УДК 531.01+530.12

В. В. Козлов

О ДИНАМИКЕ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

1. Задача о движении заряженной частицы в пространстве Эйнштейна. Пусть M^4 — псевдориманово пространство-время с сигнатурой $+---$, x^i $(0\leqslant i\leqslant 3)$ — локальные координаты, а

$$ds^2=g_{ij}dx^i dx^j$$

— псевдориманова метрика на M^4. Как известно (см., например, [1]), тензор электромагнитного поля F_{ik} в «пустом» пространстве M^4 удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial F_{ji}}{\partial x^k}+\frac{\partial F_{kj}}{\partial x^i}=0,$$
$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,F^{ik}\right)=0. \tag{1}$$

Здесь g — определитель матрицы $\|g_{ij}\|$, $F^{ik}=g^{ip}\,g^{kq}F_{pq}$.

Первое уравнение Максвелла (1) эквивалентно условию замкнутости 2-формы

$$\Omega=F_{ij}dx^i\wedge dx^j.$$

Согласно лемме Пуанкаре, эта форма локально точна: $\Omega=d\omega$, где $\omega=f_i dx^i$. Ковариантный тензор f_i называется 4-потенциалом электромагнитного поля.

Пусть m — масса частицы с зарядом e. Как известно, ее траектории в M^4 являются стационарными точками функционала действие

$$I[a]=-\int_a mds+e\omega. \tag{2}$$

Это обстоятельство позволяет получить уравнения движения заряженной частицы в заданном электромагнитном поле.

В качестве M^4 возьмем теперь пространство Эйнштейна (см. [1]). С топологической точки зрения M^4 является прямым произведением оси времени $\mathbf{R}$ и трехмерной сферы $\mathbf{S}^3$. Метрика ds задается формулой

$$c^2dt^2-R^2\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta\,(d\varphi^2+\sin^2\varphi d\psi^2)\right). \tag{3}$$

Здесь c — скорость света; R — радиус сферы; ϑ, φ, ψ — сферические координаты на $\mathbf{S}^3$.

В пространстве Эйнштейна, как и в пространстве Минковского, существуют нетривиальные стационарные электрические поля. Действительно, положим $f_i=0$, $i\geqslant 1$, и воспользуемся формулами

$$F_{ij}=\frac{\partial f_j}{\partial x^i}-\frac{\partial f_i}{\partial x^j}. \tag{4}$$

Следовательно, отличными от нуля могут быть только компоненты $F_{0j}=-F_{j0}$, $j\geqslant 1$. Согласно (4),

$$F_{0j}=-\partial f_0/\partial x^j.$$

Ввиду того что электрическое поле предполагается постоянным, функция f_0 не зависит от координаты $x^0=ct$.

Так как коэффициенты g_{0k}, $k\geqslant 1$, метрики (3) равны нулю, то из формулы

$$F^{ik}=g^{ip}g^{kq}F_{pq}$$

вытекает, что $F^{ik}\neq 0$ лишь при $i=0$ или $k=0$. Поскольку $g_{00}=1$, то

$$F^{0k}=g^{kq}F_{0q}=-g^{kq}\frac{\partial f_0}{\partial x^q}.$$

Следовательно, второе уравнение Максвелла (1) принимает следующий вид:

$$-\frac{1}{\sqrt{g_*}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g_*}\,g^{kq}\frac{\partial f_0}{\partial x^q}\right)=0,\quad k,\ q\geqslant 1. \tag{5}$$

Здесь g_* — определитель матрицы $\|g_{ij}\|$, $i,j\geqslant 1$; ясно, что $g_*=-g$.

Левая часть уравнения (5), очевидно, равна Δf_0, где Δ — оператор Лапласа—Бельтрами стандартной римановой метрики на трехмерной сфере $\mathbf{S}^3$. Следовательно, f_0 — гармоническая функция на $\mathbf{S}^3$.

Рассмотрим теперь водородоподобный атом в пространстве Эйнштейна: неподвижное массивное ядро создает симметричное электрическое поле, в котором движется заряженная частица — электрон. Ввиду естественного предположения о симметрии электрический потенциал f_0 есть функция от расстояния на сфере $\mathbf{S}^3$. Поместим ядро в один из полюсов сферы, где $\vartheta=0$. Тогда f_0 зависит лишь от угла ϑ. Уравнение Лапласа—Бельтрами (5)

$$\Delta f_0=\frac{1}{R^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin^2\vartheta\frac{\partial f_0}{\partial\vartheta}\right)=0$$

легко решается:

$$f_0=-\gamma\operatorname{ctg}\vartheta+\alpha;\quad \alpha,\ \gamma=\mathrm{const}. \tag{6}$$

Постоянная α, конечно, несущественна.

Рассмотрим задачу о движении электрона в упрощенной нерелятивистской постановке, считая, что скорость частицы много меньше скорости света. В этом случае

$$m\frac{ds}{dt}=mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=mc^2-\frac{mv^2}{2}+O\left(\frac{v^2}{c^2}\right),$$

где

$$v^2=R^2(\dot\vartheta^2+\sin^2\vartheta\,(\dot\varphi^2+\sin^2\varphi\dot\psi^2))$$

— квадрат скорости заряженной частицы. Пренебрегая отношением v^2/c^2, действие (2) можно упростить:

$$I=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{mv^2}{2}-ecf_0\right)dt.$$

Таким образом, приходим к классической ньютоновской модели движения в пространстве постоянной кривизны с потенциалом (6). Эта задача была рассмотрена в [2], где показано, что все орбиты заряженной частицы замкнуты. В точной релятивистской постановке орбиты уже не будут замкнутыми из-за смещения перицентров.

2. Обобщенная задача Бертрана. Результат работы [2] приводит к следующей задаче: найти все потенциалы V, зависящие лишь от расстояния (т. е. от угла ϑ), с замкнутыми орбитами. Оказывается [2], что к функции (6) — аналогу ньютоновского потенциала — надо добавить функцию

$$V = k\,\mathrm{tg}^2\vartheta/2, \quad k = \mathrm{const}.$$

Эта функция является естественным аналогом потенциала Гука.

Поскольку в этих случаях орбиты замкнуты, то по теореме Гордона [3] периоды T обращения по орбитам зависят лишь от полной энергии h. Укажем явные формулы для функций $T(h)$, считая для простоты, что масса материальной точки m и радиус сферы R равны единице.

Как известно, в евклидовом пространстве период колебаний груза на упругой пружине не зависит от энергии. Для сферы $\mathbf{S}^3$ это уже не так:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k+2h}}. \tag{7}$$

Потенциал ньютоновского типа (6) имеет две особые точки в противоположных полюсах $\mathbf{S}^3$: $\vartheta=0$ и $\vartheta=\pi$. Если $\gamma>0$, то первый полюс будет притягивающим. Зависимость периода от энергии дается формулой [2]

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\frac{h}{\gamma} + \sqrt{\frac{h^2}{\gamma^2} + 1}} \Bigg/ \sqrt{\frac{h^2}{\gamma^2} + 1}. \tag{8}$$

Аналогичную задачу можно рассмотреть и для трехмерного пространства Лобачевского $\mathbf{L}^3$. Реализуем это пространство как гиперболоид в четырехмерном пространстве $\mathbf{R}^4=\{x, y, z, u\}$

$$x^2+y^2+z^2-u^2 = -1. \tag{9}$$

Метрика является ограничением псевдоевклидовой метрики в $\mathbf{R}^4$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2-\dot{u}^2 \tag{10}$$

на поверхность (9). Хорошо известно, что тогда (9) будет пространством Лобачевского с кривизной -1.

Параметризуем поверхность (9) координатами ϑ, φ, ψ:

$$x = \mathrm{sh}\,\vartheta \sin\varphi \sin\psi, \quad y = \mathrm{sh}\,\vartheta \sin\varphi \cos\psi, \quad z = \mathrm{sh}\,\vartheta \cos\varphi, \quad u = \mathrm{ch}\,\vartheta.$$

Метрика (10) примет следующий вид:

$$\dot{\vartheta}^2 + \mathrm{sh}^2\,\vartheta\,(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\,\dot{\psi}^2).$$

Найдем гармонические функции f, зависящие от расстояния до фиксированной точки с координатами $x=y=z=0$, $u=1$. Разумеется, расстояние следует вычислять в метрике (10). Легко понять, что тогда функция f зависит лишь от координаты ϑ и удовлетворяет уравнению Бельтрами—Лапласа

$$\mathrm{sh}^{-2}\,\vartheta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sh}^2\,\vartheta \frac{\partial f}{\partial\vartheta}\right) = 0.$$

Его решения имеют вид

$$f = -\gamma\,\frac{\mathrm{ch}\,\vartheta}{\mathrm{sh}\,\vartheta} + \alpha; \quad \alpha, \ \gamma = \mathrm{const}. \tag{11}$$

При $\vartheta=0$ будем иметь особенность ньютоновского типа. Оказывается, если функцию (11) с положительной постоянной γ взять в качестве потенциальной энергии, то все ограниченные орбиты материальной точки в $\mathbf{L}^3$ снова будут замкнутыми.

Следуя работе [2], рассмотрим обобщенную задачу Бертрана в пространстве Лобачевского: найти все потенциалы $V(\vartheta)$, для которых все ограниченные орбиты материальной точки замкнуты. Массу частицы будем считать равной единице. Разумеется, следует предположить, что ограниченные орбиты существуют.

Теорема. *Решением обобщенной задачи Бертрана являются две функции*

$$V=-\gamma \operatorname{cth} \vartheta, \quad \gamma>0, \tag{12}$$

$$V=k \operatorname{th}^2 \vartheta/2, \quad k>0. \tag{13}$$

Доказательство проведем по схеме, изложенной в [2] для случая сферы $\mathbf{S}^3$. Справедлива простая

Лемма. *Если потенциальная энергия зависит лишь от координаты ϑ, то каждая орбита лежит в некоторой двумерной плоскости $\mathbf{L}^2 \subset \mathbf{L}^3$, проходящей через точку $\vartheta=0$.*

Для фиксированной плоскости $\mathbf{L}^2$ угловые координаты φ, ψ можно выбрать так, чтобы эта плоскость определялась уравнением $\psi=\mathrm{const}$. Итак, имеется система с двумя степенями свободы, лагранжиан которой равен

$$\frac{1}{2}(\dot\vartheta^2+\operatorname{sh}^2\vartheta\dot\varphi^2)-V(\vartheta).$$

Циклической координате φ отвечает интеграл

$$\operatorname{sh}^2\vartheta\dot\varphi=c. \tag{14}$$

С его помощью можно понизить число степеней свободы, вводя функцию Рауса

$$R_c=\frac{\dot\vartheta^2}{2}-W_c(\vartheta), \quad W_c=V+\frac{c^2}{2\operatorname{sh}^2\vartheta}.$$

Функция W_c называется приведенным потенциалом. Как известно, позиционная координата ϑ удовлетворяет уравнению Рауса

$$\ddot\vartheta=-\frac{dW_c}{d\vartheta}. \tag{15}$$

Введем новые переменные r и ρ, полагая

$$r=\operatorname{th}\vartheta, \quad \rho=1/r.$$

Рассмотрим нетривиальный случай, когда $c\neq0$ (иначе будем иметь движение по прямой в $\mathbf{L}^2$, проходящей через точку $\vartheta=0$). Из (14) вытекает, что тогда φ — монотонная функция времени, и поэтому в качестве параметра на орбите можно взять угловую переменную φ. Будем искать уравнение орбиты в виде $\rho=\rho(\varphi)$. Обозначая штрихом дифференцирование по φ, получим

$$\rho'=-\dot\vartheta/c, \quad \rho''=(\rho')^{\cdot}/\dot\varphi=-\ddot\vartheta\operatorname{sh}^2\vartheta/c^2.$$

Подставим эти формулы в уравнение (15):

$$\rho''+\rho=\frac{\operatorname{sh}^2\vartheta}{c^2}\,\frac{dV}{d\vartheta}. \tag{16}$$

Введем функцию U, полагая

$$V(\vartheta)=U(r),\ r=\operatorname{th}\vartheta.$$

Тогда уравнение (16) примет вид

$$\rho''+\rho=\frac{1}{c^2\rho^2}U'\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{17}$$

Его решения задают орбиты частицы в $\mathbf{L}^2$. Оно совпадает с известным уравнением Клеро в задаче о движении в центральном поле по евклидовой плоскости. Согласно классической теореме Бертрана, ограниченные орбиты будут замкнутыми лишь в двух случаях: $U=-\gamma/r$, $\gamma>0$ и $U=kr^2/2$, $k>0$. Теорема доказана.

Если траектории замкнуты, то их период зависит лишь от энергии. Эту зависимость проще всего определить, рассматривая семейство круговых орбит $\vartheta=\mathrm{const}$. Так как $\dot{\vartheta}=0$, то

$$h=W_c(\vartheta). \tag{18}$$

Связь расстояния ϑ с постоянной c находится из уравнения

$$\frac{dW_c}{d\vartheta}=0.$$

Для потенциала (13) это соотношение принимает следующий вид:

$$\operatorname{th}^2\vartheta=c/\sqrt{k}. \tag{19}$$

Используя (14), найдем формулу для периода

$$T=2\pi\operatorname{sh}^2\vartheta/c.$$

Исключая ϑ и c с помощью формул (18) и (19), получим искомое соотношение, аналогичное (7):

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{k-2h}}.$$

Для потенциала ньютоновского типа (12) получается следующая формула для периода:

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{-\frac{h}{\gamma}-\sqrt{\frac{h^2}{\gamma^2}-1}}\bigg/\sqrt{\frac{h^2}{\gamma^2}-1}. \tag{20}$$

Так как

$$h=-\gamma\operatorname{cth}\vartheta+\frac{c^2}{2\operatorname{sh}^2\vartheta},$$

то для ограниченных траекторий $h<-\gamma$. Следовательно, в формуле (20) под радикалами стоят положительные выражения.

3. Законы Кеплера. Рассмотрим для определенности движение частицы в трехмерном пространстве постоянной положительной кривизны, равной 1, под действием потенциальной силы с гармоническим потенциалом (6). Пусть M — притягивающий, а M' — отталкивающий центры на $\mathbf{S}^3$; точки M и M' — антиподальные. Как показано в [2], каждая орбита частицы лежит на двумерной сфере $\mathbf{S}^2\subset\mathbf{S}^3$ единичного радиуса, содержащей точки M и M'. Это аналог леммы из п. 2.

Первый закон Кеплера. *Орбиты частицы — квадрики на* $\mathbf{S}^2$, *в одном из фокусов которых находится притягивающий центр* M.

Квадрика — это линия пересечения сферы с конусом второго порядка, вершина которого совпадает с центром сферы. Квадрики на поверхностях постоянной кривизны обладают многими свойствами, характерными для конических сечений на евклидовой плоскости. В частности, можно говорить об их фокусах F_1 и F_2: любой луч света, выходящий из F_1, после отражения от квадрики обязательно проходит через точку F_2 (лучи света, разумеется, совпадают с большими кругами на $\mathbf{S}^2$). Каждая квадрика делит сферу на две части. Поэтому можно считать, что отталкивающий центр M' также является фокусом орбиты.

Первый обобщенный закон Кеплера установлен в работе [2]. Там же показано, что орбиты обобщенной задачи Гука (движение точки в поле с потенциалом $k(\mathrm{tg}^2\vartheta)/2$) также являются квадриками, центры которых совпадают с притягивающим центром M.

В каждый момент времени имеется единственная дуга большого круга, соединяющая центр M и материальную точку m («радиус-вектор» точки m). К сожалению, нельзя утверждать, что площадь на $\mathbf{S}^2$, заметаемая этой дугой, равномерно растет со временем. Чтобы исправить это положение, введем воображаемую точку m', заменяя сферические координаты ϑ, φ точки m на $2\vartheta, \varphi$. Ясно, что точка m' отстоит от притягивающего центра M на вдвое большем расстоянии. Если угол θ больше $\pi/2$, то центры M и M' следует поменять ролями.

Второй закон Кеплера. *Дуга большого круга, соединяющая M и m', в равные промежутки времени заметает на сфере равные площади.*

Действительно, при смещении точки m' на бесконечно малый угол $d\varphi$ дуга опишет площадь

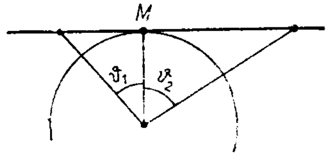
$$dS = \left(\int\limits_0^{2\vartheta} \sin\tau d\tau\right) d\varphi = 2\sin^2\vartheta d\varphi.$$

Остается воспользоваться циклическим интегралом $\sin^2\vartheta\dot{\varphi} = \mathrm{const}$.

Второй закон Кеплера, конечно, справедлив для движения в центральном поле по любой поверхности постоянной кривизны.

Пусть F_1, F_2 — фокусы квадрики. Через эти точки проходит единственная большая окружность сферы $\mathbf{S}^2$. Квадрика делит эту окружность на две части; длину каждой из этих двух дуг можно назвать большой осью квадрики. Их сумма равна, конечно, 2π.

Третий закон Кеплера. *Период обращения по орбите зависит только от ее большой оси.*



Доказательство. В [2] получено уравнение проекции орбиты на плоскость, касающуюся сферы $\mathbf{S}^2$ в точке M (рисунок):

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}; \; p = \frac{c^2}{\gamma}, \; e^2 = 1 + \frac{2c^2}{\gamma^2}\left(h - \frac{c^2}{2}\right). \tag{21}$$

Поэтому большая ось a складывается из двух дуг ϑ_1 и ϑ_2, причем

$$\mathrm{tg}\,\vartheta_1 = \frac{p}{1+e}, \; \mathrm{tg}\,\vartheta_2 = \frac{p}{1-e} \tag{22}$$

(см. рисунок). Следовательно,

$$\mathrm{tg}\,a = \frac{\mathrm{tg}\,\vartheta_1 + \mathrm{tg}\,\vartheta_2}{1 - \mathrm{tg}\,\vartheta_1\,\mathrm{tg}\,\vartheta_2} = \frac{2p}{1 - e^2 - p^2}.$$

Воспользовавшись формулами (21), получим

$$\operatorname{tg} a = -\gamma/h. \tag{23}$$

С учетом (8) получаем окончательно

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{-\operatorname{tg} a + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}} / \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}, \tag{24}$$

что и требовалось.

Отметим, что формула (24) не зависит от того, какая из двух возможных больших осей квадрики выбрана.

4. Уравнение Кеплера. В случае плоского пространства положение тела на орбите и время связаны знаменитым уравнением Кеплера

$$u - e\sin u = \zeta, \tag{25}$$

где $u(\zeta)$ — эксцентрическая (средняя) аномалия, e — эксцентриситет орбиты. Наша задача — получить аналог уравнения (25) для пространства постоянной кривизны.

Зададим сферу $\mathbf{S}^2$ уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

и предположим, что фокусы $F_1 = M$, F_2 орбиты-квадрики расположены в точках с координатами

$$(\alpha,\ \beta,\ 0),\ (\alpha,\ -\beta,\ 0);\ \alpha^2+\beta^2 = 1.$$

Величины α, β нетрудно выразить через постоянные интегрирования. Действительно, расстояние между фокусами равно $\vartheta_* = \vartheta_2 - \vartheta_1$ (см. рисунок). В соответствии с формулами (22)

$$\operatorname{tg}\vartheta_* = \frac{\operatorname{tg}\vartheta_2 - \operatorname{tg}\vartheta_1}{1+\operatorname{tg}\vartheta_1 \operatorname{tg}\vartheta_2} = \frac{2pe}{1-e^2+p^2}. \tag{26}$$

С другой стороны,

$$\cos\vartheta_* = \alpha^2 - \beta^2; \tag{27}$$

формулы (26) и (27) устанавливают искомую связь.

Далее, квадрики на $\mathbf{S}^2$ с фиксированными фокусами $F_1 = M$ и F_2 можно параметризовать с помощью эллиптических функций Якоби:

$$x = \operatorname{dn}(\lambda,\ \alpha)\operatorname{sn}(\mu,\ \beta),\ y = \operatorname{sn}(\lambda,\ \alpha)\operatorname{dn}(\mu,\ \beta),\ z = \operatorname{cn}(\lambda,\ \alpha)\operatorname{cn}(\mu,\ \beta). \tag{28}$$

Параметр μ «нумерует» квадрики, а параметр λ будет играть роль эксцентрической аномалии. Параметр μ можно выразить через постоянные интегралов энергии и площадей. Действительно, если a — большая ось орбиты, то

$$\cos a = (1-\alpha^2)\operatorname{sn}^2\mu - \operatorname{dn}^2\mu.$$

Остается воспользоваться формулой (23).

Совершим линейное преобразование

$$x' = \alpha x + \beta y,\ y' = -\beta x + \alpha y,\ z' = z.$$

В новых переменных притягивающий центр M будет иметь координаты $(1, 0, 0)$. В соответствии с интегралом площадей $y'\dot{z}' - \dot{y}'z' = c$. Или в старых переменных

$$(-\beta x + \alpha y)\dot{z} + (\beta\dot{x} - \alpha\dot{y})z = c.$$

Подставляя сюда формулы (28), получим уравнение

$$-E\dot{\lambda}\,\mathrm{sn}\,\lambda+\dot{\lambda}\,\mathrm{dn}\,\lambda=\dot{\zeta},$$

$$E=\frac{\beta^3\,\mathrm{sn}\,\mu}{\alpha\,\mathrm{dn}\,\mu},\quad \dot{\zeta}=-\frac{c}{\alpha\,\mathrm{dn}\,\mu\,\mathrm{cn}\,\mu}=\mathrm{const}. \tag{29}$$

Хорошо известно (см., например, [4]), что

$$\int \mathrm{dn}\,\lambda d\lambda=\mathrm{am}\,\lambda,\quad \int \mathrm{sn}\,\lambda d\lambda=\frac{1}{2\alpha}\ln\frac{\mathrm{dn}\,\lambda-\alpha\,\mathrm{cn}\,\lambda}{\mathrm{dn}\,\lambda+\alpha\,\mathrm{cn}\,\lambda}.$$

Полагая $\varphi=\mathrm{am}\,\lambda$, уравнение (29) можно переписать в следующем виде:

$$\varphi-\frac{E}{2\alpha}\ln\frac{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}-\alpha\cos\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}+\alpha\cos\varphi}=\zeta. \tag{30}$$

Это и есть обобщенное уравнение Кеплера. При малых значениях α оно переходит в уравнение вида (25)

$$\varphi+E\cos\varphi=\zeta.$$

Параметр E есть функция от e и p, обращающаяся в нуль при $e=0$.

Можно показать, что $d\zeta/d\varphi>0$, если $\alpha>\beta$. Следовательно, в этом случае из уравнения (30) можно однозначно найти φ как функцию времени. Если $\alpha>\beta$, то орбиту-квадрику следует параметризовать переменной μ.

Примечание. Я. Е. Славяновский в [5] рассмотрел задачу о вращении сферического волчка с изотропным потенциалом (зависящим лишь от угла нутации) и нашел потенциалы, когда все траектории волчка замкнуты. Стандартное двулистное накрытие $S^3\to SO(3)$ сводит эту задачу к задаче о движении частицы по пространству положительной кривизны в центральном поле, рассмотренной в [2]. Я. Е. Славяновский нашел аналоги потенциалов Ньютона и Гука. Однако в работе [5] потенциал ньютоновского типа (6) не связывается с гармоническими функциями на S^3 и не отмечается возможность обобщения этих результатов на трехмерные пространства отрицательной кривизны. В [6] решена задача о квантовании классических систем, найденных в [5].

Выражаю признательность А. А. Бурову, обратившему мое внимание на работы [5] и [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93—013—16244).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эддингтон А. С. Теория относительности. М.; Л., 1934.
2. Kozlov V. V., Harin A. O. Kepler's problem in constant curvature spaces//Celest. Mech. and Dynam. Astron. 1992. **54**. 393—399.
3. Gordon W. B. On the relation between period and energy in periodic dynamical systems//J. Math. and Mech. 1969. **19**, N 2. 111—114.
4. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. М., 1963.
5. Slawianowski J. J. Betrand systems on $SO(3, \mathbf{R})$ and $SU(2)$//Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys. 1980. 28, N 2. 83—94.
6. Slawianowski J. J., Slominski J. Quantized Bertrand systems on $SO(3, \mathbf{R})$ and $SU(2)$//Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys. 1980. **28**, N 2. 99—108.