УДК 517.9+531.01

В. В. Козлов, Н. В. Денисова

Полиномиальные интегралы геодезических потоков на двумерном торе

Геодезические линии римановой метрики на поверхности описываются гамильтоновой системой с двумя степенями свободы, функция Гамильтона которой квадратична по импульсам. Ввиду однородности каждый интеграл задачи о геодезических является функцией от полиномиальных по импульсам интегралов. Геодезический поток на поверхности рода больше единицы вообще не допускает дополнительного непостоянного интеграла, с другой стороны, есть многочисленные примеры метрик на торе, геодезические потоки которых вполне интегрируемы: имеются независимые от гамильтониана полиномиальные интегралы степени ≤ 2. По-видимому, степень дополнительного "неприводимого" полиномиального интеграла геодезического потока на торе вообще не может превосходить двух. В настоящей работе эта гипотеза доказана для метрик, которыми можно как угодно точно аппроксимировать любую метрику на двумерном торе.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение. Основной результат

Пусть Σ – замкнутая двумерная поверхность с римановой метрикой ds. В локальных изотермических координатах q_1, q_2 на Σ эта метрика имеет вид

$$ds^2 = \frac{M}{2}\left(dq_1^2 + dq_2^2\right), \tag{1.1}$$

где M – положительная функция от q_1 и q_2.

Геодезические линии римановой метрики (1.1) описываются гамильтоновой системой

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \qquad k = 1, 2, \tag{1.2}$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2M}. \tag{1.3}$$

Фазовым пространством этой системы служит пространство кокасательного расслоения $T^*\Sigma$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-013-16244) и Международного научного фонда (грант MCY000).

© В. В. Козлов, Н. В. Денисова 1994

Пусть $F\colon T^*\Sigma \to \mathbb{R}$ – гладкий интеграл системы (1.2): скобка Пуассона $\{H, F\}$ тождественно равна нулю. Представим F в виде формального ряда Маклорена по p_1, p_2:

$$\sum_s F_s(p, q), \tag{1.4}$$

где F_s – однородная форма по импульсам p_1, p_2 степени s. Справедливо простое

Предложение 1. *Каждая однородная форма разложения* (1.4) – *интеграл уравнений Гамильтона* (1.2).

В частности, $s \geq 1$ (поскольку нет непостоянных интегралов, зависящих лишь от q_1, q_2). Конечно, среди полиномиальных интегралов F_s не все независимы. Предложение 1 сводит задачу об интегрируемости системы с гамильтонианом (1.3) к поиску однородных полиномиальных интегралов.

Замечание. В работе [1] приведен пример гладкой метрики на замкнутой поверхности Σ любого рода, геодезический поток которой допускает гладкий интеграл F с нулевым рядом Маклорена (1.4). Этот пример следует отнести к разряду "патологических": хотя функции H и F не всюду зависимы, однако $F = 0$ в целой области фазового пространства $T^*\Sigma$.

В [2] доказано, что если род поверхности Σ больше 1, то уравнения (1.2) не допускают полиномиального интеграла, независимого от функции H. Другие доказательства этого результата даны в работах [3] и [4]. Напротив, имеются многочисленные примеры метрик на сфере и торе, геодезические потоки которых допускают дополнительные полиномиальные интегралы.

Определение. Полиномиальный интеграл наименьшей степени, независимый от интеграла H, назовем *неприводимым*.

Если геодезический поток вообще не допускает дополнительного полиномиального интеграла, то в этом случае степень неприводимого интеграла можно считать равной нулю. Ясно, что любой интеграл уравнений Гамильтона (1.2) есть функция от неприводимого интеграла и гамильтониана H.

По-видимому, степень неприводимого интеграла геодезического потока на ориентированной поверхности рода p не превосходит

$$4 - 2p. \tag{1.5}$$

При $p \geq 2$ эта оценка является результатом работы [2]. Для тора ($p = 1$) получаем, что степень неприводимого интеграла не превосходит 2. В [5] приведены примеры метрик на сфере, допускающие интегралы степени 3 и 4.

Ниже рассматривается случай $p = 1$. Хорошо известно, что для тора изотермические координаты можно ввести в целом. Так что будем считать, что в (1.3) q_1 и q_2 – угловые координаты на двумерном торе $\Sigma = \mathbb{T}^2$.

Оценка (1.5) при $p = 1$ установлена в [5] при одном из следующих дополнительных предположений:

1) F – четная функция по p_1 и p_2,
2) F четна по p_1 (p_2) и нечетна по p_2 (p_1).

Мы рассматриваем случай, когда положительная функция M является тригонометрическим многочленом. Пусть конечная сумма

$$M = \sum [M]_{k_1 k_2} e^{i(k_1 q_1 + k_2 q_2)} \tag{1.6}$$

будет ее рядом Фурье. Спектром функции M назовем конечное подмножество целочисленной решетки

$$S = \{k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 : [M]_{k_1 k_2} \neq 0\}.$$

Оно переходит в себя при отражении $k \to -k$.

Наш основной результат составляет

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что уравнения Гамильтона* (1.2) *с гамильтонианом* (1.3) *допускают полиномиальный по импульсам интеграл F, независимый от интеграла H. Тогда*

1) *если степень F четна, то спектр S лежит на двух прямых, ортогонально пересекающихся в начале координат;*
2) *если степень F нечетна, то S лежит на одной прямой, проходящей через начало координат.*

В первом случае поворотом вокруг начала координат можно добиться совмещения прямых, содержащих спектр S, с осями координат. Тогда гамильтониан (1.3) будет иметь вид

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2[f(q_1) + g(q_2)]}. \tag{1.7}$$

Здесь f и g – периодические функции одного переменного, сумма которых положительна. Функция (1.7) – гамильтониан лиувиллевой системы с торическим конфигурационным пространством. Переменные q_1 и q_2 разделяются: уравнения Гамильтона (1.2) с гамильтонианом (1.7) допускают два квадратичных интеграла

$$\Phi_1 = \frac{p_1^2}{2} - Hf, \qquad \Phi_2 = \frac{p_2^2}{2} - Hg.$$

Так как $\Phi_1 + \Phi_2 = 0$, то эти интегралы зависимы. Однако, каждый из них независим от интеграла энергии H.

Во втором случае можно считать, что прямая, несущая спектр S, совпадает с первой координатной осью. Тогда угловая координата q_2 будет циклической: гамильтониан H не зависит от q_2. Этой координате соответствует линейный циклический интеграл $\Phi = p_2$.

Еще Биркгоф заметил (см. [6, гл. II]), что линейному по импульсам интегралу динамической системы с двумя степенями свободы отвечает скрытая локальная циклическая координата, а наличие дополнительного квадратичного интеграла связано с возможностью введения локальных разделяющих переменных. Глобальные варианты этих результатов Биркгофа обсуждаются в [3] и [7].

С учетом сказанного, из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Если уравнения геодезических на торе с метрикой* (1.1) *где* M *– тригонометрический многочлен, допускают дополнительный полиномиальный интеграл* F, *то найдется независимый от функции* H *полиномиальный интеграл степени* ≤ 2. *Причем, если степень* F *нечетна, то существует линейный интеграл.*

С задачей об однородных полиномиальных интегралах геодезических потоков тесно связана задача о полиномиальных интегралах гамильтоновой системы на $T^*\Sigma = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$ с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2). \tag{1.8}$$

Здесь V – гладкая функция на $\mathbb{T}^2$ – потенциальная энергия обратимой механической системы. Кинетическая энергия T равна, конечно, $(p_1^2 + p_2^2)/2$. Полиномиальные по импульсам интегралы этой системы уже не однородны:

$$F = F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + \cdots + F_0. \tag{1.9}$$

Предложение 2. *Предположим, что система с гамильтонианом* (1.8) *имеет полиномиальный интеграл степени* n, *независимый от функции* (1.8). *Тогда система с гамильтонианом* (1.3), *где* $M = h - V$, $h > \max V$, *допускает однородный полиномиальный интеграл степени* $\leq n$.

Укажем схему доказательства предложения 2 (ср. [5]). Прежде всего заметим, что скобка Пуассона двух однородных полиномов по p_1, p_2 степени r и s будет однородным полиномом степени $r + s - 1$. Отсюда вытекает следующий факт: если сумма (1.9) – интеграл гамильтоновой системы с гамильтонианом (1.8), то функции

$$\Phi_1 = F_n + F_{n-2} + \cdots, \qquad \Phi_2 = F_{n-1} + F_{n-3} + \cdots$$

также будут интегралами этой системы. Наконец, однородные по импульсам полиномы

$$\begin{gathered} F_n + F_{n-2}\left(\frac{T}{h-V}\right) + F_{n-4}\left(\frac{T}{h-V}\right)^2 + \cdots, \\ F_{n-1} + F_{n-3}\left(\frac{T}{h-V}\right) + \cdots \end{gathered} \tag{1.10}$$

являются интегралами геодезического потока на торе с метрикой

$$\frac{p_1^2 + p_2^2}{2(h-V)}. \tag{1.11}$$

Если функции (1.8) и (1.9) независимы, то один из полиномов (1.10) независим от гамильтониана (1.11).

Согласно предложению 2, если система с гамильтонианом (1.11) не допускает новых полиномиальных интегралов, то и система с функцией Гамильтона (1.8) не имеет дополнительного интеграла в виде полинома по импульсам с однозначными

на $\mathbb{T}^2$ коэффициентами. Следовательно, задача об интегрируемости геодезических потоков включает как частный случай задачу об интегрируемости обратимых систем на торе с гамильтонианом вида (1.8). Последняя задача изучалась в работах [8], [9]. В [8] рассматривались условия существования интегралов степени 3 и 4. Показано, что если имеется новый интеграл третьей степени, то обязательно найдется линейный интеграл. Если же имеется интеграл четвертой степени, то существует независимый интеграл степени ≤ 2. В [9] рассматривались многомерные гамильтоновы системы на m-мерном торе $\mathbb{T}^m = \{q_1, \dots, q_m \bmod 2\pi\}$ с гамильтонианом вида

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}p_ip_j + V(q_1, \dots, q_m),$$

где $\|a_{ij}\|$ – положительно определенная матрица с постоянными коэффициентами, V – функция на торе $\mathbb{T}^m$. Изучались условия существования m независимых интегралов в виде полиномов по импульсам p с однозначными на $\mathbb{T}^m$ коэффициентами. Априори не предполагается, что интегралы инволютивны. Эта задача полностью решена для случая, когда потенциал V – тригонометрический многочлен. Оказалось, что полный набор полиномиальных интегралов существует тогда и только тогда, когда спектр многочлена V лежит на $k \leq m$ прямых, попарно ортогонально пересекающихся в начале координат. В частности, найдутся m независимых полиномиальных интегралов степени ≤ 2. Отметим, что задача о полиномиальных интегралах фиксированной степени много проще задачи, рассмотренной в [9].

Замечание. Риманова метрика называется невырожденно интегрируемой (см. [10]), если ее геодезический поток интегрируем при помощи гладкого интеграла, все критические многообразия которого на изоэнергетической поверхности невырождены. А.Т. Фоменко сформулировал гипотезу о том, что на двумерном торе любая невырожденно интегрируемая метрика является лиувиллевой. Эта гипотеза тоже пока не доказана. Однако Т.З. Нгуен, Л.С. Полякова и В.В. Калашников (мл.) доказали, что это предположение верно, по крайней мере, с точки зрения сложности интегрируемых метрик (понятие сложности введено в [10]). А именно, сложность геодезического потока произвольной невырожденно интегрируемой гладкой римановой метрики на двумерном торе совпадает со сложностью геодезического потока некоторой лиувиллевой метрики.

§ 2. Интегралы нечетной степени

Сначала укажем некоторые вспомогательные результаты общего характера. Пусть F_m – однородный полином по p_1, p_2 степени m. Через F_m^* будем обозначать значение этого полинома при $p_1 = 1$, $p_2 = i$ ($i^2 = -1$). Если F зависит от угловых координат q_1, q_2, то F^* – функция на торе $\mathbb{T}^2$.

Лемма 1 [3]. *Многочлен F делится нацело на многочлен $H = (p_1^2 + p_2^2)/(2M)$ в том и только том случае, когда $F^* = 0$.*

Пусть теперь $m \geq 3$.

Лемма 2. *Найдется многочлен F_{m-2} такой, что*

$$F_m = a_0 p_1 p_2^{m-1} + b_0 p_2^m + H \cdot F_{m-2}.$$

Действительно, положим

$$F_m^* = (i)^{m-1}(a_0 + b_0 i).$$

Тогда по лемме 1 однородный многочлен степени m

$$F_m - a_0 p_1 p_2^{m-1} - b_0 p_2^m$$

делится нацело на H, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Полином по импульсам степени $2n+1$ можно представить в следующем виде:*

$$F_{2n+1} = a_0 p_1 p_2^{2n} + b_0 p_2^{2n+1} + H(a_1 p_1 p_2^{2n-2} + b_1 p_2^{2n-1}) + \cdots + H^n(a_n p_1 + b_n p_2), \tag{2.1}$$

где $a_0, b_0, \ldots, a_n, b_n$ – гладкие вещественные функции на $\mathbb{T}^2$.

Доказательство основано на индуктивном применении леммы 2.

Начиная с этого момента будем считать, что F_{2n+1} – интеграл геодезического потока на торе.

Лемма 4. *F_{2n+1}^* – голоморфная функция от $z = q_1 + iq_2$.*

Это утверждение – ключевой момент известного метода Биркгофа (см. [6, гл. II]), связанного с введением на Σ комплексной структуры, индуцированной изотермическими координатами заданной римановой метрики.

Сам Биркгоф установил голоморфность функции F^* для интегралов первой и второй степени. Доказательство для интеграла произвольной степени можно найти, например, в [3].

Лемма 5. $a_0 + ib_0 = c_1 + ic_2 = \mathrm{const}$.

Действительно, ввиду периодичности коэффициентов интеграла F, голоморфная функция F^* ограничена. Следовательно, она постоянна.

Далее полагаем $a_0 = c_1$, $b_0 = c_2$. Так как (2.1) – интеграл дифференциальных уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_k = \Lambda p_k, \quad \dot{p}_k = \Lambda H \frac{\partial M}{\partial q_k}; \qquad k = 1, 2; \quad \Lambda = \frac{1}{M},$$

то

$$\dot{F}_{2n+1} = \Lambda H^{n+1}\left(a_n\frac{\partial M}{\partial q_1} + b_n\frac{\partial M}{\partial q_2}\right)$$
$$+ \Lambda H^n\left(\frac{\partial a_n}{\partial q_1}p_1^2 + \frac{\partial a_n}{\partial q_2}p_1p_2 + \frac{\partial b_n}{\partial q_1}p_1p_2 + \frac{\partial b_n}{\partial q_2}p_2^2\right) + \cdots$$
$$\cdots + \Lambda H\left(c_1\frac{\partial M}{\partial q_1}p_2^{2n} + 2nc_1\frac{\partial M}{\partial q_2}p_1p_2^{2n-1} + (2n+1)c_2\frac{\partial M}{\partial q_2}p_2^{2n}\right) \equiv 0. \qquad (2.2)$$

Из этого соотношения получаем цепочку уравнений в частных производных, которым удовлетворяют коэффициенты полинома (2.1):

$$\frac{\partial a_1}{\partial q_2} + \frac{\partial b_1}{\partial q_1} + 2nc_1\frac{\partial M}{\partial q_2} = 0, \quad -\frac{\partial a_1}{\partial q_1} + \frac{\partial b_1}{\partial q_2} + c_1\frac{\partial M}{\partial q_1}$$
$$+(2n+1)c_2\frac{\partial M}{\partial q_2} = 0, \quad (2.3.1)$$
$$\frac{\partial a_2}{\partial q_2} + \frac{\partial b_2}{\partial q_1} + 2(n-1)a_1\frac{\partial M}{\partial q_2} = 0, \quad -\frac{\partial a_2}{\partial q_1} + \frac{\partial b_2}{\partial q_2} + 2M\frac{\partial a_1}{\partial q_1} + a_1\frac{\partial M}{\partial q_1}$$
$$+(2n-1)b_1\frac{\partial M}{\partial q_2} = 0, \quad (2.3.2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial a_n}{\partial q_2} + \frac{\partial b_n}{\partial q_1} + 2a_{n-1}\frac{\partial M}{\partial q_2} = 0, \quad -\frac{\partial a_n}{\partial q_1} + \frac{\partial b_n}{\partial q_2} + 2M\frac{\partial a_{n-1}}{\partial q_1} + a_{n-1}\frac{\partial M}{\partial q_1}$$
$$+3b_{n-1}\frac{\partial M}{\partial q_2} = 0, \quad (2.3.n)$$

$$2M\frac{\partial a_n}{\partial q_1} + a_n\frac{\partial M}{\partial q_1} + b_n\frac{\partial M}{\partial q_2} = 0. \qquad (2.3.0)$$

Уравнения (2.3.1) получаются из (2.2) после предварительного сокращения на ΛH и подстановки $p_1 = 1, p_2 = i$. Выведем уравнения (2.3.2). Для этого перепишем уравнение (2.2) после сокращения на ΛH и некоторой перегруппировки слагаемых:

$$\{\dots\}H + \frac{\partial a_1}{\partial q_1}p_1^2p_2^{2n-2} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial q_2} + \frac{\partial b_1}{\partial q_1} + 2nc_1\frac{\partial M}{\partial q_2}\right)p_1p_2^{2n-1}$$
$$+ \left(\frac{\partial b_1}{\partial q_2} + c_1\frac{\partial M}{\partial q_1} + (2n+1)c_2\frac{\partial M}{\partial q_2}\right)p_2^{2n} \equiv 0. \qquad (2.4)$$

Воспользуемся тривиальным тождеством

$$p_1^2p_2^{2n-2} = 2MHp_2^{2n-2} - p_2^{2n}.$$

С учетом уже полученных уравнений (2.3.1) соотношение (2.4) принимает следующий вид:

$$\{\dots\}H + 2MH\frac{\partial a_1}{\partial q_1}p_2^{2n-2} \equiv 0.$$

Снова сокращая на H и подставляя сюда $p_1 = 1$, $p_2 = i$, получаем уравнения (2.3.2). Остальные уравнения цепочки (2.3) выводятся тем же способом.

Для решения системы уравнений (2.3) воспользуемся методом Фурье. Положим

$$a_m = \sum [a_m]_{u,v} e^{i(uq_1+vq_2)}, \qquad b_m = \sum [b_m]_{u,v} e^{i(uq_1+vq_2)}.$$

Уравнения (2.3.1) линейные и поэтому легко решаются:

$$(u^2+v^2)\begin{pmatrix} [a_1]_{u,v} \\ [b_1]_{u,v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2-2nv^2 & (2n+1)uv \\ -(2n+1)uv & -(2n+1)v^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}[M]_{u,v}. \tag{2.5.1}$$

Уравнения (2.3.2) уже нелинейны. Поэтому здесь нельзя получить простые формулы вида (2.5.1). Воспользуемся приемом, предложенным в [9].

Пусть $\mathscr{E}(S)$ – выпуклая оболочка множества S. Это выпуклый многоугольник, причем начало координат является его центром симметрии. Пусть (u, v) – одна из вершин $\mathscr{E}(S)$. Легко понять, что коэффициенты Фурье $[a_2]_{2u,2v}$ и $[b_2]_{2u,2v}$ выражаются только через коэффициенты Фурье функций a_1, b_1, M с номерами u, v:

$$2(u^2+v^2)\begin{pmatrix} [a_2]_{2u,2v} \\ [b_2]_{2u,2v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u^2-2(n-1)v^2 & (2n-1)uv \\ -(2n+1)uv & -(2n-1)v^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [a_1]_{u,v} \\ [b_1]_{u,v} \end{pmatrix}[M]_{u,v}. \tag{2.5.2}$$

Этот метод позволяет получить аналогичные формулы для коэффициентов $[a_k]_{ku,kv}$ и $[b_k]_{ku,kv}$. Выпишем, например, явные формулы при $k = n$:

$$n(u^2+v^2)\begin{pmatrix} [a_n]_{nu,nv} \\ [b_n]_{nu,nv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2n-1)u^2-2v^2 & 3uv \\ -(2n+1)uv & -3v^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [a_{n-1}]_{(n-1)u,(n-1)v} \\ [b_{n-1}]_{(n-1)u,(n-1)v} \end{pmatrix}[M]_{u,v}. \tag{2.5.n}$$

Уравнение (2.3.0) дает еще одно соотношение

$$(2n+1)u[a_n]_{nu,nv} + v[b_n]_{nu,nv} = 0. \tag{2.5.0}$$

Учитывая соотношения (2.5.1)–(2.5.n) и (2.5.0), получаем окончательно:

$$((2n+1)u, v)\begin{pmatrix} (2n-1)u^2-2v^2 & 3uv \\ -(2n+1)uv & -3v^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (2n-3)u^2-4v^2 & 5uv \\ -(2n+1)uv & -5v^2 \end{pmatrix}\cdots$$
$$\cdots\begin{pmatrix} 3u^2-(2n-2)v^2 & (2n-1)uv \\ -(2n+1)uv & -(2n-1)v^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^2-2nv^2 & (2n+1)uv \\ -(2n+1)uv & -(2n+1)v^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{2.6}$$

Лемма 6. *Левая часть соотношения* (2.6) *равна*

$$(2n+1)!!\,(c_1\cos m\alpha + c_2\sin m\alpha), \tag{2.7}$$

где $m = 2n+1$, $\operatorname{tg}\alpha = v/u$.

Это любопытное матричное тождество доказано в добавлении. Ясно, что α – угол между лучом, проходящим через вершину $(u,v) \in S$, и горизонтальной координатной осью.

Сопоставляя (2.6) и (2.7), получаем

$$\operatorname{tg} m\alpha = -\frac{c_1}{c_2}. \tag{2.8}$$

Это соотношение,очевидно, справедливо для всех вершин выпуклой оболочки спектра S. Решениями уравнения (2.8) являются m углов

$$\alpha, \alpha + \frac{\pi}{m}, \alpha + \frac{2\pi}{m}, \ldots, \alpha + \frac{(m-1)\pi}{m},$$

отсчитываемых от горизонтальной оси. Следовательно, многоугольник $\mathscr{E}(S)$ может иметь не более $2m$ вершин, расположенных на прямых $l_1, \ldots, l_m$, которые проходят через начало координат и образуют между собой углы

$$\frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \ldots, \frac{(m-1)\pi}{m}. \tag{2.9}$$

Лемма 7 (см., например, [11]). *Пусть* $0 < \beta < \pi/2$, $\beta \neq \pi/4$ *и* $\beta = p\pi/q$, *где* p, q *– натуральные числа. Тогда* $\operatorname{tg}\beta$ *– иррациональное число.*

Следствие. *Если* m *нечетно, то тангенсы углов* (2.9) *иррациональны.*

Предположим теперь, что спектр S не лежит на одной прямой. Тогда найдутся две различные прямые l_1 и l_2, проходящие через начало координат, и которые содержат две вершины выпуклой оболочки $\mathscr{E}(S)$. Тангенс угла между l_1 и l_2 рационален. Действительно, тангенсы углов, которые составляют прямые l_1, l_2 с координатной осью, рациональны. Остается воспользоваться известной формулой для тангенса разности. С другой стороны, угол между прямыми l_1 и l_2 равен одному из углов (2.9). Согласно следствию из леммы 7 тангенс этого угла иррационален, если m нечетно. Полученное противоречие доказывает теорему 1 для случая интеграла нечетной степени.

§ 3. Интегралы четной степени

Пусть теперь $m = 2n$. С учетом лемм 2 и 5 интеграл четной степени можно представить в следующем виде:

$$F_n = c_1 p_1 p_2^{2n-1} + c_2 p_2^{2n} + H(a_1 p_1 p_2^{2n-3} + b_1 p_2^{2n-2}) + \cdots$$
$$\cdots + H^{n-1}(a_{n-1} p_1 p_2 + b_{n-1} p_2^2) + H^n b_n. \qquad (3.1)$$

Здесь $c_1, c_2 = \mathrm{const}$, $a_1, b_1, \ldots, b_n$ – гладкие функции на $\mathbb{T}^2$.

Приравнивая нулю производную $\dot{F}_{2n}$, получаем цепочку уравнений для коэффициентов полинома (3.1):

$$\frac{\partial a_1}{\partial q_2} + \frac{\partial b_1}{\partial q_1} + (2n-1)c_1 \frac{\partial M}{\partial q_2} = 0, \qquad -\frac{\partial a_1}{\partial q_1} + \frac{\partial b_1}{\partial q_2} + c_1 \frac{\partial M}{\partial q_1} + 2nc_2 \frac{\partial M}{\partial q_2} = 0, \qquad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial q_2} + \frac{\partial b_2}{\partial q_1} + (2n-3)a_1 \frac{\partial M}{\partial q_2} = 0, \qquad -\frac{\partial a_2}{\partial q_1} + \frac{\partial b_2}{\partial q_2} + 2M\frac{\partial a_1}{\partial q_1} + a_1 \frac{\partial M}{\partial q_1} + (2n-2)b_1 \frac{\partial M}{\partial q_2} = 0, \qquad (3.2.2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial b_n}{\partial q_1} + a_{n-1} \frac{\partial M}{\partial q_2} = 0, \qquad \frac{\partial b_n}{\partial q_2} + 2M\frac{\partial a_{n-1}}{\partial q_1} + a_{n-1} \frac{\partial M}{\partial q_1} + 2b_{n-1} \frac{\partial M}{\partial q_2} = 0. \qquad (3.2.n)$$

Пусть (u, v) – вершина выпуклой оболочки спектра S. Применяя метод § 2, получаем равенство, аналогичное (2.6):

$$((2n-1)u^2 - v^2, 2uv) \begin{pmatrix} (2n-3)u^2 - 3v^2 & 4uv \\ -2nuv & -4v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2n-5)u^2 - 5v^2 & 6uv \\ -2nuv & -6v^2 \end{pmatrix} \cdots$$
$$\cdots \begin{pmatrix} u^2 - (2n-1)v^2 & 2nuv \\ -2nuv & -2nv^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Его можно преобразовать к виду (см. добавление)

$$(2n-1)!!\,(c_1 \cos m\alpha + c_2 \sin m\alpha) = 0, \qquad (3.3)$$

где $\operatorname{tg} \alpha = v/u$. Отсюда

$$\operatorname{tg} m\alpha = -\frac{c_1}{c_2} = \mathrm{const}.$$

Следовательно, и в этом случае вершины выпуклой оболочки S лежат на m прямых, которые проходят через начало координат и образуют между собой углы (2.9). При четном $m \geq 4$ среди них есть $\pi/2$, а также $\pi/4$. Используя лемму 7, отсюда легко вывести, что при четном m многоугольник $\mathscr{E}(S)$ может иметь 2, 4, 6

или 8 вершин, причем его главные диагонали (проходящие через начало координат) либо ортогональны, либо пересекаются под углом $\pi/4$. Этот результат интересен сам по себе, однако из него, конечно, нельзя вывести заключение теоремы 1.

Воспользуемся понятием примыкающей вершины, введенным в [9]. Для этого рассмотрим стандартное отношение лексикографического порядка в $\mathbb{R}^2$: будем говорить, что (k_1, k_2) больше (s_1, s_2), если выполнено одно из двух условий

$$1)\ \ k_1 > s_1, \qquad 2)\ \ k_1 = s_1, \quad k_2 > s_2.$$

Пусть $\alpha = (u, v)$ – наибольший элемент спектра S. Ясно, что эта точка является одной из вершин выпуклого многоугольника $\mathscr{E}(S)$. *Вершиной* $\beta \in S$, примыкающей к α, назовем максимальный линейно независимый с α вектор из S. Если спектр S не лежит на одной прямой, то примыкающая вершина заведомо существует. В противном случае, уравнения Гамильтона допускают линейный интеграл. Наша задача заключается в том, чтобы доказать ортогональность векторов α и β.

Лемма 8 [12]. *Пусть* $s\alpha + \beta = \tau_1 + \cdots + \tau_{s+1}$, *где* $\tau_i \in S$. *Тогда* $\tau_k = \beta$ *и* $\tau_j = \alpha$ *для всех* $j \neq k$.

Рассмотрим сначала частный случай, когда наибольший элемент $\alpha = (u, v)$ спектра S лежит на горизонтальной координатной оси. Так что $u > 0$, $v = 0$. Пусть $\beta = (k, l)$ – примыкающая вершина. Покажем, что $k = 0$. Так как спектр S инвариантен при отражении относительно начала координат, то отсюда будет вытекать, что точки S лежат на координатных прямых.

Так как $v = 0$, то угол α из равенства (3.3) равен нулю. Следовательно, постоянная $c_1 = 0$. Ясно, что $c_2 \neq 0$. В противном случае, по леммам 1 и 5, интеграл делится нацело на H.

Решая методом Фурье систему (3.2.1), получим

$$\begin{gathered}[a_1]_\alpha = [b_1]_\alpha = 0,\\ [a_1]_\beta = \frac{mklc_2}{k^2+l^2}[M]_\beta, \qquad [b_1]_\beta = -\frac{ml^2c_2}{k^2+l^2}[M]_\beta.\end{gathered} \tag{3.4.1}$$

Из (3.2.2) выводятся равенства

$$[a_2]_{2\alpha} = [b_2]_{2\alpha} = 0.$$

С их помощью, а также применяя лемму 8, получим

$$\begin{pmatrix}[a_2]_{\alpha+\beta}\\ [b_2]_{\alpha+\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(2k+u)(k+u)\\ -l(2k+u)\end{pmatrix}\frac{[a_1]_\beta[M]_\alpha}{l^2+(k+u)^2}. \tag{3.4.2}$$

Аналогично выводятся формулы для коэффициентов Фурье

$$[a_s]_{\beta+(s-1)\alpha}, \qquad [b_s]_{\beta+(s-1)\alpha}.$$

Выпишем их в явном виде для $s = n-1$:

$$[a_{n-1}]_{(n-1)\alpha} = [b_{n-1}]_{(n-1)\alpha} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} [a_{n-1}]_{\beta+(n-2)\alpha} \\ [b_{n-1}]_{\beta+(n-2)\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k+(n-2)u)(2k+(2n-5)u) \\ -l(2k+(2n-5)u) \end{pmatrix} \frac{[a_{n-2}]_{\beta+(n-3)\alpha}[M]_\alpha}{l^2+(k+(n-2)u)^2}. \qquad (3.4.n-1)$$

Наконец, из последней системы $(3.2.n)$ выводятся равенства

$$[b_n]_{\beta+(n-1)\alpha} = 0,$$
$$(2k+(2n-3)u)[M]_\alpha[a_{n-1}]_{\beta+(n-2)\alpha} = 0. \qquad (3.4.n)$$

Так как $m = 2n \geq 4$, то $n \geq 2$. Поскольку β – примыкающая вершина, то $k > 0$. Следовательно, $2k + (2n-3)u > 0$, и из последнего равенства $(3.4.n)$ вытекает, что

$$[a_{n-1}]_{\beta+(n-2)\alpha} = 0. \qquad (3.5)$$

При $n = 2$ коэффициенты $a_2, b_2, \ldots$ не определены. Из (3.5) вытекает, что $[a_1]_\beta = 0$. Так как $l \neq 0$, $c_2 \neq 0$ и $[M]_\beta \neq 0$, то из (3.4.1) получаем искомое равенство $k = 0$.

Если $n \geq 3$, то $2k + (2n-5)u > 0$ и из равенств (3.4.2)–$(3.4.n-1)$ получаем последовательно

$$[a_{n-2}]_{\beta+(n-3)\alpha} = 0, \ldots, [a_1]_\beta = 0.$$

Но тогда из (3.4.1) вытекает снова, что $k = 0$, что и требовалось.

Вернемся к общему случаю. Пусть $\alpha = (u, v)$ – вершина $\mathscr{E}(S)$, наиболее удаленная от начала координат. Если имеется несколько таких вершин, находящихся на одинаковых расстояниях от нуля, то возьмем одну из них. Положим

$$A = -\begin{pmatrix} \frac{u}{s} & \frac{v}{s} \\ \frac{v}{s} & \frac{u}{s} \end{pmatrix}, \qquad s = \sqrt{u^2+v^2}.$$

Это ортогональная матрица; она задает поворот плоскости на угол $\alpha = \operatorname{arctg} v/u$. Рассмотрим линейное преобразование плоскости $\mathbb{R}^2 = \{q_1, q_2\}$:

$$q' = A^T q.$$

Его можно расширить до канонического преобразования $(q, p) \to (q', p')$, если положить

$$p' = A^{-1} p.$$

Так как матрица A ортогональная, то в новых переменных p', q' гамильтониан (1.3) имеет тот же вид. В знаменателе будет функция $M(q)$, где $q = (A^T)^{-1}q' = Aq'$. Ясно, что $M'(q') = M(Aq'))$ периодична по новым координатам с периодом $2\pi/s$. Следовательно, ее можно разложить в ряд Фурье. Этот ряд будет иметь ровно столько гармоник, сколько ряд Фурье (1.6) функции $M(q_1, q_2)$. Спектр S' тригонометрического многочлена M', очевидно, получается из спектра S с помощью линейного преобразования, задаваемого матрицей A. Так как вектор $A\alpha$ имеет компоненты $(s, 0)$, то наибольшая вершина S' лежит на горизонтальной оси.

Заметим, что уравнения (3.2) линейны и однородны относительно производных. Поэтому формулы (3.3) и (3.4), которые являются следствием (3.2), не зависят от периода функции M. Таким образом, мы находимся в условиях частного случая, рассмотренного выше. Следовательно, спектр S' лежит на координатных осях. Совершая обратное преобразование с ортогональной матрицей A^{-1}, получим, что точки исходного спектра S лежат на двух прямых, ортогонально пересекающихся в начале координат. Теорема 1 полностью доказана.

Добавление. Матричные биномиальные тождества

Положим

$$B_m = \begin{bmatrix} (2m+1)x^2 - 2(n-m)y^2 & (2n-2m+1)xy \\ -(2n+1)xy & -(2n-2m+1)y^2 \end{bmatrix},$$

$$C_m = \begin{bmatrix} (2m+1)x^2 - (2n-2m-1)y^2 & 2(n-m)xy \\ -2nxy & -2(n-m)y^2 \end{bmatrix}.$$

Теорема 2.

$$[(2n+1)x, y]B_{n-1}\dots B_1B_0 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = (2n+1)!!\,(x+iy)^{2n+1}, \tag{1}$$

$$[(2n-1)x^2 - y^2, 2xy]C_{n-2}\dots C_0 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = (2n-1)!!\,(x+iy)^{2n}. \tag{2}$$

Заключение леммы 6 вытекает из матричного биномиального тождества (1). Для этого достаточно положить $c_1 = 1$, $c_2 = \pm i$ ($i^2 = -1$). В свою очередь, равенство (3.3) является следствием тождества (2). Не исключено, что тождества (1)–(2) имеют нетривиальную комбинаторную интерпретацию.

Ниже приводится доказательство теоремы 2, найденное Д. В. Трещёвым. Для определенности рассматривается тождество (1). Левая и правая части (1) – однородные полиномы по x, y степени $2n+1$. Следовательно, достаточно доказать равенство (1) для случая $x^2 + y^2 = 1$. С этой целью положим $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. Тогда равенство (1) принимает вид

$$u_nA_{n-1}\dots A_1A_0 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = (2n+1)!!\,e^{(2n+1)i\alpha}, \tag{3}$$

где

$$u_n = \left[\frac{2n+1}{2}(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}), -\frac{i}{2}(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})\right],$$

$$A_m = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{2n+1}{2}(e^{2i\alpha}+e^{-2i\alpha}) - (2n-1-4m) & -\frac{2n-2m+1}{2}i(e^{2i\alpha}-e^{-2i\alpha}) \\ \frac{2n+1}{2}i(e^{2i\alpha}-e^{-2i\alpha}) & \frac{2n-2m+1}{2}(e^{2i\alpha}+e^{-2i\alpha}-2) \end{bmatrix}.$$

Положим

$$v_1 = 2A_0\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}; \quad v_{k+1} = 2A_k v_k, \qquad k = 1,\dots,n-1.$$

В этих обозначениях равенство (3) имеет вид

$$2^{-n}u_n v_n = (2n+1)!!\, e^{(2n+1)i\alpha}. \tag{4}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&a_0^m = a_1^m = 1, && a_s^m = 2n\dots(2n-s+2),\\
&p_0^m = 1, && p_s^m = (2n+1)a_s^m,\\
&b_0^m = b_1^m = 1, && b_s^m = (2n-2m+s)\dots(2n-2m+2),\\
&q_0^m = 1, && q_s^m = b_s^m(2n-2m+1),\\
&f_0^m = f_m^m = 1, && f_s^m = (2n-2m+2s+1).
\end{aligned}$$

Здесь $s = 1, 2, \dots, m-1$.

Лемма 9.

$$v_m = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k p_{m-k}^m q_k^m e^{2(m-k)i\alpha} \\ (2n+1)i\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k a_{m-k}^m f_k^m b_k^m e^{2(m-k)i\alpha} \end{bmatrix}.$$

Это утверждение несложно доказывается индукцией по m. Любопытно отметить, что v_m не содержит экспонент $e^{2i\alpha}$ в отрицательных степенях.

Выведем теперь из леммы 9 формулу (4). Имеем

$$\begin{aligned}
u_n v_n = \frac{2n+1}{2}\Bigg\{&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k p_{n-k}^n q_k^n\left[e^{(2(n-k)+1)i\alpha} + e^{(2(n-k)-1)i\alpha}\right]\\
&+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a_{n-k}^n f_k^n b_k^n\left[e^{(2(n-k)+1)i\alpha} + e^{(2(n-k)-1)i\alpha}\right]\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Обозначим коэффициент при $(-1)^k(2n+1)\exp\big((2(n-k)+1)i\alpha\big)$ в этом выражении символом μ_k. Тогда равенство (4) эквивалентно серии равенств

$$\mu_0 = 2^n(2n-1)!!, \qquad \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{n+1} = 0.$$

Выпишем в явном виде выражение для μ_k:

$$\mu_k = \frac{1}{2}\big(C_n^k p_{n-k}^n q_k^n - C_n^{k-1} p_{n+1-k}^n q_{k-1}^n \\ + C_n^k a_{n-k}^n f_k^n b_k^n + C_n^{k-1} a_{n+1-k}^n f_{k-1}^n b_{k-1}^n\big).$$

При $k = 0$ в этой сумме надо оставить только первое и третье слагаемые, а при $k = n+1$, наоборот, только второе и четвертое слагаемые.

Вычислим μ_0:

$$\mu_0 = \frac{1}{2}(p_n^n + a_n^n) = \frac{1}{2}[(2n+1)+1]a_n^n = 2^n(2n-1)!!\,.$$

При $k = n+1$ получаем:

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{2}(-q_n^n + b_n^n) = 0.$$

Используя очевидные равенства

$$b_k^n = k b_{k-1}^n, \qquad a_{n-1+k}^n = (n+k+1)a_{n-k}^n,$$

и явные формулы для биномиальных коэффициентов, нетрудно показать, что $\mu_k = 0$ при всех $0 < k < n+1$.

Теорема 2 доказана.

Авторы выражают благодарность Д. В. Трещёву за полезные обсуждения.

Список литературы

1. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Т. 38. №1. С. 3–67.
2. *Козлов В. В.* Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // ДАН СССР. 1979. Т. 249. №6. С. 1299–1302.
3. *Колокольцов В. Н.* Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скорости первым интегралом // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. №5. С. 994–1010.
4. *Болотин С. В.* Двоякоасимптотические траектории минимальных геодезических // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1992. №1. С. 92–96.
5. *Козлов В. В., Денисова Н. В.* Симметрии и топология динамических систем с двумя степенями свободы // Матем. сб. 1993. Т. 184 (226). С. 125–148.

6. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. М.–Л.: Гостехиздат, 1941.
7. *Kozlov V. V.* Integrable and Non-Integrable Hamiltonian Systems // Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys. 1989. V. 8. P. 1–81.
8. *Бялый М. Л.* О полиномиальных по импульсам первых интегралах для механической системы на двумерном торе // Функцион. анализ и его прил. 1987. Т. 21. №4. С. 64–65.
9. *Козлов В. В., Трещёв Д. В.* Об интегрируемости гамильтоновых систем с торическим пространством положений // Матем. сб. 1988. Т. 135 (177). С. 119–138.
10. *Фоменко А. Т.* Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // УМН. 1989. Т. 44. №1. С. 145–173.
11. *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. М.: Наука, 1965.
12. *Козлов В. В., Трещёв Д. В.* Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. №3. С. 537–556.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
07.04.94