УДК 517.9+531.01

В.В. Козлов, Н.В. Денисова

Симметрии и топология динамических систем с двумя степенями свободы

Рассматривается задача о геодезических линиях на замкнутой двумерной поверхности и некоторые ее обобщения, связанные с добавлением гироскопических сил. Изучаются однопараметрические группы симметрий в четырехмерном фазовом пространстве, порожденные векторными полями, коммутирующими с исходным гамильтоновым векторным полем. Если род поверхности больше единицы, то нетривиальных симметрий нет. Для поверхности рода один (двумерный тор) установлено, что если имеется дополнительный полиномиальный по скоростям интеграл, четный или нечетный по каждой составляющей скорости, то найдется полиномиальный интеграл первой или второй степени. Для поверхности рода нуль приведены примеры нетривиальных интегралов третьей и четвертой степени. Изучены поля симметрий первой и второй степени. Их наличие связано с существованием скрытых циклических координат и разделенных переменных. Исследовано влияние гироскопических сил на существование полей симметрий с полиномиальными компонентами.

Библиография: 9 названий.

§ 1. Введение

Пусть M – замкнутая двумерная поверхность, которая является *конфигурационным пространством* динамической системы с двумя степенями свободы. Локальные координаты на M будем обозначать q_1, q_2. В механике они обычно называются *обобщенными координатами*. Пусть p_1, p_2 – *канонические импульсы*, сопряженные с q_1, q_2. Так что

$$x = (q_1, q_2, p_1, p_2)$$

– локальные координаты в *фазовом пространстве* T^*M (пространстве кокасательного расслоения поверхности M). В геометрии фазового пространства существенную роль играет *симплектическая структура* – замкнутая невырожденная 2-форма

$$\omega = \sum dp_s \wedge dq_s.$$

Пусть H – вещественная функция на T^*M. Ей однозначно сопоставляется векторное поле v_H по правилу

$$\omega(v, \cdot) = -dH. \tag{1.1}$$

Поле v называется *гамильтоновым*. Оно порождает гамильтонову динамическую систему на T^*M

$$\dot{x} = v(x). \tag{1.2}$$

В локальных координатах q, p эти уравнения принимают привычный вид *канонических уравнений Гамильтона*

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}; \qquad s = 1, 2. \tag{1.3}$$

В качестве гамильтониана H примем некоторую риманову метрику на M – положительно определенную квадратичную форму по p_1, p_2, коэффициенты которой – однозначные функции на M. В механике уравнения (1.3) с таким гамильтонианом описывают движение по инерции, а в дифференциальной геометрии они являются уравнениями геодезических выбранной римановой метрики. Уравнения (1.3) обладают следующим простым свойством: вместе с решением $q(t), p(t)$ они допускают решение $q(-t), -p(-t)$. Следуя Биркгофу, такие динамические системы называют *обратимыми*.

В качестве обобщенных координат мы можем принять изотермические (конформные) координаты римановой метрики H. Тогда гамильтониан будет иметь следующий вид:

$$H = \tfrac{\Lambda}{2}(p_1^2 + p_2^2), \tag{1.4}$$

где Λ – положительная функция от q_1, q_2.

Нас будет интересовать задача о симметриях динамической системы (1.2), которые порождаются векторными полями u на T^*M, коммутирующими с исходным гамильтоновым полем

$$v : [u, v] = 0.$$

Такие поля будем называть *полями симметрий*. Оказывается, наличие и вид полей симметрий существенно зависит от топологии конфигурационного пространства M. Все объекты, встречающиеся ниже, будем считать бесконечно дифференцируемыми.

Оператор дифференцирования вдоль поля v имеет следующий вид:

$$L_v = \Lambda p_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \Lambda p_2 \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_1}(p_1^2 + p_2^2)\frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}(p_1^2 + p_2^2)\frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Пусть u – векторное поле с оператором дифференцирования

$$L_u = Q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + Q_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + P_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + P_2 \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Если u – поле симметрий, то операторы L_v и L_u, конечно, коммутируют.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если Q_1, Q_2 – многочлены от импульсов степени $n-1$, а P_1, P_2 – многочлены степени n, то поле u назовем *однородным полем степени n*.

Степень однородного поля u будем обозначать $\deg u$. В частности, $\deg v = 2$. Поле симметрий u можно разложить в формальный ряд по однородным полям:

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots; \qquad \deg u_k = k, \qquad k \geq 1.$$

Оператор дифференцирования вдоль поля u_0 имеет следующий вид:

$$\alpha_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial p_2}\,,$$

где α_1, α_2 – функции на M. Имеет место простое

Предложение. *Каждая однородная часть поля u сама является полем симметрий.*

Поле u_0, очевидно, равно нулю. В противном случае $\Lambda = 0$. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением лишь однородных полей симметрий степени ≥ 1.

Поле симметрий u называется *гамильтоновым*, если

$$\omega(u,\,\cdot\,) = -dF,$$

где F – однозначная функция в фазовом пространстве. Если F – однородный многочлен по импульсам степени m, то $\deg u = m$. Положим $u = v_F$. Тогда, как хорошо известно,

$$[v_H, v_F] = v_{\{H,F\}}\,,$$

где $\{\,,\,\}$ – скобка Пуассона. Если u и v коммутируют, то

$$\{H, F\} = \mathrm{const}\,.$$

Ввиду квадратичности гамильтониана, эта константа равна нулю. Следовательно, гамильтониан F будет интегралом динамической системы (1.2). Интегралы, линейные по импульсам p_1, p_2, порождают гамильтоновы симметрии, изучавшиеся Эмми Нётер.

Поле симметрий u будем называть *локально гамильтоновым*, если 1-форма $\omega(u,\,\cdot\,)$ является замкнутой, но не точной. В этом случае уравнения (1.2) допускают в качестве инварианта замкнутую 1-форму, которую можно назвать многозначным интегралом.

Не следует думать, что поля симметрий системы (1.2) всегда гамильтоновы (или локально гамильтоновы). Вот простой контрпример: если $\Lambda = \mathrm{const}$, то квадратичное векторное поле с оператором дифференцирования

$$p_2 \frac{\partial}{\partial q_1} - p_1 \frac{\partial}{\partial q_2} \tag{1.5}$$

есть поле симметрий. Однако, оно не является даже локально гамильтоновым относительно стандартной симплектической структуры ω.

§ 2. Основные результаты

Обсудим сначала задачу о структуре гамильтоновых полей симметрий. Очевидно, что если уравнения (1.2) допускают гладкий интеграл

$$F : T^*M \to \mathbb{R},$$

то любая однородная форма его разложения в ряд Маклорена по импульсам также является интегралом.

В работе [1] рассмотрен случай, когда эйлерова характеристика χ поверхности M отрицательна и доказано, что уравнения (1.2) не допускают интеграла, независимого от интеграла энергии H. Согласно формуле Гаусса–Бонне, условие $\chi(M) < 0$ эквивалентно предположению об отрицательности средней гауссовой кривизны римановой метрики на M. Впоследствии В.Н.Колокольцов [2] дал другое доказательство результата работы [1], основанное на введении в M конформной структуры. Это метод восходит к Биркгофу [3], который исследовал задачу о наличии локальных интегралов первой и второй степени по импульсам. Биркгоф рассматривал условные интегралы, производная от которых обращается в нуль при некотором значении полной энергии $H = h$. Он показал, что наличие условного линейного интеграла связано с существованием скрытой *циклической координаты* (от которой не зависит функция Гамильтона), а наличие условного квадратичного интеграла связано с существованием скрытых *разделенных переменных*. Глобальные варианты этих результатов Биркгофа, касающиеся существования условных линейных и квадратичных интегралов динамических систем с конфигурационным пространством в виде двумерного тора, установлены в работе [4].

Недавно С.В.Болотин доказал [5], что при условии $\chi(M) < 0$ на энергетических поверхностях $H = \text{const} > 0$ имеются неустойчивые замкнутые траектории с трансверсально пересекающимися сепаратрисами. Отсюда вытекает наличие областей со стохастическим поведением и, как следствие, отсутствие дополнительного интеграла.

При $\chi \geq 0$ поверхность M гомеоморфна сфере или тору. Описание метрик на двумерных сфере и торе, допускающих нетривиальные линейные и квадратичные интегралы, дано в работе В.Н.Колокольцова [2] в духе теории Биркгофа.

Обсудим подробнее случай $\chi = 0$, когда

$$M = \mathbb{T}^2 = \{q_1, q_2 \bmod 2\pi\}.$$

Как известно, на торе риманову метрику всегда можно привести к виду (1.4) в целом. Спрашивается, существуют ли полиномиальные интегралы степени ≥ 3, независимые от функции H и не сводящиеся к полиномам степени ≤ 2? С.В.Болотин высказал предположение, что для случая тора таких интегралов нет. В полном объеме эта гипотеза пока не доказана. Однако, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что уравнения* (1.3) *с гамильтонианом* (1.4) *допускают однородный по импульсам интеграл F, независимый от интеграла энергии, причем выполнено одно из следующих дополнительных условий:*

а) *F – четная функция по p_1 и p_2,*

б) *F четна по p_1 (p_2) и нечетна по p_2 (p_1).*

Тогда уравнения (1.3) *допускают дополнительный интеграл степени* ≤ 2.

В случае, когда M гомеоморфна двумерной сфере, ситуация иная. Имеются примеры метрик на сфере, для которых уравнения геодезических допускают интегралы 3-й и 4-й степени по импульсам, не сводящиеся к полиномам меньшей степени.

Укажем схему построения таких примеров. С этой целью рассмотрим задачу о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Эта система допускает группу вращений вокруг вертикали. Фиксируя нулевую постоянную соответствующего интеграла Нётер (который в механике обычно называется интегралом площадей) и проводя факторизацию по орбитам действия группы симметрий, сведем эту задачу к системе с двумя степенями свободы на сфере S^2. Лагранжиан имеет вид $T - V$, где T – некоторая риманова метрика на $M = S^2$ (кинетическая энергия приведенной системы), а $V : S^2 \to \mathbb{R}$ – потенциальная энергия (см. [6]). Если выполнены условия Горячева–Чаплыгина или Ковалевской, то уравнения с лагранжианом $T - V$ допускают дополнительный интеграл соответственно третьей или четвертой степени по скоростям. Например, в случае Ковалевской он имеет следующий вид:

$$F = F_4 + F_2 + F_0, \tag{2.1}$$

где F_k – однородный полином по скоростям степени k.

Воспользуемся теперь принципом наименьшего действия Якоби. Для этого зафиксируем постоянную энергии

$$h = T + V > \max_M V.$$

Согласно принципу Якоби, траектории на M с запасом энергии h являются геодезическими линиями римановой метрики

$$(h - V)T. \tag{2.2}$$

Ясно, что однородная функция по скоростям четвертой степени

$$F_4 + F_2\frac{T}{h-V} + F_0\left(\frac{T}{h-V}\right)^2$$

является дополнительным интегралом метрики (2.2).

В случае Горячева–Чаплыгина интеграл имеет вид $F_3 + F_1$. Аналогично строится риманова метрика на сфере, уравнения геодезических которой имеют интеграл третьей степени.

Нам не известны примеры римановых метрик на двумерной сфере, допускающих нетривиальные интегралы степени ≥ 5. Не исключено, что таких метрик просто не существует.

Замечание. На двумерном торе хорошо известны лиувиллевы метрики, геодезические потоки которых интегрируются при помощи линейных или квадратичных интегралов. Риманова метрика называется *невырожденно интегрируемой* (см. [9]), если ее геодезический поток интегрируем при помощи гладкого интеграла, все критические точки многообразия которого на изоэнергетической поверхности невырождены. А.Т.Фоменко сформулировал гипотезу о том, что на двумерном торе любая невырожденно интегрируемая метрика является лиувиллевой. В частности, это означает, что любой полиномиальный интеграл сводится к интегралу степени ≤ 2. Эта гипотеза пока не доказана. Однако, Т.З.Нгуен, Л.С.Полякова и В.В.Калашников (мл.) доказали, что гипотеза верна, по крайней мере, с точки зрения сложности метрик (понятие сложности введенс в [9]). А именно: сложность геодезического потока произвольной невырожденно интегрируемой гладкой римановой метрики на двумерном торе совпадает со сложностью геодезического потока некоторой лиувиллевой метрики. Очень близкое утверждение верно и для метрик на двумерной сфере. Поэтому с точки зрения сложности интегрируемые метрики с линейными и квадратичными интегралами "аппроксимируют" любую риманову интегрируемую метрику с произвольным гладким интегралом.

Перейдем теперь к изучению полей симметрий общего вида. В работе [7] рассмотрен случай, когда $\chi(M) < 0$. Доказано, что любое поле симметрий u имеет вид $f(H)v$. Таким образом, нетривиальных симметрий нет и, в частности, любое поле симметрий, очевидно, гамильтоново. Гамильтонианом служит функция

$$\int f(H)dH.$$

При $\chi(M) = 0$ имеется больше возможностей. Справедлива

Теорема 2. *Любое поле симметрий первой степени гамильтоново.*

Оно порождается линейным интегралом и поэтому является нётеровым.

Теорема 3. *Если гауссова кривизна метрики на торе равна тождественно нулю, то любое поле симметрий второй степени гамильтоново.*

Аналитический критерий евклидовости метрики (1.4) на торе состоит в том, что $\Lambda = \mathrm{const}$. Как показывает пример поля (1.5), предположение $\Lambda \neq \mathrm{const}$ в теореме 3 существенно.

Для полей симметрий степени ≥ 3 теорема 2 не справедлива. Действительно, пусть Λ – непостоянная периодическая функция только от угловой переменной q_2. Тогда векторное поле u первой степени, задаваемое уравнениями

$$q_1' = 1, \quad q_2' = 0, \quad p_1' = 0, \quad p_2' = 0,$$

является полем симметрий. Оно, конечно, гамильтоново. Однако, поле (Hu) третьей степени, также являющееся полем симметрий, уже не гамильтоново.

Не исключено, что если гамильтонова система с гамильтонианом (1.4) допускает полиномиальное поле симметрий степени n, не коллинеарное полю v, то обязательно существует дополнительный по импульсам интеграл степени $\leq n$.

Задача о структуре симметрий обратимых систем на сфере более сложная и здесь не рассматривается.

§ 3. Необратимые системы

Усложним задачу, заменив стандартную симплектическую структуру

$$\omega = \sum dp_k \wedge dq_k$$

на T^*M замкнутой невырожденной 2-формой $\omega + \varphi$, где φ – 2-форма на M. В локальных координатах q_1, q_2 она имеет вид

$$\lambda(q_1, q_2) dq_1 \wedge dq_2.$$

Если в (1.1) заменить ω на $\omega + \varphi$, то получим следующие уравнения Гамильтона

$$\begin{gathered} \dot q_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \qquad \dot q_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \\ \dot p_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} + \lambda \frac{\partial H}{\partial p_2}, \qquad \dot p_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} - \lambda \frac{\partial H}{\partial p_1}. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Следуя Биркгофу [3], такие системы называют *необратимыми*.

Слагаемые в уравнениях (3.1), содержащие λ, обычно называют гироскопическими силами. Их природа может быть различной. Гироскопические силы появляются, например, при переходе во вращающуюся систему отсчета, а также при описании движения заряженных тел в магнитных полях.

Уравнения (3.1), очевидно, допускают интеграл энергии H. Задача о наличии других интегралов, полиномиальных по импульсам p_1, p_2, для уравнений (3.1) на замкнутых поверхностях рассмотрена С.В.Болотиным в работе [8]. В частности, для случая двумерного тора установлено, что если уравнения (3.1) с гамильтонианом (1.4) имеют полиномиальный интеграл, независимый от H, то

$$\int_{\mathbb{T}^2} \lambda dq_1 dq_2 = 0. \tag{3.2}$$

Мы исследуем более обобщенную задачу об условиях существования векторных полей симметрий с полиномиальными компонентами для уравнений (3.1). В отличие от обратимого случая, здесь поле симметрий уже не будет однородным. Его можно представить в виде конечной суммы однородных полей

$$u = u_m + u_{m-1} + \dots, \qquad \deg u_k = k,$$

расположенных в порядке убывания степени. Степенью поля u назовем

$$\deg u_m = m.$$

Ясно, что u_m – поле симметрий обратимой системы (когда $\lambda = 0$). Это простое замечание позволяет воспользоваться результатами § 2.

ТЕОРЕМА 4. *Ненулевое поле симметрий первой степени всегда локально гамильтоново. Оно будет гамильтоновым лишь при выполнении условия* (3.2).

При $m \geq 2$ ситуация иная. Справедлива

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что гамильтоново поле* (3.1) *допускает поле симметрий степени* $m \geq 2$, *причем старшие однородные части векторных полей* v *и* u *линейно независимы при*

$$p_1 = 1, \quad p_2 = i \qquad (i^2 = -1).$$

Тогда имеет место (3.2).

По-видимому, в теореме 5 достаточно потребовать независимости полей u и v. Пусть поле u гамильтоново с гамильтонианом

$$F = F_m + F_{m-1} + \cdots .$$

Тогда условие независимости векторов v и u_m в точке

$$p_1 = 1, \quad p_2 = i$$

эквивалентно следующему: полином F_m не делится нацело на H.

Ниже даны доказательства теорем 1–5.

§ 4. Вспомогательные утверждения

В этом разделе рассматривается обратимый случай и на степень $n = \deg u$ поля симметрий u не накладывается никаких ограничений.

Пусть F – однородный полином от p_1 и p_2. Через F^* обозначим его значение при $p_1 = 1, p_2 = i$ (i – мнимая единица).

ЛЕММА 1 [7]. $\Lambda(P_1^* + iP_2^*)$ – *голоморфная функция от* $z = q_1 + iq_2$.

Так как Λ, P_1^*, P_2^* – гладкие комплекснозначные функции на торе

$$\mathbb{T}^2 = \{q_1, q_2 \bmod 2\pi\},$$

то они ограничены. Следовательно, согласно лемме 1 и теореме Лиувилля,

$$\Lambda(P_1^* + iP_2^*) = \gamma_1 + i\gamma_2, \tag{4.1}$$

где γ_1, γ_2 – некоторые вещественные постоянные.

ЛЕММА 2. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Для доказательства вычислим коммутатор $[L_u, L_v]$ и приравняем нулю коэффициенты при $\frac{\partial}{\partial q_1}$ и $\frac{\partial}{\partial q_2}$. В результате получим соотношения

$$p_1 \sum Q_k \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} - \Lambda \sum p_k \frac{\partial Q_1}{\partial q_k} + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) \sum \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} \frac{\partial Q_1}{\partial p_k} + P_1 \Lambda = 0, \tag{4.2}$$

$$p_2 \sum Q_k \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} - \Lambda \sum p_k \frac{\partial Q_2}{\partial q_k} + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) \sum \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} \frac{\partial Q_2}{\partial p_k} + P_2 \Lambda = 0. \tag{4.3}$$

Индекс суммирования k принимает значения 1 и 2.

Полагая в (4.2) и (4.3) $p_1 = 1$, $p_2 = i$, приходим к равенствам

$$\sum Q_k^* \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} + P_1^* \Lambda - \Lambda \frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1} - \Lambda i \frac{\partial Q_1^*}{\partial q_2} = 0, \tag{4.4}$$

$$i \sum Q_k^* \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} + P_2^* \Lambda - \Lambda \frac{\partial Q_2^*}{\partial q_1} - \Lambda i \frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2} = 0. \tag{4.5}$$

Умножим (4.5) на i и сложим с (4.4). В результате получим

$$P_1^* + iP_2^* = \frac{\partial}{\partial q_1}(Q_1^* + iQ_2^*) + i\frac{\partial}{\partial q_2}(Q_1^* + iQ_2^*).$$

Или, учитывая (4.1),

$$\frac{\gamma_1 + i\gamma_2}{\Lambda} = \frac{\partial}{\partial q_1}(Q_1^* + iQ_2^*) + i\frac{\partial}{\partial q_2}(Q_1^* + iQ_2^*). \tag{4.6}$$

Усредняя по тору, приходим к равенству

$$(\gamma_1 + i\gamma_2) \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dq_1\, dq_2}{\Lambda} = 0.$$

Следовательно,

$$\gamma_1 + i\gamma_2 = 0.$$

Что и требовалось.

Лемма 3.

$$Q_1^* + iQ_2^* = c_1 + ic_2,$$

где c_1, c_2 – вещественные постоянные.

Действительно, равенство (4.6), с учетом заключения леммы 2, является критерием голоморфности функции $Q_1^* + iQ_2^*$. Остается воспользоваться теоремой Лиувилля.

Лемма 4. $P_1^* = P_2^* = 0$.

Для доказательства вычислим коммутатор $[L_u, L_v]$ и приравняем нулю коэффициенты при $\frac{\partial}{\partial p_1}$ и $\frac{\partial}{\partial p_2}$. В результате получим соотношения

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)\Big(Q_1 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_1^2} + Q_2 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_1\, \partial q_2}\Big) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} \sum P_k p_k \\ - \Lambda \sum p_k \frac{\partial P_1}{\partial q_k} + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) \sum \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} \frac{\partial P_1}{\partial p_k} = 0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)\Big(Q_1 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_1\, \partial q_2} + Q_2 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_2^2}\Big) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} \sum P_k p_k \\ - \Lambda \sum p_k \frac{\partial P_2}{\partial q_k} + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) \sum \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} \frac{\partial P_2}{\partial p_k} = 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Положим $p_1 = 1, p_2 = i$ и воспользуемся леммой 2. Тогда из (4.7) и (4.8) вытекают равенства

$$\frac{\partial P_k^*}{\partial q_1} + i\frac{\partial P_k^*}{\partial q_2} = 0, \qquad k = 1, 2.$$

Следовательно, P_k^* – голоморфная функция от

$$z = q_1 + iq_2.$$

По теореме Лиувилля,

$$P_k^* = \mu_k = \mathrm{const} \qquad (\mu_k \in \mathbb{C}).$$

Из соотношения (4.4) с учетом леммы 3 легко выводится равенство

$$\mu_1 M = \frac{\partial Q_1^* M}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2^* M}{\partial q_2},$$

где $M = \frac{1}{\Lambda}$. Следовательно,

$$\mu_1 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} M\, dq_1\, dq_2 = 0.$$

Откуда $\mu_1 = 0$. Аналогично выводится, что $\mu_2 = 0$. Лемма 4 доказана.

Заодно мы получили соотношение

$$\frac{\partial Q_1^* M}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2^* M}{\partial q_2} = 0, \tag{4.9}$$

которое будет использовано в дальнейшем.

Положим

$$Q_1^* = \Phi_1 + i\Psi_1, \qquad Q_2^* = \Phi_2 + i\Psi_2,$$

где Φ_k, Ψ_k – однозначные функции на $\mathbb{T}^2$. В силу леммы 3,

$$\Phi_1 - \Psi_2 = c_1, \qquad \Psi_1 + \Phi_2 = c_2. \tag{4.10}$$

Равенство (4.9) распадается на два:

$$\frac{\partial \Phi_1 M}{\partial q_1} + \frac{\partial \Phi_2 M}{\partial q_2} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi_1 M}{\partial q_1} + \frac{\partial \Psi_2 M}{\partial q_2} = 0. \tag{4.11}$$

ЛЕММА 5. *Функция $\sigma = \Psi_1 - \Phi_2$ удовлетворяет уравнению*

$$2c_1 \frac{\partial^2 M}{\partial q_1\, \partial q_2} = c_2 \left(\frac{\partial^2 M}{\partial q_2^1} - \frac{\partial^2 M}{\partial q_2^2} \right) + \Delta(\sigma M), \tag{4.12}$$

где Δ – оператор Лапласа.

Уравнение (4.12) просто выводится из (4.10) и (4.11). Оно играет существенную роль в дальнейшем рассмотрении.

Лемма 6 [2]. *Пусть F – однородный полином по импульсам степени $n \geq 2$ и $F^* = 0$. Тогда*

$$F = (p_1^2 + p_2^2)G,$$

где G – полином по p_1, p_2 степени $n-2$.

Из лемм 4 и 6 вытекает, что

$$P_i = (p_1^2 + p_2^2)K_i, \qquad i = 1, 2, \tag{4.13}$$

где K_i – полиномы по импульсам степени $n-2$. Если бы нам удалось доказать, что

$$Q_1^* = Q_2^* = 0$$

(ср. с заключением леммы 3), то поле симметрий u можно было бы представить в виде произведения Hw, где w – поле симметрий степени $n-2$. По индукции задача об однородном поле симметрий свелась бы к задаче о поле симметрий степени $n \leq 2$. К сожалению, в общем случае $Q_k^* \neq 0$.

Лемма 7. *Справедливо равенство*

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2} + K_i^* + iK_i^* = \nu_1 + i\nu_2 = \text{const}. \tag{4.14}$$

Доказательство. Ясно, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_i}{\partial q_j} &= (p_1^2 + p_2^2)\frac{\partial K_i}{\partial q_j}, \\ \frac{\partial P_i}{\partial p_j} &= (p_1^2 + p_2^2)\frac{\partial K_i}{\partial p_j} + 2p_j K_i. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Подставляя (4.13) и (4.15) в уравнения (4.7) и (4.8), сокращая на $p_1^2 + p_2^2$ и подставляя затем $p_1 = 1, p_2 = i$, получим два равенства:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}Q_1^*\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_1^2} + \frac{1}{2}Q_2^*\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_1\,\partial q_2} + iK_2^*\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} + \Lambda\frac{\partial K_1^*}{\partial q_1} + i\Lambda\frac{\partial K_1^*}{\partial q_2} - iK_1^*\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} = 0, \\ &\frac{1}{2}Q_1^*\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_1\,\partial q_2} + \frac{1}{2}Q_2^*\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_2^2} + K_1^*\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} + \Lambda\frac{\partial K_2^*}{\partial q_1} + i\Lambda\frac{\partial K_2^*}{\partial q_2} - K_2^*\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} = 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Полагая снова $M = \frac{1}{\Lambda}$, преобразуем сумму

$$\begin{aligned} Q_1^* M\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_1^2} + Q_2^* M\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_1\,\partial q_2} &= \frac{\partial}{\partial q_1}\left(Q_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(Q_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}\right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial Q_1^* M}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2^* M}{\partial q_2}\right)\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}. \end{aligned}$$

В силу (4.9), последнее слагаемое равно нулю. Аналогично,

$$Q_1^* M\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_1\,\partial q_2} + Q_2^* M\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_2^2} = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(Q_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(Q_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right).$$

Умножим первое уравнение (4.16) на M, второе на iM, сложим и воспользуемся только что полученными соотношениями. В результате придем к равенству

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(Q_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}+iQ_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(Q_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}+iQ_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial q_1}(K_1^*+iK_2^*)+i\frac{\partial}{\partial q_2}(K_1^*+iK_2^*)=0. \qquad (4.17)$$

Преобразуем сумму

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(Q_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}\right)&+i\frac{\partial}{\partial q_1}\left(Q_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right)\\
&=i\frac{\partial}{\partial q_1}\left[(Q_1^*+iQ_2^*)M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}-iQ_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right]\\
&-i\frac{\partial}{\partial q_2}\left[(Q_1^*+iQ_2^*)M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}-Q_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}\right]\\
&=\frac{\partial}{\partial q_1}\left(Q_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right)+i\frac{\partial}{\partial q_2}\left(Q_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}\right)\\
&-i(c_1+ic_2)\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}\right)-\frac{\partial}{\partial q_1}\left(M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right)\right]. \qquad (4.18)\end{aligned}$$

Здесь было использовано тождество

$$Q_1^*+iQ_2^*=c_1+ic_2$$

(лемма 3). Так как $M\Lambda\equiv 1$, то последнее слагаемое в (4.18) равно нулю. С учетом этого замечания сумма первых двух слагаемых в равенстве (4.17) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(Q_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}+Q_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right)+i\frac{\partial}{\partial q_2}\left(Q_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}+Q_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right).$$

Однако, с учетом (4.9),

$$\begin{aligned}Q_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}+Q_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}&=\frac{\partial Q_1^* M\Lambda}{\partial q_1}+\frac{\partial Q_2^* M\Lambda}{\partial q_2}\\
&-\Lambda\left(\frac{\partial Q_1^* M}{\partial q_1}+\frac{\partial Q_2^* M}{\partial q_2}\right)=\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1}+\frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2}. \qquad (4.19)\end{aligned}$$

Итак, получаем окончательно

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2}+K_1^*+iK_2^*\right]+i\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2}+K_1^*+iK_2^*\right]=0.$$

Следовательно, по теореме Коши–Римана,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2}+K_1^*+iK_2^*$$

– голоморфная функция от q_1+iq_2. Ввиду ограниченности, она постоянна. Лемма доказана.

Пусть F – полином по p_1, p_2. Для краткости $\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)^*$ будем обозначать $\frac{\partial F^*}{\partial p_k}$. Очевидно,

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial p_k\,\partial q_j}=\frac{\partial^2 F^*}{\partial q_j\,\partial p_k}.$$

Лемма 8. $\nu_1 = \nu_2 = 0$.

Доказательство. Используя (4.13), продифференцируем (4.2) по p_1, а (4.3) по p_2, и подставим $p_1 = 1, p_2 = i$. В результате получим соотношения

$$\sum Q_k^* \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} + \sum \frac{\partial Q_k^*}{\partial p_1} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} + \sum \frac{\partial Q_1^*}{\partial p_k} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k}$$
$$+ 2K_1^* \Lambda - \Lambda \frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1} - \Lambda \frac{\partial^2 Q_1^*}{\partial q_1 \partial p_1} - i\Lambda \frac{\partial^2 Q_1^*}{\partial q_2 \partial p_1} = 0, \tag{4.20}$$
$$\sum Q_k^* \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} + i\sum \frac{\partial Q_k^*}{\partial p_2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} + i\sum \frac{\partial Q_2^*}{\partial p_k} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k}$$
$$+ 2iK_2^* \Lambda - \Lambda \frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2} - i\Lambda \frac{\partial^2 Q_2^*}{\partial q_2 \partial p_2} - \Lambda \frac{\partial^2 Q_2^*}{\partial q_1 \partial p_2} = 0. \tag{4.21}$$

Так как Q_1 и Q_2 – однородные многочлены по импульсам степени $n-1$, то по теореме Эйлера

$$\sum \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} p_j = (n-1)Q_i; \qquad i = 1, 2.$$

Подставляя $p_1 = 1, p_2 = i$, приходим к соотношениям

$$\frac{\partial Q_k^*}{\partial p_1} + i\frac{\partial Q_k^*}{\partial p_2} = (n-1)Q_k^*; \qquad k = 1, 2. \tag{4.22}$$

Умножим уравнения (4.20), (4.21) на M, сложим их и воспользуемся формулами (4.19) и (4.22). После несложных преобразований получим соотношение

$$K_1^* + iK_2^* = -\frac{1}{2}\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2} - \frac{n-1}{2}\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1} - \frac{n-1}{2}\frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2}$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2^*}{\partial p_2}\right) + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2^*}{\partial p_2}\right)$$
$$- \frac{1}{2} M \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1}\left(\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_1} + i\frac{\partial Q_2^*}{\partial p_1}\right) - \frac{1}{2} M \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}\left(\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_2} + i\frac{\partial Q_2^*}{\partial p_2}\right). \tag{4.23}$$

Положим

$$r = \frac{\partial Q_1^*}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_2^*}{\partial p_1}.$$

С учетом (4.22) получим соотношения

$$\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2^*}{\partial p_2} = \frac{\partial Q_1^*}{\partial p_1} + i\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_2} - i\left(\frac{\partial Q_2^*}{\partial p_1} + i\frac{\partial Q_2^*}{\partial p_2}\right) - ir$$
$$= (n-1)Q_1^* - i(n-1)Q_2^* - ir,$$
$$\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_1} + i\frac{\partial Q_2^*}{\partial p_1} = (n-1)Q_1^* - ir,$$
$$\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_2} + i\frac{\partial Q_2^*}{\partial p_2} = (n-1)Q_2^* + r.$$

Подставляя эти соотношения в (4.23) и используя (4.19), получаем:

$$K_1^* + iK_2^* = -\frac{1}{2}\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2} - \frac{n-1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}(Q_1^* + iQ_2^*) + \frac{n-1}{2}i\frac{\partial}{\partial q_2}(Q_1^* + iQ_2^*)$$
$$- \frac{i}{2}\frac{\partial r}{\partial q_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial q_2} + \frac{i}{2}M\frac{\partial \Lambda}{\partial q_1}r - \frac{1}{2}M\frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}r. \qquad (4.24)$$

По лемме 3,

$$Q_1^* + iQ_2^* \equiv \mathrm{const}\,.$$

Легко проверить, что сумма последних четырех слагаемых в (4.24) равна

$$-\frac{i}{2}\Lambda\left(\frac{\partial rM}{\partial q_1} + i\frac{\partial rM}{\partial q_2}\right).$$

В итоге равенство (4.24), с учетом (4.14), принимает следующий вид

$$-\frac{i}{2}\Lambda\left(\frac{\partial rM}{\partial q_1} + i\frac{\partial rM}{\partial q_2}\right) = \nu_1 + i\nu_2$$

или

$$-\frac{i}{2}\Lambda\left(\frac{\partial rM}{\partial q_1} + i\frac{\partial rM}{\partial q_2}\right) = (\nu_1 + i\nu_2)M.$$

Усредняя по двумерному тору, получаем соотношение

$$\frac{\nu_1 + i\nu_2}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} M\,dq_1\,dq_2 = 0.$$

Поскольку $M > 0$, то $\nu_1 = \nu_2 = 0$. Лемма доказана.

Заодно мы получили равенство

$$\frac{\partial rM}{\partial q_1} + i\frac{\partial rM}{\partial q_2} = 0,$$

которое является условием голоморфности функции rM. По теореме Лиувилля,

$$rM = c_3 + ic_4\,.$$

Итак, справедлива

Лемма 9.

$$\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_2^*}{\partial p_1} = (c_3 + ic_4)\Lambda. \qquad (4.25)$$

Отметим в заключение, что равенство (4.14) (с учетом заключения леммы 8) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2} + \frac{\partial P_1^*}{\partial p_1} + \frac{\partial P_2^*}{\partial p_2} = 0. \qquad (4.26)$$

Просуммируем результаты этого параграфа:

$$P_1^* = P_2^* = 0, \qquad Q_1^* + iQ_2^* = c_1 + ic_2;$$

кроме того, функции Q_1^* и Q_2^* удовлетворяют уравнениям (4.9), (4.12), (4.25) и (4.26).

§ 5. Доказательство теоремы 2

При $n = 1$ функции Q_k не зависят от импульсов (так что $Q_k^* = Q_k$), а

$$P_k = a_k p_1 + b_k p_2, \qquad k = 1, 2.$$

В силу леммы 4,

$$P_k^* = a_k + ib_k \equiv 0.$$

Следовательно,

$$a_k = b_k \equiv 0 \ \text{ и } \ P_k \equiv 0 \qquad (k = 1, 2).$$

Так как Q_k – вещественные функции, то, согласно лемме 3,

$$Q_k \equiv c_k = \text{const}\,; \qquad k = 1, 2.$$

Поле u с оператором дифференцирования

$$L_u = c_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + c_2 \frac{\partial}{\partial q_2}$$

гамильтоново: гамильтонианом служит линейная функция

$$F = c_1 p_1 + c_2 p_2,$$

которая является интегралом уравнений движения.

В силу (4.9), функция $M = \frac{1}{\Lambda}$ удовлетворяет уравнению

$$c_1 \frac{\partial M}{\partial q_1} + c_2 \frac{\partial M}{\partial q_2} = 0.$$

Так как поле $u \neq 0$, то $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

Если отношение $\frac{c_1}{c_2}$ иррационально, то $M \equiv \text{const}$. Пусть $\frac{c_1}{c_2} = \frac{k}{l}$, где k, l – взаимно простые целые числа. В этом случае M есть функция только от переменной

$$\varphi_1 = lq_1 - kq_2. \tag{5.1}$$

По теореме Безу, найдутся два целых числа r, s таких, что

$$kr + ls = 1.$$

Положим

$$\varphi_2 = rq_1 + sq_2. \tag{5.2}$$

Соотношения (5.1), (5.2) задают автоморфизм двумерного тора. Расширяя это преобразование до канонического, приходим к случаю, когда гамильтониан H не зависит от угловой координаты φ_2. Таким образом, если имеется нетривиальное поле симметрий первой степени, то имеется скрытая циклическая координата.

§ 6. Доказательство теоремы 3

При $n = 2$ функции Q_1, Q_2 линейны по импульсам:

$$Q_k = a_k p_1 + b_k p_2; \qquad k = 1, 2.$$

Ясно, что

$$\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_2} = b_1, \qquad \frac{\partial Q_2^*}{\partial p_1} = a_2.$$

Следовательно, $\sigma = b_1 - a_2$, где σ – функция из леммы 5. Согласно (4.25),

$$\sigma M = c_3 + ic_4 \equiv \text{const}, \qquad \Delta(\sigma M) = 0.$$

Таким образом, уравнение (4.12) упрощается:

$$2c_1 \frac{\partial^2 M}{\partial q_1 \, \partial q_2} = c_2 \left(\frac{\partial^2 M}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial q_2^2} \right). \tag{6.1}$$

Предположим, что

$$c_1^2 + c_2^2 \neq 0.$$

Случай $c_1 = c_2 = 0$ будет рассмотрен ниже. Воспользуемся методом Фурье. Пусть

$$M = \sum M_{m_1 m_2} e^{i(m_1 q_1 + m_2 q_2)}; \qquad (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

Тогда из (6.1) получаем цепочку соотношений

$$\left[2c_1 m_1 m_2 - c_2(m_1^2 - m_2^2) \right] M_{m_1 m_2} = 0. \tag{6.2}$$

Рассмотрим множество

$$B = \left\{ (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 : M_{m_1 m_2} \neq 0 \right\}.$$

Ввиду (6.2) для точек из B имеет место равенство

$$\frac{m_1 m_2}{m_1^2 - m_2^2} \equiv \text{const}.$$

Пусть (n_1, n_2) – еще одна точка из B. Так как

$$\frac{m_1 m_2}{m_1^2 - m_2^2} = \frac{n_1 n_2}{n_1^2 - n_2^2},$$

то либо

$$1) \quad m_1 n_2 - m_2 n_1 = 0,$$

либо

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0.$$

В первом случае точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, а во втором случае эти точки лежат на некоторых двух прямых l_1, l_2, ортогонально пересекающихся в начале координат.

Пусть

$$(m_1^0, m_2^0) \neq (0,0)$$

– точка из целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$, лежащая на l_1 и ближайшая к началу координат. Ясно, что все точки $l_1 \cap \mathbb{Z}^2$ имеют вид

$$(m_1, m_2) = (\lambda m_1^0, \lambda m_2^0), \qquad \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Так как $(m_2^0, -m_1^0)$ – ближайшая к началу координат точка из

$$(l_2 \cap \mathbb{Z}^2) \setminus \{0,0\},$$

то все точки $l_2 \cap \mathbb{Z}^2$ имеют вид

$$(m_1, m_2) = (\lambda m_2^0, -\lambda m_1^0), \qquad \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M &= \sum_{(m_1,m_2)\in l_1} M_{m_1 m_2} e^{i(m_1 q_1 + m_2 q_2)} + \sum_{(m_1,m_2)\in l_2} M_{m_1 m_2} e^{i(m_1 q_1 + m_2 q_2)} \\ &= \sum_\lambda M_{\lambda m_1^0, \lambda m_2^0} e^{i\lambda(m_1^0 q_1 + m_2^0 q_2)} + \sum_\lambda M_{\lambda m_2^0, -\lambda m_1^0} e^{i\lambda(m_2^0 q_1 - m_1^0 q_2)} \\ &= f(m_1^0 q_1 + m_2^0 q_2) + g(m_2^0 q_1 - m_1^0 q_2), \end{aligned}$$

где f, g – некоторые 2π-периодические функции.

Перейдем к новым угловым координатам $x_1, x_2 \bmod 2\pi$ по формулам

$$x_1 = m_1^0 q_1 + m_2^0 q_2, \qquad x_2 = m_2^0 q_1 - m_1^0 q_2.$$

Расширим это преобразование до канонического $q, p \to x, y$, полагая

$$\begin{aligned} \left[(m_1^0)^2 + (m_2^0)^2\right] y_1 &= m_1^0 p_1 + m_2^0 p_2, \\ \left[(m_1^0)^2 + (m_2^0)^2\right] y_2 &= m_2^0 p_1 - m_1^0 p_2. \end{aligned}$$

В новых переменных x, y гамильтониан (1.4) примет следующий вид:

$$H = \frac{(m_1^0)^2 + (m_2^0)^2}{2[f(x_1) + g(x_2)]}(y_1^2 + y_2^2). \tag{6.3}$$

Таким образом, переменные x, y разделяются. Функция (6.3) – гамильтониан Лиувиллевой системы с двумя степенями свободы. Уравнение (6.1) появилось в работе [4] в связи с задачей о наличии квадратичного интеграла.

Итак, можно считать, что

$$M = F(q_1) + G(q_2),$$

где F, G — 2π-периодические координаты. Кроме того, в соответствии с предположением основной теоремы (§ 1), $M \neq \mathrm{const}$.

Уравнение (6.1) дает нам, что

$$c_2(F'' - G'') = 0.$$

Здесь штрих обозначает производную функции одной переменной. Поскольку функции F и G периодичны и хотя бы одна из них не постоянна, то, очевидно, $c_2 = 0$. В соответствии с заключением леммы 3,

$$a_1 - b_2 = c_1, \qquad a_2 + b_1 = 0. \tag{6.4}$$

Кроме того,

$$\sigma M = c_3 + ic_4 = \mathrm{const}.$$

Так как функция $\sigma = b_1 - a_2$ вещественна, то $c_4 = 0$. С учетом равенства (6.4) заключаем, что

$$c_3 = -2a_2 M = 2b_1 M. \tag{6.5}$$

Воспользуемся теперь равенством (4.9). Из него вытекают два соотношения

$$\frac{\partial M a_1}{\partial q_1} + \frac{\partial M a_2}{\partial q_2} = 0, \qquad \frac{\partial M b_1}{\partial q_1} + \frac{\partial M b_2}{\partial q_2} = 0.$$

С учетом (6.5) приходим к равенствам

$$M b_2 = \varphi_1(q_1), \qquad M a_1 = \varphi_2(q_2), \tag{6.6}$$

где φ_1, φ_2 – периодические функции одного переменного.

Используя первое равенство (6.4), получаем цепочку равенств

$$c_1 F + c_1 G = c_1 M = (a_1 - b_2)M = \varphi_2(q_2) - \varphi_1(q_1),$$

откуда

$$\varphi_1 = -c_1 F + c_5, \qquad \varphi_2 = c_1 G + c_5,$$

где c_5 – некоторая постоянная, которую можно положить равной нулю. Действительно, положим

$$F = \widetilde{F} + \frac{c_5}{c_1}, \qquad G = \widetilde{G} - \frac{c_5}{c_1}.$$

Тогда

$$\varphi_1 = -c_1 \widetilde{F}, \quad \varphi_2 = c_1 \widetilde{G}; \qquad \widetilde{F} + \widetilde{G} = F + G.$$

Вспоминая, что $M = \frac{1}{\Lambda}$, из (6.5) и (6.6) получаем искомые равенства

$$\begin{gathered} a_1 = c_1 G\Lambda, \quad a_2 = -c_0\Lambda; \quad b_1 = c_0\Lambda, \\ b_2 = -c_1 F\Lambda; \quad c_0 = \frac{c_3}{2}. \end{gathered} \tag{6.7}$$

Воспользуемся, наконец, равенством (4.14) и заключением леммы 8:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}(a_1+ib_1)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}(a_2+ib_2)+K_1^*+iK_2^*=0.$$

Так как $n=2$, то K_1^* и K_2^* – вещественные функции. Следовательно,

$$\begin{aligned} K_1^* &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial q_1}+\frac{\partial a_2}{\partial q_2}\right)=\frac{c_0}{2}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}-\frac{1}{2}c_1G\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1},\\ K_2^* &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_1}{\partial q_1}+\frac{\partial b_2}{\partial q_2}\right)=-\frac{c_0}{2}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}+\frac{1}{2}c_1F\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}. \end{aligned}\tag{6.8}$$

Равенства (6.7) и (6.8) приводят к окончательным формулам для поля симметрий u:

$$\begin{aligned} q_1' &= c_1G\Lambda p_1+c_0\Lambda p_2,\qquad q_2'=-c_0\Lambda p_1-c_1F\Lambda p_2,\\ p_1' &= -\frac{1}{2}\left(c_1G\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}-c_0\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right)(p_1^2+p_2^2),\\ p_2' &= \frac{1}{2}\left(c_1F\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}-c_0\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}\right)(p_1^2+p_2^2). \end{aligned}\tag{6.9}$$

Следовательно, поле u можно представить в виде суммы двух полей:

$$c_1u_1+c_0u_2.$$

Легко проверить, что u_1 – гамильтоново поле симметрий с гамильтонианом

$$\Phi=\frac{Gp_1^2-Fp_2^2}{2(F+G)}.$$

Поле u_2 также должно быть полем симметрий. Легко проверить, что условием коммутирования полей v и u_2 является равенство

$$\Lambda\Delta\Lambda-\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}\right)^2-\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right)^2=0.\tag{6.10}$$

Так как $\Lambda>0$, то можно положить $N=\ln\Lambda$. Уравнение (6.10) эквивалентно уравнению $\Delta N=0$. Поскольку ограниченная гармоническая функция постоянна, то $\Lambda=\mathrm{const}$. Следовательно, если Λ не постоянная функция, то $c_0=0$.

Нам осталось рассмотреть оставшийся вырожденный случай, когда

$$c_1=c_2=0.$$

Покажем, что тогда поле симметрий коллинеарно гамильтонову полю v.

Действительно, соотношение

$$Q_1^*+iQ_2^*=0$$

приводит к двум равенствам

$$a_1-b_2=a_2+b_1=0.\tag{6.11}$$

С учетом соотношений

$$P_1^* = P_2^* = 0$$

получаем, что функции Q_k и P_k имеют следующий вид:

$$Q_1 = a_1p_1 - a_2p_2, \qquad Q_2 = a_2p_1 + a_1p_2;$$
$$P_k = \xi_k(p_1^2 + p_2^2), \qquad k = 1, 2.$$

Далее, равенства (4.26) и (6.11) дают нам, что

$$\frac{\partial a_1}{\partial q_1} + \frac{\partial a_2}{\partial q_2} + 2\xi_1 = 0, \qquad \frac{\partial a_1}{\partial q_2} - \frac{\partial a_2}{\partial q_1} + 2\xi_2 = 0.$$

Кроме того, из (4.25) и (6.11) получаем соотношение

$$a_2 = \alpha_2\Lambda, \qquad \alpha_2 = \mathrm{const}. \tag{6.12}$$

Условие коммутируемости полей u, v приводит к двум уравнениям (см. (4.9))

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{a_1}{\Lambda} + \frac{\partial}{\partial q_2}\frac{a_2}{\Lambda} = -\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{a_2}{\Lambda} + \frac{\partial}{\partial q_2}\frac{a_1}{\Lambda} = 0.$$

С учетом (6.12), они приводятся к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{a_1}{\Lambda} = \frac{\partial}{\partial q_2}\frac{a_1}{\Lambda} = 0.$$

Следовательно, $a_1 = \alpha_1\Lambda$, где $\alpha_1 = \mathrm{const}$.

Таким образом, поле симметрий u имеет вид

$$q_1' = \Lambda(\alpha_1p_1 - \alpha_2p_2), \qquad q_2' = \Lambda(\alpha_2p_1 + \alpha_1p_2),$$
$$p_1' = -\frac{1}{2}\left(\alpha_1\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} + \alpha_2\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right)(p_1^2 + p_2^2), \quad p_2' = -\frac{1}{2}\left(\alpha_1\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} - \alpha_2\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}\right)(p_1^2 + p_2^2). \tag{6.13}$$

Слагаемые, содержащие α_1, дают поле, пропорциональное исходному полю v. Поэтому можно положить $\alpha_1 = 0$. Но тогда (6.13) будет совпадать с полем (6.9), в котором надо положить $c_1 = 0$. Однако, как показано выше, оно коммутирует с полем v лишь при $\alpha_2 = 0$.

Теорема 3 доказана.

§ 7. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим теперь гамильтоново поле симметрий, порожденное однородным гамильтонианом степени m:

$$F = f_{m,0}p_1^m + f_{m-1,1}p_1^{m-1}p_2 + \cdots + f_{0,m}p_2^m.$$

Поскольку $Q_k = \partial F/\partial p_k$ $(k = 1, 2)$, то

$$Q_1^* = mf_{m,0} + (m-1)f_{m-1,1}i + (m-2)f_{m-2,2}i^2 + \cdots,$$
$$Q_2^* = f_{m-1,1} + 2f_{m-2,2}i + 3f_{m-3,3}i^2 + \cdots.$$

Напомним (см. § 4), что $\sigma = \Psi_1 - \Phi_2$, где

$$Q_1^* = \Phi_1 + i\Psi_1, \qquad Q_2^* = \Phi_2 + i\Psi_2.$$

Следовательно,

$$\sigma = (m-2)f_{m-1,1} - (m-6)f_{m-3,3} + \cdots .$$

Пусть выполнено одно из следующих условий:

а) функция F четная по p_1 и p_2,

б) F четна по p_2 и нечетна по p_1.

Тогда, очевидно,

$$f_{m-1,1} = f_{m-3,3} = \cdots = 0$$

и, в частности, $\sigma = 0$. Но тогда, согласно (4.12), функция $M = \Lambda^{-1}$ удовлетворяет уравнению (6.1). Если $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, то, как доказано в § 6, уравнения Гамильтона допускают интеграл не выше второй степени.

Рассмотрим теперь случай $c_1 = c_2 = 0$. Тогда по лемме 3.

$$Q_1^* + iQ_2^* = \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}p_1 + \frac{\partial F}{\partial p_2}p_2\right)^* = mF^* = 0.$$

Следовательно (лемма 6), $F = H\Phi$, где Φ – однородный интеграл степени $m-2$, имеющий вид а) или б). Применяя индукцию, убывающую вместе с m, приходим к интегралу степени ≤ 2.

В случае, когда F четна по p_1 и нечетна по p_2, функция σ, как правило, отлична от нуля. Однако, этот случай сводится к случаю б) простым переобозначением переменных

§ 8. Доказательство теоремы 4

С учетом результатов § 5 поле симметрий первой степени необратимой системы имеет следующий вид:

$$q_1' = c_1, \qquad q_2' = c_2, \qquad p_1' = \zeta_1, \qquad p_2' = \zeta_2, \tag{8.1}$$

где c_1, c_2 – некоторые постоянные, а ζ_1, ζ_2 – функции на двумерном торе. При этом, согласно § 5, функция Λ удовлетворяет уравнению

$$c_1\frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} + c_2\frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}.$$

Легко проверить, что условия коммутирования исходного гамильтонова векторного поля v и поля (8.1) приводят к равенствам

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0, \qquad c_1\frac{\partial \lambda}{\partial q_1} + c_2\frac{\partial \lambda}{\partial q_2} = 0.$$

Таким образом, вид поля симметрий первой степени в необратимом и обратимом случаях совпадают. При этом функции λ и Λ удовлетворяют одному и тому же уравнению. Если c_1/c_2 иррационально, то $\Lambda = \mathrm{const}$, $\lambda = \mathrm{const}$. В противном случае (когда $c_1/c_2 = k/l$; $k, l \in \mathbb{Z}$) можно перейти к новым угловым координатам φ_1 и φ_2 по формулам (5.1) и (5.2). Ясно, что правые части уравнений (3.1) не будут зависеть от координаты φ_2 и поле симметрий примет простейший вид

$$\varphi_1' = 0, \quad \varphi_2' = 1, \quad \psi_1' = 0, \quad \psi_2' = 0. \tag{8.2}$$

Здесь ψ_1, ψ_2 – канонические переменные, сопряженные с φ_1, φ_2. Является ли поле (8.2) гамильтоновым? Эта задача сводится к разрешимости уравнений (см. (3.1))

$$\begin{gathered} 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1}, \qquad 1 = \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_2}, \\ 0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} + \lambda(\varphi_1)\frac{\partial \Phi}{\psi_2}, \qquad 0 = -\frac{\partial \Phi}{\varphi_2} - \lambda(\varphi_1)\frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1}. \end{gathered} \tag{8.3}$$

Очевидно, $\Phi = \psi_2 + a$, где a – пока неизвестная функция на торе $\mathbb{T}^2 = \{\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi\}$. Из последних двух уравнений системы (8.3) получаем искомые соотношения

$$\frac{\partial a}{\partial \varphi_1} = \lambda(\varphi_1), \qquad \frac{\partial a}{\partial \varphi_2} = 0.$$

Следовательно, a – функция только от φ_1, причем $a' = \lambda$. Отсюда

$$a = \langle \lambda \rangle \, \varphi_1 + A,$$

где A – однозначная функция на торе,

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \lambda \, d\varphi_1 \, d\varphi_2.$$

Таким образом, в необратимом случае поле симметрий локально гамильтоново. Гамильтониан Φ будет однозначной функцией в фазовом пространстве, если $\langle \lambda \rangle = 0$.

§ 9. Доказательство теоремы 5

Рассмотрим поле третьей степени $n \geq 2$, задаваемое уравнениями

$$\begin{aligned} q_1' &= Q_1 + S_1 + \cdots, & q_2' &= Q_2 + S_2 + \cdots, \\ p_1' &= P_1 + R_1 + T_1 + \cdots, & p_2' &= P_2 + R_2 + T_2 + \cdots. \end{aligned}$$

Здесь $P_k, R_k, Q_k, S_k, T_k, \ldots$ ($k = 1, 2$) – однородные многочлены по импульсам p_1, p_2 степени $n, n-1, n-1, n-2, n-2, \ldots$ соответственно. Многоточие означает слагаемые степени $\leq n - 2$.

Приравняем нулю коэффициент при $\partial/\partial p_1$ коммутатора операторов L_v, L_u, выпишем однородные слагаемые степени n и положим затем $p_1 = 1, p_2 = i$. В результате получим соотношение

$$\begin{aligned} Q_1^* \frac{\partial \lambda\Lambda}{\partial q_1} i + Q_2^* \frac{\partial \lambda\Lambda}{\partial q_2} i - R_1^* \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} - R_2^* \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} i + P_2^* \lambda\Lambda \\ - \Lambda \frac{\partial R_1^*}{\partial q_1} - \Lambda i \frac{\partial R_1^*}{\partial q_2} - i\lambda\Lambda \left(\frac{\partial P_1^*}{\partial p_1} + i \frac{\partial P_1^*}{\partial p_2} \right) = 0. \end{aligned} \tag{9.1}$$

По формуле Эйлера для однородных функций, выражение в круглых скобках равно nP_1^*. По лемме 4, $P_1^* = P_2^* = 0$. Поэтому уравнение (9.1) принимает вид

$$Q_1^* \frac{\partial \lambda \Lambda}{\partial q_1} i + Q_2^* \frac{\partial \lambda \Lambda}{\partial q_2} i - \frac{\partial R_1^* \Lambda}{\partial q_1} - R_2^* \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} i - \Lambda \frac{\partial R_1^*}{\partial q_2} i = 0. \tag{9.2}$$

Приравнивая нулю коэффициент при $\partial/\partial p_2$, получаем аналогичное уравнение

$$-Q_1^* \frac{\partial \lambda \Lambda}{\partial q_1} - Q_2^* \frac{\partial \lambda \Lambda}{\partial q_2} - i \frac{\partial R_2^* \Lambda}{\partial q_2} - R_1^* \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} - \Lambda \frac{\partial R_2^*}{\partial q_1} = 0. \tag{9.3}$$

Умножим (9.3) на i и сложим с (9.2):

$$\frac{\partial (R_1^* + iR_2^*)\Lambda}{\partial q_1} + i \frac{\partial (R_1^* + iR_2^*)\Lambda}{\partial q_2} = 0.$$

Это – условие Коши–Римана голоморфности функции $(R_1^* + iR_2^*)\Lambda$. Ввиду ограниченности, она постоянна:

$$\Lambda(R_1^* + iR_2^*) = \delta_1 + i\delta_2 = \mathrm{const}\,. \tag{9.4}$$

Приравнивая теперь нулю однородные члены степени $n-1$ и производя аналогичные преобразования, можно получить соотношение

$$\frac{\partial (T_1^* + iT_2^*)\Lambda}{\partial q_1} + i \frac{\partial (T_1^* + iT_2^*)\Lambda}{\partial q_2} + \lambda n i\,[\Lambda(R_1^* + iR_2^*)] = 0. \tag{9.5}$$

Если $\delta_1 + i\delta_2 \neq 0$, то ввиду (9.4) среднее функции λ по двумерному тору равно нулю.

Рассмотрим теперь случай, когда $\delta_1 = \delta_2 = 0$, т.е.

$$R_1^* + iR_2^* = 0. \tag{9.6}$$

Приравнивая теперь нулю слагаемые степени $n-1$ в коэффициентах при $\partial/\partial q_1$, $\partial/\partial q_2$ и учитывая соотношение (9.6), можно получить уравнение

$$\frac{\partial (S_1^* + iS_2^*)}{\partial q_1} + i \frac{\partial (S_1^* + iS_2^*)}{\partial q_2} + \lambda i (n-1)(c_1 + ic_2) = 0. \tag{9.7}$$

Если $c_1 + ic_2 \neq 0$, то среднее λ равно нулю. Поскольку при $p_1 = 1$, $p_2 = i$ функции P_1, P_2 обращаются в нуль, то старшие однородные части векторных полей v и u в точке $p_1 = 1$, $p_2 = i$ равны соответственно

$$(\Lambda, \Lambda i, 0, 0) \quad \text{и} \quad (Q_1^*, Q_2^*, 0, 0)$$

Эти векторы линейно независимы, если

$$Q_1^* i - Q_2^* = i(Q_1^* + iQ_2^*) = i(c_1 + ic_2) \neq 0.$$

Теорема доказана.

Замечание. По индукции можно доказать, что если среднее функции λ по тору отлично от нуля, то

$$Q_1^* + iQ_2^* = S_1^* + iS_2^* = \cdots = 0.$$

Если поле симметрий гамильтоново с гамильтонианом $F_m + F_{m-1} + \cdots$, то отсюда вытекает, что все полиномы F_k $(k \leq m)$ нацело делятся на H. Отсюда, в свою очередь, вытекает заключение теоремы С.В.Болотина [8].

Список литературы

1. *Козлов В.В.* Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // ДАН СССР. 1979. Т. 249. №6. С. 1299–1302.
2. *Колокольцов В.Н.* Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. №5. С. 994–1010.
3. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941.
4. *Kozlov V.V.* Integrable and Non-Integrable Hamiltonian Systems // Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys. 1989. V. 8. P. 1–81.
5. *Болотин С.В.* Двоякоасимптотические траектории минимальных геодезических // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. и механики. 1992. №1. С. 92–96.
6. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Из-во Моск. ун-та, 1980.
7. *Козлов В.В.* О группах геодезических потоков на замкнутых поверхностях // Матем. заметки. 1990. Т. 48. №5. С. 62–67.
8. *Болотин С.В.* О первых интегралах систем с гироскопическими силами // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. и механики. 1984. №6. С. 75–82.
9. *Фоменко А.Т.* Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // УМН. 1989. Т. 44. №1. С. 145–173.

Москва
МГУ

Поступила в редакцию
17.02.1993