Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 6, 1992

УДК 531.36

© 1992 г. В.В. Козлов

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С КВАДРАТИЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

Установлено, что линейная систем n дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, допускающая интеграл в виде невырожденной квадратичной формы, приводится к канонической системе уравнений Гамильтона. В частности, n четно, фазовый поток сохраняет стандартную меру; если индекс квадратичного интеграла нечетный, то нулевое решение неустойчиво и т.д. При $n = 4$ условия устойчивости представлены в геометрической форме. Результаты общего характера применены к исследованию малых колебаний неголономных систем, а также к задаче об устойчивости инвариантных многообразий нелинейных систем, допускающих интегралы в виде функций Морса.

1. Основные свойства. Пусть

$$x^{\cdot} = Ax, \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{1.1}$$

— система линейных дифференциальных уравнений в n-мерном пространстве. Матрица A считается невырожденной. Эквивалентная формулировка: система (1.1) не допускает линейных непостоянных интегралов. Предположим, что уравнения (1.1) имеют интеграл в виде невырожденной квадратичной формы

$$H = (Bx, x)/2, \quad B^t = B. \tag{1.2}$$

Теорема 1. Справедливы следующие заключения:

1) n четно,

2) $f(-\lambda) = f(\lambda)$, где $f(\lambda) = |A - \lambda E|$ — характеристический многочлен матрицы A,

3) $\operatorname{div}(Ax) = \operatorname{tr} A = 0$,

4) если индекс квадратичной формы (1.2) нечетный, то равновесие $x = 0$ неустойчиво,

5) система (1.1) имеет $n/2$ независимых квадратичных интегралов,

6) равновесие $x = 0$ устойчиво в том и только том случае, когда (1.1) допускает положительно определенный квадратичный интеграл.

Действительно, если H — интеграл уравнений (1.1), то

$$H^{\cdot} = (x, BAx) \equiv 0.$$

Следовательно, матрица $D = BA$ кососимметрическая: $BA = -A^t B$. Так как $|D| \neq 0$, то n четно (кососимметрическая матрица нечетного порядка всегда вырождена). Далее

$$f(\lambda) = |B||A - \lambda E||B^{-1}| = |BA - \lambda B||B^{-1}| = |A^t B + \lambda B||B^{-1}| =$$
$$= |A^t + \lambda E| = f(-\lambda).$$

Заключение 2 доказано. Поскольку $\operatorname{tr} A$ — коэффициент характеристического многочлена при $(-\lambda)^{2n-1}$, то из заключения 2 вытекает заключение 3. В частности, фазовый поток системы (1.1) сохраняет стандартную меру в $\mathbf{R}^n$. Так как n четно, то $f(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to \infty$. Кососимметрическая матрица D невырождена, следовательно $|D| > 0$. Поскольку $\operatorname{ind} H$ нечетный, то $|B| < 0$. Следовательно, $f(0) = |A| = |B^{-1}||D| < 0$. Из соображений непрерывности вытекает, что у многочлена f имеется вещественный положительный нуль и поэтому равновесие $x = 0$ неустойчиво. Заключение 4 впервые указано в [1]; оно распространяет классический результат Кельвина об условиях гироскопической стабилизации на общий случай линейных систем с квадратичным интегралом. Автору не известны простые прямые доказательства заключений 5 и 6. Они доказаны в следующем разделе.

Отметим, что свойство 3 справедливо без предположения о невырожденности матрицы A. Действительно,

$$A = B^{-1}D,\ A^t = -DB^{-1}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^t = \operatorname{tr} B^{-1}D = \operatorname{tr} DB^{-1} = -\operatorname{tr} DB^{-1}$$

откуда вытекает требуемое.

Замечание. Пусть $|A| = 0$ и характеристический многочлен f имеет m нулевых корней с простыми элементарными делителями. Тогда система (1.1) допускает m независимых линейных интегралов и ее ограничение на $(n-m)$-мерную плоскость нулевых значений этих интегралов будет уже невырожденной линейной системой. Она допускает квадратичный интеграл (ограничение формы H) и поэтому к ней можно применить теорему 1. Если имеется кратный нулевой корень с нетривиальной жордановой клеткой, то равновесие $x = 0$ неустойчиво.

2. Приведение к каноническому виду. Теорема 1 показывает, что линейные системы с квадратичными интегралами обладают многими характерными свойствами линейных гамильтоновых систем. Оказывается, это не случайно.

Введем билинейную форму

$$\omega(x', x'') = (\Omega x', x''),\ \Omega = BA^{-1} \tag{2.1}$$

Лемма. $(\omega, \mathbf{R}^n)$ – симплектическое пространство.

Для этого надо проверить, что форма ω невырождена, кососимметрична и замкнута ($d\omega = 0$). Первое и третье свойства очевидны. Докажем кососимметричность матрицы Ω. Действительно, согласно п.1, $A^tB = -BA$. Следовательно,

$$A^t = -BAB^{-1},\quad (A^t)^{-1} = -BA^{-1}B^{-1}.$$

Поэтому

$$\Omega^t = (A^t)^{-1}B = -(BA^{-1}B^{-1})B = -BA^{-1} = -\Omega,$$

что и требовалось.

Теорема 2. Линейная система (1.1) гамильтонова; симплектическая структура задается формой (2.1), а функцией Гамильтона служит интеграл (1.2).

Действительно,

$$\omega(x^{\cdot}, \cdot) = (\Omega x^{\cdot}, \cdot) = (Bx, \cdot) = dH(\cdot).$$

Укажем процедуру приведения системы (1.1) к стандартной гамильтоновой форме. Поскольку кососимметрическая матрица Ω невырождена, то найдется такая невырожденная матрица C, что

$$C^t \Omega C = C^t BA^{-1} C = -J,$$

где

$$J = \begin{Vmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{Vmatrix}$$

— единичная симплектическая матрица. Положим $x = Cz$. В новых переменных $\dot{z} = C^{-1}ACz$, $H = (C^tBCz, z)/2$. Следовательно, $\dot{z} = J\,\partial H/\partial z$.

Переменные z_k, $z_{n/2+k}$ канонически сопряжены друг другу.

Теорема 1 — следствие теоремы 2 и некоторых известных результатов гамильтоновой механики. Например, заключение 3 — это теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Заключение 4 выводится из результата о приводимости гамильтониана линейной системы в устойчивом случае к виду

$$H = {}^1\!/_2\, \Sigma a_i\,(x_i^2 + y_i^2), \quad a_i \neq 0 \tag{2.2}$$

Индекс этой квадратичной формы четный. Система с гамильтонианом (2.2) имеет положительно определенный интеграл

$$F = \Sigma\,(x_i^2 + y_i^2)$$

что доказывает заключение 6. Доказательство заключения 5 теоремы 1 выводится из результатов Вильямсона по классификации нормальных форм квадратичных гамильтонианов [2] (см. также [3], п. 21).

3. Случай n = 4. Рассмотрим более подробно простейший нетривиальный случай, когда $n = 4$. Если индекс квадратичной формы H равен 0 или 4, то положение равновесия устойчиво (H — функция Ляпунова). Если же этот индекс равен 1 или 3, то имеем неустойчивое равновесие (заключение 4 теоремы 1). Когда $\operatorname{ind} H = 2$, то может быть как устойчивость, так и неустойчивость. Рассмотрим вопрос о возможности различить эти случаи, не прибегая к вычислению характеристических чисел матрицы A.

Введем в рассмотрение четырехмерное многообразие Грассмана $\mathbf{G}_2$, составленное из двумерных плоскостей проходящих через начало координат в $\mathbf{R}^4$. Плоскость π называется лагранжевой, если $\omega(x', x'') = 0$ для всех $x', x'' \in \pi$. Совокупность всех лагранжевых плоскостей образует трехмерное подмногообразие $\mathbf{\Lambda}_2 \subset \mathbf{G}_2$.

Квадратичная форма H индекса 2 превращает $\mathbf{R}^4$ в псевдоевклидово пространство типа (2,2), которое часто называется пространством Артина. Его геометрия хорошо изучена (см., например, [4]). Оказывается, через каждую прямую из изотропного конуса $\{x : H(x) = 0\}$, содержащую начало координат, проходят ровно две двумерные плоскости π_1 и π_2, называемые вполне сингулярными плоскостями. Совокупность сингулярных плоскостей состоит из двух связных одномерных компонент (две регулярные замкнутые кривые в $\mathbf{G}_2$), которые будем называть сингулярными орбитами. Рассмотрим вопрос о расположении этих кривых относительно подмногообразия $\mathbf{\Lambda}_2$. Ответ дает

Теорема 3. Число пересечений двух сингулярных орбит с многообразием $\mathbf{\Lambda}_2$ дается следующей таблицей

№	Собственные числа $a, b \in \mathbf{R}$	Число пересечений	
		с первой орбитой	со второй орбитой
1°	$\pm ia, \pm ib;\ a \neq b$	0	0
2°	$\pm ia,\ \pm ia;\ -$	∞	0
3°	$\pm ia,\ \pm ia;\ +$	1	0
4°	$\pm a,\ \pm b;\ a \neq b$	2	2
5°	$\pm a,\ \pm a;\ -$	∞	2
6°	$\pm a,\ \pm a;\ +$	2	1
7°	$\pm a,\ \pm ib$	2	0

Символ плюс означает наличие жордановой клетки, минус – ее отсутствие. Символ ∞ означает, что соответствующая орбита целиком лежит в Λ_2. Как видно из таблицы, различным типам гамильтонианов отвечают различные числа пересечений.

Доказательство теоремы 3 использует теорию нормальных форм Вильямсона [2]. В случае 1° гамильтониан приводится к функции

$$H = a(x_1^2 + y_1^2)/2 - b(x_2^2 + y_2^2)/2$$

где a, b – положительные вещественные числа, а x_s, y_s – сопряженные канонические переменные. Имеются два различных семейства вполне сингулярных плоскостей:

$$L_\xi\colon\ a^{1/2} y_1 = a^{1/2}\,\mathrm{sh}\,\xi\, x_1 + b^{1/2}\,\mathrm{ch}\,\xi\, x_2$$

$$b^{1/2} y_2 = a^{1/2}\,\mathrm{ch}\,\xi\, x_1 + b^{1/2}\,\mathrm{sh}\,\xi\, x_2$$

$$N_\eta\colon\ a^{1/2} y_1 = a^{1/2}\,\mathrm{sh}\,\eta\, x_1 + b^{1/2}\,\mathrm{ch}\,\eta\, x_2$$

$$b^{1/2} y_2 = -a^{1/2}\,\mathrm{ch}\,\eta\, x_1 - b^{1/2}\,\mathrm{sh}\,\eta\, x_2$$

Здесь ξ, η – вещественные параметры; при ξ, $\eta \to \pm\infty$ эти плоскости переходят в следующие:

$$L_{\pm\infty}\colon\ a^{1/2} y_1 = \pm b^{1/2} y_2, \quad a^{1/2} x_1 = \mp b^{1/2} x_2$$

$$N_{\pm\infty}\colon\ a^{1/2} y_1 = \mp b^{1/2} y_2, \quad a^{1/2} x_1 = \mp b^{1/2} x_2$$

Сингулярные плоскости из одного семейства (L или N) пересекаются лишь в начале координат, а плоскости из разных семейств всегда пересекаются по изотропной прямой. Если $a \neq b$, то среди этих плоскостей нет ни одной лагранжевой (в стандартной симплектической структуре): ограничение 1-формы $y_1 dx_1 + y_2 dx_2$ не является полным дифференциалом. Если же $a = b$ (тип 2°), то все плоскости из орбиты L лагранжевы (включая $L_{\pm\infty}$), а из орбиты N – нет.

Рассмотрим теперь тип 3°. Согласно известному результату [2], в этом случае гамильтониан приводится к виду

$$H = \pm(a^{-2} x_1^2 + x_2^2) - a^2 y_1 x_2 + y_2 x_1, \quad a \neq 0$$

Для определенности будем считать, что перед круглой скобкой стоит знак плюс. Сингулярные орбиты состоят из следующих плоскостей:

$$L_\xi\colon\ y_1 = \xi x_1 + (2a^2)^{-1} x_2, \quad y_2 = -(2a^2)^{-1} x_1 + a^2 \xi x_2$$

$$N_\eta\colon\ y_1 = \frac{1 + a^2\eta^2}{2a^4\eta}\, x_1 + \frac{1}{a^2\eta}\, y_2, \quad x_2 = \eta x_1$$

Орбита L имеет ровно одну лагранжеву плоскость $L_\infty = \{x_1 = x_2 = 0\}$, а орбита N – ни одной.

Аналогично рассматриваются типы 4°–7°.

В качестве иллюстративного примера найдем условие гироскопической стабилизации положения равновесия гамильтоновой системы

$$\ddot{x}_1 = -\omega \dot{x}_2 + a^2 x_1, \quad \ddot{x}_2 = \omega \dot{x}_1 + b^2 x_2; \qquad a, b > 0$$

Она допускает квадратичный интеграл

$$H = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - a^2 x_1^2 - b^2 x_2^2, \qquad \mathrm{ind}\, H = 2$$

Вполне сингулярные плоскости задаются уравнениями

$$L_\varphi^\pm\colon\ \dot{x}_1 = a\cos\varphi\, x_1 + b\sin\varphi\, x_2, \quad \dot{x}_2 = \pm a\sin\varphi\, x_1 \pm b\cos\varphi\, x_2$$

Так как $x_1^{\cdot} = y_1 - \omega x_2/2$, $x_2^{\cdot} = y_2 + \omega x_1/2$, то условие лагранжевости плоскости $L_\varphi^{\pm}$ принимает вид

$$\omega = \pm (a \mp b) \sin\varphi$$

Следовательно, если $|\omega| > a + b$, то среди вполне сингулярных плоскостей нет лагранжевых. Согласно теореме 3, найденное условие гарантирует устойчивость положения равновесия $x_1 = x_2 = 0$.

4. Некоторые приложения. Рассмотрим линейную систему, динамика которой описывается дифференциальными уравнениями второго порядка

$$x^{\cdot\cdot} = Ax, \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{4.1}$$

Здесь A – постоянная матрица (в общем случае $A^t \neq A$).

Известно [5], что к виду (4.1) приводятся линеаризованные уравнения движения неголономной системы в потенциальном силовом поле вблизи положения равновесия. Если это равновесие не совпадает с критической точкой потенциальной энергии, то матрица A, как правило, не симметрична.

Теорема 4. Уравнения (4.1) допускают n независимых квадратичных интегралов

$$(Xx^{\cdot}, x^{\cdot})/2 - (Yx, x)/2 \tag{4.2}$$

причем в случае, когда $|A| \neq 0$, имеется невырожденный интеграл вида (4.2) ($|X| \neq 0$, $|Y| \neq 0$).

Следствие 1. Если $|A| \neq 0$, то уравнения (4.1) гамильтоновы.

Доказательство теоремы 4 использует следующее вспомогательное утверждение [6]: для любой матрицы A найдутся симметричные матрицы X, Y, причем $|X| \neq 0$, такие, что

$$XA = Y \tag{4.3}$$

В частности, любую матрицу можно представить (неоднозначно) в виде произведения двух симметричных. Множество пар X, Y, удовлетворяющих (4.3), образует линейное пространство размерности

$$2[n(n+1)/2] - n^2 = n$$

Функция (4.2) интеграл системы (4.1) тогда и только тогда, когда выполнено равенство (4.3). Если $|A| \neq 0$, то $|Y| \neq 0$. В этом случае квадратичная форма (4.2) невырождена. Теорема доказана.

Стоит отметить, что уравнения (4.1) эквивалентны уравнениям Лагранжа с лагранжианом

$$L = T - V = (Xx^{\cdot}, x^{\cdot})/2 + (Yx, x)/2$$

Поскольку "кинетическая" энергия T не всегда положительно определена, то в общем случае система (4.1) не распадается на n независимых осцилляторов. Когда матрица A имеет n линейно независимых векторов с вещественными собственными значениями или матрица Y положительно (отрицательно) определена, то координаты $x_1, \ldots, x_n$ разделяются.

Следствие 2. Предположим, что "потенциальная энергия" V положительно определена. Тогда равновесие $x = 0$ системы (4.1) устойчиво тогда и только тогда, когда "кинетическая энергия" T имеет строгий минимум при $x^{\cdot} = 0$.

В качестве примера рассмотрим механическую систему с кинетической энергий $^1/_2(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} + z^{\cdot 2})$, силовой функцией $z + (ax^2 + by^2)/2$, и на которую наложена неголономная связь $z^{\cdot} = cx^{\cdot}y$ [7]. Предполагается, что постоянные a, b, c отличны от нуля. Эта система имеет целое семейство положений равновесия

$$x = y = 0, \quad z = \text{const}$$

Линеаризованные уравнения движения имеют вид (4.1) с несимметричной матрицей A:

$$x^{\cdot\cdot} = ax + cy, \quad y^{\cdot\cdot} = by. \tag{4.4}$$

Равновесие устойчиво, если $a, b < 0$ и $a \neq b$.

При $a \neq b$ уравнения (4.4) допускают два независимых квадратичных интеграла

$$F = y^{\cdot 2} - by^2, \quad \Phi = [(a-b)x^{\cdot} + cy^{\cdot}]^2 - a[(a-b)x + cy]^2$$

Если $a, b < 0$, то их сумма положительно определена. Этот результат соответствует заключению 6 теоремы 1.

При $a = b$ интегралы F и Φ зависимы. Согласно заключению 5 теоремы 1, и в этом случае должен существовать второй независимый квадратичный интеграл. Им будет невырожденная квадратичная форма

$$\Phi = x^{\cdot} y^{\cdot} - axy - cy^2/2$$

5. Инвариантные многообразия. Результаты разд. 1, 2 применимы не только к уравнениям, линеаризованным в окрестности положений равновесия. Они распространяются (при некоторых дополнительных предположениях) и на системы в окрестности инвариантных многообразий.

Пусть M – компактное m-мерное инвариантное многообразие динамической системы, ограничение которой на M обладает инвариантной мерой с плотностью $\rho > 0$. Предполагается, что система на M эргодична.

Простейший пример – условно-периодическое движение по m-мерному тору $M = \mathrm{T}^m$:

$$\dot\varphi_1 = \omega_1, \ldots, \quad \dot\varphi_m = \omega_m; \qquad \omega_j = \mathrm{const}$$

Если частоты $\omega_1, \ldots, \omega_m$ несоизмеримы, то эта система эргодична.

Пусть x – локальные координаты на M, а y – координаты в трансверсальных направлениях. В этих переменных инвариантное многообразие M задается соотношением $y = 0$, а дифференциальные уравнения имеют вид

$$\begin{gathered} x^{\cdot} = v(x) + f(x, y), \quad y^{\cdot} = \Omega y + g(x, y) \\ f(x, 0) = 0, \quad g = O(|y|^2) \end{gathered} \tag{5.1}$$

В дальнейшем будем рассматривать так называемый приводимый случай, когда в подходящих координатах матрица Ω постоянна. Обсуждение задачи приводимости для инвариантных торов можно найти в [8]. При $m = 1$ уравнения всегда приводимы (теорема Ляпунова–Флоке).

Предположим, что в окрестности многообразия M система имеет интеграл

$$H(x, y) = H_0(x) + (y, h(x)) + (A(x)y, y)/2 + \ldots \tag{5.2}$$

Так как $H^{\cdot} \equiv 0$, то

$$\begin{gathered} (\partial H_0 / \partial x, v) = 0, \quad (\partial h/\partial x, v) = -\Omega^t h \\ (\partial A/\partial x\, vy, y)/2 + (A\Omega y, y) = 0, \ldots \end{gathered} \tag{5.3}$$

Из первого соотношения вытекает, что H_0 – интеграл динамической системы на M. Ввиду эргодичности, $H_0 \equiv \mathrm{const}$.

Введем предположение о невырожденности многобразия M: ковекторные поля h на M, удовлетворяющие второму уравнению (5.3), тождественно равны нулю. В частности, матрица Ω невырождена (в противном случае это уравнение имело бы нетривиальное решение $h = \mathrm{const}$). Для тора с условно-периодическим движением условие невырожденности означает, что матрица Ω не имеет собственных чисел вида $i(k_1\omega_1 + \ldots + k_m\omega_m)$, $k_j \in \mathbf{Z}$.

Умножим третье уравнение (5.3) на ρ и проинтегрируем по многообразию M. Усреднение первого слагаемого даст нуль, так как

$$\int_M \rho\,(\frac{\partial a}{\partial x},\ v)\, d^m x = -\int_M a \operatorname{div}(\rho v)\, d^m x = 0$$

Положим

$$A^* = \int_M \rho A\, d^m x$$

Тогда $(A^* \Omega y, y) \equiv 0$. Следовательно, квадратичная форма

$$(A^* z, z) \tag{5.4}$$

является интегралом линейной системы

$$z^{\cdot} = \Omega z \tag{5.5}$$

Если матрица A^* невырождена, то можно применить результаты разд. 1 и 2. В частности, справедлива

Теорема 5. Пусть индекс невырожденной квадратичной формы (5.4) нечетный. Тогда инвариантное многообразие M неустойчиво.

Неустойчивость M в линейном приближении вытекает из заключения 4 теоремы 1: среди собственных значений матрицы Ω имеется положительное число. Вывод о неустойчивости M в строгой нелинейной постановке основан на следующем наблюдении: в качестве функции Ляпунова для системы (5.1) можно взять функцию Ляпунова линеаризованных уравнений (5.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рубановский В.Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений в некоторых задачах динамики твердого тела // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 4. С. 616–627.
2. *Williamson I.* On the algebraic problem, concerning the normal forms of linear dynamical system // Amer. *I.* Math. 1936. V. 58. № 1. P. 141–163.
3. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 471 с.
4. *Берже М.* Геометрия. Т. 2. М.: Мир, 1984. 336 с.
5. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем. Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 6. С. 3–128.
6. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
7. *Карапетян А.В.* Об устойчивости равновесия неголономных систем // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 6. С. 1135–1140.
8. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.III.1992