quad (1.11)$$

Рассмотрение случая (В) предоставляется читателю в качестве несложного упражнения.

Перейдем от переменных λ_1, λ_2 к новым угловым переменным $\psi_1, \psi_2 \bmod 2\pi$ по формулам

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\pi}{\tau_1} \int_{-\gamma/h}^{\lambda_1} \frac{dz}{\pm \sqrt{\Phi(z)}}, \quad \psi_2 = \frac{\pi}{\tau_1} \int_{-a}^{\lambda_2} \frac{dz}{\pm \sqrt{\Phi(z)}}, \\ \tau_1 &= \int_{-\gamma/h}^0 \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}, \quad \tau_2 = \int_{-a}^{-b} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Эти формулы выписаны для определенности в случае (А). В случае (В) они аналогичны. Знаки перед радикалами в (1.12) выбираются в зависимости от направления изменения координат λ_k .

В новых переменных $\psi_k \bmod 2\pi$ уравнения (1.8) принимают следующий вид:

$$\dot{\psi}_k = \omega_k / (f_1 - f_2), \quad k = 1, 2, \quad (1.13)$$

где $\omega_k = 4\pi/\tau_k$, а f_k — 2π -периодические функции от ψ_k , получающиеся в результате обращения эллиптических интегралов (1.12).

Уравнения (1.13) можно привести к еще более простому виду. Для этого перейдем к новым угловым переменным $\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi$ по формулам

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \psi_k + \frac{1}{\tau_k J} \sum_1^2 \tau_l [F_j(\psi_l) - J_l \psi_l], \\ F_1(z) &= \int_0^z f_1(\xi) d\xi, \quad F_2(z) = - \int_0^z f_2(\xi) d\xi, \\ J_j &= \frac{1}{2\pi} F_j(2\pi), \quad J = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Эта замена переменных невырождена ввиду легко проверяемого тождества

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\psi_1, \psi_2)} = \frac{f_1 - f_2}{J_1 - J_2} \neq 0.$$

В переменных φ_1 и φ_2 уравнения (1.13) приобретают вид

$$\dot{\varphi}_k = \Omega_k, \quad \Omega_k = \omega_k/J = \text{const.} \quad (1.14)$$

Следовательно, $\varphi_k = \Omega_k t + \varphi_k^0$. Эти формулы задают *условно-периодическое движение* на двумерном торе $T^2 = \{\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi\}$ с постоянными частотами Ω_1 и Ω_2 . Области, изображенные на рис. 40, являются проекциями тора T^2 на плоскость $R^2 = \{x, y\}$. Если отношение $\Omega_1/\Omega_2 = \tau_2/\tau_1$ рационально, то траектория точки в эллипсе замкнута. В противном случае траектория заполняет указанные области всюду плотно. Наличие инвариантных торов с условно-периодическими движениями — характерное свойство интегрируемых гамильтоновых систем (см. по этому поводу [3, гл. 4]).

Нам осталось рассмотреть некоторые вырожденные случаи. Пусть $\gamma = 0$. Тогда согласно (1.9) $\lambda_1 = 0$ и, следовательно, точка движется по границе биллиарда с постоянной скоростью в одном из двух возможных направлений. Итак, при $\gamma = 0$ имеем два различных периодических движения; каждое из них, очевидно, устойчиво.

Рассмотрим теперь другой крайний случай, когда $\gamma/h = a$. Здесь, наоборот, координата λ_2 равна постоянно — a , а λ_1 может принимать любые значения. В этом случае точка движется постоянно по меньшей оси эллипса. Такое периодическое движение также устойчиво.

Остается рассмотреть последнюю возможность: $\gamma/h = b$. Покажем, что в этом случае каждая траектория последовательно проходит через фокусы эллипса. Действительно, координаты λ_1 и λ_2 изменяются в интервалах $[-b, 0]$ и $[-a, -b]$. После отражения точки от границы эллиптического биллиарда координата λ_1 начинает монотонно убывать, и поэтому через некоторый конечный или бесконечный промежуток времени ее значение станет равным $-b$. В первом случае согласно (1.6) $x^2 = a - b$, $y = 0$. Следовательно, в этот момент времени материальная точка будет совпадать с одним из фокусов эллипса. Второй случай невозможен, поскольку точка движется равномерно по прямой и поэтому не может асимптотически приближаться к фокусу.

Покажем, что координаты λ_1 и λ_2 одновременно становятся равными $-b$. Действительно, из уравнений (1.8) с учетом равенства $\gamma/h = b$ легко вытекает, что

$$\pm \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1} \frac{dz}{(b+z)\sqrt{a+z}} = \pm \int_{\lambda_2^0}^{\lambda_2} \frac{dz}{(b+z)\sqrt{a+z}}. \quad (1.15)$$

Здесь λ_1^0 и λ_2^0 — некоторые начальные значения эллиптических координат λ_1 и λ_2 . Если $\lambda_1 = -b$ ($\lambda_2 = -b$), то интеграл, стоящий слева (справа) в равенстве (1.15), расходится. Но тогда должен расходиться интеграл, стоящий справа (слева), что может иметь место лишь при $\lambda_2 = -b$ ($\lambda_1 = -b$).

После того как траектория пересечет фокус эллипса, координата λ_1 начнет возрастать до значения $\lambda_1=0$. В этот момент происходит удар, и затем снова λ_1 начинает убывать до значения $\lambda_1=-b$. Координата λ_2 одновременно с λ_1 становится равной $-b$, и траектория пересекает второй фокус. Таким образом, при $\gamma/h=-b$ траектория последовательно проходит через фокусы эллипса. Этот результат является предельным случаем малой теоремы Понселе, поскольку при $\lambda_1 \rightarrow -b$ софокусный эллипс (1.11) превращается в отрезок, заключенный между фокусами.

Так как сумма расстояний от точек границы до фокусов постоянна, то промежутки времени между последовательными прохождениями через фокусы имеют неизменную величину. Этот результат несложно вывести аналитически из уравнений (1.11).

Геометрически очевидно, что отрезки ломаной траектории, проходящей через фокусы, при $t \rightarrow \pm\infty$ неограниченно приближаются к большой полуоси

$$y=0, |x| \leq \sqrt{a}. \quad (1.16)$$

Отсюда, в частности, вытекает неустойчивость периодической траектории (1.16) (когда $b < a$).

Итак, при выполнении равенства $\gamma/h=b$ среди семейства траекторий имеется периодическая траектория (1.16), а все остальные траектории являются двоякоасимптотическими. Наличие гладких семейств двоякоасимптотических траекторий — характерный признак интегрируемых динамических систем (ср. с [3, гл. 6]).

§ 2. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ БИЛЛИАРДЫ НА ЭЛЛИПСОИДАХ

Якоби установил интегрируемость задачи о движении точки по инерции по n -мерным *квадрикам*

$$\langle A^{-1}x, x \rangle = 1, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (2.1)$$

Здесь $A: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ — самосопряженный линейный оператор. Наиболее интересным является случай, когда оператор A положительно определен. Тогда уравнение (2.1) задает n -мерный эллипсоид.

Задача Якоби решается с помощью разделения переменных ([56, гл. 26]). Для этого вводится *конфокальное* с (2.1) *семейство квадрик*

$$P_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle (A + \lambda E)^{-1}x, x \rangle = 1\}. \quad (2.2)$$

Оказывается, через каждую точку $\mathbb{R}^{n+1}$ с ненулевыми координатами проходят $n+1$ квадрика (2.2), попарно пересекаясь под прямым углом. Это обстоятельство позволяет ввести в $\mathbb{R}^{n+1}$ криволинейные координаты

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1.$$

Они называются эллиптическими; значению $\lambda_1=0$ отвечает исходный эллипсоид (2.1). Оказывается, в координатах $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_2$ на эллипсоиде (2.2) уравнения движения (являющиеся, конечно, уравнениями геодезических) разделяются.

С геометрической точки зрения интегрируемость задачи о геодезических на n -мерном эллипсоиде означает следующее: касательные прямые к геодезической линии квадрики (2.1) в $\mathbb{R}^{n+1}$, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики еще $n-1$ конфокальных с ней квадрик, одних и тех же для всех точек геодезической. Это знаменитая *теорема Якоби — Шаля*. По словам Якоби, она принадлежит «...к замечательнейшим теоремам аналитической геометрии» [56, с. 185 русского перевода]. Устремляя к нулю одну из полуосей эллипсоида в трехмерном пространстве, приходим к малой теореме Понселе (см. § 1).

Таким образом, кроме интеграла энергии задача Якоби имеет еще $n-1$ первых интегралов. Ими являются «номера» софокусных квадрик, о которых идет речь в теореме Якоби — Шаля. Можно показать, что они находятся в инволюции и в общем положении независимы. Геометрическое доказательство первого факта можно найти в статье [4, гл. 3], а второй факт проверяется прямым вычислением с использованием эллиптических координат. Итак, гамильтонова система, описывающая движение точки по n -мерному эллипсоиду, имеет ровно n независимых инволютивных интегралов и поэтому вполне интегрируема согласно *теореме Лиувилля*.

Пусть Σ — кусочно-гладкая n -мерная поверхность, расположенная на эллипсоиде Π_0 и ограниченная некоторым числом софокусных квадрик. С поверхностью Σ естественным образом связан бильярд: точка движется по геодезическим внутри Σ и упруго отражается от ее границ.

Теорема 1. Бильярд в Σ — вполне интегрируемая динамическая система.

Доказательство основано на том факте, что интегралы задачи о геодезических на n -мерном эллипсоиде являются интегралами бильярдной системы в Σ . Явное интегрирование осуществляется с помощью эллиптических координат (ср. с § 1). В частном случае, когда $n=3$, устремим одну из полуосей к нулю. Тогда в пределе получим серию интегрируемых бильярдов, ограниченных софокусными кониками на двумерной евклидовой плоскости (рис. 41).

Лемма 1. Предположим, что прямая

$$l = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x = x_0 + \alpha \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$$

пересекает квадрику Π_α в точке x_0 и касается квадрики Π_λ . Пусть Γ — касательная n -мерная плоскость к Π_α в точке x_0 . Тогда прямая l' , симметричная прямой l относительно Γ , также касается той же квадрики Π_λ .

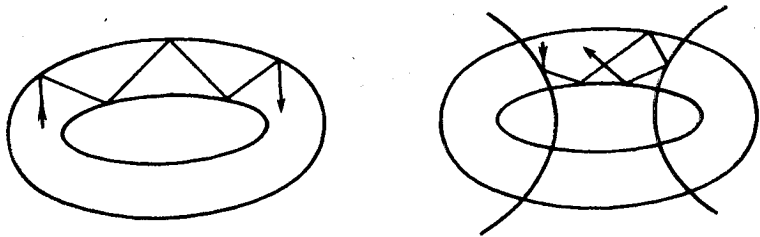


Рис. 41

Доказательство. Положим для краткости письма $a_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}$. Точки пересечения прямой l и квадрики Π_λ находятся из уравнения

$$\langle a_\lambda(x_0 + \alpha\tau), (x_0 + \alpha\tau) \rangle = 1.$$

В силу предположения о касании l и Π_λ дискриминант этого квадратного уравнения должен равняться нулю:

$$\langle a_\lambda x_0, \alpha \rangle^2 - \langle a_\lambda \alpha, \alpha \rangle (\langle a_\lambda x_0, x_0 \rangle - 1) = 0. \quad (2.3)$$

Нормаль к плоскости Γ имеет вид $n = a_\lambda x_0$. Следовательно, прямая l' задается уравнением $x = x_0 + \alpha'\tau$, где

$$\alpha' = \alpha - \frac{2\langle \alpha, n \rangle}{\langle n, n \rangle} n.$$

Нам надо доказать, что равенство (2.3) сохранится после замены α на α' . Подставив α' в (2.3), после очевидных преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \langle a_\lambda x_0, a_\mu x_0 \rangle^2 \langle \alpha, a_\mu x_0 \rangle - \langle a_\lambda x_0, a_\mu x_0 \rangle \cdot \\ & \cdot \langle a_\lambda x_0, \alpha \rangle \langle a_\mu x_0, a_\mu x_0 \rangle + (\langle a_\lambda x_0, x_0 \rangle - 1) \cdot \\ & \cdot (\langle a_\lambda \alpha, a_\mu x_0 \rangle \langle a_\mu x_0, a_\mu x_0 \rangle - \\ & - \langle a_\lambda a_\mu x_0, a_\mu x_0 \rangle \langle \alpha, a_\mu x_0 \rangle) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Справедлива формула

$$a_\lambda a_\mu = (a_\lambda - a_\mu) / (\lambda - \mu). \quad (2.5)$$

Действительно, ввиду коммутуируемости операторов a_λ и a_μ

$$a_\lambda - a_\mu = a_\lambda a_\mu (a_\mu^{-1} - a_\lambda^{-1}) = a_\lambda a_\mu (A - \mu E - A + \lambda E) = a_\lambda a_\mu (\lambda - \mu).$$

Используя самосопряженность операторов a_λ , a_μ и равенство (2.5), получаем

$$\langle a_\lambda x_0, a_\mu x_0 \rangle = \langle a_\lambda a_\mu x_0, x_0 \rangle = \frac{1}{\lambda - \mu} (\langle a_\lambda x_0, x_0 \rangle - 1).$$

Следовательно, соотношение (2.4) принимает вид

$$\begin{aligned} & (\langle a_\lambda x_0, x_0 \rangle - 1) \left[\frac{1}{\lambda - \mu} \langle a_\lambda a_\mu x_0, x_0 \rangle \langle a_\mu x_0, \alpha \rangle - \right. \\ & - \frac{1}{\lambda - \mu} \langle a_\lambda x_0, \alpha \rangle \langle a_\mu^2 x_0, x_0 \rangle + \langle a_\lambda a_\mu x_0, \alpha \rangle \langle a_\mu^2 x_0, x_0 \rangle - \\ & \left. - \langle a_\lambda a_\mu^2 x_0, x_0 \rangle \langle a_\mu x_0, \alpha \rangle \right] = 0. \end{aligned}$$

С помощью формулы (2.5) нетрудно проверить, что выражение, заключенное в квадратные скобки, равно нулю. Лемма доказана. Вместе с ней доказана и теорема 1.

Рассмотрим более детально частный случай, когда $n=3$. Здесь каждая квадрика Π_λ , задаваемая уравнением

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} = 1, \quad (2.6)$$

делит поверхность Π_0 на ряд областей, в каждой из которых получаем интегрируемую биллиардную систему. Дополнительным к интегралу энергии является интеграл Иохимстала (1.3).

В ряде случаев (когда, например, среди чисел a, b, c есть равные) система конфокальных квадрик (2.2) вырождается. Все они расклассифицированы: имеется 10 различных типов вырождения эллиптических координат Якоби, среди них — обычные декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$ (см., например, [64, гл. 5]). Для нас наибольший интерес представляют два случая вырождения.

Положим

$$a = \alpha d + d^2, \quad b = \beta d + d^2, \quad c = 2d^2, \quad \lambda = \mu d - d^2$$

и сместим начало координат в точку $(0, 0, d)$; так что $x = x', y = y', z = z' - d$. Если в уравнении (2.6) перейти к новым координатам и затем устремить d к бесконечности, то в пределе получим семейство поверхностей

$$\frac{(x')^2}{\alpha + \mu} + \frac{(y')^2}{\beta + \mu} = \mu + 2z'. \quad (2.7)$$

Пусть $\alpha > \beta$. Тогда при $\mu > -b$ уравнение (2.7) задает семейство эллиптических параболоидов, а при $-a < \mu < -b$ — гиперболических параболоидов. Наконец, при $\mu < -a$ вновь получаются эллиптические параболоиды. Через каждую точку общего положения в $\mathbb{R}^3$ проходят три различные поверхности из семейства (2.7), ортогонально пересекающие друг друга. Эллиптические координаты Якоби при $d \rightarrow \infty$ переходят в новые координаты μ_1, μ_2, μ_3 , которые называются *параболическими*. В этих координатах разделя-

ются уравнения геодезических на конфокальных параболоидах (2.7). Линии пересечения параболоидов из семейства (2.7) являются границами интегрируемых билиардов.

Укажем еще один предельный случай, когда параметры $a > b > c > 0$ неограниченно сближаются (например, $a \rightarrow b+0$, $c \rightarrow b-0$). В пределе уравнение (2.2) для эллиптических координат λ будет иметь один «изолированный» корень и двукратный корень $\lambda = -b$. При этом семейство эллипсоидов превратится в семейство концентрических сфер с центром в начале координат, а однополосные и двуполосные гиперболоиды вида (2.2) перейдут в эллиптические конусы. Уравнения геодезических на «предельных» поверхностях разделяются в *конических координатах*, которые представляют вырождение эллиптических координат Якоби. Подробности можно найти, например, в книге [64, гл. 5]. Из этих наблюдений вытекает важная

Теорема 2. Пусть Σ — область на сфере $S \subset \mathbb{R}^3 = \{\mathbf{r}\}$, ограниченная кривой

$$\Gamma = \{\mathbf{r} \in S : \langle C\mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = 0\},$$

где C — произвольный линейный самосопряженный оператор. Тогда билиард в Σ — интегрируемая динамическая система.

Этот билиард имеет дополнительный квадратичный по скорости $\dot{\mathbf{r}}$ интеграл. Явное интегрирование осуществляется с использованием конических координат. Если радиус сферы S устремить к бесконечности, то в пределе получим эллиптический билиард Биркгофа, рассмотренный в § 1.

Теорема 2 указывает семейство интегрируемых билиардов на двумерной поверхности постоянной положительной кривизны. Как заметил С. В. Болотин, аналогичный результат имеет место и для поверхностей постоянной отрицательной кривизны.

Определим в $\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{r}\}$ квадратичную форму

$$Q_-(\mathbf{r}) = \langle A_-\mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle,$$

где A_- — линейный оператор с матрицей

$$\begin{vmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}.$$

Введем поверхность

$$S_- = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : Q_-(\mathbf{r}) = -1\}$$

с метрикой $ds^2 = Q_-(d\mathbf{r})$. Хотя метрика $Q_-(d\mathbf{r})$ во всем $\mathbb{R}^3$ является псевдоевклидовой, ее ограничение на поверхность S_- положительно определено. Можно проверить, что гауссова кривизна S_- равна -1 . Следовательно, каждая из двух связных компонент S_- является *плоскостью Лобачевского*. Уравнения геодезических имеют следующий вид:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \lambda \mathbf{r}, \quad Q_-(\mathbf{r}) = 1.$$

Теорема 2'. Биллиард в области $\Sigma \subset S_-$ с границей

$$\Gamma = \{r \in S_- : \langle Cr, r \rangle = 0\}$$

имеет дополнительный квадратичный интеграл.

Этот результат может быть обобщен на многомерный случай.

Явные формулы для траекторий интегрируемых биллиардов с квадратичными интегралами, содержащие θ -функции, можно найти в работах А. П. Веселова [12; 73].

§ 3. ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ БИЛЛИАРД

Рассмотрим задачу о движении тяжелой материальной точки в вертикальной плоскости $R^2 = \{x, y\}$ (ось x горизонтальна) с односторонней связью $y \geq x^2/(2a)$. В области $y > x^2/(2a)$ движение происходит по параболе, причем удар о ее границу предполагается абсолютно упругим. Эта задача, как отмечено в работе [37], также оказывается вполне интегрируемой.

Для доказательства рассмотрим задачу о скольжении тяжелой материальной точки по гладкому параболоиду (ср. с (2.7) из § 2)

$$2y + b = \frac{x^2}{a+b} + \frac{z^2}{b}; \quad a, b > 0. \quad (3.1)$$

Как заметил Пенлеве, эта система с двумя степенями свободы имеет дополнительный первый интеграл. Интегрирование уравнений движения точки сведено Чаплыгиным к обращению абелевых интегралов [37]. Чаплыгин вводит параболические координаты v, w ($w \geq a \geq v \geq 0$) по формулам

$$\begin{aligned} ax^2 &= (a+b)(a-v)(w-a), \quad 2y = v + w - (b+a), \\ az^2 &= bvw \end{aligned} \quad (3.2)$$

и получает уравнения для изменения v, w

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{4}{m(w-v)} \sqrt{\frac{(\alpha v^2 - \beta v - \gamma)(a-v)v}{v+b}}, \\ \dot{w} &= \frac{4}{m(w-v)} \sqrt{\frac{(-\alpha w^2 + \beta w + \gamma)(w-a)w}{w+b}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь $\alpha = m^2 g/4$, $\beta = mh/2 + m^2(a+b)g/4$, m — масса точки, g — ускорение свободного падения, h — полная энергия точки, γ — постоянная интегрирования.

Устремим теперь параметр b к нулю. Тогда параболоид (3.1) перейдет в область над параболой $y = x^2/2a$ в вертикальной плоскости $z=0$, а движение точки по параболоиду перейдет в свободное падение по параболе с абсолютно упругими ударами. Поскольку задача Пенлеве — Чаплыгина интегрируема при всех значениях $b > 0$, то и предельная задача о параболическом биллиарде также

интегрируема. Выписывать дополнительный интеграл не имеет смысла, так как соотношения (3.2) и (3.3) (в которых надо положить $b=0$) дают закон движения точки на всей оси времени.

Формулы (3.2) и (3.3) позволяют дать полный качественный анализ движения тяжелой точки с односторонней связью $y \geq x^2/2a$ (ср. с [37]). С этой целью рассмотрим многочлен $F(z) = \alpha z^2 - \beta z - \gamma$, который всегда имеет вещественные корни; обозначим их z_1, z_2 ($z_1 \leq z_2$). Так как $F(v) \geq 0, F(w) \leq 0, w \geq a \geq v \geq 0$, то имеют место неравенства $z_2 \geq w \geq z_1 \geq v$. Будем различать два случая:

- 1) $z_2 \geq a \geq z_1$; 2) $z_2 \geq z_1 \geq a$.

В первом из них $z_2 \geq w \geq a, z_1 \geq v \geq 0$.

Траектория точки m расположена в криволинейном четырехугольнике

$$x^2/a \leq 2y \leq z_1 + x^2/(a-z_1), \quad 2y \leq z_2 + x^2/(a-z_2), \quad (3.4)$$

ограниченном софокусными параболой. Он изображен на рис. 42, а. Во втором выполнены неравенства $z_2 \geq w \geq z_1, a \geq v \geq 0$ и траектория m лежит в четырехугольнике

$$z_1 + x^2/(a-z_1) \leq 2y \leq z_2 + x^2/(a-z_2), \quad x^2/a \leq 2y, \quad (3.5)$$

изображенном на рис. 42, б. В общем случае траектория точки заполняет эти прямоугольники всюду плотно.

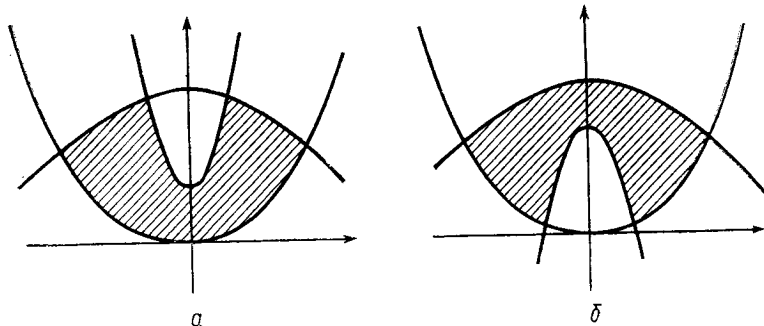


Рис. 42

Траектория вертикальных колебаний точки m отвечает случаю, когда $F(a)=0$, и поэтому $\gamma = \alpha a^2 - \beta a$. Если $2\alpha a > \beta$, то при малом возмущении постоянных первых интегралов h и γ получим первый случай, и прямоугольник (3.4) будет близок к оси y . В этом случае периодическое движение устойчиво. Если же $F(a)=0$ и $2\alpha a < \beta$, то $z_1 = a$, и прямоугольник (3.5) вырождается в «двухугольник»

$$x^2/a \leq 2y \leq z_2 + x^2/(a-z_2), \quad z_2 > a. \quad (3.6)$$

В этом случае вертикальные периодические колебания неустойчивы. Они имеют гиперболический тип и, следовательно, обладают асимптотическими траекториями. Эти асимптотические движения

на самом деле являются двоякоасимптотическими и имеют замечательное свойство: после каждого отскока траектория точки m проходит через фокус параболы $y=x^2/2a$ (лежащий, разумеется, внутри области (3.6)). Более того, время между последовательными прохождениями через фокус постоянно и равно $2g^{-1}\sqrt{2h/m}$. Эта величина равна, конечно, периоду вертикальных колебаний точки m .

Если $z_1=z_2\geq a$, то точка m совершает движение по параболе

$$2y = z_1 + x^2/(a-z_1), \quad y \geq x^2/2a, \quad (3.7)$$

периодически отражаясь от софокусной исходной параболы $y=x^2/2a$. Все эти периодические решения имеют один и тот же период, равный $4\sqrt{a/g}$. В частном случае, когда $z_1=z_2=a$, решение (3.7) переходит в периодические вертикальные подскоки точки m на высоту $a/2$ (на расстояние до фокуса параболы). Эти колебания устойчивы.

Проведенный анализ позволяет дать полное и наглядное описание всех невырожденных периодических движений точки m . Пусть энергия $h=0$. Тогда точка m занимает наинизшее устойчивое положение равновесия. Будем увеличивать значения h . При малых $h>0$ рождаются два различных семейства невырожденных периодических движений: вертикальные подскоки и гладкое скольжение по параболе. Решения второго семейства существуют при всех $h>0$, и все они устойчивы (как предельный случай решения типа 1)). Решения первого семейства также существуют при всех h . Однако при $h=mga/2$ (когда высота подскока равна расстоянию до фокуса параболы) мультипликаторы становятся равными единице. Это точка бифуркации: при $h>mga/2$ появляется еще одно семейство устойчивых периодических колебаний (3.7), а вертикальные периодические подскоки становятся неустойчивыми.

Отметим в заключение, что устойчивость вертикальных подскоков точки в линейном приближении была изучена нами в гл. 3, § 1.

§ 4. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ БИЛЛИАРД

Рассмотрим задачу о движении материальной точки по гладкой поверхности трехосного эллипсоида под действием упругой силы, направленной к центру (или от центра) эллипсоида. Эта задача проинтегрирована Якоби с использованием эллиптических координат [56]. Устремим одну из полуосей эллипсоида к нулю. Тогда задача Якоби перейдет в задачу о колебаниях гармонического осциллятора, заключенного внутри эллипса. Если коэффициент упругости равен нулю, то получим эллиптический бильярд Биркгофа. Динамику гармонического осциллятора внутри эллипса можно исследовать методом § 1 с помощью разделяющихся переменных — эллиптических координат на плоскости.

Укажем, например, условия устойчивости периодических колебаний осциллятора, при которых точка все время находится на одной из осей симметрии эллипса. Пусть a, b — полуоси эллипса ($b \leq a$). c — коэффициент упругости, $h = (m \langle \dot{r}, \dot{r} \rangle + c \langle r, r \rangle) / 2$ — полная механическая энергия осциллятора. Оказывается, если $c \geq 0$ (сила является притягивающей), то движение точки вдоль меньшей (большей) оси эллипса устойчиво тогда и только тогда, когда

$$0 \leq h \leq ca^2/2. \quad (4.1)$$

Если же $c < 0$ (сила — отталкивающая), то эти условия принимают следующий вид:

$$h \geq |c|(a^2 - b^2)/2 \quad (|c|a^2/2 \leq h \leq -|c|(a^2 - b^2)/2). \quad (4.2)$$

Второе условие (4.2) имеет простой геометрический смысл: амплитуда периодических колебаний точки не превосходит расстояния от конца большей полуоси до ближайшего фокуса. При увеличении амплитуды это решение теряет устойчивость, становясь гиперболическим. Отметим любопытное свойство траекторий, проходящих через фокус эллипса: через равные промежутки времени бесконечно много раз точка попеременно оказывается в фокусах эллиптического бильярда. Это свойство имеет место и для траекторий, не касающихся границы бильярда.

Пусть $c < 0$. Будем деформировать эллипс так, чтобы один из его фокусов оставался неподвижным, а второй удалялся в бесконечность, причем $(a - \sqrt{a^2 - b^2}) \rightarrow \text{const.}$ В результате эллипс превратится в параболу. Если при этом еще уменьшать величину коэффициента упругости так, чтобы $|c|a \rightarrow g$, то задача о гармоническом осцилляторе внутри эллипса перейдет в задачу о параболическом бильярде, рассмотренную в § 3. Можно показать, что при таком предельном переходе второе условие устойчивости перейдет в уже известное нам условие $h \leq mga/2$.

Изложенные выше результаты позволяют получить условия устойчивости (в линейном приближении) колебаний плоского гармонического осциллятора, расположенного посередине между двумя выпуклыми кривыми одинаковой кривизны. Согласно результатам § 1, гл. 3 в линейном приближении устойчивость зависит лишь от кривизны этих кривых в концевых точках прямолинейной траектории, но не от их формы. Пусть l — длина периодической траектории осциллятора, R — радиус кривизны в концевых точках этой траектории. Рассматриваем движения с ударами. Если $c > 0$, то движение устойчиво лишь при выполнении неравенства $l < 2R$ (см. (4.1)). Сравнивая этот результат с предложением 4 гл. 2, получаем, что наличие притягивающей упругой силы не влияет на устойчивость колебаний с ударами. Пусть теперь $c < 0$. Если $l < 2R$, то движение устойчиво, когда $4h > |c|l(R - l/2)$. Если же $l > 2R$, то условие устойчивости выражается неравенством $4h < |c|l(R - l/2)$. При выполнении равенства $l = 2R$ периодическое колебание вырождено: его мультипликаторы равны единице.

§ 5. БИЛЛИАРДЫ В КАМЕРАХ ВЕЙЛЯ

Во введении (п. 12) уже обсуждались условия регуляризуемости фазового потока билиардных систем в аффинных камерах Вейля корневых систем. Эти динамические системы оказываются интегрируемыми. Последнее обстоятельство тесно связано с полной интегрируемостью серии гладких гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием — так называемых *обобщенных цепочек Тоды*. Рассмотрим эти вопросы более подробно.

Пусть $R^n = \{x\}$ — n -мерное пространство со стандартным скалярным произведением $\langle, \rangle$, и пусть $a_1, \dots, a_{n+1}$ — система векторов в R^n со следующими свойствами:

- (А) любая их подсистема из n векторов линейно независима;
- (В) для всех $i \neq j$

$$\frac{2\langle a_i, a_j \rangle}{\langle a_i, a_i \rangle} \in -Z_+, \quad (5.1)$$

где $Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Ясно, что при некоторых $\lambda_i \in R$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i = 0, \quad \lambda_i \neq 0.$$

Так как $\langle a_i, a_j \rangle \leq 0$ ($i \neq j$), то все λ_i имеют один и тот же знак.

Рассмотрим в R^n n -мерный симплекс

$$W_a = \{x \in R^n : \langle a_1, x \rangle \leq 1, \dots, \langle a_{n+1}, x \rangle \leq 1\}. \quad (5.2)$$

Заменяя векторы a_i на μa_i ($\mu \neq 0$), получим семейство подобных многогранников в R^n . Если в определении (5.2) воспользоваться неравенствами

$$\langle a_j, x \rangle \leq 0, \quad j \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{i\}; \quad \langle a_i, x \rangle \leq 1,$$

то снова получим n -мерный симплекс, также подобный W_a .

Теорема 3. *Билиард в W_a регуляризуем и имеет n независимых интегралов, полиномиальных по скоростям.*

Поскольку симплексы W_a совпадают (с точностью до подобия) с аффинными камерами Вейля, то теорема 3 вытекает из результатов работы С. И. Пидкуйко [28].

Имеется полная классификация наборов векторов $\{a_i\}_{i=1}^{n+1}$, удовлетворяющих условиям (А) и (В); она основана на глубоких результатах теории *корневых систем*. Нас интересует лишь строение симплексов W_a , которое определяется (с точностью до подобия) величиной углов между $(n-1)$ -мерными гранями. Поэтому ограничимся классификацией углов между векторами из системы $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$.

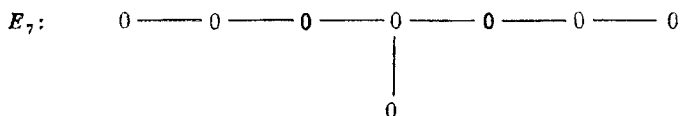
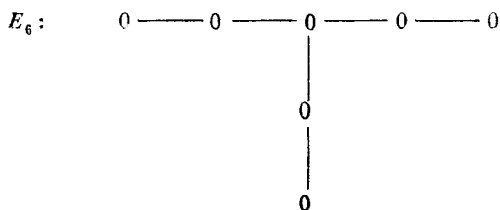
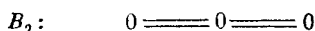
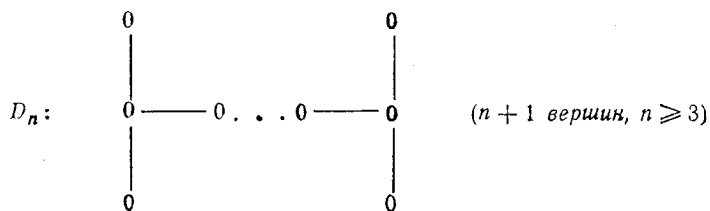
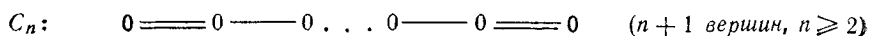
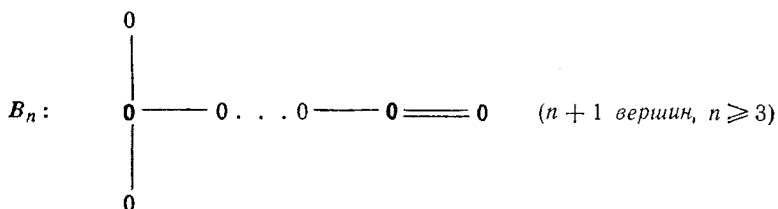
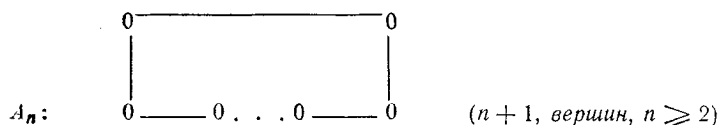
Пусть φ_{ij} — угол между векторами a_i и a_j ($i \neq j$). Так как $\langle a_i, a_j \rangle \leq 0$ и векторы a_i, a_j линейно независимы, то $\pi/2 \leq \varphi_{ij} < \pi$. Воспользуемся соотношением

$$\frac{2\langle a_j, a_i \rangle}{\langle a_j, a_j \rangle} \in -Z_+, \quad (5.3)$$

которое получается из (5.1) перестановкой индексов i и j . Перемножая целые числа в (5.1) и (5.3), получим, что $4\cos^2\varphi_{ij}$ может принимать значения 0, 1, 2 или 3. Следовательно, угол φ_{ij} равен одному из углов: 90° , 120° , 135° и 150° .

Для классификации систем векторов $\{a_i\}$ удобно воспользоваться *графами Кокстера*: каждый из векторов a_i изображается точкой на плоскости (вершины графа) и каждые две точки, отвечающие векторам a_i и a_j , соединяются $4\cos^2\varphi_{ij}$ отрезками (ребра графа).

Теорема 4. При $n \geq 2$ граф Кокстера системы $\{a_i\}_{i=1}^{n+1}$ изоморфен одному из следующих графов:



[illegible]

$$F_4: \quad 0 \text{ --- } 0 \text{ --- } 0 \text{ === } 0 \text{ --- } 0$$

$$G_2: \quad 0 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} 0 \text{---} 0$$

Доказательство теоремы 4 можно найти, например, в книгах [46: 54].

При $n=2$ получаем три неизоморфных графа Кокстера: A_2 , B_2 и G_2 . Им отвечают равносторонний треугольник и два прямоугольных треугольника с углами 45° и 30° (60°).

В качестве примера рассмотрим динамику системы материальных точек единичной массы, помещенных на прямолинейном отрезке единичной длины. Они движутся по инерции, попеременно сталкиваясь друг с другом. Через $x_1, x_2, \dots, x_n$ обозначим координаты этих точек, причем $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1$. Эти неравенства можно переписать в следующем виде:

$$\langle \mathbf{a}_1, x \rangle \leq 0, \dots, \langle \mathbf{a}_n, x \rangle \leq 0, \langle \mathbf{a}_{n+1}, x \rangle \leq 1, \quad (5.4)$$

где

$$a_1 = (-1, 0, \dots, 0),$$

$$\mathbf{a}_2 = (1, -1, 0, \dots, 0),$$

• • • • •

$$\mathbf{a}_n = (0, 0, \dots, 1, -1),$$

$$\mathbf{a}_{n+1} = (0, \dots, 0, 1).$$

Неравенства (5.4) определяют n -мерный симплекс в $\mathbf{R}^n$ со стандартной метрикой

$$(\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2)/2.$$

Система векторов $a_1, \dots, a_{n+1}$ удовлетворяет условиям (A) и (B) и по классификации теоремы 4 имеет тип C_n . Следовательно, эта билиардная система интегрируема и регуляризуема.

В заключение этого параграфа обсудим связь билиардных систем в аффинных камерах Вейля корневых систем с обобщенными цепочками Тоды. Напомним, что *цепочкой Тоды* [72] называется гамильтонова система с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} \sum_i^n p_i^2 + \exp(q_1 - q_2) + \exp(q_2 - q_3) + \dots + \exp(q_n - q_1).$$

При всех значениях $n \geq 1$ эти системы вполне интегрируемы: имеются n независимых полиномиальных по импульсам интегралов, попарно находящихся в инволюции (детальное обсуждение этих вопросов можно найти в книге [72]). Например, при $n=3$ инволютивными интегралами будут функции

$$H, P = \sum p_i, \quad F = p_1 p_2 p_3 - p_1 \exp(q_2 - q_3) - \\ - p_2 \exp(q_3 - q_1) - p_3 \exp(q_1 - q_2).$$

Интеграл P отвечает очевидному закону сохранения суммарного импульса, а интеграл F найден Хеноном.

С помощью интеграла импульса можно понизить число степеней свободы. Проведем эту редукцию в простейшем нетривиальном случае, когда $n=3$. Сначала перейдем к новым переменным P_k, Q_k с помощью канонического преобразования

$$P_1 = p_1, \quad P_2 = p_2, \quad P_3 = p_1 + p_2 + p_3; \\ q_1 = Q_1 + Q_3, \quad q_2 = Q_2 + Q_3, \quad q_3 = Q_3.$$

Координата Q_3 будет циклической; ей отвечает *циклический* интеграл P_3 . Постоянную интеграла $P_3 = P$ можно считать равной нулю. Это обстоятельство отвечает переходу в инерциальную барицентрическую систему отсчета. В новых переменных функция Гамильтона принимает вид

$$P_1^2 + P_2^2 + P_1 P_2 + \exp(Q_1 - Q_2) + \exp Q_1 + \exp(-Q_1).$$

Выполним еще одну каноническую замену переменных

$$P_1 = (p_x - \sqrt{3} p_y) / \sqrt{6}, \quad P_2 = (p_x + \sqrt{3} p_y) / \sqrt{6}; \\ x = (Q_1 + Q_2) / \sqrt{6}, \quad y = (-Q_1 + Q_2) / \sqrt{2}.$$

В результате гамильтониан преобразуется к виду

$$\frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \exp(-\sqrt{2} y) + \exp\left(\frac{\sqrt{6} x + \sqrt{2} y}{2}\right) + \\ + \exp\left(\frac{-\sqrt{6} x + \sqrt{2} y}{2}\right).$$

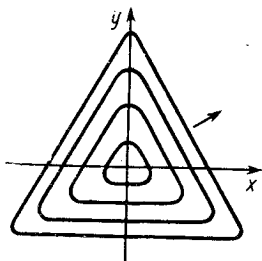


Рис. 43

Линии уровня потенциальной энергии в координатах x, y изображены на рис. 43. Стрелкой изображено направление возрастания. Видно, что при достаточно больших значениях энергии линии уровня очень мало отличаются от равностороннего треугольника. Это обстоятельство наводит на мысль, что при некотором разумном предельном переходе из трехчастичной цепочки Тоды можно получить бильярд в правильном треугольнике.

Цепочки Тоды допускают естественное обобщение, найденное О. И. Богоявленским [44]. Оказывается, гамильтоновы системы с гамильтонианами

$$H = \frac{1}{2} \sum_1^n y_i^2 + \sum_1^{n+1} \exp(a_i, x), \quad (5.5)$$

где наборы векторов $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ удовлетворяют условиям (А) и (В), вполне интегрируемы. Классической цепочке Тоды отвечают векторы $\{a_i\}$ из серии A_n .

Выполним каноническую замену переменных $x \rightarrow x/V$, $y \rightarrow y/V$ и преобразуем функцию Гамильтона (5.5)

$$H = \frac{1}{2N^2} \sum y_i^2 + \exp N \sum \exp[(a_i, x) - 1]N.$$

После замены времени

$$\tau = \Lambda t, \quad \Lambda = e^{N/2}/N$$

уравнения движения приобретают вид

$$x_j'' = -\partial V_N / \partial x_j, \quad 1 \leq j \leq n,$$

$$V_N = \sum_1^{n+1} \exp[(a_i, x) - 1]N.$$

Согласно результатам § 3 гл. 1 при $N \rightarrow \infty$ решения этой системы неограниченно приближаются к движениям бильярдной системы в камере W_a . Нетрудно проверить, что полиномиальные интегралы обобщенной цепочки Тоды переходят при $N \rightarrow \infty$ в полиномиальные интегралы бильярдной системы.

В работах [39] показано, что для обобщенных цепочек Тоды функции

$$y_j(t), \exp(a_j, x(t)), \quad 1 \leq j \leq n$$

выражаются через отношения θ -функций и, в частности, являются мероморфными в плоскости комплексного времени. Этот результат является аналогом более простого свойства регуляризуемости соответствующих дискретных бильярдных систем.

В настоящее время имеется полная классификация систем с потенциальной энергией в виде любой конечной суммы вещественных экспонент, допускающих полный набор независимых полиномиальных по скоростям первых интегралов. Соответствующие результаты получены в работе [22]. Однако после предельного перехода от этих интегрируемых гладких гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием к дискретным системам не получается никаких новых интегрируемых бильярдов. Поэтому может создаться впечатление, что теорема 4 исчерпывает все бильярды с полным набором независимых полиномиальных интегралов. Это, однако, не так: например, бильярд в любом выпуклом

многоугольнике на плоскости, все углы которого соизмеримы с π , допускает добавочный полиномиальный интеграл (см. § 2, гл. 5).

Обсуждение интегрируемости систем взаимодействующих частиц и их связь с интегрируемыми билиардами можно также найти в обзоре А. М. Степина [32].

ЗАДАЧИ

1. Пусть Σ — выпуклый билиард с гладкой регулярной границей $\partial\Sigma$. Как известно, любые две точки $x, y \in \partial\Sigma$ ($x \neq y$) однозначно определяют траекторию билиарда $\gamma_{x,y}$. Зафиксируем точку x и будем неограниченно сближать точки x и y так, что вектор $\overrightarrow{xy}/|\overrightarrow{xy}|$ стремится к единичному вектору v , касающемуся $\partial\Sigma$ в точке x . Доказать, что при этом билиардная траектория $\gamma_{x,y}$ стремится к геодезической на $\partial\Sigma$, проходящей через точку x с направлением v (С. В. Болотин).

Показать, что интегрируемость задачи Якоби о геодезических по поверхности n -мерного эллипсоида вытекает из свойства интегрируемости билиарда в $(n+1)$ -мерном эллипсоиде.

2. Найдите дополнительный квадратичный интеграл в задаче о гармоническом осцилляторе внутри эллипса и проведите качественный анализ этой задачи (в духе исследования динамики параболического билиарда из § 3).

3. Ветви гиперболы делят евклидову плоскость на три связных области $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$. Доказать интегрируемость задачи о движении точки в областях Σ_i под действием упругой силы, центр притяжения которой совпадает с центром гиперболы. Исследовать устойчивость прямолинейных траекторий с ударами.

4. В модели Пуанкаре плоскость Лобачевского L^2 отождествляется с внутренностью единичного круга $|z| < 1$ на комплексной плоскости $\mathbb{C} = \{z\}$, причем метрика на L^2 задается формулой

$$ds^2 = 4dzd\bar{z}/(1 - z\bar{z})^2.$$

Здесь черта означает комплексное сопряжение. Пусть Γ — алгебраическая кривая, заданная уравнением

$$(q_1 + q_2 + q_3)(4q_1q_2q_3 - g_3) = (q_1q_2 + q_2q_3 + q_3q_1 + g_2/4)^2,$$

где

$$q_1 = \frac{az+b}{cz+d}, \quad q_2 = \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}}; \quad a, b, c, d, q_3, g_2, g_3$$

— комплексные постоянные. Доказать, что билиард внутри (вне) Γ допускает дополнительный квадратичный по скоростям первый интеграл (А. М. Абдрахманов; ср. с теоремой 2). Справедливо также и обратное утверждение.

5. Докажите, что в аффинных камерах Вейля W_a (теорема 3) периодические траектории всюду плотны.

6. Пусть Σ — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$, причем группа, порожденная отражениями относительно всех его $(n-1)$ -мерных граней, конечна. Доказать, что бильярд в Σ имеет n полиномиальных по скоростям интегралов, попарно находящихся в инволюции. Обобщите этот результат на многогранники в пространствах постоянной кривизны.

Оказывается, интегрируемые бильярды — редкое исключение среди всего множества бильярдов. Причина кроется в сложном поведении фазовых траекторий типичных бильярдных систем: в общем случае траектории не укладываются на поверхности уровня интегралов, независимых от интеграла энергии. Для того чтобы дать строгие доказательства неинтегрируемости, надо прежде всего выделить классы функций в фазовом пространстве, среди которых разыскиваются первые интегралы. Мы выделяем два естественных класса первых интегралов. Первый составляют аналитические интегралы, а второй — полиномы от скоростей с гладкими (или даже непрерывными) коэффициентами. Отметим, что во всех известных проинтегрированных бильярдных задачах дополнительные интегралы лежат в пересечении этих классов функций.

§ 1. НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ТИПИЧНОГО БИЛЛИАРДА БИРКГОФА

1. Пространство аналитических бильярдов. Формулировка теоремы о неинтегрируемости. Рассмотрим бильярд Биркгофа, ограниченный гладкой выпуклой замкнутой кривой на евклидовой плоскости. Пусть $\varphi \bmod 2\pi$ — параметр на этой кривой. Тогда любой паре точек $(\varphi_1, \varphi_2) \bmod 2\pi$ единственным образом сопоставляется пара $(\varphi_2, \varphi_3) = \Psi(\varphi_1, \varphi_2)$, где точка φ_3 такова, что последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ является частью траектории бильярда. Таким образом, бильярду Биркгофа соответствует отображение $\Psi: T^2 \rightarrow T^2$ двумерного тора на себя.

Напомним, что локально непостоянная функция $F: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ называется *первым интегралом* бильярда, если $F \circ \Psi = F$, т. е. функция F постоянна на всех траекториях.

Бильярд, обладающий нетривиальным первым интегралом, естественно назвать *интегрируемым*. В четвертой главе были указаны многочисленные примеры интегрируемых бильярдов.

Пуанкаре установил, что точки фазового пространства автономной системы дифференциальных уравнений, соответствующие невырожденному периодическому решению, являются критическими для любого первого интеграла системы (см. § 1, гл. 3). Дискретным аналогом этого утверждения является

Предложение 1. *Точки тора T^2 , отвечающие невырожденным периодическим траекториям, являются критическими для любого первого интеграла бильярда.*

Действительно, пусть F — первый интеграл, точка $\varphi^0 \in T^2$ задает n -звенное периодическое решение ($\Psi^n(\varphi^0) = \varphi^0$). Имеют место равенства

$$F(\varphi) = F(\Psi^n(\varphi)),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_i}(\varphi^0) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial F}{\partial \varphi_j}(\Psi^n(\varphi^0)) \cdot \frac{\partial \Psi_j^n}{\partial \varphi_i}, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} \right)(\varphi^0)$$

— собственный вектор матрицы $\|\partial \Psi^n / \partial \varphi(\varphi^0)\|$ с собственным значением 1. В силу условия невырожденности он равен нулю.

Во второй главе доказано существование бесконечного количества периодических решений у бильярда Биркгофа. Основываясь на этом результате и используя предложение 1, можно доказать неинтегрируемость «типичного» бильярда.

Сначала введем пространство кривых, задающих выпуклые бильарды.

Лемма 1. Гладкая 2π -периодическая функция $f(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{ilx}$

тогда и только тогда является аналитической для всех $x \in \mathbb{R}$, когда для некоторых $\alpha > 0$, $A > 0$ коэффициенты Фурье c_k удовлетворяют неравенствам

$$|c_k| < A e^{-\alpha |k|}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [62].

Любую гладкую выпуклую замкнутую кривую можно задавать гладкой 2π -периодической функцией $f(\theta)$, сопоставляющей каждому значению угла θ значение радиуса $r = f(\theta)$ в некоторой полярной системе координат при условии нахождения начала координат внутри кривой (см. рис. 44).

Легко понять, что не всякой функции $f(\theta)$ соответствует выпуклая кривая. Условие выпуклости накладывает ограничение на вторую производную $\ddot{f}$.

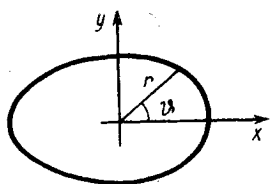


Рис. 44

Действительно, в декартовых координатах (x, y) (см. рис. 44) наша кривая имеет вид $x = f(\theta) \cos \theta$, $y = f(\theta) \sin \theta$. Условие строгой выпуклости записывается следующим образом: $\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} &= (\dot{f} \cos \theta - f \sin \theta)((\ddot{f} - f) \sin \theta + \\ &+ 2\dot{f} \cos \theta) - (\ddot{f} \sin \theta + f \cos \theta)(\dot{f} - \\ &- f) \cos \theta - 2\dot{f} \sin \theta) = 2\dot{f}^2 - f(\ddot{f} - f) > 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим множество $U_{A,\alpha}$ замкнутых кривых, задаваемых в полярных координатах функциями

$$f(\vartheta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{il\vartheta} > 1, \quad 2\dot{f}^2 - f(\ddot{f} - \dot{f}) > 0, \quad (1.1)$$

удовлетворяющими условиям

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}} |c_m| e^{\alpha|m|} < A.$$

Условие $f > 1$ существенным ограничением не является, так как всегда можно считать, что $f > \varepsilon > 0$. Тогда билиард, ограниченный кривой $r = f(\vartheta)/\varepsilon$, обладает теми же свойствами, что и исходный. В пространстве $U_{A,\alpha}$ он может и не лежать, но заведомо он принадлежит $U_{A/\varepsilon,\alpha}$.

В множестве $U_{A,\alpha}$ введем метрику. Пусть c_k и d_k — соответственно коэффициенты Фурье двух кривых из $U_{A,\alpha}$. Тогда расстояние между этими двумя кривыми примем равным

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} (|c_k - d_k| e^{\alpha|k|}).$$

Пусть $\bar{U}_{A,\alpha}$ — пополнение метрического пространства $U_{A,\alpha}$. Любой элемент $\bar{U}_{A,\alpha}$ представляется функцией $f(\vartheta)$, коэффициенты Фурье которой удовлетворяют условиям $|c_k| \leq A e^{-\alpha|k|}$, и выполняются неравенства

$$f \geq 1; \quad 2\dot{f}^2 - f(\ddot{f} - \dot{f}) \geq 0. \quad (1.2)$$

Действительно, пусть $f_1, f_2, \dots$ — фундаментальная последовательность элементов из $U_{A,\alpha}$. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ последовательность $(c_k)_1, \dots, (c_k)_n, \dots$ (где $(c_k)_l$ — коэффициент Фурье функции f_l , соответствующий номеру k) сходится к не-

которой величине c_k , $|c_k| \leq A e^{-\alpha|k|}$. Функция $f(\vartheta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\vartheta}$ —

аналитическая. Функция $f_1, \dots, f_n, \dots$ сходятся к f поточечно. Более того, к производной любого порядка от f поточечно сходится последовательность таких же производных от $f_1, \dots, f_n, \dots$. Таким образом, неравенства (1.2) следуют из (1.1).

Билиард Биркгофа назовем *аналитическим*, если он задается кривой, лежащей в $\bar{U}_{A,\alpha}$ при некоторых $A, \alpha > 0$. В дальнейшем будем отождествлять аналитические билиарды с соответствующими элементами $\bar{U}_{A,\alpha}$.

Аналитический билиард называется интегрируемым, если он обладает аналитическим первым интегралом на торе $T^2 = \{ \varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi \}$. Читателю предлагается проверить, что квадратич-

ный интеграл (1.4) (§ 1, гл. 4) в переменных φ_1, φ_2 является однозначной аналитической функцией на T^2 .

Теорема 1. Для любых фиксированных $A, \alpha > 0$ в пространстве $\bar{U}_{A,\alpha}$ интегрируемые билиарды образуют подмножество первой категории Бэра (представимое в виде конечной или счетной суммы множеств, нигде не плотных в $\bar{U}_{A,\alpha}$).

Другими словами, в некотором смысле, почти все аналитические билиарды являются неинтегрируемыми. В идейном отношении теорема 1 аналогична известному результату К. Зигеля о неинтегрируемости типичной гамильтоновой системы в окрестности устойчивого положения равновесия [71].

Вся остальная часть § 1 посвящена доказательству теоремы 1.

2. Лемма о плотности. Назовем периодическую траекторию билиарда, имеющую n звеньев и совершающую k оборотов вокруг граничной кривой в заданном направлении, периодической траекторией типа (n, k) .

Лемма 2. Множество граничных кривых, лежащих в $U_{A,\alpha}$ и таких, что каждая из них имеет невырожденную периодическую траекторию типа (n, k) , всюду плотно в $U_{A,\alpha}$ для любых натуральных k, n ; $k < n$.

Доказательство. Зафиксируем n и k . Для любого билиарда из $U_{A,\alpha}$ по теореме Биркгофа существует периодическая траектория типа (n, k) . Построим новую кривую, принадлежащую $U_{A,\alpha}$, которая как угодно мало отличается от исходной (в смысле метрики пространства $U_{A,\alpha}$), причем соответствующий билиард имеет невырожденное периодическое решение того же типа.

Кривая, которую мы построим, будет совпадать с исходной и иметь ту же касательную в точках $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$, общих с вписанной ломаной, задающей периодическое решение (некоторые из величин $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ могут совпадать).

Пусть c_k — коэффициенты рядов Фурье, задающих исходную кривую. Новые коэффициенты Фурье будем искать в виде

$c_k + d_k$, где кривая $r = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{im\vartheta} = g(\vartheta)$ имеет в точках $\vartheta_1, \dots$

$\dots, \vartheta_n$ нулевые значения и нулевые производные. Очевидно, новая кривая будет иметь такое же периодическое решение, что и исходная. Вторые производные функции g в точках $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ выберем, во-первых, малыми, а во-вторых, такими, чтобы радиусы кривизны в точках $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ новой кривой обеспечили невырожденность периодического решения. Это можно сделать в силу следствия из предложения 3 (гл. 2).

Нужную функцию g будем искать среди тригонометрических полиномов. Для определенности считаем, что среди углов $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ существует ровно l различных: пусть это будут углы $\vartheta_1, \dots, \vartheta_l$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} d'_0 + d'_1 e^{i\vartheta_m} + \dots + d'_{3l-1} e^{i(3l-1)\vartheta_m} = 0; & m=1, \dots, l; \\ i d'_1 e^{i\vartheta_m} + \dots + i(3l-1) d'_{3l-1} e^{i(3l-1)\vartheta_m} = 0, \\ i^2 d'_1 e^{i\vartheta_m} + \dots + i^2(3l-1)^2 d'_{3l-1} e^{i(3l-1)\vartheta_m} = a_m/2, \end{cases} \quad (1.3)$$

где a_m — нужные нам вторые производные. Определитель матрицы коэффициентов этой линейной системы с точностью до i в некоторой степени равен определителю следующего вида:

$$\begin{vmatrix} 1, & q_1, & q_1^2, & \dots, & q_1^{3l-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & q_l, & q_l^2, & \dots, & q_l^{3l-1} \\ 0, & q_1, & 2q_1^2, & \dots, & (3l-1)q_1^{3l-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & q_l, & 2q_l^2, & \dots, & (3l-1)q_l^{3l-1} \\ 0, & q_1, & 4q_1^2, & \dots, & (3l-1)^2 q_1^{3l-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & q_l, & 4q_l^2, & \dots, & (3l-1)^2 q_l^{3l-1} \end{vmatrix}, \quad (1.4)$$

где $q_m = e^{i\vartheta_m}$. Чуть позже докажем, что он не равен нулю при различных друг от друга и не равных нулю величинах q_m , а пока воспользуемся этим фактом. Система уравнений (1.3) имеет единственное решение, причем все величины q'_k можно сделать как угодно малыми по абсолютной величине, выбрав достаточно малыми значениями a_m .

Искомые коэффициенты d_m , $m \in \mathbb{Z}$, будут следующими:

$$d_m = \begin{cases} 0, & |m| \geq 3l; \\ d'_m, & 0 < m < 3l; \\ \bar{d}'_{-m}, & -3l < m < 0; \\ d'_0 + \bar{d}'_0, & m = 0, \end{cases}$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Таким выбором коэффициентов d_m мы обеспечили

а) действительность соответствующего тригонометрического ряда g ;

б) выполнение условий

$$g(\vartheta_s) = \frac{dg}{d\vartheta}(\vartheta_s) = 0, \quad \frac{d^2g}{d\vartheta^2}(\vartheta_s) = a_s, \quad s = 1, \dots, l.$$

Так как величины d_m могут быть выбранными как угодно малыми, кривая $r = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k + d_k) e^{ik\theta}$ лежит в $U_{A,\alpha}$ и отличается от исходной как угодно мало.

Теперь докажем, что определитель (1.4) не равен нулю, когда $0 \neq q_k \neq q_m$ при $k \neq m$; $1 \leq k, m \leq l$. Эти условия в нашем случае выполняются автоматически.

Вычтем из строки определителя (1.4) с номером $2l+j$ строку с номером $l+j$ для всех $j \in \{1, \dots, l\}$ и разделим определитель на $\prod_{m=1}^l q_m^3$. Результат будет следующим:

$$\begin{vmatrix} 1, & q_1, & q_1^2, & \dots, & q_1^{3l-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & q_l, & q_l^2, & \dots, & q_l^{3l-1} \\ 0, & 1, & 2q_1, & \dots, & (3l-1)q_1^{3l-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 1, & 2q_l, & \dots, & (3l-1)q_l^{3l-1} \\ 0, & 0, & 2, & 6q_1, & \dots, & (3l-1)(3l-2)q_1^{3l-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 2, & 6q_l, & \dots, & (3l-1)(3l-2)q_l^{3l-1} \end{vmatrix}. \quad (1.5)$$

Теперь рассмотрим следующую задачу; найти алгебраический многочлен степени $3l-1$, такой, чтобы в данных точках $q_1, \dots, q_l$ он имел заданные значения, а также заданные первые и вторые производные. Как известно, такая задача имеет всегда единственное решение (см. [5]). В то же время она легко сводится к решению линейной системы с определителем (1.5). Значит, определители (1.5) и (1.4) не равны нулю. Лемма 2 доказана.

3. Лемма об открытости. Лемма 3. Множество кривых, лежащих в $U_{A,\alpha}$, таких, что каждая из них имеет невырожденную периодическую траекторию бильярда типа (n, k) , открыто в $U_{A,\alpha}$.

Доказательство леммы 3 состоит

а) в проверке справедливости следующего утверждения:

Лемма 4. Для любой кривой $r = f(\theta)$, описанной в лемме 3, существует $\epsilon > 0$, такое, что любая гладкая кривая, отличающаяся вместе со своими двумя производными в любой точке $\theta \in [0, 2\pi]$ от нее не более чем на ϵ , обладает невырожденной периодической траекторией типа (n, k) .

б) в проверке того факта, что такое множество кривых содержит некоторую окрестность исходной кривой в $U_{A,\alpha}$.

Доказательство леммы 4. Любой кривой из $U_{A,2}$ соответствует функция, сопоставляющая любым двум ее точкам ϑ_1, ϑ_2 величину $|\vartheta_1, \vartheta_2|$, равную расстоянию между ними в евклидовой метрике плоскости:

$$|\vartheta_1, \vartheta_2| = [(f(\vartheta_2) \cos \vartheta_2 - f(\vartheta_1) \cos \vartheta_1)^2 + (f(\vartheta_2) \sin \vartheta_2 - f(\vartheta_1) \sin \vartheta_1)^2]^{1/2}.$$

Пусть кривая $r = \tilde{f}(\vartheta)$ лежит в $U_{A,\alpha}$ и выполняются условия

$$\left| \frac{d_m}{d\vartheta_m} (f(\vartheta) - \tilde{f}(\vartheta)) \right| < \epsilon, \quad m \in \{0, 1, 2\}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Рассмотрим семейство кривых $r = f_s(\vartheta) = f(\vartheta) + s(\tilde{f}(\vartheta) - f(\vartheta))$, $s \in [0, 1]$. Очевидно, $f_0 = f$, $f_1 = \tilde{f}$.

Этому семейству соответствует семейство функций $|\cdot, \cdot|_{\alpha}$

Положим $L_s(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_n} |\vartheta_m, \vartheta_{m+1}|_s$.

Рассмотрим систему уравнений

[illegible]

В силу условия леммы 3 эта система имеет решение $h = 0$, $\theta = \theta^0$, $s = 0$, причем гессиан

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \vartheta^2} (\vartheta^0) \right)$$

отличен от нуля. По теореме о неявной функции при $s=0$ вектор-функция $\text{grad} L_s$ диффеоморфно отображает окрестность O_{θ^0} точки θ^0 в пространстве переменных θ на окрестность нуля в пространстве переменных h .

Легко видеть, что производная

$$\frac{d}{ds} \det \left(\frac{\partial^2 L_s}{\partial \vartheta^2} \right)$$

имеет порядок ε в любой точке, поэтому можно выбрать величину $\varepsilon_1 > 0$ и окрестность $O'_{g_s} \subset O_{g_s}$ так, что для всех $s \in O'_{g_s}$, $s \in [0, 1]$, $\varepsilon < \varepsilon_1$ гессиан $\det(\partial^2 L_s / \partial \theta^2)$ отличен от нуля и, более того, для всех векторов $w \in \mathbb{R}^n$ длина вектора $(\partial^2 L_s / \partial \theta^2) w$ больше, чем $\beta \|w\|$ при некотором $\beta > 0$ (здесь $\|w\|$ — евклидова норма вектора w).

При малых s система (1.6) эквивалентна следующей

$$\begin{cases} \vartheta_1 = u_1(h_1, . . . , h_n, s), \\ \\ \vartheta_n = u_n(h_1, . . . , h_n, s). \end{cases}$$

Таким образом, у рассматриваемого семейства кривых при малых s существует невырожденное периодическое решение типа (n, k) , задаваемое вершинами $u_1(0, \dots, 0, s), \dots, u_n(0, \dots, 0, s)$.

Осталось проверить, что функции $u_m(0, \dots, 0, s)$, $m = 1, \dots, n$, можно продолжить на весь отрезок $[0, 1]$. Это будет действительно так, если точка $u_1(0, \dots, 0, s), \dots, u_n(0, \dots, 0, s)$ не выйдет из окрестности O'_q . Покажем, что при малых ε ситуация именно такова.

Действительно, выберем внутри O'_0 шар $B_{\vartheta_0}^\gamma$ с центром ϑ^0 и радиусом γ так, что при всех $\vartheta \in B_{\vartheta_0}^\gamma$, $s \in [0, 1]$ и $0 < \epsilon_1 \leq \epsilon_1$ выполнялось неравенство

$$\left\| \frac{\partial}{\partial s} \text{grad}_g L_s \right\| < \epsilon b,$$

где $b > 0$ — достаточно велико. Продифференцируем по s тождество $\text{grad}_s L(u(0, \dots, 0, s)) = 0$. Получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 L_s}{\partial \theta^2} \right) (u(0, \dots, 0, s)) \cdot \frac{\partial u}{\partial s} (0, \dots, 0, s) + \\ & + \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{grad}_{\theta} L_s(u(0, \dots, 0, s)) = 0. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\beta \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\| < \left\| \left(\frac{\partial^2 L_s}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial u}{\partial s} \right\| = \left\| \frac{\partial}{\partial s} \text{grad}_\theta L_s \right\| < \epsilon b,$$

если точка $\vartheta = u(0, \dots, 0, s)$ находится в шаре B_0^γ .

Положим $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon_1, \gamma\beta/b\}$ и пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$. Тогда полу-

$$|u(0, \dots, 0, s) - \theta^0| \leq \int_0^s \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\| ds \leq s \frac{\varepsilon b}{\beta} < s\gamma \leq \gamma.$$

Лемма доказана.

Проверим теперь, что множество V_ε кривых из $U_{A,\alpha}$, описанных в лемме 4, содержит открытое в $U_{A,\alpha}$ множество.

Действительно, множество W_δ , $\delta > 0$, кривых $r = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{im\theta}$,

ких, что $|c_m - d_m| < \delta e^{-\alpha|m|}$, содержит открытое в $U_{A,\alpha}$ множество (здесь c_m — коэффициенты Фурье, соответствующие исходной кривой).

При малых $\delta > 0$ множество W_δ лежит в V_ϵ . В самом деле, для кривых из W_δ имеем

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial \theta^l} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\theta} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{im\theta} \right) \right| < \sum_{m=-\infty}^{\infty} (m^2 + 1) \delta e^{-\alpha|m|}, \quad l=0, 1, 2.$$

Последняя сумма за счет выбора δ может быть сделана как угодно малой. Лемма 3 доказана.

4. Множество неинтегрируемых билиардов. Лемма 5. *Множество $\bar{U}_{A,\alpha} \setminus U_{A,\alpha}$ нигде не плотно в $\bar{U}_{A,\alpha}$.*

Доказательство. По определению множества $U_{A,\alpha}$ для любого элемента $g \in \bar{U}_{A,\alpha} \setminus U_{A,\alpha}$ можно выбрать

$$f = \sum c_m e^{im\theta} \in U_{A,\alpha}$$

как угодно близким к g . При этом

$$f > a > 1, \quad 2\dot{f} - f(\dot{f} - f) > b > 0, \quad \sup_{m \in \mathbb{Z}} |c_m| e^{\alpha|m|} < A.$$

Таким образом, в пространстве $\bar{U}_{A,\alpha}$ существует шар достаточно малого радиуса с центром в f , целиком лежащий в $U_{A,\alpha}$. Действительно, как следует из доказательства п. б) леммы 3, все элементы этого шара будут близки поточечно к f и иметь в соответствующих точках близкие первые и вторые производные с аналогичными производными f . Лемма доказана.

Рассмотрим множество $V_{A,\alpha}$ билиардов, принадлежащих $U_{A,\alpha}$ и таких, что любой из них не имеет невырожденного периодического решения типа (n, k) хотя бы для одной пары $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, $n > k$. Это множество в силу лемм 2, 3 и 5 есть объединение счетного числа нигде не плотных множеств в пространстве $\bar{U}_{A,\alpha}$ и является, таким образом, множеством первой категории Бэра. Любой билиард, лежащий в $V'_{A,\alpha} = \bar{U}_{A,\alpha} \setminus V_{A,\alpha}$, обладает невырожденной периодической траекторией типа (n, k) для любых $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, $n > k$. Для завершения доказательства теоремы 1 осталось показать, что множество $V'_{A,\alpha}$ состоит из неинтегрируемых билиардов. Это и будет сделано в п. 5.

Замечание. Можно считать, что множество $V'_{A,\alpha}$ содержит для любых $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, $n > k$, невырожденную периодическую траекторию локально максимальной длины на торе T (см. гл. 2). Действительно, при доказательстве леммы 2 в качестве исходной можем брать траекторию максимальной длины, которая существует в силу теоремы 1 гл. 2. Соответ-

вующая матрица Гессе неположительно определена. Остается построить новую кривую так, чтобы радиусы кривизны $R_1, \dots, R_n$ уменьшились. Тогда матрица Гессе станет отрицательно определенной, а траектория у новой кривой станет невырожденной. Значит, ее периметр по-прежнему будет максимальным (хотя бы локально).

При доказательстве леммы 3 также можем использовать ломанные максимальной длины, при этом соответствующие траектории близлежащих кривых тоже будут иметь локально максимальный периметр.

Из приведенного замечания следует, что в пространстве $U_{A,\alpha}$ множество второй категории Бэра образует граничные кривые, обладающие для любых $(n, k) \in \mathbb{N}^2, n > k$, невырожденным гиперболическим периодическим решением типа (n, k) .

5. Лемма о неинтегрируемости. Лемма 6. *Биллиарды, лежащие в $V_{A,\alpha}$, неинтегрируемы.*

Для доказательства леммы нам понадобится

Предложение 2. *Для любой гладкой выпуклой замкнутой кривой, параметризованной натуральным параметром φ , существует константа $B > 0$, такая, что для любых $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \bmod l$ (l — длина граничной кривой), таких, что $\Psi(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_3)$, выполняется неравенство*

$$|\varphi_1, \varphi_2| / |\varphi_2, \varphi_3| \leq 1 + B|\varphi_1, \varphi_2|. \quad (1.7)$$

Доказательство предложения. Для любых $\varphi_1, \varphi_2 \bmod l$ справедливо неравенство

$$\beta \leq |\varphi_1, \varphi_2| / |\varphi_1 - \varphi_2| \leq 1,$$

где $\beta > 0$ — константа, зависящая только от кривой, $|\cdot|$ — расстояние в евклидовой метрике окружности $T^1 = \{\varphi \bmod l\}$ до нуля.

Действительно, функция

$$u(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{cases} |\varphi_1 \varphi_2| / |\varphi_1 - \varphi_2|, & \varphi_1 \neq \varphi_2; \\ 1, & \varphi_1 = \varphi_2 \end{cases}$$

непрерывна и положительна на торе $T^1 = \{\varphi_1, \varphi_2 \bmod l\}$. Таким образом, в качестве β можно взять $\min_{T^1} u$.

Пусть $R_{\min}^*$ и $R_{\max}^*$ — соответственно минимальный и максимальный радиусы кривизны кривой на дуге $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Рассмотрим окружности с радиусами $R_{\min}^*, R_{\max}^*$, касающиеся нашей кривой в точке φ_2 (см. рис. 45).

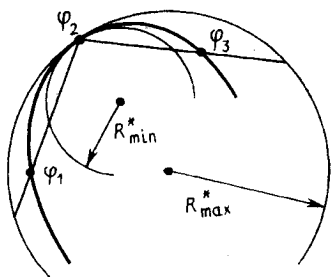


Рис. 45

Ясно, что $|\varphi_1, \varphi_2|/|\varphi_2, \varphi_3| \leq R_{\max}^*/R_{\min}^*$. Имеем следующие неравенства:

$$\frac{R_{\max}^*}{R_{\min}^*} = 1 + \frac{R_{\max}^* - R_{\min}^*}{R_{\min}^*} \leq 1 + \frac{R'_{\max}|\varphi_3 - \varphi_1|}{R_{\min}},$$

где

$$R'_{\max} = \max_{\varphi \in T} \left| \frac{dR}{d\varphi} \right|; \quad R_{\min} = \min_{\varphi \in T} R(\varphi).$$

Можно считать, что в неравенстве (1.7) $|\varphi_1, \varphi_2| \geq |\varphi_2, \varphi_3|$. Тогда $|\varphi_3 - \varphi_1| \leq (|\varphi_1, \varphi_2| + |\varphi_2, \varphi_3|)/\beta \leq 2|\varphi_1, \varphi_2|/\beta$.

В итоге получаем

$$|\varphi_1, \varphi_2|/|\varphi_2, \varphi_3| \leq 1 + 2R'_{\max}|\varphi_1, \varphi_2|/(\beta R_{\min}).$$

Предложение доказано.

Доказательство леммы 6. Пусть кривая $r = f^{(*)}$ принадлежит множеству $V'_{A, \alpha}$. Рассмотрим невырожденную траекторию бильярда типа $(n, 1)$. Пусть эта траектория имеет вид $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, где φ — натуральный параметр на нашей кривой.

Выберем номер $j_0 \in \mathbb{Z}_n$ так, чтобы длина $|\varphi_{j_0}, \varphi_{j_0+1}| = \varepsilon$ была минимальной. Посмотрим, насколько эта величина может увеличиться при изменении j . Имеем цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= a_1 = |\varphi_{j_0+1}, \varphi_{j_0}|; \\ a_2 &= |\varphi_{j_0+2}, \varphi_{j_0+1}| \leq a_1 + a_1 a_2 B; \\ a_3 &= |\varphi_{j_0+3}, \varphi_{j_0+2}| \leq a_2 + a_2 a_3 B. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $a_1, a_2, \dots$ мажорируется последовательностью $b_1, b_2, \dots$, пока элементы последней остаются положительными. Здесь $b_1 = \varepsilon$,

$$b_{m+1}/b_m = 1 + b_{m+1}B.$$

Несложно проверить, что $b_m = \varepsilon_j(1 - \varepsilon B(m-1))$. Действительно, $b_1 = \varepsilon$,

$$\frac{b_{m+1}}{b_m} = \frac{1 - \varepsilon B(m-1)}{1 - \varepsilon Bm} = 1 + \frac{\varepsilon B}{1 - \varepsilon Bm} = 1 + Bb_{m+1}.$$

Очевидно, выполняется неравенство $\sum_{m=1}^n a_m < l$, где l — длина кривой. Тогда максимальная длина a_m не больше, чем b_N , где $\sum_{m=1}^{N-1} b_m \leq l < \sum_{m=1}^N b_m$, если все величины $b_1, \dots, b_N$ положи-

тельные. В самом деле, если предположить, что для некоторого номера m_0 выполняется неравенство $a_{m_0} > b_N$, то последовательность $a_{m_0}, a_{m_0+1}, \dots, a_{m_0+1-N}$ мажорирует последовательность $b_N, b_{N-1}, \dots, b_1$. Тогда $a_{m_0} + \dots + a_{m_0+1-N} > l$ и в то же время все слагаемые этой суммы больше, чем $b_1 = \varepsilon$. Противоречие.

Оценим значение N :

$$\sum_{m=1}^N b_m > \int_0^N \frac{\varepsilon dt}{1 - \varepsilon B(t-1)} = -\frac{1}{B} \ln |1 - \varepsilon B(t-1)| \Big|_0^N.$$

Для этого решим уравнение

$$-\frac{1}{B} \ln(1 - \varepsilon B(t-1)) \Big|_0^x = l.$$

Получаем

$$x = (1 + \varepsilon B)(1 - e^{-B l}) / (\varepsilon B).$$

Очевидно, что $N < x + 1$. Значит,

$$b_N < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon Bx} = \frac{\varepsilon}{1 - (1 + \varepsilon B)(1 - e^{-B l})} = \frac{\varepsilon e^{B l}}{1 + \varepsilon B(1 - e^{B l})}.$$

При малых ε величина

$$e^{B l} / (1 + \varepsilon B(1 - e^{B l}))$$

положительна и меньше, чем, например, $2e^{B l}$. Итак, у траектории типа $(n, 1)$ при больших n минимальная длина $|\varphi_{j+1}, \varphi_j|$ меньше максимальной не более чем в $2e^{B l}$ раз. Значит, минимальная величина $|\varphi_{j+1} - \varphi_j|$ меньше максимальной не более чем в $2e^{B l}/\beta$ раз. В силу регулярности замены параметра $\varphi \rightarrow \vartheta$ минимальная величина $|\vartheta_{j+1} - \vartheta_j|$ меньше максимальной не более чем в s раз, где константа s зависит только от кривой.

Таким образом, координаты точек на торе $T^2 = \{\vartheta_1, \vartheta_2 \bmod 2\pi\}$, соответствующих невырожденным периодическим траекториям типа $(n, 1)$, довольно плотно и равномерно заполняют кольцо $-\delta < \vartheta_1 - \vartheta_2 < \delta$ при малых δ в том смысле, что в любой открытой области на T^2 , содержащей точку $(\vartheta_1, \vartheta_2)$, такую, что $\vartheta_1 = \vartheta_2$, имеются точки, соответствующие невырожденным периодическим траекториям типа $(n, 1)$. Пусть F — первый интеграл биллиарда, аналитический на торе. Во всех этих точках $\text{grad } F = 0$. По непрерывности имеем $\text{grad } F|_{\vartheta_1 = \vartheta_2} = 0$.

Сделаем замену переменных

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = x \bmod 2\pi, \quad \vartheta_2 = y \bmod 2\pi.$$

Положим $F^*(x, y) = F(\vartheta_1, \vartheta_2)$. Для всех y имеем

$$\frac{\partial F^*}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial F^*}{\partial y}(0, y) = 0.$$

Значит, $F^*(0, y) = F_0$ не зависит от y . Выберем из последовательности функций

$$\frac{\partial F^*}{\partial x}(0, y), \quad \frac{\partial^2 F^*}{\partial x^2}(0, y), \dots$$

первую не равную тождественно нулю. Пусть это будет функция

$$\frac{\partial^m F^*}{\partial x^m}(0, y) = u(y),$$

тогда

$$F^*(x, y) = F_0 + \frac{x^m}{m!} u(y) + o(x^m).$$

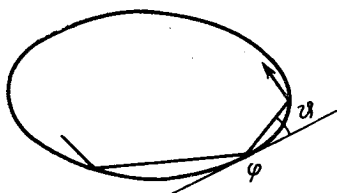


Рис. 46

Пусть $u(y_0) \neq 0$. Тогда существует окрестность точки $(0, y_0)$, такая, что для любой ее точки (x, y) из равенства $\partial F / \partial x(x, y) = 0$ следует равенство $x = 0$. Но этого не может быть, так как хотя бы одна из точек этой окрестности порождает невырожденную периодическую траекторию типа $(n, 1)$. Итак, все производные $\partial^m F^* / \partial x^m(0, y) = 0$. Функция F^* аналитическая, зна-

чит, $F^* = F_0$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Точно таким же способом можно доказать, что у билиардов, принадлежащих $V'_{A, \alpha}$, не существует первого интеграла, аналитического на открытой области, содержащей кольцо $\{(\varphi, \vartheta), \varphi \in T_1, \vartheta \in [0, \pi]\}$, где φ — координата на кривой точки траектории, а ϑ — угол между скоростью траектории после удара о точку φ и положительным направлением касательной к кривой в точке φ (см. рис. 46). Интерпретация билиарда как диффеоморфизма кольца на себя принадлежит Биркгофу [42].

Замечание 2. Уже отмечалось, что множество $V'_{A, \alpha}$ можно считать состоящим из билиардов, обладающих бесконечным количеством невырожденных гиперболических периодических траекторий. Как известно, такие траектории обладают *сепаратрисами*. Если сепаратрисы трансверсально пересекаются, то билиард не может быть интегрируемым в силу их сложного поведения (см., например, [3]).

Пользуясь подобными соображениями, неинтегрируемость билиарда доказывал В. Ф. Лазуткин [26]. Однако В. Ф. Лазуткин

рассматривал не аналитические билиарды, а гладкие (класса C^∞). Для последних не имеет смысла ставить задачу существования аналитического первого интеграла.

§ 2. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ТОПОЛОГИЯ БИЛИАРДОВ

Пусть конфигурационное пространство M лагранжевой механической системы с двумя степенями свободы является гладким связным компактным многообразием с кусочно-гладкой (класса C^2) границей ∂M , а функция Лагранжа $L = L_2 + L_1 + L_0$ принадлежит классу C^2 на касательном расслоении TM . Символ L_j обозначает функцию, однородную степени j по скоростям. Квадратичную форму L_2 будем считать положительно определенной. Функция L_2 имеет смысл кинетической энергии механической системы и задает риманову метрику на M .

Пусть в области $M \setminus \partial M$ траектории движения являются решениями уравнений Лагранжа, при попадании траектории в гладкую точку границы ∂M происходит упругое отражение, при котором энергия $H = L_2 - L_0$ сохраняется, а приращение скорости ортогонально границе ∂M в метрике L_2 (ср. введение, задача 7). Траектории, попадающие в точки излома ∂M , не имеют продолжения. Отметим, что мера начальных условий, соответствующих таким траекториям, равна нулю на TM . Эта механическая система является еще одним естественным обобщением билиарда Биркгофа.

Зафиксируем трехмерную поверхность уровня $\{H = h\} \subset TM$ интеграла энергии. Локально непостоянная измеримая функция F на уровне $\{H = h\}$ называется *условным по Биркгофу первым интегралом* системы, если она постоянна вдоль почти всех траекторий энергии h [32, гл. III]. В этом параграфе рассматриваются условные интегралы, полиномиальные по скорости (импульсу) и гладкие класса C^n по координате.

Теорема 2 [9]. Пусть $h + L_0 > 0$ на M и билиард имеет полиномиальный по скорости условный интеграл на уровне $\{H = h\}$. Тогда

$$\sum_k (\pi - \theta_k) \leq 2\pi\chi(M), \quad (2.1)$$

где $0 < \theta_k < 2\pi$ — внутренние углы в точках излома границы ∂M , измеренные в римановой метрике L_2 , а $\chi(M)$ — эйлерова характеристика поверхности M . Если в (2.1) имеет место знак равенства, то углы θ_k соизмеримы с π :

$$\theta_k = \pi m_k / n, \quad m_k \in N, \quad (2.2)$$

где n — степень условного интеграла.

Напомним определение эйлеровой характеристики. Рассмотрим на M конечное число криволинейных отрезков γ_i , разбивающих M на несколько открытых областей, гомеоморфных двумер-

ному диску, причем отрезки γ_i и γ_j ($i \neq j$) могут пересекаться лишь по своим конечным точкам. Тогда

$$\chi(M) = \Gamma - P + B,$$

где Γ — число «граней» (открытых дисков), P — число «ребер» (отрезков γ_i , включающих отрезки на границе ∂M), B — число «вершин» (концевых точек γ_i). В частности, если M гомеоморфно двумерной сфере с k удаленными непересекающимися открытыми дисками, то $\chi(M) = 2 - k$.

Рассмотрим наиболее важный частный случай, когда граница ∂M является гладкой. Согласно теореме 2 если $\chi(M) < 0$, то бильярд Биркгофа в M не имеет дополнительного полиномиального интеграла. Следовательно, наличие полиномиальных интегралов налагает нетривиальные ограничения на топологию пространства положений бильярда Биркгофа.

Топологические препятствия к интегрируемости впервые обнаружены В. В. Козловым. В работе [20] рассмотрена динамика обратимой системы с лагранжианом $L = L_2 + L_0$, пространство положений которой — аналитическая двумерная компактная поверхность M . Доказано, что при условии $\chi(M) < 0$ уравнения движения не имеют аналитического интеграла, независимого от интеграла энергии. Препятствием является наличие бесконечного числа неустойчивых периодических решений.

Впоследствии другое доказательство этого результата для случая геодезического потока (когда $L = L_2$) было дано В. Н. Колокольцовым [24]. Из-за свойства однородности уравнений движения здесь можно ограничиться рассмотрением полиномиальных интегралов. Обобщение теоремы о неинтегрируемости для систем с добавочными гироскопическими силами (когда $L_1 \neq 0$) дано С. В. Болотиным [7]. Теорема 2 — дискретный аналог этих результатов. Отметим ряд следствий.

1. Если углы границы поверхности M не превосходят π , то неравенство (2.1) выполнено лишь тогда, когда M гомеоморфна диску, кольцу или листу Мебиуса, причем в двух последних случаях на ∂M вообще не может быть углов (отличных от π).

2. Знак равенства в (2.1) выполнен, например, в случае бильярда на плоскости внутри многоугольника. Тогда условие (2.2) необходимо и достаточно для существования полиномиального по скорости интеграла. Действительно, в евклидовых координатах x, y этот интеграл имеет вид $F = \sin(\arg(\dot{x} + i\dot{y})^n)$, где n — общий знаменатель рациональных чисел θ_k/π .

3. По теореме Гаусса — Бонне условие (2.1) эквивалентно неравенству

$$\iint_M K d\sigma + \oint_{\partial M} \kappa ds \geq 0,$$

где K — гауссова кривизна метрики Якоби $ds = 2\sqrt{L_2(L_0 + h)}$, а κ — геодезическая кривизна границы ∂M в метрике ds . Отме-

тим, что в случае $L_1=0$ и отрицательных кривизн K и κ билиард оказывается эргодичным на уровне энергии $\{H=h\}$ [31], так что он не имеет даже измеримых условных интегралов на $\{H=h\}$.

Доказательство теоремы 2. Без ограничения общности можно считать, что поверхность M ориентируема (иначе можно рассмотреть двулистное ориентируемое накрытие над M). Определим на M структуру римановой поверхности с помощью локальных конформных (изотермических) координат x, y , таких, что $L_2=g(z)|\dot{z}|^2$, $z=x+iy$ (см. [50]).

Пусть $p=\partial L_2/\partial \dot{z}$ — комплексный импульс. Полиномиальный по скорости условный интеграл F на $\{H=h\}=\{p\bar{p}=U(z)=g(z)(h+L_0(z))\}$ можно представить в виде

$$F = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n f_k(z) p^k|_{\{H=h\}}, \quad f_n(z) \neq 0, \quad (2.3)$$

где коэффициенты f_k принадлежат классу C^1 на M . Произведение $f_k(z)p^k$ и дифференциальная форма $p dz$ являются инвариантными, не зависящими от координат, объектами, следовательно, дифференциал $\omega_k=(dz)^k/f_k$ порядка k на M не зависит от выбора конформной координаты z . Ясно, что этот дифференциал не имеет нулей, а его особые точки совпадают с нулями f_k .

Если F — условный интеграл, то скобка Пуассона

$$\{F, H\}|_{\{H=h\}} = \operatorname{Re} \left(U \frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} p^{n+1} + \sum_{k \leq n-1} g_k(z) p^k \right) = 0,$$

поэтому $\partial f_n/\partial \bar{z} \equiv 0$ и ω_n — мероморфный дифференциал в $M \setminus \partial M$. Голоморфность функции f_n обнаружена Биркгофом [42] при $n=2$, а построение формы ω_n по полиномиальному по скорости интегралу впервые предложил В. Н. Колокольцов ([24], см. также [7]).

Предложение 3. Комплексные импульсы $p_{\pm}$ до и после отражения от границы ∂M в гладкой точке связаны формулой $p_{+\tau} = p_{-\tau}$, где τ — комплексный касательный вектор к ∂M в точке отражения z .

Действительно, так как углы между парами векторов $\dot{z}_+$ и τ , τ и $\dot{z}_-$ равны и $|\dot{z}_+| = |\dot{z}_-|$ (в силу закона отражения), то величины $\dot{z}_+/\tau$ и $\dot{z}_-/\tau$ комплексно сопряжены. Остается воспользоваться равенствами $p_{\pm} = 2g(z)\dot{z}_{\pm}$.

Дифференциалы $\omega_1, \dots, \omega_n$ принимают вещественные значения на векторах, касательных к ∂M ; т. е. ограничение ω_k , $k=1, \dots, n$, на границу ∂M вещественно: $\operatorname{Im} \omega_k|_{\partial M} = 0$. В самом деле, в силу предложения 3 условие $F(z, p_-) = F(z, p_+)$ эквивалентно равенству

$$\operatorname{Re} \left(\sum f_k(z) p_+^k - \sum f_k(z) \left(\frac{\overline{p_+}}{\tau} \right)^k \right) = \operatorname{Re} \sum \left(f_k - \frac{\bar{f}_k \tau^k}{\bar{\tau}^k} \right) p_+^k = 0,$$

откуда $\tau^k/f_k(z) = \bar{\tau}^k/\bar{f}_k(z)$ для всех $k = 1, \dots, n$.

По *теореме Римана* [50] существует конформное отображение открытой римановой поверхности $M \setminus \partial M$ на $N \setminus \partial N$, где N — компактная риманова поверхность с краем ∂N , состоящим из конечного числа окружностей. Оно продолжается до гомеоморфизма M и N , конформного в гладких точках края ∂M . Пусть Ω — мероморфный дифференциал на $N \setminus \partial N$, соответствующий ω_n при этом отображении. Он непрерывно продолжается на всю границу ∂N , за исключением конечного числа точек, соответствующих особым точкам дифференциала ω_n и точкам излома ∂M .

Пусть $\bar{N}$ — поверхность N с конформной структурой, определяемой локальными координатами $\bar{\xi}$, где ξ — локальные конформные координаты на N , а $S = NU\bar{N}$ — поверхность, получающаяся склеиванием N и $\bar{N}$ вдоль ∂N . Тогда S — компактная риманова поверхность без края (дубль поверхности N).

Так как ограничение дифференциала Ω на ∂N вещественно, то по *принципу симметрии Римана — Шварца* Ω продолжается до однозначного дифференциала, почти всюду голоморфного на S . Он имеет полюсы в точках, соответствующих нулям коэффициента $\bar{f}_n$, и не имеет других нулей и полюсов кроме точек, соответствующих изломам границы ∂M .

Пусть z — конформная координата на M , причем $z=0$ в точке излома ∂M с углом $\theta = \pi\alpha$, $0 < \alpha < 2$, а ξ — конформная координата на S , такая, что $\xi=0$ в образе этой точки при гомеоморфизме M на N и подмножество $N \subset S$ локально задается неравенством $\operatorname{Re} \xi \geq 0$. Тогда обратное отображение N в M локально задается формулой $z = \varphi(\xi)^\alpha$, $\operatorname{Re} \xi \geq 0$, где отображение φ конформно и имеет непрерывную производную при $\operatorname{Re} \xi \geq 0$, причем $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) \neq 0$. Имеем

$$\omega_n = \frac{(dz)^n}{f_n(z)} = \frac{[\alpha \varphi(\xi)^{\alpha-1} \varphi'(\xi)]^n (d\xi)^n}{f_n(\varphi(\xi)^\alpha)} = \Omega. \quad (2.4)$$

Из последнего равенства следует, что форма Ω имеет при $\xi=0$ особую точку (нуль или плюс) порядка не больше чем $n(\alpha-1)$. Таким образом, Ω — мероморфный n -дифференциал на S , причем сумма порядков его особых точек не больше

$\sum_k n(\theta_k/\pi - 1)$. Так как сумма порядков особых точек мероморфного n -дифференциала на S равна $-n\chi(S) = -2n\chi(M)$ [50], то первое утверждение теоремы доказано.

Если в соотношении (2.1) имеет место знак равенства, то все особые точки дифференциала Ω соответствуют точкам излома границы ∂M , причем порядок k -й особой точки равен $n(\theta_k/\pi - 1)$. Следовательно, числа $n\theta_k/\pi$ — целые. Что и требовалось доказать.

§ 3. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ БИЛЛИАРДЫ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

В этом параграфе приводим описание интегрируемых билиардов на многообразиях постоянной кривизны. Излагаемые ниже результаты принадлежат С. В. Болотину.

1. Пусть M^m — риманово многообразие с метрикой $(\cdot, \cdot)$, а $D \subset M$ — область с границей Γ , состоящей из конечного числа гладких регулярных гиперповерхностей. Билиардом в D назовем динамическую систему с фазовым пространством $P = \{(v, x) : v \in T_x M, x \in D, \|v\|^2 = 1\}$, траектории которой являются геодезическими, причем при попадании в точку $x \in \Gamma$ они отражаются по упругому закону:

$$v \rightarrow v' = v - 2n(v, n). \quad (3.1)$$

Здесь $v, v', n \in T_x M$ и n — вектор единичной нормали к Γ . Траектории, попадающие в точки излома Γ , не имеют продолжения.

В этом параграфе рассматриваем условные интегралы (по Биркгофу; см. § 2) билиарда в D , являющиеся полиномами по скорости $v \in T_x M$ с C^1 -гладкими коэффициентами. Если F — условный интеграл, то F принимает постоянные значения на каждой геодезической в области D и сохраняется при отражении (3.1):

$$F(v, x) \equiv F(v - 2n(v, n), x); \quad x \in \Gamma, \quad v \in T_x M. \quad (3.2)$$

Без ограничения общности можно считать, что F — однородный полином по скорости v . Действительно, функцию F

можно разложить в сумму $F = F_1 + F_2$, где $F_1 = \sum_{k=0}^n \Phi_{2k+1}$ — сум-

ма нечетных однородных по скорости форм, а $F_2 = \sum_{k=0}^n \Phi_{2k}$ — сум-

ма четных форм. Домножая каждый член суммы F_i , $i = 1, 2$, на интеграл энергии в соответствующей степени, можно добиться того, чтобы полученная функция стала однородной по скорости, при этом она, конечно, останется условным первым интегралом билиарда.

Лемма 7. *Интеграл билиарда с границей Γ является интегралом геодезического потока на Γ . Обратно, квадратичный по скорости интеграл геодезического потока на M и на Γ является интегралом билиарда.*

Доказательство. Пусть $F = F_n(v, \dots, v; x)$, где F — симметричная полилинейная форма по v степени n . Если F — интеграл геодезического потока на M , то ковариантная производная

$$\nabla F(\underbrace{v, \dots, v}_{m+1}; x) = 0, \quad v \in T_x M. \quad (3.3)$$

В силу равенства (3.2)

$$F(n, v, \dots, v; x) \equiv 0, \quad v \in T_x \Gamma. \quad (3.4)$$

Действительно, если продифференцировать по ε при $\varepsilon = 0$ и $v \in T_x \Gamma$ тождество

$$F(v + \varepsilon n, \dots, v + \varepsilon n; x) - F(v + \varepsilon n - 2n(v + \varepsilon n, n), \dots; x) \equiv 0,$$

то получим соотношение (3.4).

Уравнение геодезического потока на Γ имеет вид

$$\nabla_v v = \lambda n, \quad (3.5)$$

откуда в силу (3.3) — (3.5)

$$\frac{d}{dt} F(v, \dots, v; x) = \nabla F(\underbrace{v, \dots, v}_{m+1}; x) + mF(\nabla_v v, v, \dots, v; x) = 0$$

вдоль геодезической на Γ .

Обратное утверждение следует из того, что для квадратичной по скорости функции F равенство (3.2) следует из (3.4). В самом деле, пусть $x \in \Gamma$, $v \in T_x M$. Тогда $v = n(v, n) + v_\perp$, где $v_\perp \in T_x \Gamma$. Таким образом,

$$\begin{aligned} F(v - 2n(v, n), v - 2n(v, n); x) - F(v, v; x) = \\ = -4(v, n)F(n, v; x) + 4(v, n)^2 F(n, n, x) = \\ = -4(v, n)F(n, v; x) = 0 \end{aligned}$$

в силу (3.4). Лемма доказана.

Биллиард назовем *интегрируемым по Биркгофу*, если он имеет $m-1$ полиномиальных по скорости интегралов на P , находящихся в инволюции и почти всюду независимых. Отметим, что все интегрируемые биллиарды, описанные в гл. 4, являются интегрируемыми по Биркгофу.

2. Далее M будет многообразием постоянной кривизны K . Достаточно рассмотреть случаи $K=1$ (сфера), $K=-1$ (пространство Лобачевского) и $K=0$ (евклидово пространство).

Многообразие постоянной кривизны ± 1 можно реализовать как гиперповерхность

$$\Sigma = \{r \in \mathbb{R}^{m+1} : H(r) = \pm 1\}; \quad H(r) = \langle Ar, r \rangle \quad (3.6)$$

с метрикой

$$\| \dot{r} \|^2 = H(\dot{r}), \quad (3.7)$$

где $A = \text{diag}(1, \dots, 1, \pm 1)$ [75].

В случае $K = -1$ гиперповерхность Σ несвязна и поэтому следует взять одну из ее связанных компонент, например $r_{m+1} > 0$. Отметим также, что при $K = -1$ матрица (3.7) индефинитна в пространстве $\mathbf{R}^{m+1}$, но она становится положительно определенной при ограничении на поверхность Σ .

Многообразие нулевой кривизны реализуем в виде гиперплоскости

$$\Sigma = \{r \in \mathbf{R}^{m+1} : r_{m+1} = 1\}$$

с метрикой вида (3.7), где $A = \text{diag}(1, \dots, 1, 0)$.

Уравнения геодезического потока на Σ имеют вид

$$\ddot{r} = -Kr; \quad H(\dot{r}) = 1,$$

где K — кривизна. В частности, геодезический поток на Σ имеет матричнозначный интеграл момента

$$M = r \wedge \dot{r} = (M_{ij}), \quad M_{ij} = r_i \dot{r}_j - r_j \dot{r}_i, \quad (3.8)$$

а геодезические являются сечениями поверхности Σ двумерными плоскостями, проходящими через точку $r = 0 \in \mathbf{R}^{n+1}$.

Так как отображение из множества геодезических на Σ в множество кососимметрических матриц (кососимметрических 2-форм в $\mathbf{R}^{n+1}$) инъективно, то любой первый интеграл геодезического потока на Σ является функцией от M .

Предложение 4. Пусть B — симметрическая матрица. Если граница бильярда на Σ составлена из кусков гиперповерхностей $\Gamma = U\Gamma_{\lambda_j}$,

$$\Gamma_{\lambda} = \{r \in \Sigma : \langle B_{\lambda} r, r \rangle = 0\}; \quad B_{\lambda} = (B - \lambda A)^{-1} \text{ при } \det(B - \lambda A) \neq 0,$$

$$\Gamma_{\lambda} = \{r \in \Sigma : \langle r, N \rangle = 0; (B - \lambda A)N = 0\} \text{ при } \det(B - \lambda A) = 0, \quad (3.9)$$

то бильярд интегрируем по Биркгофу. В частности, для любого $\mu \in \mathbf{R}$ функция

$$F_{\mu}(r, \dot{r}) = \langle B_{\mu} r, r \rangle \langle B_{\mu} \dot{r}, \dot{r} \rangle - \langle B_{\mu} r, \dot{r} \rangle^2 \quad (3.10)$$

является первым интегралом бильярда.

Вид интеграла (3.10) взят из работы [63]. Если разложить F_{μ} в сумму простых дробей

$$F_{\mu} = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{F_i(r, \dot{r})}{\mu - \lambda_i}, \quad \det(B - \lambda_i A) = 0,$$

то F_i , $i=1, \dots, m$, дают полный набор интегралов в инволюции бильярда $\left(\sum_{i=1}^{m+1} F_i = 0, \text{ см. [63]} \right)$.

Для доказательства предложения 4 достаточно проверить, что F_μ — интеграл геодезического потока на Σ и на Γ_λ . В самом деле, тогда из квадратичности F_μ и леммы 7 будет следовать, что F_μ — первый интеграл бильярда.

Покажем, что F_μ постоянен вдоль геодезического потока на Γ_λ (постоянство F_μ вдоль геодезического потока на Σ проверяется аналогично). Ограничимся случаем $\det(B - \lambda A) \neq 0$. Уравнение геодезических на поверхности (3.9) имеет вид

$$A\ddot{\mathbf{r}} = \alpha B_\lambda \dot{\mathbf{r}} - K A \dot{\mathbf{r}},$$

где α — неопределенный множитель Лагранжа. Легко получаем равенство

$$\ddot{\mathbf{r}} = \alpha A B_\lambda \dot{\mathbf{r}} - K \dot{\mathbf{r}}.$$

В силу (3.10)

$$\begin{aligned} \dot{F}_\mu(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) &= 2\alpha \{ \langle B_\mu \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle \langle B_\lambda A B_\mu \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle - \\ &\quad - \langle B_\mu \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle \langle B_\lambda A B_\mu \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle \}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Поскольку $B_\lambda A B_\mu = (B_\mu - B_\lambda)/(\mu - \lambda)$, то

$$\langle B_\lambda A B_\mu \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle = \frac{1}{\mu - \lambda} (\langle B_\mu \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle - \langle B_\lambda \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle),$$

$$\langle B_\lambda A B_\mu \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle = \frac{1}{\mu - \lambda} (\langle B_\mu \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle - \langle B_\lambda \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle),$$

где $\langle B_\lambda \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle = \langle B_\lambda \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle = 0$, так как $\mathbf{r} \in \Gamma_\lambda$ и $\dot{\mathbf{r}} \in T_\lambda \Gamma_\lambda$. Подставляя эти равенства в (3.11), получим $\dot{F}_\mu(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = 0$, что и требовалось доказать.

Недавно А. П. Веселов показал, что в случае $\Gamma = \Gamma_\lambda$ бильярд с границей Γ можно проинтегрировать в $\mathfrak{F}$ -функциях Якоби [73].

3. В дальнейшем ограничимся двумерным случаем ($m = 2$). Момент M можно теперь считать вектором $M = [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}] \in \mathbb{R}^3$. Покажем, что при $\dot{\mathbf{r}} \in T_\lambda \Sigma$ интеграл энергии $H(\dot{\mathbf{r}})$ имеет вид

$$H(\dot{\mathbf{r}}) = \langle A \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle = \langle A M, M \rangle = H(M). \quad (3.12)$$

Действительно, например, при $K \neq 0$ это следует из равенств

$$\begin{aligned} \langle A M, M \rangle &= \langle A[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}], [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}] \rangle = \langle K[A\mathbf{r}, A\dot{\mathbf{r}}], [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}] \rangle = \\ &= K \langle \dot{\mathbf{r}}, [[A\mathbf{r}, A\dot{\mathbf{r}}], \mathbf{r}] \rangle = K \langle \dot{\mathbf{r}}, -A\mathbf{r} \langle A\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle + \\ &\quad + A\dot{\mathbf{r}} \langle A\mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle \rangle = \langle A\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались ортогональностью оператора A , а также соотношениями $\langle A\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle = 0$, $\langle A\mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = K$.

Предложение 5. Если бильярд с границей Γ имеет непостоянный на фазовом пространстве полиномиальный по скоростям интеграл, то Γ состоит из кусков алгебраических кривых на Σ .

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что интеграл F является однородным полиномом по скорости четной степени $2n$. В случае нечетной степени возведем его в квадрат. Поскольку геодезическая на Σ однозначно определяется моментом $\mathbf{M}$, то $F = \Phi(\mathbf{M})$, где Φ — полином степени $2n$. Пусть S — один из гладких кусков Γ , параметризованный длиной дуги $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \in S$. По лемме 7 имеем

$$\Phi(\mathbf{M}(s)) = \lambda, \quad \mathbf{M}(s) = [\mathbf{r}(s), \mathbf{r}'(s)], \quad (3.13)$$

где штрихом обозначена производная d/ds . Покажем, что если на S выполняется неравенство

$$\mathbf{M}'(s) = [\mathbf{r}(s), \mathbf{r}''(s)] \neq 0, \quad (3.14)$$

то S содержится в пересечении $\Sigma \cap C_\lambda$ поверхности Σ с конусом

$$C_\lambda = \{\partial f_\lambda / \partial \mathbf{M} : f_\lambda(\mathbf{M}) = 0\}; \quad f_\lambda(\mathbf{M}) = \Phi(\mathbf{M}) - \lambda H^n(\mathbf{M}). \quad (3.15)$$

Действительно, в силу (3.12), (3.13) имеем $f_\lambda(\mathbf{M}(s)) = 0$, откуда

$$\langle \partial f_\lambda / \partial \mathbf{M}, \mathbf{M}'(s) \rangle = 0. \quad (3.16)$$

Из однородности функции f_λ получаем соотношение

$$\langle \partial f_\lambda / \partial \mathbf{M}, \mathbf{M} \rangle = 2n f_\lambda(\mathbf{M}) = 0. \quad (3.17)$$

Если $\mathbf{M}'(s) \neq 0$, то из (3.13), (3.14), (3.16), (3.17) следует, что $\mathbf{r}(s)$ и $\partial f_\lambda / \partial \mathbf{M}(\mathbf{M}(s))$ ортогональны линейной оболочке векторов $\mathbf{M}(s)$ и $\mathbf{M}'(s)$. Таким образом, векторы $\mathbf{r}(s)$ и $\partial f_\lambda / \partial \mathbf{M}(\mathbf{M}(s))$ коллинеарны, что и требовалось доказать.

Если S — гладкий кусок Γ , на котором $\mathbf{M}'(s) = 0$, то S — отрезок геодезической $\{\mathbf{r} \in \Sigma : \langle \mathbf{r}, \mathbf{M} \rangle = 0\}$. Предложение доказано.

Из формулы (3.15) вытекает

Следствие. Если бильярд на поверхности постоянной кривизны имеет непостоянный на фазовом пространстве квадратичный по скорости интеграл $\langle \mathbf{B}\mathbf{M}, \mathbf{M} \rangle$, то каждый негеодезический кусок Γ имеет вид (3.9).

Бильярды на плоскости Лобачевского, имеющие квадратичный по скорости интеграл, впервые описаны А. М. Абдрахмановым с использованием модели Пуанкаре (см. задачу 4 гл. 4).

4. Укажем геометрическую интерпретацию доказательства предложения 5.

Пусть S — гладкий негеодезический кусок Γ , а

$$\hat{S} = \{[\mathbf{r}] \in \mathbb{R}P^2 : \mathbf{r} \in S\}$$

— множество прямых в $\mathbb{R}^3$, каждая из которых проходит через начало координат и точку кривой S . Тогда условие (3.15) означа-

ет, что $\hat{S}$ содержится в C_λ , причем конус C_λ , рассматриваемый как кривая в проективной плоскости RP^2 , двойствен к проективной алгебраической кривой

$$S^* = \{[M] \in RP^{2*} : f_\lambda(M) = 0\}.$$

Напомним, что двойственная проективная плоскость RP^{2*} является множеством прямых в RP^2 , а двойственная кривая $S^* \subset RP^{2*}$ к кривой C_λ есть множество прямых в RP^2 , касательных к S . Кривая, двойственная к двойственной, совпадает с исходной (см. [52]).

Таким образом, каждый гладкий кусок S границы Γ интегрируемого бильярда содержится в алгебраической кривой

$$S \subset \{r \in \Sigma : g(r) = 0\}, \quad (3.18)$$

где g — однородный полином на R^3 . Без ограничения общности можно считать, что g неприводим над C . Пусть S_c — алгебраическое замыкание кривой $\hat{S}$, т. е.

$$\hat{S}_c = \{[r] \in CP^2 : g(r) = 0\}.$$

Тогда S_c — неприводимая проективная алгебраическая кривая степени $d = \deg g$.

Предложение 6. Пусть S — гладкий кусок границы интегрируемого бильярда, такой, что его алгебраическое замыкание $\hat{S}_c$ в CP^2 — гладкая алгебраическая кривая (кривая без особенностей в CP^2). В случае ненулевой кривизны Σ предположим дополнительно, что $\hat{S}_c$ имеет хотя бы одну точку трансверсального пересечения с абсолютном

$$\Lambda = \{[r] \in CP^2 : H(r) = 0\}.$$

Тогда $\hat{S}_c$ — алгебраическая кривая первой или второй степени.

В случае общего положения кривая $\hat{S}_c$ степени d имеет по теореме Безу $2d$ точек трансверсального пересечения с Λ . Если опустить условие существования точки трансверсального пересечения $\hat{S}_c$ и Λ в случае ненулевой кривизны, то из доказательства следует лишь, что $d \leq 3$.

Доказательство предложения 6 в случае нулевой кривизны содержится в работе [10]. В общем случае идея доказательства та же и состоит в следующем. Известно [52], что гладкая проективная алгебраическая кривая $\hat{S}_c \subset CP^2$ степени d является компактной римановой поверхностью эйлеровой характеристики

$$\chi(\hat{S}_c) = d(3 - d).$$

По непостоянному на фазовом пространстве полиномиальному степени $2n$ по скорости первому интегралу F строится мероморфный дифференциал Ω степени $2n$ на $\hat{S}_c$, не имеющий нулей и имеющий полюс степени n в каждой точке трансвер-

сального пересечения $\hat{S}_c$ и Λ (ср. с § 2). По формуле Римана—Гурвица величина $2\pi\chi(\hat{S}_c)$ равна сумме кратностей полюсов Ω , т. е. $2\pi\chi(\hat{S}_c) \geq n$, откуда следует, что $\chi(\hat{S}_c) > 0$ и $\hat{S}_c$ — сфера Римана. Поэтому $d \leq 2$, что и требовалось. Подробности доказательства опустим.

5. Назовем гладкий кусок границы Γ бильярда неособым, если он удовлетворяет условию предложения 6 и не является куском геодезической на Σ .

Теорема 3 (классификация неособых интегрируемых бильярдов). Если хотя бы один кусок границы Γ интегрируемого бильярда неособый, то выполняется одно из двух утверждений:

- 1) бильярд имеет квадратичный по скорости интеграл, а его граница Γ состоит из кривых вида (3.9) с неизменной матрицей B ;
- 2) бильярд имеет интеграл четвертой степени G^2 , где

$$D = \langle BM, M \rangle - cH(M) = \frac{2\langle M, Ae_1 \rangle \langle M, e_2 \rangle}{\langle AN, N \rangle}; \quad \langle e_1, e_2 \rangle = 0,$$

а Γ состоит из кусков кривых вида (3.9) и геодезических

$$\{r \in \Sigma: \langle r, e_1 \rangle = 0\}, \{r \in \Sigma: \langle r, Ae_2 \rangle = 0\}, \quad (3.19)$$

причем в случае ненулевой кривизны следует выбирать вектор e_2 не параллельным плоскости Σ и лишь первую из геодезических (3.19).

В случае нулевой кривизны кривые (3.9) оказываются семейством софокусных эллипсов и гипербол вместе с двумя предельными прямыми. На рис. 47 изображено такое семейство вместе с интегрируемым бильярдом первого типа.

Кривые (3.9) могут также образовывать семейство софокусных парабол. Если граница области состоит из кусков таких парабол, а также из куса прямой (3.19), то соответствующий бильярд интегрируем и принадлежит второму типу (см. рис. 48). Бильярд такого вида впервые описан в [48].

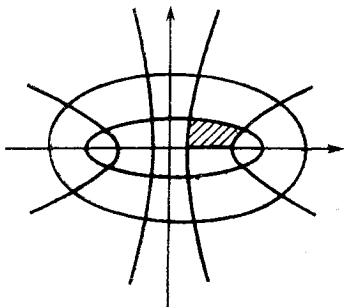


Рис. 47

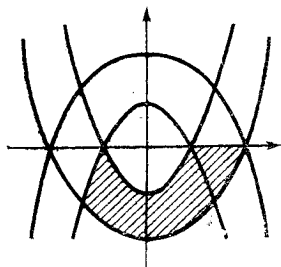


Рис. 48

Доказательство теоремы. Пусть S — гладкий неособый кусок Γ . Тогда в силу предложения 6 существует матрица B , такая, что

$$S \subset \{r \in \Sigma: \langle B^{-1}r, r \rangle = 0\}.$$

Пусть $F = \Phi_{2n}(M)$ — первый интеграл билиарда. Тогда из доказательства предложения 5 следует, что

$$\Phi_{2n} = f(G, H), \quad (3.20)$$

где $G(M) = \langle BM, M \rangle$. Функция $f(G(M), H(M))$, очевидно, является однородным полиномом по G и H степени n .

В силу следствия из предложения 5 каждый негеодезический кусок Γ имеет вид (3.9).

Пусть теперь $L = \{r \in \Sigma: \langle r, N \rangle = 0\}$ — геодезический кусок Γ . Поскольку для любого $r \in L$

$$\langle AN, Ar \rangle = \langle N, r \rangle = 0,$$

то вектор AN лежит в $T_r\Sigma$ и является нормалью к L в метрике H на Σ . Таким образом, в силу (3.1) при отражении от L

$$v \rightarrow v' = v - 2 \frac{AN \langle N, v \rangle}{\langle AN, N \rangle}.$$

Отсюда несложно вывести, что при отражении от L

$$M = [r, v] \rightarrow M' = [r, v'] = -M + 2N \frac{\langle AN, M \rangle}{\langle AN, M \rangle}. \quad (3.21)$$

Для того чтобы функция (3.20) сохранялась при отражении (3.21), необходимо, чтобы

$$f(G(M), 1) = f(G(M'), 1). \quad (3.22)$$

Здесь мы использовали тот факт, что $H(M) = H(M') = 1$. В силу (3.21) имеем

$$G(M') = G(M) - 4 \frac{\langle M, AN \rangle}{\langle N, AN \rangle} \langle (B - \lambda A)N, M \rangle, \quad (3.23)$$

где $\lambda = \langle BN, N \rangle / \langle AN, N \rangle$.

Если интеграл F непостоянен на фазовом пространстве билиарда, то $f(\cdot, 1)$ — непостоянный полином. Из условия (3.22) следует, что квадратичные формы $G(M')$ и $G(M)$ зависимы на поверхности $H(M) = 1$. Поскольку $(M')' = M$, то либо $G(M') = G(M)$, либо $K(M') = -K(M)$, где $K(M) = G(M) - cH(M)$ для некоторого c .

В первом случае в силу (3.23) имеем $(B - \lambda A)N = 0$, так что геодезическая L имеет вид (3.9). Во втором случае

$$K(M) = 2 \frac{\langle M, AN \rangle \langle (B - \lambda A)N, M \rangle}{\langle N, AN \rangle}.$$

Полагая $e_1 = N$, $e_2 = (B - \lambda A)N$, получим $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$.

Если кривизна Σ отлична от нуля, то функцию K можно представить в виде

$$K(M) = 2 \frac{\langle M, AN \rangle \langle M, AJ \rangle}{\langle N, AN \rangle},$$

где $J = A^{-1}e_2 = Ae_2$. Покажем, что функция $K^2(M)$ сохраняется при отражении от геодезической $L' = \{r \in \Sigma : \langle r, Ae_2 \rangle = 0\}$. Действительно, в этом случае

$$M \rightarrow M' = -M + 2J \frac{\langle AJ, M \rangle}{\langle AJ, J \rangle},$$

откуда несложно получается равенство

$$\begin{aligned} \langle N, AN \rangle K(M') &= 2 \langle M', AN \rangle \langle M', AJ \rangle = \\ &= -2 \langle M, AN \rangle \langle M, AJ \rangle = -\langle N, AN \rangle K(M), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Ранее мы показали, что если граница неособого интегрируемого бильярда содержит кусок геодезической $\tilde{L} = \{r \in \Sigma : \langle r, \tilde{N} \rangle = 0\}$, то соответствующая квадратичная форма $K(M)$ делится на линейную форму $\langle M, A\tilde{N} \rangle$. Следовательно, такими геодезическими могут быть только L и L' .

Если кривизна равна нулю и вектор e_2 параллелен плоскости Σ , то первый интеграл K^2 оказывается зависящим только от скорости v , т. е. все куски Γ оказываются вырожденными. Если e_2 не параллелен Σ , то аналога геодезической L' не существует в силу необратимости матрицы A . Теорема доказана.

§ 4. ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БИЛЛИАРДОВ

Пусть M — часть евклидовой плоскости, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой кривой ∂M . Как уже отмечалось, мера множества начальных условий, при которых траектория бильярда попадает в точку излома ∂M , равна нулю.

Пусть $\varphi \bmod 2\pi$ — угловая координата на границе ∂M , пропорциональная длине дуги. Каждая ломаная траектория определяется одним из своих прямоугольных отрезков. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — три последовательные точки траектории, лежащие на границе. Соответствие $(\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (\varphi_2, \varphi_3)$ определяет отображение Ψ двумерного тора T^2 на себя. Это отображение изучалось нами в гл. 2.

Предложение 7. *Отображение Ψ сохраняет меру*

$$d\mu = \left(\frac{\partial^2 |\varphi_1, \varphi_2|}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \right)^{-1} d\varphi_1 d\varphi_2$$

на торе T^2 , где $|\varphi_1, \varphi_2|$ — длина отрезка, соединяющего точки на границе бильярда.

Это означает, что для любой измеримой области D справедливо равенство

$$\mu(D) = \mu(\Psi(D)),$$

где

$$\mu(D) = \int_D d\mu.$$

Мера μ может иметь сингулярности на T^2 . Предполагаем, что мера всего тора T^2 конечна. Это условие заведомо выполнено для бильярдов с гладкой регулярной выпуклой границей. Предложение 7 было известно еще Биркгофу [42, гл. VI]. Оно является следствием *теоремы Лиувилля* о сохранении фазового объема в теории гамильтоновых систем.

Бильярд в M назовем *эргодическим*, если T^2 нельзя разбить в сумму двух непересекающихся измеримых областей положительной меры, инвариантных относительно отображения Ψ . Тор T^2 является топологическим пространством со счетной базой окрестностей, причем каждое его непустое открытое подмножество имеет положительную меру. Поэтому, как доказывается в эргодической теории, в предположении эргодичности для почти всех $(\varphi_1, \varphi_2) = \psi \in T^2$ траектория точки ψ (т. е. последовательность $\{\Psi^n(\psi)\}_{n=0}^\infty$) всюду плотна на T^2 (см., например, [25; 53]).

Полезно иметь в виду следующее эквивалентное определение эргодичности: всякая инвариантная относительно отображения Ψ функция F (т. е. $F(\Psi(\psi)) = F(\psi)$ для почти всех $\psi \in T^2$) почти всюду константа. Следовательно, эргодические бильярды неинтегрируемы: отсутствуют нетривиальные дополнительные *измеримые* (а не только гладкие или непрерывные) интегралы.

С наглядной точки зрения бильярд в M эргодичен, если почти все его траектории проходят сколь угодно близко к любой заданной точке M с направлением, сколь угодно близким к любому заданному. Введем в рассмотрение *слабо эргодические* бильярды, когда почти все траектории всюду плотны в M . Ясно, что эргодические бильярды слабо эргодичны; обратное неверно. Примером служит бильярд в квадрате: любая траектория с иррациональным тангенсом угла наклона всюду плотна в нем, однако каждая траектория состоит из отрезков только двух направлений.

Задача об эргодичности бильярдов усиленно изучается, но решена еще далеко не полностью ввиду ее сложности. Приведем краткий обзор основных относящихся сюда результатов. Рассмотрим сначала выпуклые бильярды.

Теорема 4 (В. Ф. Лазуткин [26]). *Если граница ∂M является регулярной выпуклой кривой класса гладкости C^2 , то бильярд в M не является слабо эргодическим.*

Введем *каустики* — гладкие кривые γ в области M , обладающие следующим свойством: если хотя бы один отрезок ломаной траектории касается γ , то все остальные отрезки этой траектории (или их продолжения) касаются γ . В случае окружности имеется

одно семейство каустик — концентрические окружности, а у эллипса два семейства — софокусные с ним эллипсы и гиперболы (см. § 1 гл. 4).

С помощью результатов КАМ-теории (Колмогорова — Арнольда — Мозера) в предположении теоремы 4 В. Ф. Лазуткин доказал существование бесконечного семейства каустик, имеющих положительную суммарную меру в M и накапливающихся у границы ∂M . При этом мера точек двумерного тора T^2 , отвечающих траекториям, касающимся каустик, также положительна. Отсюда вытекает, в частности, отсутствие слабой эргодичности (и тем более эргодичности).

Рассмотрим теперь бильярды в многоугольниках. Даже в выпуклом случае для них не справедлива теорема В. Ф. Лазуткина. Несмотря на кажущуюся простоту, задача изучения эргодических свойств бильярдов в многоугольниках в настоящее время остается открытой. Упомянем некоторые наиболее известные результаты в этой области.

Теорема 5. *Если углы многоугольника M рационально соизмеримы с π , то*

- а) бильярд в M не является эргодическим,*
- б) бильярд в M слабо эргодичен.*

Закключение а) вытекает из более сильного утверждения об интегрируемости бильярда в многоугольнике с соизмеримыми углами: кроме интеграла энергии бильярд допускает новый полиномиальный по скоростям интеграл (см. § 2). Закключение б) (и некоторые его уточнения) доказано в работах [57; 45; 58].

Множество всех многоугольников на плоскости имеет очевидную структуру топологического пространства; обозначим его U .

Теорема 6 [57]. *Существует множество $X \subset U$, такое, что:*

- (1) X является пересечением счетного числа открытых множеств,*
- (2) X плотно в U ,*
- (3) бильярд в любом многоугольнике $M \in X$ является транзитивным.*

Бильярд в M называется транзитивным, если найдется хотя бы одна точка $\varphi \in T^2$, такая, что ее орбита $\{\Psi^m(\varphi)\}_{m=0}^{\infty}$ всюду плотно заполняет T^2 . Эквивалентное определение: найдется траектория бильярда, проходящая сколь угодно близко к любой заданной точке M с направлением, сколь угодно близким к любому заданному. Эргодические бильярды, очевидно, транзитивны.

Рассмотрим бильярд в области M , изображенной на рис. 36: все регулярные компоненты границы ∂M являются гладкими (класса C^3) выпуклыми внутрь M кривыми, и кривизна границы принимает строго положительные значения. Такие бильярды называются рассеивающими, или бильярдами Синая. Они являются дискретным аналогом гладких гиперболических систем: в результате отражений от вогнутой границы расстояние между близкими траекториями увеличивается с экспоненциальной скоро-

стью. В частности, все периодические траектории гиперболичны и, следовательно, неустойчивы (см. гл. 2).

Теорема 7 (Я. Г. Синай [31]). *Рассеивающие билиарды эргодичны.*

Имеются эргодические билиарды, не являющиеся рассеивающими. Регулярная компонента границы билиарда, выпуклая во-вне (внутри) M , называется *фокусирующей (рассеивающей)*.

Теорема 8 (Л. А. Бунимович [11]). *Билиард в M является эргодическим, если выполнены следующие условия:*

- (1) *граница ∂M составлена из фокусирующих и рассеивающих компонент;*
- (2) *кривизна каждой фокусирующей компоненты ∂M постоянна;*
- (3) *никакие две фокусирующие компоненты не являются дугами одной и той же окружности;*
- (4) *дуга, дополняющая любую фокусирующую компоненту до полной окружности, лежит внутри области M .*

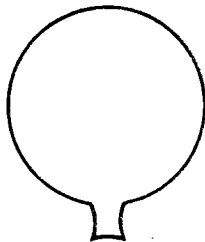


Рис. 49



Рис. 50

Заметим, что длина фокусирующей части границы ∂M может существенно превышать суммарную длину рассеивающих компонент ∂M (см. рис. 49).

В работе Л. А. Бунимовича [47] приведены примеры эргодических билиардов, у которых граница ∂M вообще не имеет рассеивающих компонент. Самым популярным среди них является «стадион»; его граница составлена из двух полуокружностей и двух касательных к ним отрезков (рис. 50). Этот билиард выпуклый, а его граница имеет гладкость C^1 (ср. с теоремой 4).

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что уравнения движения билиардной системы в области с границей (3.9) разделяются в конических координатах — корнях уравнения $\langle B, r, r \rangle = 0$ [63].

2. Пусть граница билиарда Γ состоит из геодезических многообразий — сечений поверхности Σ гиперплоскостями $\Gamma_i =$

$=\{r \in \Sigma: \langle r, e_i \rangle = 0\}$. Показать, что если группа преобразований, порожденная отражениями

$$r \rightarrow r - \frac{2Ae_i \langle r, e_i \rangle}{\langle Ae_i, e \rangle},$$

конечна, то бильярд интегрируем (ср. с задачей 6 из гл. 4). В случае пространства Лобачевского эти группы называются *гиперболическими группами Кокстера*.

3. Доказать, что кривая вида (3.9) пересекается с геодезической (3.19) под углом $\pi/4$.

4. Указать все бильиарды на плоскости, допускающие непостоянный интеграл, линейный по скорости.

5. Доказать, что двузвенные периодические траектории бильиардов из теоремы 8 либо вырождены, либо гиперболичны.

ДОБАВЛЕНИЕ 1. СИСТЕМЫ С УПРУГИМИ ОТРАЖЕНИЯМИ И КАМ-ТЕОРИЯ

1. Простейшей системой с упругими отражениями является бильярд в евклидовой полуплоскости. Траектории такого бильиарда, очевидно, отождествляются с лучами света, отражающимися от прямолинейного зеркала. Из геометрической оптики известно простое наблюдение, состоящее в том, что лучи света можно «выпрямить», рассмотрев после отражения не сам луч, а его образ при симметрии относительно зеркала. В работе [17] В. Ф. Журавлев предложил аналогичным образом «выпрямить» траектории произвольной механической системы с упругими отражениями. Он показал, что с помощью надлежащей замены координат можно сделать непрерывными обобщенные скорости (или импульсы), причем ускорения, вообще говоря, остаются разрывными. Этот подход в соединении с методом усреднения позволил решить ряд новых интересных задач из динамики виброударных систем (см. [18]).

А. П. Иванов и А. П. Маркеев [19] представили уравнения движения систем с упругими ударами в гамильтоновой форме. Изложим кратко их конструкцию.

Пусть натуральная механическая система с функцией Лагранжа $L = T - V$ стеснена идеальной односторонней связью. Тогда существуют локальные координаты $q_0, \dots, q_n$ на конфигурационном пространстве, в которых связь имеет вид $q_0 \geq 0$, а кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^n a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j; \quad a_{0m} \equiv 0, \quad m=1, \dots, n.$$

Существование таких координат установлено в § 3, гл. 1.

Уравнения движения в промежутках между ударами о связь имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} - \frac{\partial L}{\partial q_0} = F, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k \geq 1,$$

где F — реакция напряженной связи; $F=0$ при $q_0 \neq 0$. Запишем первое из этих уравнений при $q_0 = \dot{q}_0 = 0$:

$$a_{00} \ddot{q}_0 - \left. \frac{\partial V}{\partial q_0} \right|_{q_0=0} = F.$$

Поскольку $a_{00} > 0$, то, следуя [33], получим, что

$$F = \max \left\{ 0, - \left. \frac{\partial V}{\partial q_0} \right|_{q_0=0} \right\}. \quad (1)$$

Определим вспомогательную систему при помощи функции Лагранжа $L'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(|q_0|, q_1, \dots, q_n, \dot{\mathbf{q}}, t)$ и обобщенной силы (1). Несложно проверить, что траектории $\mathbf{q}(t)$ исходной системы и $\mathbf{q}'(t)$ вспомогательной системы с одинаковыми начальными условиями связаны простыми соотношениями

$$q_0(t) = |q'_0(t)|, \quad q_k(t) = q'_k(t), \quad k \geq 1.$$

Вспомогательная система уже никакими связями не стеснена.

Произведя преобразование Лежандра

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad H = \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} - L',$$

запишем уравнения движения в канонической форме

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}},$$

где (в соответствии с (1)) надо положить

$$\left. \frac{\partial H}{\partial q_0} \right|_{q_0=0} = \min \left\{ 0, \left. \frac{\partial H}{\partial q_0} \right|_{q_0=0} \right\}.$$

Полученная гамильтонова система однозначно определяет движение исходной системы (с учетом отождествления $q_0 \rightarrow |q_0|$). В частности, движение при напряженной связи происходит при условии $\partial H / \partial q_0|_{q_0=0} \geq 0$.

2. Распространение канонического формализма на случай систем с упругими отражениями позволяет поставить вопрос о применимости КАМ-теории (Колмогорова — Арнольда — Мозера). Основная трудность состоит в том, что получающиеся функции Гамильтона, вообще говоря, недифференцируемы на гиперповерхно-

стях $q_0=0$ в фазовом пространстве. А. П. Иванов и А. П. Маркев [19] на конкретном примере показали, что недифференцируемость гамильтониана может не препятствовать применению КАМ-теории. С помощью приводимой ниже конструкции распространим этот вывод на более общие случаи.

Основная идея состоит в сведении задачи об исследовании негладкого гамильтонова фазового потока к исследованию соответствующего симплектического отображения последования, которое, как правило, оказывается гладким (бесконечно дифференцируемым). Пусть M — гладкое многообразие.

Определение 1. Подмногообразие $\Pi \subset M$ называется *гладкой гиперповерхностью* в M , если в окрестности Π существует функция $P \in C^\infty$, такая, что $\Pi = \{x \in M: P(x) = 0\}$ и dP отличен от нуля на Π .

Определение 2. Функция $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ называется *кусочно-гладкой* на M , если H непрерывна на M и существуют гладкие гиперповерхности $\Pi_j = \{P_j = 0\}$, $j = 1, \dots, k$, такие, что

(а) функция H является гладкой на множестве $M \setminus \bigcup_1^k \Pi_j$;

(б) для любой точки $x \in \Pi_j$, $j \in \{1, \dots, k\}$, существует окрестность U_x точки x в M , такая, что функция $H|_{U_x^+}$ и $H|_{U_x^-}$,

где $U_x^\pm = U_x \cap \{\pm P_j > 0\}$ продолжаются до гладких (возможно, различных) функций на U_x .

З а д а ч а. Показать, что функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, является кусочно-гладкой на $\mathbb{R}$, а функция $f(x) = x \sin(x^{-1})$ таковой не является.

Определение 3. Два подмногообразия $N_1, N_2 \subset M$ пересекаются *трансверсально*, если в любой точке $x \in N_1 \cap N_2$ прямая сумма касательных пространств $T_x N_1 \oplus T_x N_2$ совпадает с $T_x M$.

Скажем, что векторное поле v на M *трансверсально* многообразию $N \subset M$, если в любой точке $x \in N$ вектор $v(x)$ не лежит в касательной плоскости $T_x N$.

3. отождествим гладкое $2n$ -мерное многообразие с фазовым пространством механической системы. Пусть $\omega = d\Omega$ — невырожденная замкнутая 2-форма (точная симплектическая структура) на M , а $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ — кусочно-гладкая функция. Вне поверхностей Π_j функция H задает гладкое гамильтоново векторное поле $\text{sgrad } H$, удовлетворяющее равенству

$$dH(\cdot) = \omega(\cdot, \text{sgrad } H).$$

Напомним, что в канонических локальных координатах (p, q) на M форма ω принимает вид $dp \wedge dq$, а поле $\text{sgrad } H = (-\partial H / \partial q, \partial H / \partial p)$. Уравнения Гамильтона $\dot{x} = \text{sgrad } H$ порождают однопараметрическую группу диффеоморфизмов многообразия M (сохраняющих симплектическую структуру ω) — фазовый поток g_H^+ .

Лемма. Пусть поверхности Π_i трансверсально пересекаются с уровнем энергии $\{H=h\} \subset M$; D_1 и D_2 — две связные $(2n-2)$ -мерные области в пересечении $\{H=h\} \cap (\cup \Pi_i)$, такие, что:

- (а) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$;
- (б) векторное поле $\text{sgrad } H$ трансверсально обеим областям;
- (в) фазовый поток g_H^t индуцирует отображение последования $G: D_1 \rightarrow D_2$, причем фазовые траектории не пересекаются с поверхностями Π_i вне областей D_1 и D_2 .

Тогда

- i) ограничения формы ω на области D_1 и D_2 невырождены;
- ii) отображение G — гладкое;
- iii) отображение G является локальным диффеоморфизмом;
- iv) диффеоморфизм G является точным симплектическим, т. е. для любого замкнутого контура $\gamma \subset D_1$ выполняется равенство

$$\oint_{\gamma} \Omega = \oint_{G\gamma} \Omega.$$

Доказательство.

i) Пусть D — одна из областей D_1, D_2 . Предположим, что v — касательный вектор к поверхности D в точке $x \in D$ — является аннулятором формы $\omega|_D$, т. е. $\omega(u, v) = 0$ для любого $u \in T_x D$.

Вектор $w = \text{sgrad}_x H$ является аннулятором формы $\omega|_{\{H=h\}}$. Это вытекает из формулы $\omega(u, \text{sgrad } H) = \text{grad } H(u) = 0$ для любого касательного векторного поля u на M_h . Если $v \neq 0$, то в силу условия трансверсальности пересечения уровня энергии с поверхностями Π_i векторы w и v линейно независимы. Так как $\omega(v, w) = 0$, то вектор v также является аннулятором формы $\omega|_{\{H=h\}}$. Следовательно, косоортогональное дополнение к касательной $(2n-1)$ -мерной плоскости в точке x к уровню энергии $\{H=h\}$ в $2n$ -мерном симплектическом пространстве $T_x M$ по крайней мере двумерно, чего не может быть. Таким образом, $v = 0$ и форма $\omega|_D$ невырождена.

ii) В силу условия (в) леммы существует непрерывная функция $f: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что выполняется соотношение $G(x_1) = g_H^{f(x_1)}(x_1) \in D_2$, $x_1 \in D_1$, причем точки вида $g_H^t(x_1)$, $0 < t < f(x_1)$, лежат вне поверхностей Π_i .

Функция f удовлетворяет уравнению

$$P_2(g^{f(x_1)}(x_1)) = 0, \quad (2)$$

где P_2 — гладкая функция, определяющая гладкую гиперповерхность Π_i , внутри которой лежит область D_2 . Производная

$$\frac{\partial}{\partial f} P_2(g^f(x)) = dP_2 \text{sgrad } H$$

отлична от нуля в силу следующей из б) трансверсальности поля $\text{sgrad } H$ поверхности $\{P_2=0\}$. Таким образом, по теореме о неявной функции из уравнения (2) можно найти f , причем функция f

будет гладкой. Но тогда отображение $G(x) = g_H^{f(x)}(x): D_1 \rightarrow D_2$ также является гладким, что и требовалось доказать.

iii) Для любого $x_1 \in D_1$ имеем $G(x_1) = g_H^{f(x_1)}(x_1)$, следовательно,

$$dG(x_1) = d(g^{t_0})(x_1) + \text{sgrad } H(G(x_1)) \cdot df(x_1), \quad t_0 = f(x_1).$$

Пусть $\xi \neq 0$ — касательный вектор к поверхности D_1 в точке x_1 . В силу предложения (б) векторы ξ и $\text{sgrad } H(x_1)$ линейно независимы. Поскольку отображение $d_x(g^t)$ невырожденно, оно переведет эти векторы в линейно независимые, причем $\xi \rightarrow \xi' \neq 0$, $\text{sgrad } H(x_1) \rightarrow \text{sgrad } H(G(x_1))$. Образом вектора ξ при отображении dG является вектор $\xi' + \text{sgrad } H(G(x_1)) \cdot df(x_1) \neq 0$. Следовательно, отображение dG невырожденно и по теореме об обратной функции G — локальный диффеоморфизм.

iv) Рассмотрим «трубку», образованную фазовыми траекториями уравнений Гамильтона, проходящими через точки замкнутой кривой $\gamma \subset D_1$. Применим формулу Стокса к куску трубки, ограниченному кривыми γ и $G\gamma$:

$$\oint_{\gamma} \Omega - \int_{G\gamma} \Omega = \int_{\partial \Sigma} \Omega = \int_{\Sigma} \omega,$$

где Σ — боковая поверхность трубки.

Значение формы ω на любой паре векторов, касательных к трубке, равно нулю. Действительно, трубка лежит на уровне энергии, касательные к ней плоскости двумерны и содержат аннулятор $\text{sgrad } H$. Следовательно,

$$\int_{\Sigma} \omega = 0 \quad \text{и} \quad \oint_{\gamma} \Omega = \oint_{G\gamma} \Omega.$$

Лемма доказана.

4. Следствие 1. Пусть гамильтониан H и поверхности потери гладкости $\Pi_\epsilon = \{P_\epsilon = 0\}$ гладко зависят от параметра ϵ : $H = H^\epsilon$, $\Pi_\epsilon = \Pi_\epsilon^\epsilon$; при $\epsilon = 0$ существует последовательность попарно непересекающихся $(n-2)$ -мерных областей $D_1, \dots, D_m \subset \{H^0 = h\} \cap (\cup \Pi_\epsilon^0)$, таких, что каждая пара D_1, D_2 ; D_2, D_3 ; ...; D_m, D_1 удовлетворяет условиям леммы, причем $G_1, \dots, G_m$ — диффеоморфизмы. Предположим также, что отображение $G_m \circ \dots \circ G_1: D_1 \rightarrow D_1$ интегрируемо и невырожденно, т. е. в некоторых координатах $I, \varphi \bmod 2\pi$ на D_1 оно имеет вид

$$I \rightarrow I, \varphi \rightarrow \varphi + \omega(I); \det(\partial\omega/\partial I) \neq 0.$$

Тогда при малых ϵ исходная гамильтонова система имеет инвариантные n -мерные торы, близкие к инвариантным торам невозмущенной системы, общая мера которых стремится к полной при $\epsilon \rightarrow 0$.

Действительно, при малых ϵ области $D_1, \dots, D_m$, немного деформируясь вместе с поверхностями Π_ϵ , перейдут в области $D_1^\epsilon, \dots, D_m^\epsilon$, попарно удовлетворяющие условиям леммы

(только отображение G_m^ε , возможно, будет диффеоморфизмом D_m^ε не на D_1^ε , а на некоторую область $\hat{D}_1^\varepsilon$, такую, что разность $\hat{D}_1^\varepsilon \setminus D_1^\varepsilon$ мала вместе с ε). Сквозное отображение $G_m^\varepsilon \circ \dots \circ G_1^\varepsilon: D_1 \rightarrow \hat{D}_1$ является гладким, точным симплектическим и близким к интегрируемому, т. е. в некоторых координатах I, φ на $D_1 \cup \hat{D}_1$ оно имеет вид

$$I \rightarrow I + \varepsilon f(I, \varphi), \quad \varphi \rightarrow \varphi + \omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi).$$

Таким образом, в силу теоремы об инвариантных торах точных симплектических отображений [49] преобразование $G_m^\varepsilon \circ \dots \circ G_1^\varepsilon$ имеет большое количество нерезонансных $(n-1)$ -мерных торов. Фазовый поток исходных гамильтоновых уравнений превратит их в n -мерные инвариантные торы возмущенной системы.

Отметим, что эти торы, вообще говоря, не являются гладкими, причем гладкость теряется в точках их пересечения с поверхностями D_j (см. рис. 51).

5. Следствие 2. Известно, что эллиптические периодические траектории общего положения в гладкой гамильтоновой системе с двумя степенями свободы являются орбитально устойчивыми на уровне энергии [3]. Этот же результат остается верным и в случае кусочно-гладких гамильтонианов, если дополнительно потребовать, чтобы периодическая траектория трансверсально пересекала поверхности потери гладкости (что, кстати сказать, тоже является условием общего положения). В случае трех и более степеней свободы приходится говорить об орбитальной устойчивости для большинства начальных условий.

В самом деле, рассмотрим отображения последования $G_j: D_j \rightarrow D_{j+1}$ где D_j — малая окрестность $\Pi_j \cap \{H = h\}$ точки пересечения периодической траектории с этой поверхностью (считая, что поверхности Π_j пронумерованы в надлежащем порядке). При этом периодической траектории соответствует неподвижная точка гладкого точного симплектического диффеоморфизма $G_m \circ \dots \circ G_1: D_1 \rightarrow$

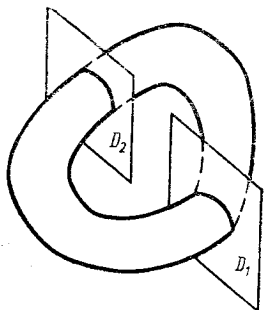


Рис. 51

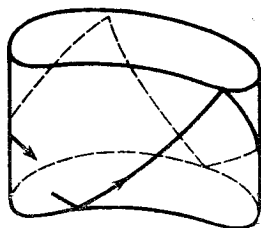


Рис. 52

→ D_1 . Таким образом, утверждение следствия 2 следует из известного результата, касающегося неподвижных точек симплектических диффеоморфизмов.

6. В качестве примера рассмотрим бильярд в евклидовом цилиндре

$$C_\varepsilon = \{x, \varphi \bmod 2\pi : \varepsilon f_1(\varphi) \leq x \leq \pi + \varepsilon f_2(\varphi)\}.$$

Как обычно, считаем, что в области $C_\varepsilon \setminus \partial C_\varepsilon$ траектории являются геодезическими в естественной метрике $dx^2 + d\varphi^2$, а закон отражения от границы ∂C — упругий (см. рис. 52).

Предложение 1. При малых ε бильярд в цилиндре C_ε обладает большим количеством квазипериодических траекторий, близких к траекториям интегрируемого бильярда внутри C_0 .

Следуя конструкции работы [19], изложенной в п. 1, сопоставим бильярду гамильтонову систему с кусочно-гладким гамильтонианом H_ε следующим образом. В качестве конфигурационного пространства возьмем тор T^2 , склеенный из двух экземпляров $C_\varepsilon^\pm$ цилиндра C_ε , причем „верхний“ („нижний“) край цилиндра C^+ приклеивается к „верхнему“ („нижнему“) краю цилиндра C^- . В качестве локальных координат, задающих на T^2 структуру гладкого многообразия, в окрестности любой точки, лежащей в $C^+ \setminus \partial C^+$ ($C^- \setminus \partial C^-$), можно взять координаты x, φ ; а в малой окрестности на U , пересекающейся с множеством $\partial C^\pm$, такими координатами являются $\hat{x}, \hat{\varphi}$, где $|\hat{x}| = y$ и $y, \hat{\varphi}$ — полугеодезические координаты на множестве $U \cap C^+(U \cap C^-)$.

Подмногообразие $\partial C^+ = \partial C^- \subset T^2$, очевидно, является гладким и в некоторых „глобальных“ координатах $(z, \psi) \bmod 2\pi$, на T^2 имеет вид $\{(z, \psi) \in T^2 : z=0 \text{ или } z=\pi\}$. Введем фазовое пространство этой системы

$$M = \{(p_z, p_\psi, z, \psi) : (p_z, p_\psi) \in \mathbb{R}^2, (z, \psi) \in T^2\}.$$

Гамильтониан совпадает с кинетической энергией. Он является кусочно-гладкой функцией на всем фазовом пространстве и принадлежит классу C^∞ вне множества $\Pi_0 \cup \Pi_\pi$, где

$$\Pi_0 = \{(p_z, p_\psi, z, \psi) \in M : z=0\}, \quad \Pi_\pi = \{(p_z, p_\psi, z, \psi) \in M : z=\pi\}.$$

При $\varepsilon=0$ можно считать, что координаты (z, ψ) совпадают с координатами (x, φ) , причем $C^+ = \{(x, \varphi) \in T^2 : 0 \leq x \leq \pi\}$, $C^- = \{(x, \varphi) \in T^2 : -\pi \leq x \leq 0\}$ и диффеоморфизмы $\pi_\pm : C_0 \rightarrow G^\pm$ имеют вид $\pi_\pm(x, \varphi) = (\pm x, \varphi)$ (см. рис. 53).

Гамильтониан $H_0 = \frac{1}{2}(p_\varphi^2 + p_x^2)$ аналитичен на M . Проверим

выполнение условий следствия 1.

Рассмотрим области

$$D_0 = (\Pi_0 \setminus \{p_x=0\}) \cap \{H_0=h\}, \quad D_\pi = (\Pi_\pi \setminus \{p_x=0\}) \cap \{H_0=h\}.$$

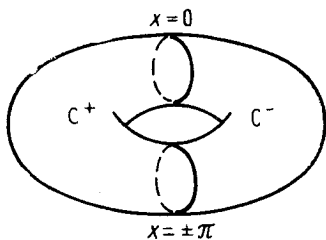


Рис. 53

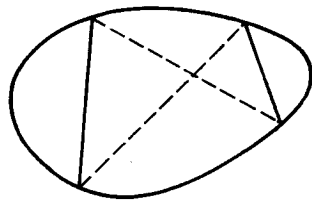


Рис. 54

Очевидно, что указанные пересечения трансверсальны и гамильтоново векторное поле $\text{sgrad} H_0 = (0, 0, p_x, p_\varphi)$ трансверсально двумерным поверхностям D_0, D_π . В качестве координат на D_0 и D_π можно взять p_φ и φ . Фазовый поток индуцирует отображения $G_1: D_0 \rightarrow D_\pi$ и $G_2: D_\pi \rightarrow D_0$, которые в координатах p_φ, φ выглядят следующим образом:

$$G_i(p_\varphi, \varphi) = (p_\varphi, \varphi + \pi p_\varphi (2h - p_\varphi^2)^{-1/2}), \quad i=1, 2.$$

Следовательно, отображение $G_2 \circ G_1$ имеет вид

$$G_2 \circ G_1(p_\varphi, \varphi) = (p_\varphi, \varphi + 2\pi p_\varphi (2h - p_\varphi^2)^{-1/2}).$$

Оно интегрируемо, невырожденно, и переменные p_φ, φ являются для него переменными действие — угол. Таким образом заключение предложения вытекает из следствия 1.

ДОБАВЛЕНИЕ 2. О СВЯЗИ ДИНАМИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ

Оказывается, теорема 2 гл. 2 является дискретным аналогом некоторой общей теоремы, связывающей мультипликаторы периодической траектории уравнений Лагранжа (в частности, уравнений геодезических) со свойствами соответствующей критической точки функционала действия.

Чтобы проиллюстрировать связь бильярда с задачей о геодезических на римановом многообразии, рассмотрим гладкую замкнутую двумерную поверхность в $\mathbb{R}^3$ и будем деформировать ее так, чтобы она оставалась гладкой и стремилась к плоской области (ср. с [42, гл. 6]). Тогда геодезические на поверхности будут стремиться к траекториям соответствующего бильярда. Замкнутая геодезическая на поверхности перейдет в периодическую траекторию бильярда, имеющую тот же индекс Морса и четное количество звеньев (см. рис. 54).

Естественно ожидать, что и тип (эллиптический, гиперболический) при предельном переходе в типичном случае не изменится.

Однако следует отметить, что эти соображения имеют эврис-

тический характер. Осуществить предложенный Биркгофом предельный переход, по-видимому, непросто. Во всяком случае, в литературе на этот счет нет строгих доказательств. Кроме того, факты сохранения при предельном переходе индекса Морса и типа периодического решения также требуют аккуратных доказательств. Описанная связь между задачами о бильярде и о геодезических на римановом многообразии может служить лишь ключом к пониманию более глубоких результатов.

1. Известно, что динамика гамильтоновых систем (в том числе систем с упругими отражениями) подчиняется вариационным принципам. В связи с этим обстоятельством характеристики периодических траекторий гамильтоновых систем можно разбить на два класса: динамические и геометрические. Первые определяются отображением Пуанкаре, соответствующим данному периодическому решению уравнений движения. К ним относятся величины характеристических показателей, свойства невырожденности (по Пуанкаре) и орбитальной устойчивости. Вторые являются характеристиками периодической траектории как критической точки функционала действия. К ним относятся индекс Морса, невырожденность по Морсу, а также введенный ниже определитель Хилла.

А. Пуанкаре впервые обратил внимание на связь орбитальной устойчивости замкнутой геодезической на римановом многообразии со свойствами соответствующей критической точки функционала действия. Им доказано, что невырожденная замкнутая геодезическая локально минимальной длины на двумерном ориентируемом римановом многообразии гиперболична, следовательно, неустойчива [66]. В дальнейшем усилиями ряда авторов этот результат был обобщен. Оказывается, индекс Морса невырожденной эллиптической замкнутой геодезической на двумерном римановом многообразии нечетный, если геодезическая ориентируема, и четный — в противном случае (см., например, [60]).

С учетом отмеченного выше эвристического предельного перехода из этого утверждения получаем следующий результат для бильярда Биркгофа: индекс Морса невырожденной эллиптической четно-звенной периодической траектории с упругими отражениями всегда нечетный. В главе 2 этот результат получен как следствие теоремы 2.

С другой стороны, в классическом мемуаре Дж. Хилла получена замечательная формула, устанавливающая в частном случае гамильтоновых систем с полутора степенями свободы связь между геометрическими и динамическими характеристиками периодического решения. Теория Хилла изложена в § 4 гл. 3. Оказывается, результаты Хилла допускают обобщение на многомерный случай, причем теорема 2 из второй главы оказывается их дискретным аналогом. Многомерное обобщение формулы Хилла было найдено в работе [36] с использованием метода конечномерной аппроксимации (в духе теории Морса). Ниже излагается вариант обобщенной теории Хилла, предложенный С. В. Болотиным [8].

2. Пусть гладкое n -мерное многообразие M является пространством положений механической системы с n степенями свободы. Функция Лагранжа L определена на расширенном фазовом пространстве $TM \times R$. Она считается гладкой, строго выпуклой по скоростям и τ -периодической по времени. Согласно принципу Гамильтона τ -периодические траектории соответствующей лагранжевой системы совпадают с критическими точками функционала действия

$$S(\gamma) = \int_0^{\tau} L(\dot{\gamma}, \gamma, t) dt$$

на множестве τ -периодических кривых $\gamma: [0, \tau] \rightarrow M$, $\gamma(0) = \gamma(\tau)$.

Для любого значения $t \bmod \tau$ второй дифференциал функции Лагранжа по скорости является положительно определенной квадратичной формой и определяет скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на касательном пространстве $T_{\gamma(t)}M$. Пусть ξ — ковариантная производная векторного поля $\xi(t) \in T_{\gamma(t)}M$ вдоль γ , согласованная с метрикой: $(\xi, \eta)' = (\dot{\xi}, \eta) + (\xi, \dot{\eta})$. Вторая вариация функционала S в критической точке γ является квадратичной формой на множестве гладких τ -периодических векторных полей ξ вдоль γ :

$$\delta^2 S|_{\gamma}(\xi) = \int_0^{\tau} [(\dot{\xi}(t), \dot{\xi}(t)) + 2(W(t)\xi(t), \dot{\xi}(t)) + (V(t), \xi(t), \xi(t))] dt,$$

где V, W — линейные операторы в $T_{\gamma(t)}M$, причем можно считать, что оператор V самосопряжен: $V(t) = V^*(t)$. Квадратичной форме $\delta^2 S|_{\gamma}$ сопоставим билинейную форму h , такую, что $\delta^2 S|_{\gamma}(\xi) = h(\xi, \xi)$. Интегрированием по частям ее можно представить в следующем виде:

$$h(\xi, \eta) = \int_0^{\tau} [(\nabla \xi(t), \nabla \eta(t)) + (U(t)\xi(t), \eta(t))] dt, \quad (1)$$

где $\nabla \xi = \dot{\xi} + \frac{1}{2}(W - W^*)\xi$, а $U = V - \frac{1}{2}(\dot{W} + \dot{W}^*)$ — симметрический линейный оператор. Так как $(\nabla \xi, \eta) + (\xi, \nabla \eta) = (\xi, \eta)'$, то оператор ∇ кососимметричен по отношению к скалярному произведению

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_0^{\tau} (\xi(t), \eta(t)) dt.$$

Поэтому уравнение в вариациях траектории γ имеет вид

$$-\nabla^2 \xi(t) + U(t)\xi(t) = 0. \quad (2)$$

Продолжим билинейную форму h до эрмитовой формы $h(\xi, \bar{\eta})$ на пространстве X комплексных τ -периодических абсолютно непрерывных векторных полей ξ вдоль γ , таких, что

$$\langle \xi, \bar{\xi} \rangle < \infty. \quad (3)$$

Определим на X структуру гильбертова пространства, полагая $\langle \xi, \eta \rangle_{\tau} = \langle \nabla \xi, \bar{\nabla} \eta \rangle + \langle \xi, \bar{\eta} \rangle$. Тогда

$$h(\xi, \bar{\eta}) = \langle \nabla \xi, \bar{\nabla} \eta \rangle + \langle U \xi, \bar{\eta} \rangle = \langle H \xi, \eta \rangle_{\tau},$$

где $H = (-\nabla^2 + E)^{-1}(-\nabla^2 + U) = E + (-\nabla^2 + E)^{-1}(U - E)$ — самосопряженный оператор в X .

Из ограниченности оператора $U - E$ и обсуждаемой далее структуры спектра ∇ легко следует, что след $\text{Tr}(H - E)$ конечен. Таким образом, оператор $H - E$ — ядерный и, следовательно, существует определитель $\det H$ [69]. Назовем его *определителем Хилла траектории γ* . Бесконечная матрица Хилла — матрица оператора Штурма — Лиувилля в некотором базисе.

Следующее обобщение определителя Хилла также по существу имеется в работе Хилла [55]. Для заданного комплексного ρ , $|\rho| = 1$, пусть X_{ρ} — пространство комплексных абсолютно непрерывных векторных полей ξ вдоль γ ; удовлетворяющих (3) и таких, что $\xi(t + \tau) = \rho \xi(t)$. Определим на X_{ρ} ρ -индексную форму [60] траектории γ по формуле второй вариации (1). Отождествим X и X_{ρ} , сопоставляя векторному полю $\xi \in X$ векторное поле $e^{\mu t} \xi(t)$ из X_{ρ} , где $\mu = \tau^{-1} \ln \rho$; $0 \leq \mu \tau / l < 2\pi$. Получим эрмитову форму h_{ρ} на X , которая является обобщением второй вариации и имеет вид

$$\begin{aligned} h_{\rho}(\xi, \bar{\eta}) &= h(e^{\mu t} \xi, e^{\bar{\mu} t} \bar{\eta}) = \\ &= \langle (\nabla + \mu E) \xi, \overline{(\nabla + \mu E) \eta} \rangle + \langle U \xi, \bar{\eta} \rangle = \langle H_{\rho} \xi, \eta \rangle_{\tau}, \end{aligned}$$

где

$$H_{\rho} = (-\nabla^2 + E)^{-1}(-(\nabla + \mu E)^2 + U) \quad (4)$$

— ограниченный оператор в X . В дальнейшем считаем, что ρ может принимать произвольные комплексные значения. Хотя при $\rho \neq 1$ оператор H_{ρ} неядерный, можно определить $\det H_{\rho}$ с помощью конечномерной аппроксимации (см. формулу (6) ниже).

Теорема 1. Пусть P — оператор монодромии уравнения в вариациях (2) (линейное отображение Пуанкаре периодической траектории γ), Q — оператор монодромии уравнения параллельного переноса $\nabla \xi(t) = 0$, а $\sigma = \pm 1$ в зависимости от того, сохраняет или обращает ориентацию траектория γ . Тогда определитель H_{ρ} выражается через характеристический полином $\det(\rho E - P)$ траектории γ :

$$\det H_{\rho} = \sigma(-1)^n \frac{e^{\pi \tau} \det(\rho E - P)}{\rho^n \det^2(e^{\tau} E - Q)}. \quad (5)$$

Так как Q — ортогональный оператор, знаменатель в (5) не обращается в нуль. При $\rho=1$ формула (5) выражает определитель Хилла $\det H$ через $\det(E-P)$ (ср. с теоремой 0 гл. 2).

В одномерном случае (когда $n=1$) $\sigma=1$,

$$\begin{aligned}\det(e^\tau E - Q) &= e^\tau - 1 \text{ и} \\ \det(\rho E - P) &= (\rho - 1)^2 + \rho \det(E - P).\end{aligned}$$

С учетом этих соотношений из (5) получаем формулу

$$\det H_\rho = \det H - \frac{e^\tau}{(e^\tau - 1)^2} \frac{(\rho - 1)^2}{\rho},$$

эквивалентную формуле Хилла (4.6) из главы 3. Чтобы убедиться в этом, надо рассмотреть ортогональный базис функций $\{\exp(2int)\}_{-\infty}^{\infty}$ на окружности $t \bmod 1$ и представить в этом базисе операторы H_ρ и H . Проверка предоставляется читателю в качестве упражнения.

3. Отметим ряд следствий из теоремы 1.

а) Пусть функция Лагранжа квадратична по скорости, не зависит явно от времени и задает риманову метрику $(\cdot, \cdot)$ на M . Тогда γ — замкнутая геодезическая. В этом случае γ всегда имеет два единичных мультипликатора: $\det H = \det(E - P) = 0$. Пусть H_ρ^0 — ограничение оператора H_ρ на инвариантное подпространство векторных полей $\xi \in X$, ортогональных $\dot{\gamma}(t)$ ($(\dot{\gamma}(t), \xi(t)) \equiv 0$), P^0 — оператор монодромии, соответствующий ограничению уравнения в вариациях (2) на множество векторных полей, ортогональных $\dot{\gamma}(t)$, а Q^0 — отображение параллельного переноса вокруг γ векторов, ортогональных $\dot{\gamma}(0)$. Тогда

$$\det H_\rho^0 = \sigma(-1)^{n-1} \frac{e^{(n-1)\tau} \det(\rho E - P^0)}{\rho^{(n-1)\tau} \det^{-2}(e^\tau E - Q^0)}. \quad (6)$$

Действительно, $\det H_\rho$ представляется в виде произведения $\det H_\rho^0$ и определителя D ограничения H_ρ на множество векторных полей, параллельных $\dot{\gamma}(t)$. Ограничим лагранжиан на двумерное пространство $T\gamma \subset TM$ и применим к полученной системе теорему 1. В левой части формулы (5) в этом случае будет стоять определитель D . Таким образом,

$$D = -e^\tau \rho^{-1} (\rho - 1)^2 (e^\tau - 1)^{-2}.$$

Но

$$\begin{aligned}\det(\rho E - P) &= (\rho - 1)^2 \det(\rho E - P^0), \\ \det(e^\tau E - Q) &= (e^\tau - 1) \det(e^\tau E - Q^0).\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Отметим, что исследование любой автономной натуральной лагранжевой системы в потенциальном силовом поле сводится к исследованию задачи о геодезических в метрике Якоби.

б) Определение А. Периодическую траекторию лагранжевой системы (соответственно замкнутую геодезическую на римановом многообразии) назовем невырожденной по Пуанкаре, если спектр матрицы P (соответственно P^0) не содержит единицы.

Определение В. Периодическую траекторию (соответственно замкнутую геодезическую) назовем невырожденной по Морсу, если определитель $\det H$ (соответственно $\det H^0$) отличен от нуля.

Из формул (5), (6) легко следует, что невырожденность по Пуанкаре равносильна невырожденности по Морсу.

в) Определим ρ -индекс $\text{ind}_\rho \gamma$ периодической траектории (замкнутой геодезической) γ как индекс эрмитовой формы h_ρ . Индексом Морса γ назовем, как обычно, величину $\text{ind} \gamma = \text{ind}_1 \gamma$, которая равна количеству отрицательных собственных значений оператора H (или H^0).

Пусть траектория γ невырожденна. Тогда

$$(-1)^{\text{ind}_\rho \gamma} = \text{sgn} \det H_\rho = \sigma(-1)^n \text{sgn}(\rho^{-n} \det(\rho E - P)).$$

В случае геодезической имеем

$$(-1)^{\text{ind}_\rho \gamma} = \text{sgn} \det H_\rho^0 = \sigma(-1)^{n-1} \text{sgn}(\rho^{1-n} \det(\rho E - P^0)).$$

Аргумент у sgn вещественный, поскольку характеристический полином возвратный.

г) Пусть периодическая траектория (замкнутая геодезическая) невырожденна и $\sigma(-1)^{n+\text{ind} \gamma} < 0$, ($\sigma(-1)^{n-1+\text{ind} \gamma} < 0$). Тогда в силу в) $\det(E - P) < 0$ ($\det(E - P^0) < 0$), так что существует вещественный мультипликатор $\lambda > 0$ (действительно, $\det(\lambda E - P) > 0$ при больших вещественных $\lambda > 0$). Поэтому траектория γ орбитально неустойчива.

В частности, невырожденные замкнутые геодезические локально минимальной длины на четномерном ориентируемом многообразии орбитально неустойчивы.

д) Пусть $n=1$ и 2π -периодическая траектория γ^2 есть γ , пройденная дважды. Тогда если γ^2 невырожденна, то траектория γ имеет гиперболический (эллиптический) тип тогда и только тогда, когда $\text{ind} \gamma^2$ четный (нечетный).

В самом деле, мультипликаторы $\lambda_1 = \lambda_2^{-1}$ траекторий γ^2 равны квадратам мультипликаторов траектории γ . Следовательно, гиперболичность γ^2 равносильна условиям вещественности и положительности величин λ_1 , λ_2 или условию $\text{sgn}(\det(E - P^2)) = (-1)^{1+\text{ind} \gamma^2} = -1$ (γ^2 всегда сохраняет ориентацию). Аналогично, эллиптичность γ^2 равносильна условию $(-1)^{1+\text{ind} \gamma^2} = 1$. Остается воспользоваться тем, что γ и γ^2 одновременно являются эллиптическими или гиперболическими.

Соответствующее утверждение для геодезических выглядит следующим образом. Пусть γ — замкнутая геодезическая на дву-

мерном римановом многообразии. Если γ^2 невырожденна, то γ имеет гиперболический (эллиптический) тип тогда и только тогда, когда $\text{ind} \gamma^2$ четный (нечетный).

4. Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству результата Хилла [55].

Вещественный косоэрмитов оператор $\nabla = \bar{\nabla} - \nabla^*$ имеет компактную резольвенту $(\nabla + \mu E)^{-1}$. Его спектр $\Lambda \subset i\mathbb{R}$ совпадает с множеством характеристических показателей уравнения $\nabla \xi(t) = 0$, т. е. с множеством таких $\nu \in \mathbb{C}$, что $\det(e^{\nu\tau} E - Q) = 0$. Если $\nu \in \Lambda$, то $-\nu$ и $\nu + \omega$ принадлежат Λ , где $\omega = 2\pi i/\tau$.

Определим $\det H_\rho$ с помощью конечномерной аппроксимации

$$\det H_\rho = \lim_{N \rightarrow \infty} \det P_N H_\rho P_N^*, \quad (7)$$

где $P_N: X \rightarrow X$ — ортогональная проекция на конечномерное собственное подпространство оператора ∇ , отвечающее собственным значениям $\nu \in \Lambda$, таким, что $|\nu| \leq N$.

Так как $P_N \nabla = \nabla P_N$, то в силу (4) при $\mu \notin \Lambda = -\Lambda$ имеем

$$\det H_\rho = \det (-(-\nabla^2 + E)^{-1} (\nabla + \mu E)^2 \det (E - (\nabla + \mu E)^{-2} U), \quad (8)$$

где конечномерная аппроксимация определителя $f(\mu) = \det (E - (\nabla + \mu E)^{-2} U)$ сходится абсолютно при $\mu \notin \Lambda$, поскольку оператор $(\nabla + \mu E)^{-2} U$ — ядерный. Таким образом f — голоморфная функция на $\mathbb{C} \setminus \Lambda$, имеющая в точках Λ полюсы кратности не больше, чем удвоенная кратность соответствующих точек спектра ∇ [69].

Функция f периодична с периодом $\omega = 2\pi i/\tau$: $f(\mu + \omega) \equiv f(\mu)$. Действительно, если $\xi \in X$, то $e^{\omega t} \xi \in X$ и

$$(E - (\nabla + \mu E)^{-2} U) e^{\omega t} \xi = e^{\omega t} (E - (\nabla + (\mu + \omega) E)^{-2} U) \xi.$$

Полюсы функции f содержатся среди полюсов $\det^{-2} (e^{\mu\tau} E - Q)$. Поэтому можно подобрать полином $g(\rho)$ степени не выше $2n-1$, такой, что функции $f(\mu)$ и $g(\rho) \det^{-2} (\rho E - Q)|_\rho = e^{\mu\tau}$ имеют одинаковые главные части лорановского разложения в каждом полюсе. Так как $f(\mu) \rightarrow 1$ при $\text{Re } \mu \rightarrow +\infty$ или $|\rho| \rightarrow \infty$, то по теореме Лиувилля

$$f(\mu) = 1 + g(\rho) \det^{-2} (\rho E - Q)|_{\rho = e^{\mu\tau}}. \quad (9)$$

Второй определить в (8) сходится условно, но его можно явно вычислить. По формуле (7)

$$\begin{aligned} \det (-(-\nabla^2 + E)^{-1} (\nabla + \mu E)^2) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\substack{\nu \in \Lambda, \\ |\nu| \leq N}} \frac{(\nu + \mu)^2}{\nu^2 - 1} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (-\mu)^k \prod_{\substack{\nu \in \Lambda, \\ |\nu| \leq N, \nu > 0}} \left(\frac{\nu^2 - \mu^2}{\nu^2 - 1} \right)^2 = (-1)^k \prod_{\nu \in \Lambda} \frac{\nu^2 - \mu^2}{\nu^2 - 1}, \end{aligned}$$

где k — кратность нуля в спектре ∇ . Здесь пользуемся тем, что $\Lambda = -\Lambda$.

Из вида спектра оператора ∇ следует, что последнее произведение сходится абсолютно. Для его вычисления воспользуемся формулой (см. [13]):

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu^2}{(\nu + \omega n)^2}\right) = \frac{\operatorname{ch} \mu \tau - \operatorname{ch} \nu \tau}{1 - \operatorname{ch} \nu \tau}.$$

Пусть $\rho_1, \dots, \rho_n$ — корни характеристического полинома $\det(\rho E - Q)$; $\nu_j = \tau^{-1} \ln \rho_j$, $j = 1, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned} & \prod_{\nu \in \Lambda} \frac{\nu^2 - \mu^2}{\nu^2 - 1} \prod_{\nu \in \Lambda} \left(1 - \frac{\mu^2}{\nu^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right)^{-1} = \\ &= \prod_{l=1}^n \prod_{m=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu^2}{(\nu_j + \omega m)^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(\alpha_j + \omega m)^2}\right) = \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{\operatorname{ch} \mu \tau - \operatorname{ch} \nu_j \tau}{\operatorname{ch} \tau - \operatorname{ch} \nu_j \tau} = \prod_{j=1}^n \frac{\rho + \rho^{-1} - \rho_j - \rho_j^{-1}}{e^{\tau} + e^{-\tau} - \rho_j - \rho_j^{-1}} = \\ &= e^{n\tau} \rho^{-n} \prod_{j=1}^n \frac{(\rho - \rho_j)(\rho - \rho_j^{-1})}{(e^{\tau} - \rho_j)(e^{\tau} - \rho_j^{-1})} = e^{n\tau} \rho^{-n} \left(\prod_{j=1}^n \frac{\rho - \rho_j}{e^{\tau} - \rho_j} \right)^2 = \\ &= e^{n\tau} \rho^{-n} \frac{\det^2(\rho E - Q)}{\det^2(e^{\tau} E - Q)}. \end{aligned}$$

В силу (8) и (9)

$$\det H_{\rho} = (-1)^k \frac{e^{n\tau} (\det^2(\rho E - Q) + g(\rho))}{\rho^n \det^2(e^{\tau} E - Q)}.$$

Таким образом, $\rho^n \det H_{\rho}$ является полиномом степени $2n$ от ρ со старшим коэффициентом $(-1)^k e^{n\tau} \det^{-2}(e^{\tau} E - Q)$.

Можно показать, что $\det H_{\rho} = 0$ тогда и только тогда, когда оператор H_{ρ} имеет ненулевое ядро. Ядро H_{ρ} состоит из τ -периодических векторных полей ξ , таких, что $(-\nabla^2 + U)e^{i\mu t} \xi(t) = 0$. Поэтому корни полинома $\rho^n \det H_{\rho}$ и характеристического полинома $\det(\rho E - P)$ уравнения в вариациях (2) совпадают. Таким образом

$$\rho^n \det H_{\rho} = (-1)^k e^{n\tau} \frac{\det(\rho E - P)}{\det^2(e^{\tau} E - Q)}.$$

Заметим, что k — размерность подпространства, на котором ортогональный оператор Q тождествен, а $\sigma = (-1)^l$, где l — размерность подпространства, на котором Q — отражение. Так как размерность $n - k - l$ дополнительного подпространства четна, то формула (5) доказана.

1. Андронов А. А., Леонтович М. А., Мандельштам Л. И. К теории адиабатических инвариантов // Журнал Российского физико-химического общества. 1928. Т. 60. С. 413—419.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
3. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 3.
4. Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. Симплектическая геометрия // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ. Т. 4. С. 5—137.
5. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1973.
6. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
7. Болотин С. В. О первых интегралах систем с гироскопическими силами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1984. № 6. С. 75—82.
8. Болотин С. В. Об определителе Хилла периодической траектории // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1988. № 3. С. 30—34.
9. Болотин С. В. О первых интегралах систем с упругими отражениями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, Механика. 1988. № 6. С. 42—45.
10. Болотин С. В. Интегрируемые бильярды Биркгофа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1990. № 2. С. 33—36.
11. Бунимович Л. А. О бильярдах, близких к рассеивающим // Мат. сб. 1974. Т. 95, № 1. С. 49—73.
12. Веселов А. П. Интегрируемые системы с дискретным временем и разностные операторы // Функцион. анализ и его прил. 1988. Т. 22. вып. 2. С. 1—13.
13. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
14. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
15. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1979.
16. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы теории гомологий. М.: Наука, 1984.
17. Журавлев В. Ф. Уравнения движения механических систем с идеальными односторонними связями // ПММ. 1978. Т. 42, вып. 5. С. 781—788.
18. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988.
19. Иванов А. П., Маркеев А. П. О динамике систем с односторонними связями // ПММ. 1984. Т. 48, вып. 4. С. 632—636.
20. Козлов В. В. Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // ДАН. 1979. Т. 249, № 6. С. 1299—1302.
21. Козлов В. В. Конструктивный метод обоснования теории систем с неударяющими связями // ПММ. 1988. Т. 52, вып. 6. С. 883—894.
22. Козлов В. В., Трещев Д. В. Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием // Изв. АН СССР. Сер. Математическая. 1989. Т. 53, № 3. С. 537—556.
23. Козлов В. В. Об ударе с трением // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 54—60.
24. Колокольцов В. Н. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом // Изв. АН СССР. Сер. Математическая. 1982. Т. 46, № 5. С. 994—1010.

25. Конфелъд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В: Эргодическая теория: М.: Наука, 1980.
26. Лазуткин В. Ф. Выпуклый бильярд и собственные функции оператора Лапласа. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.
27. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
28. Пидкуйко С. И. Вполне интегрируемые системы бильярдного типа // УМН. 1977. Т. 32, вып. 1. С. 157—158.
29. Рагульскене В. Л. Виброударные системы. (Теория и применение). Вильнюс: Минтис, 1974.
30. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.
31. Синай Я. Г. Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов // УМН. 1970. Т. 25, № 2. С. 141—192.
32. Степин А. М. Интегрируемые гамильтоновы системы // Качественные методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений и нелинейных колебаний. Киев: Ин-т матем. АН УССР. 1981. С. 116—143.
33. Суслев Г. К. Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1944.
34. Трещев Д. В. К вопросу о существовании периодических траекторий бильярда Биркгофа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1987. № 5. С. 72—75.
35. Трещев Д. В. К вопросу об устойчивости периодических траекторий бильярда Биркгофа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1988. № 2. С. 44—50.
36. Трещев Д. В. О связи индекса Морса замкнутой геодезической с ее устойчивостью // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1988. С. 175—189.
37. Чаплыгин С. А. О параболоидном маятнике // Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР. 1933. С. 194—199.
38. Adler M., Moerbeke P. van. Kowalewski's asymptotic method, Kac-Moody Lie algebras and regularization // Commun. Math. Phys. 1982. V. 83, N 1. P. 83—106.
39. Adler M., Moerbeke P. Completely integrable systems. Euclidian Lie algebras and curves. Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi Varieties, and representation theory // Adv. Math. 1980. V. 38, N 2. P. 267—379.
40. Appell P. Traité de mecanique rationnelle. V. 1—2. Ed. 4-th. Paris: Gauthier-Villars. 1919—1924. (Перевод на русский язык: Аппель П. Теоретическая механика. Т. 1—2. М.: Физматгиз, 1960).
41. Berger M. Géométrie. Paris: CEDIC. 1977—78. (Перевод на русский язык: Берже М. Геометрия. Т. II. М.: Мир, 1984).
42. Birkhoff G. D. Dynamical systems. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 1927. V. 9. (Перевод на русский язык: Биркгоф Дж. Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941).
43. Birkhoff G. D. On the Periodic Motions of Dynamical systems // Acta Math. 1927. V. 50. P. 359—379.
44. Bogoyavlensky O. I. On Perturbation of the Periodic Toda Lattice // Commun. Math. Phys. 1976. V. 51, N 3. P. 201—209.
45. Boldrighini C., Keane M., Marchetti F. Billiards in polygons // Ann. Prob. 1978. V. 6. P. 532—540.
46. Bourbaki N. Groupes et Algèbres de Lie. Chap. IV—VI. Paris: Hermann, 1968. (Перевод на русский язык: Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972).
47. Bunimovich L. A. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards // Commun. Math. Phys. 1979. V. 65, N 3. P. 295—312.
48. Dorizzi B., Grammaticos B., Kalliterakis A., Ramani A. Integrable curvilinear billiards // Phys. Lett. A. 1986. V. 115, N 1, 2. P. 25—28.
49. Douady R. Une démonstration directe de l'équivalence des théoremes de tores invariants pour difféomorphismes et champs de vecteurs // C. R. Acad. sci Paris A. 1982. V. 295. P. 201—204.

50. Forster O. Riemannsche Flächen. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag. 1977. (Перевод на русский язык: Форстер С. Римановы поверхности. М.: Мир, 1980).
51. Goldsmith W. Impact: the theory and physical behaviour of colliding solids. London: Edward Arnold. 1960. (Перевод на русский язык: Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Изд-во лит-ры по строительству, 1965).
52. Griffiths P., Harris J. Principles of algebraic geometry V. 1, New York; Chichester; Brisbane, Toronto: Wiley-Interscience Publication, 1978. (Перевод на русский язык: Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. Т. 1 М.: Мир, 1982).
53. Halmos P. R. Lectures on ergodic theory. Tokyo: Publications of the Mathematical Society of Japan. V. 3. 1956. (Перевод на русский язык: Халмош Н. Р. Лекции по эргодической теории М.: ИЛ, 1959).
54. Helgason S. Differential geometry. Lie groups and symmetric spaces. New York: Acad. press, 1978.
55. Hill G. W. On the Part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motion of the Sun and Moon // Acta Math. 1886. V. VIII, N 1. P. 1—36.
56. Jacobi C. G. J. Vorlesungen über dynamik. Berlin: Druck und Verlag von Reimer, 1884. (Перевод на русский язык: Якоби К. Лекции по динамике М.; Л.: ОНТИ, 1936).
57. Katok A. B., Zemlyakov A. N. Topological transitivity of billiards in polygons // Math. Notes. 1975. V. 18. P. 760—764.
58. Kerkhoff S., Masur H., Smillie J. A rational billiard flow is uniquely ergodic in almost every direction // Bull. AMS. 1985. V. 13. P. 141—142.
59. Klein F. Zu Poinlevés Kritik der Coulombshen Reibungsgesetze // Ztschr. für Math. und Physik. 1909. V. 58. S. 186—191.
60. Klingenberg W. Lectures on closed geodesics. Berlin; Heidelberg; New York: Springer—Verlag, 1978. (Перевод на русский язык: Клингенберг В. Лекции о замкнутых геодезических. М.: Мир, 1982).
61. Mackay R. S., Meiss J. D. Linear stability of periodic orbits in Lagrangian systems // Physics letters. 1983. V. 98A, N 3. P. 92—94.
62. Moser J. Lectures on Hamiltonian systems // Mem AMS. 1968. N 81. P. 1—60. (Перевод на русский язык: Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973).
63. Moser J. Various aspects of integrable Hamiltonian systems // Progress in Math. 8. Boston: Birkhäuser. 1980. P. 223—289. (Перевод на русский язык: Мозер Ю. Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // УМН. 1981. Т. 36, вып. 5. С. 109—151).
64. Morse P., Feshbach H. Methods of Theoretical Physics. New York; Toronto; London: McGraw-Hill Book Company, 1953. (Перевод на русский язык: Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: ИЛ, 1958).
65. Painlevé P. Lecons sur le frottement. Paris: Gauthier Villars, 1895. (Перевод на русский язык: Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954).
66. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. V. 1—3. Paris: Gauthier-Villars. 1892, 1893, 1899. (Перевод на русский язык: Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Т. 1—3. Избр. труды Т. I—II. М.: Наука, 1971, 1972).
67. Poincaré H. Sur un théorème de géométrie // Rendiconti Circolo mat. Palermo. 1912. V. 33. P. 375—407. (Перевод на русский язык: Пуанкаре А. Об одной геометрической теореме // Избр. труды. Т. II. М.: Наука, 1972. С. 775—807).
68. Prandtl L. Bemerkungen zu den Aufzätzen der Herren F. Klein, R. V. Mises und G. Hamel // Ztschr. für Math. und Physik. 1909. V. 58. S. 196—197.
69. Reed M., Simon B. Methods of modern mathematical physics. V. 4. New York; San Francisco; London: Academic press, 1978. (Перевод на русский язык: Рид Д., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982).

70. Rubin H., Ungar P. Motions under a strong constraining force // Commun. Pure and Appl. Math. 1957. V. 10. P. 65—87.
71. Siegel C. L. On the integrals of canonikal systems // Ann. Math. V. 42, N 3. P. 806—822. (Перевод на русский язык: Зигель К. Л. Об интегралах гамильтоновых систем // Математика. 1961. Т. 5, № 2. С. 103—117).
72. Toda M. Theory of Nonlinear Lattices. Springer-Verlag, 1981. (Перевод на русский язык: Toda М. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984).
73. Veselov A. Confocal surfaces and Integrable Billiards on the Sphere and in the Lobachevsky Space // Preprint, 1989.
74. Whittaker E. T., Watson G. N. A course of modern analysis. Cambridge, Engl., Univ. press, 1920. (Перевод на русский язык: Уитткер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. 1, 2. М.: Физматгиз, 1963).
75. Wolf J. Spaces of constant curvature. Berkeley: Univ. of California, 1972. (Перевод на русский язык: Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- | | |
|--|---|
| Абсолют 142
Адиабатический инвариант 32
Алгебраическое замыкание 142
Альков 30

Биллиард аналитический 122
— Биркгофа 19
— интегрируемый 120
— —по Биркгофу 138
— рассеивающий 81
— регуляризуемый 26
— Синая 81
— слабо эргодический 146
— транзитивный 147
— эллиптический 99
— эргодический 135, 146

Гамильтоново векторное поле 151
Гипотеза Ньютона 12
Гироскопическая сила 33
Граф Кокстера 114
Группа диэдральная 28
— Кокстера 26
— гиперболическая 149

Задача Якоби 99
Закон инерции 7

Индекс Морса 67, 161
— периодической траектории 71, 161
Инерциальная система отсчета 7
Интеграл первый 120
— измеримый 146
— условный 133
— циклический 116
Интегральный признак Ляпунова 92 | Камера 24
— Вейля аффинная 30
Каустика 146
Категория Люстерника — Шнирельмана 66
Квадрика 104
Ковариантная производная 138, 158
Компонента рассеивающая 148
— фокусирующая 148
Константа Ляпунова 89
Конус симплициальный 24
Конфокальное семейство квадрик 104
Координаты конические 108
— конформные 135
— параболические 107
— полугеодезические 46
— эллиптические 100
Корневая система 113
Коэффициент восстановления 12, 21
Кратность удара 28
Кривизна гауссова 134
— геодезическая 134

Лист Мебиуса 134

Матрица Гессе 68
— монодромии 84
— Пуанкаре 67
Множество первой категории Бэра 123, 128
— второй категории Бэра 129
Модель Кельвина — Фойгта 39
— Максвелла 39
— Пуанкаре 118
Мультипликатор 71, 84

Неравенство Карно 21 |
|--|---|

Оператор восстановления 21
 — Штурма—Лиувилля 159
 — ядерный 159
 Определитель Хилла 169
 Отображение Пуанкаре 66

 Переменные действие-угол 51
 Периодическое решение вырожденное 71, 89
 — гиперболическое 71, 88
 — невырожденное по Морсу 67, 161
 — невырожденное по Пуанкаре 37, 161
 — параболическое 71, 89
 — эллиптическое 71, 89
 Плоскость Лобачевского 108
 Полиномы Чебышева 77
 Потерянные скорости 10
 Преобразование Галилея 8
 — Лежандра 150
 Приведенная масса 10
 Принцип Гамильтона 16
 — Мопертюи 18
 — относительности 7
 — симметрии Римана—Шварца 136
 — усреднения 51
 Проективная плоскость 142
 — двойственная 142
 Риманова поверхность 135
 Связь двусторонняя 13
 — односторонняя 13
 Сепаратрисы 132
 Симплектическая структура 151
 Скобка Пуассона 135
 Софокусные коники 100

Теорема Безу 142
 — Биркгофа 58
 — Гаусса—Бонне 134
 — Карно первая 10
 — вторая 10
 — обобщенная 12
 — Лиувилля 105, 146, 162
 — Понселе (малая) 102
 — Пуанкаре 58
 — Римана 136
 — Штифеля 30
 — Якоби — Шаля 105
 Теория КАМ 147
 — Люстерника—Шнирельмана 64
 — Морса 60

 Удар 6
 — кратный 25
 — неупругий 6
 — упругий 6
 Уравнение в вариациях 84
 — Хилла 86
 Условно-периодическое движение 103

 Фазовый поток 151
 Формула Лиувилля — Остроградского 88
 — Стокса 153
 — Эйлера 97
 Функция Дирака 87
 — Рэлея 42

 Цепочки Тоды 115
 — обобщенные 113

 Число оборотов 58

 Эйлерова характеристика 65