УДК 531.36

© 1995 г. М.В. Дерябин, В.В. Козлов

К ТЕОРИИ СИСТЕМ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

Рассматривается задача о реализации односторонней связи, когда коэффициенты жесткости, вязкости и присоединенные массы одновременно согласованным образом устремляются к бесконечности. Основной результат состоит в следующем: предельные движения существуют и на границе они совпадают с движениями голономной системы с меньшим числом степеней свободы, однако в отличие от классической модели здесь имеет место эффект запаздывания момента схода со связи.

Формально-аксиоматический метод обоснования динамики систем со связями имеет очевидный недостаток: остаются непроясненными происхождение и физический смысл основных принципов, а также границы применимости теоретических моделей. С этой точки зрения более предпочтительным является конструктивный метод, намеченный Клейном, Прандтлем и Лекорню в связи с анализом парадоксов сухого трения, указанных Панлеве [1]. Голономная связь заменяется полем упругих сил, направленных к соответствующей поверхности. Оказывается, при стремлении коэффициента жесткости к бесконечности движения "свободной" системы стремятся к движениям системы с голономной связью. Точные формулировки даны Курантом, доказательство для потенциального поля сил содержится в [2], а в общем случае в [3].

Рассматривалась [4] задача о реализации голономных связей упругими силами и силами вязкого трения. Изучался [5] вопрос о стабилизации численных методов интегрирования уравнений движения с двусторонними связями с помощью дополнительных потенциальных и диссипативных сил.

Аналогичный подход для односторонних связей развит в [6] (см. также [7]): неудерживающая голономная связь заменяется полем упругих сил, направленных к границе, после чего коэффициент жесткости устремляется к бесконечности. Оказывается, траектории, трансверсально пересекающие границу, стремятся к траекториям предельной системы с ударами. Этот результат оказался эффективным средством исследования устойчивости периодических траекторий и эволюции виброударных систем [6–8]. Случай, когда в начальный момент времени скорость системы касается граничной поверхности, исследовался в [6, 9]. Оказывается, при неограниченном увеличении коэффициента жесткости движение "свободной" системы стремится к движению по границе при учете возможности схода со связи. Рассмотрен случай [6], когда внешние силы потенциальны и дано [9] доказательство теоремы о предельном переходе без предположения о потенциальности обобщенных сил.

Ниже рассматривается более общая ситуация, когда полупространство заменяется средой Кельвина–Фойгта и затем в "свободной" системе коэффициенты жесткости и вязкости согласованным образом устремляются к бесконечности.

1. Теорема о предельном переходе. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – обобщенные координаты механической системы,

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)x_i^{\cdot}x_j^{\cdot} \tag{1.1}$$

– кинетическая энергия, $F_1, \ldots, F_n$ – обобщенные силы, зависящие от x и $x^{\cdot}$. Введем одностороннюю связь, задаваемую неравенством

$$f(x) \geqslant 0 \tag{1.2}$$

где f – гладкая функция, удовлетворяющая условию $df \neq 0$ в точках, где $f = 0$. Положим $\Sigma = \{x: f(x) = 0\}$. Ясно, что Σ – регулярная гиперповерхность. Будем рассматривать движения этой системы $x(t)$ со следующими начальными данными:

$$x(0) = x_0, \quad x^{\cdot}(0) = \upsilon, \quad f(x_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\upsilon = 0 \tag{1.3}$$

Последнее условие означает, что вектор скорости υ касается Σ. В противном случае имеет место движение с ударами.

При движении по поверхности Σ функция $x(t)$ удовлетворяет уравнениям Лагранжа с множителем:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x^{\cdot}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial x} = F + R, \quad R = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad f = 0 \tag{1.4}$$

Сила R – реакция связи, которая является ковектором, причем ее значения на векторах (1.3), касательных к Σ, равно нулю: $R\upsilon = 0$. Сопоставим с ковектором $R = \{R_i\}$ вектор $r = \{r^i\}$ с компонентами

$$r^i = \sum_{j=1}^{n} a^{ij} R_j$$

где $\|a^{ij}\|$– матрица, обратная к $\|a_{ij}\|$. Ясно, что вектор r ортогонален Σ во внутренней метрике, задаваемой кинетической энергией (1.1). Пусть μ – алгебраическое значение проекции вектора r на нормаль к Σ; $|\mu|$ равно величине силе реакции.

Для рассматриваемого движения $t \to x(t) \in \Sigma$ множитель Лагранжа λ и проекция μ – некоторые гладкие функции времени. Если $\mu(t) \geqslant 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$, то с точки зрения классической модели динамики с односторонними связями на интервале $[0, \tau]$ система будет двигаться по поверхности Σ. Если же $\mu(t) < 0$ на некотором интервале $t \in (\tau, \tau + \delta)$, $\delta > 0$, то при $t = \tau$ система покидает поверхность Σ и становится свободной.

Следуя [6], заменим одностороннюю связь (1.2) вязкоупругой средой Кельвина–Фойгта, заполняющей полупространство $f(x) \leqslant 0$. Упругие свойства среды задаются потенциальной энергией

$$V_N = \gamma N f^2/2 \tag{1.5}$$

а вязкость – диссипативной функцией Релея

$$\Phi_N = \frac{\beta N}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x^{\cdot}\right)^2 \tag{1.6}$$

Здесь β, γ – неотрицательные постоянные. В области $f(x) \geqslant 0$ функции V_N и Φ_N полагаются равными нулю. Потенциал (1.5) обычно используется в задаче о реализации голономных связей (см. [2, 3]). Диссипативные силы $-\partial\Phi_N/\partial x^{\cdot}$, отвечающие функции Релея (1.6), не совершают работы на движениях системы по поверхностям $f = \mathrm{const}$.

При деформации среды ее частицы совершают перемещения в направлении, трансверсальном поверхности Σ. Поэтому при описании динамики системы в полупространстве $f(x) \leqslant 0$ следует учитывать эффект присоединенных масс. Этот эффект будем моделировать изменением инерционных свойств рассматриваемой системы: кинетическая энергия (1.1) заменяется энергией

$$T_N = T + \frac{\alpha N}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x^{\cdot}\right)^2, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0 \tag{1.7}$$

Ясно, что при всех значениях $N \geqslant 0$ квадратичная форма (1.7) положительна определена. В области $f \geqslant 0$ следует, конечно, положить $T_N \equiv T$. В дальнейшем параметр α будет устремлен к нулю. Несмотря на физическую целесообразность, введение присоединенных масс связано с регуляцией предельного перехода $N \to \infty$.

Итак, движения "свободной" системы описываются уравнениями

$$\left(\frac{\partial T_N}{\partial x^{\cdot}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T_N}{\partial x} = F - \frac{\partial V_N}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_N}{\partial x^{\cdot}} \tag{1.8}$$

В области $f \geqslant 0$ уравнения (1.8) совпадают с обычными уравнениями Лагранжа

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x^{\cdot}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial x} = F \tag{1.9}$$

Замечание. Уравнения (1.8) записаны в предположении, что система "погружается" в среду Кельвина–Фойгта, заполняющую полупространство $f(x) < 0$. Можно рассматривать иную модель взаимодействия системы с вязкоупругой преградой: сила реакции преграды $-\partial V_N/\partial x - \partial \Phi_N/\partial x^{\cdot}$ может быть направлена лишь в сторону возрастания функции f. В другие моменты времени она полагается равной нулю. В теории удара эта модель развита в [7]. Пример ее использования в задаче о сходе системы со связи рассмотрен в разд. 6.

Пусть $x_N(t)$ – решение уравнений (1.8) – (1.9) с начальными условиями $x_N(0) = x_0$, $x^{\cdot}_N(0) = \upsilon$, удовлетворяющими соотношениям (1.3). Рассмотрим вспомогательное уравнение второго порядка

$$\alpha z^{\cdot\cdot} + \beta z^{\cdot} + \gamma z = -\mu(t) \tag{1.10}$$

где $\mu(t)$ – определенное выше алгебраическое значение величины реакции связи при движении системы по поверхности Σ с теми же начальными данными. Пусть $z(t)$ – решение (1.10), выделяемое условиями $z(0) = 0$, $z^{\cdot}(0) = 0$.

Теорема 1. Предположим, что решение $x(t)$, $x(0) = x_0$, $x^{\cdot}(0) = \upsilon$ уравнений (1.4) существует в интервале $0 \leqslant t \leqslant \tau + \delta$, $\delta > 0$ и $z(t) < 0$ при $0 < t < \tau$. Тогда для $0 \leqslant t \leqslant \tau$ существует предел

$$x^{\wedge}(t) = \lim_{N \to \infty} x_N(t) \tag{1.11}$$

причем функция $x^{\wedge}(t)$ удовлетворяет уравнению (1.4). Если, кроме того, τ – первый простой нуль функции $z(t)$ и $\mu(\tau) < 0$, то предел (1.11) существует в некотором большем интервале $0 \leqslant t \leqslant \tau + \delta_1$, $\delta_1 > 0$ причем $x^{\wedge}(t)$ при $\tau < t \leqslant \tau + \delta_1$ удовлетворяет системе (1.9) и $f(x^{\wedge}(t)) > 0$.

Подчеркнем, что здесь не исключается случай $\tau = 0$. Функции $t \to x^{\wedge}(t)$ можно считать движениями механической системы с кинетической энергией T и односторонней связью, на которую действуют заданные обобщенные силы F, в предельной модели движения. Так как эта модель зависит от параметров α, β, γ, то ее можно назвать (α, β, γ) – моделью. С точки зрения всех этих моделей движение системы по поверхности Σ происходит по одному и тому же закону. Они разнятся только условиями схода со связи. Если умножить параметры α, β, γ на любое положительное число, то получим, очевидно, ту же самую модель.

2. Доказательство основной теоремы. Введем в окрестности Σ полугеодезические координаты $x_1, \ldots, x_n$ в которых $f \equiv x_n$ и метрика (1.1) имеет вид

$$T = T^* + \frac{1}{2} a_{nn} x_{n}^{\cdot 2}, \quad T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x) x_i^{\cdot} x_j^{\cdot}$$

Известно (см., например, [7, 10]), что такие координаты всегда существуют. Запишем в этих переменных уравнения (1.4)

$$\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{x}_i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T^*}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{nn}}{\partial x_i}\dot{x}_n^2 = F_i, \quad i < n$$
$$(a_{nn}\dot{x}_n)^{\cdot} - \frac{\partial T^*}{\partial x_n} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{nn}}{\partial x_n}\dot{x}_n^2 = F_n + R, \quad x_n = 0 \tag{2.1}$$

Пусть при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ система движется по поверхности Σ. Тогда из последнего уравнения системы (2.1) получаем

$$R = -\left(F_n + \frac{\partial T^*}{\partial x_n}\right)_0 \tag{2.2}$$

Нулевой индекс означает, что в это выражение надо подставить $x_n = 0$, $\dot{x}_n = 0$.

Ясно, что выражение (2.2) равно как раз μ. При этом первое уравнение (2.1) принимает вид обычных уравнений Лагранжа для системы с $n - 1$ степенями свободы

$$\left(\frac{\partial T_0^*}{\partial \dot{x}_i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T_0^*}{\partial x_i} = (F_i)_0, \quad i < n \tag{2.3}$$

Запишем уравнения (1.8), учитывая, что теперь $f = x_n$. Первая группа уравнений (2.1) не изменится, а второе уравнение (2.1) слегка усложнится:

$$[(\alpha N + a_{nn})\dot{x}_n]^{\cdot} - \frac{\partial T^*}{\partial x_n} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{nn}}{\partial x_n}\dot{x}_n^2 = F_n - \beta N\dot{x}_n - \gamma N x_n \tag{2.4}$$

Следует иметь в виду, что это уравнение справедливо только при $x_n < 0$. Положим $\varepsilon = 1/N$ и разделим обе части (2.4) на N:

$$\alpha\ddot{x}_n + \beta\dot{x}_n + \gamma x_n = \varepsilon\left[F_n + \frac{\partial T}{\partial x_n} + \frac{1}{2}\frac{\partial a_{nn}}{\partial x_n}\dot{x}_n^2 - (a_{nn}\dot{x}_n)^{\cdot}\right] \tag{2.5}$$

Будем решать совместно первую группу уравнений (2.1) и (2.5). При $t = 0$ имеем: $x_i(0) = \overset{0}{x}_i$, $\dot{x}_i(0) = \upsilon_i$ $(i < n)$ $x_n(0) = 0$, $\dot{x}_n(0) = 0$. Так как правые части рассматриваемой системы аналитичны по ε, то для ее решения можно воспользоваться методом малого параметра:

$$x_i(t,\varepsilon) = x_i^0(t) + \varepsilon x_i^1(t) + \ldots, \quad i < n$$
$$x_n(t,\varepsilon) = \varepsilon x_n^1(t) + \ldots \tag{2.6}$$

Функции $\overset{0}{x}_i(t)$, $i < n$ удовлетворяет системе (2.3) с начальными данными $x_i(0) = \overset{0}{x}_i$, $\dot{x}_i(0) = \upsilon_i$, а остальные функции $\overset{1}{x}_i, \overset{2}{x}_i, \ldots$ обращаются при $t = 0$ в нуль вместе со своими производными. Заметим, что ввиду (2.2) выражение в квадратных скобках в правой части (2.5) при $\varepsilon = 0$ совпадает с $-R(t)$. Следовательно, функция $\overset{1}{x}_n(t)$ – решения уравнения (1.10) с нулевыми начальными условиями. Согласно предположению, при $0 < t < \tau$ функция $\overset{1}{x}_n(t) < 0$. Следовательно, при малых $\varepsilon > 0$ координата x_n отрицательна, если $0 < t < \tau$. Таким образом, на этом интервале времени разложения (2.6), действительно, справедливы. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем первую часть теоремы 1.

Если τ – первый простой нуль функции $z(t)$ ($z^{\cdot}(\tau) > 0$), то функция $x_n(t, \varepsilon)$ при малых ε имеет нуль $\tau_\varepsilon = \tau + O(\varepsilon)$. Так как по предположению $\mu(\tau) < 0$, то ввиду непрерывности функция μ отрицательна в некоторой малой окрестности точки τ. Итак, в точке $t = \tau_\varepsilon$

$$x_n = 0, \; x_n^{\cdot} = O(\varepsilon)$$

Кроме того, $\mu(\tau_\varepsilon) < 0$. Следовательно, при малых $\varepsilon > 0$ и $t > \tau_\varepsilon$ система будет двигаться в полупространстве $x_n > 0$. Устремляя ε к нулю и используя непрерывную зависимость решений по начальным данным, получаем требуемое.

3. Запаздывание момента схода со связи. Если $\alpha = \beta = 0$, то, как установлено в [9], предельная функция $x^{\wedge}(t)$ существует и является движением рассматриваемой системы с классической точки зрения. В частности, первый нуль τ функции $\mu(t)$, когда $\mu^{\cdot}(\tau) < 0$, является моментом схода со связи. Согласно теореме 1, в (α, β, γ) – модели система заведомо движется по поверхности Σ до тех пор, пока решение уравнения (1.10) с нулевыми начальными условиями отрицательно.

Предложение 1. Если $\beta^2 \geqslant 4\alpha\gamma$ и $\mu(t) > 0$ при $0 < t < \tau$, то $z(t) < 0$ при всех $0 < t < \tau + \kappa$, где $\kappa > 0$.

Доказательство. Если $\beta^2 \geqslant 4\alpha\gamma$, то корни характеристического уравнения $\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0$ вещественны. Обозначим их λ_1 и λ_2. Пусть $\lambda_1 > \lambda_2$ (случай $\lambda_1 = \lambda_2$ рассматривается аналогично). Тогда решение уравнения (1.10) с нулевыми начальными данными имеет вид

$$z(t) = -\frac{e^{\lambda_1 t}}{\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_0^t e^{-\lambda_1 s} \mu(s)\,ds + \frac{e^{\lambda_2 t}}{\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_0^t e^{-\lambda_2 s} \mu(s)\,ds$$

При малых $t > 0$, очевидно, $z(t) < 0$. Пусть $t = \xi$ – первый положительный нуль функции $z(t)$. Тогда

$$\int_0^\xi e^{-\lambda_1 s} \mu(s)\,ds \left[\int_0^\xi e^{-\lambda_2 s} \mu(s)\,ds \right]^{-1} = \frac{e^{-\lambda_1 \xi}}{e^{-\lambda_2 \xi}}$$

Пусть $\xi \leqslant \tau$. Тогда, по предположению, $\mu > 0$ и, следовательно, по теореме Коши о среднем, в интервале $(0, \xi)$ найдется точка η, такая, что $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\eta} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\xi}$. Так как $\lambda_1 > \lambda_2$ и $\eta < \xi$, то это равенство противоречиво.

Следствие. Если $\beta > 0$ и α мало, то имеет место явление затягивания схода со связи.

Предложение 2. Пусть $\beta^2 < 4\alpha\gamma$ и $\omega^2 = 4\alpha\gamma - \beta^2$, $\omega > 0$. Если $\mu(t) > 0$ при $0 < t < \tau \leqslant \pi/\omega$, то $z(t) < 0$ при всех $0 < t < \tau + \kappa$, $\kappa > 0$.

Это утверждение доказывается тем же способом, что и предположение 1.

Не следует думать, что всегда нуль функции $z(t)$ лежит правее первого нуля функции $\mu(t)$. Вот простой контрпример: $z^{\cdot\cdot} + z = -\mu(t)$, где $\mu(t) = 1$, $0 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$, $\mu(t) = 1/2$, $t > 3\pi/2$.

Решение этого уравнения с нулевыми начальными данными при $t > 3\pi/2$ имеет вид $z(t) = (-1 + \sin t)/2 + \cos t$, т.е. $z(2\pi) = 1/2$.

4. Реализация связи упругими силами. Рассмотрим важный частный случай, когда $\beta = 0$, $\alpha = \nu^2$, $\nu \to 0$. Без ущерба для общности можно положить $\gamma = 1$. В предельном случае $\alpha = 0$ было показано [9], что функция $x^{\wedge}(t)$ описывает движение системы с односторонней связью в классической модели.

При малых ν предложение 2 не дает содержательного вывода о свойствах решения уравнения

$$\nu^2 z^{\cdot\cdot} + z = -\mu(t) \tag{4.1}$$

с нулевыми начальными данными. Это решение имеет вид

$$z(t,\nu) = -\sin\frac{t}{\nu}\int_0^t \frac{\mu(\tau)}{\nu}\cos\frac{\tau}{\nu}d\tau + \cos\frac{t}{\nu}\int_0^t \frac{\mu(\tau)}{\nu}\sin\frac{\tau}{\nu}d\tau$$

Интегрированием по частям можно получить следующее асимптотическое представление:

$$z(t,\nu) = \mu(0)\cos\frac{t}{\nu} - \mu(t) + O(\nu) \tag{4.2}$$

Если $\mu(0) \neq 0$, то эта функция вообще не имеет предела при $\nu \to 0$ из-за быстрых осцилляций. Однако

$$\lim_{t_1,t_2\to t}\lim_{\nu\to 0}\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} z(\tau,\nu)d\tau = -\mu(t) \tag{4.3}$$

Таким образом, после усреднения в пределе получаем $-\mu(t)$. Это же значение получается из (4.1) после формальной подстановки $\nu = 0$.

Вернемся к задаче Куранта о реализации двусторонней связи $f(x) = 0$, считая, что кроме упругих сил с потенциальной энергией $Nf^2/2$ имеются присоединенные массы, которые увеличивают кинетическую энергию на $\nu^2N(f^{\cdot})^2/2$, где ν мало. В уравнении (2.4) надо положить $\gamma = 1$, $\beta = 0$, $\alpha = \nu^2$. В правой части будем иметь дополнительное слагаемое $-Nx_n$. При $N \to \infty$ получается неопределенность вида «$\infty \cdot 0$». Из результатов разд. 2 вытекает, что это слагаемое стремится к функции $z(t, \nu)$, когда $N \to \infty$. При $\nu \to 0$ после регуляризации (4.3) получаем, что слагаемое $-Nx_n$ стремится к реакции голономной связи $f = x_n = 0$. Этот результат другим способом получен в [3].

Если $\mu(0) > 0$, то при малых $t > 0$ справедливо неравенство $f(x_N(t)) < 0$: система находится в "запрещенной" области и на нее действуют большие упругие силы, стремящиеся вытолкнуть систему в полупространство $f \geqslant 0$. Спрашивается, как долго система может находиться в области $f(x) < 0$? Асимптотическая формула (4.2) дает некоторые нетривиальные оценки: если $\mu(t) > \mu(0)$, то при малых $\varepsilon = 1/N$ и ν траектория $t \to x_N(t)$ системы находится в области $f(x) < 0$. Действительно, согласно (2.6), $x_n(t) = \varepsilon z(t, \nu) + o(\varepsilon)$. Остается заметить, что если $\mu(t) > \mu(0)$, то для малых значений ν функция $z(t, \nu)$ отрицательна.

5. Реализация связи анизотропным трением. Рассмотрим еще один важный частный случай, когда $\gamma = 0$, $\alpha \to 0$. Без ущерба для общности можно положить $\beta = 1$. При этих предположениях решение уравнения (1.10) с нулевыми начальными данными находится из сотношения

$$z^{\cdot} = -\frac{e^{-t/\alpha}}{\alpha}\int_0^t \mu(s)e^{s/\alpha}ds \tag{5.1}$$

Изучим поведение функции $z(t, \alpha)$ при $\alpha \to 0$.

Предложение 3. Если μ – гладкая функция (например, класса C^2), то при $t \in (0, \tau]$

$$\lim_{\alpha\to 0} z^{\cdot}(t,\alpha) = -\mu(t) \tag{5.2}$$

$$\lim_{\alpha\to 0} z(t,\alpha) = -\int_0^t \mu(s)ds \tag{5.3}$$

Действительно, интегрируя дважды по частям (5.1), получим формулу

$$z^{\cdot} = -\mu(t) + e^{-t/\alpha}\mu(0) + \alpha\left[e^{-t/\alpha}\mu(s)e^{s/\alpha}\Big|_0^t - e^{-t/\alpha}\int_0^t \mu^{\cdot\cdot}e^{s/\alpha}ds\right] \tag{5.4}$$

Для оценки интеграла в этой формуле воспользуемся теоремой Бонне о среднем:

$$\int_0^t f^{\cdot\cdot} e^{s/\alpha} ds = \int_0^\xi f^{\cdot\cdot} ds + e^{t/\alpha}\int_\xi^t f^{\cdot\cdot} ds, \quad \xi \in [0,t]$$

Так как $\mu \in C^2$, то функция

$$e^{-t/\alpha}\int_0^t \mu^{\cdot\cdot} e^{s/\alpha} ds$$

ограниченна на каждом конечном интервале времени. Остается перейти к пределу при $\alpha \to 0$ в формуле (5.4).

Если $\mu(0) \neq 0$, то сходимость в формуле неравномерная: $z^{\cdot} \to 0$ при $t = 0$. Поэтому в общем случае из (5.2) может не вытекать справедливость (5.3). Однако

$$\int_0^t e^{-s/\alpha} ds = \alpha(1 - e^{-t/\alpha})$$

и выражение в квадратных скобках в (5.4) равномерно ограниченно. Поэтому интеграл от правой части (5.4) при $\alpha \to 0$ стремится к интегралу от функции $-\mu$, что и требовалось доказать.

Предположим, что $\mu(t) > 0$ при малых $t > 0$. Тогда, очевидно, $f(x_N(t)) < 0$. Так как $x_n(t, \varepsilon) = \varepsilon z(t) + o(\varepsilon)$, то для малых значений ε координата $x_n < 0$ если $z(t) < 0$. Пусть τ – первый нуль функции (5.3). Ясно, что $\mu(\tau) \leqslant 0$. В типичной ситуации $\mu(\tau) < 0$. Тогда τ – простой нуль функции $z(t)$. Следовательно, в пределе, когда $\varepsilon = 1/N \to 0$, координата x_n первый раз становится равной нулю, причем $\mu(\tau) < 0$. Поэтому при $t > \tau$ система покидает поверхность Σ и ее динамика описывается уравнениями (1.9).

В итоге приходим к следующей модели движения: если $\mu(0) > 0$, то система начинает двигаться по поверхности Σ до момента времени, когда среднее значение реакции связи первый раз обращается в нуль. Если в этот момент реакция отрицательна (это типичный случай), система становится свободной. В случае, если траектория "свободной" системы затем трансверсально пересечет поверхность Σ, будет иметь место абсолютно неупругий удар: нормальная составляющая скорости обратится в нуль [6].

6. Теорема о предельном переходе в случае анизотропного трения. Рассмотрим случай, когда $\alpha = 0$ и $\gamma = 0$ (в уравнениях (1.8) присутствуют лишь дополнительные силы вязкого трения). Оказывается, при $N \to \infty$ решения уравнений (1.8) стремятся к движению системы, которое было описано в разд. 5. Пусть $x_N(t)$ – решение уравнений (1.8)–(1.9) с начальными условиями $x_N(0)$, $x^{\cdot}_N(0)$, удовлетворяющими (1.3) и пусть τ – первый простой нуль функции (5.3).

Теорема 2. Найдется такое $\delta > 0$, что в интервале $0 \leqslant t \leqslant \tau + \delta$ существует предел

$$x_*(t) = \lim_{N\to\infty} x_N(t) \tag{6.1}$$

причем при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ функция $x_*(t)$ удовлетворяет системе уравнений (1.4), а при $t > \tau + \delta$ – системе (1.9) и неравенству $f(x_*(t)) > 0$.

Доказательство. Введем в окрестности Σ полугеодезические координаты $x_1, \ldots, x_n$ (как в разд. 2). Рассмотрим сначала более простую задачу о реализации двусторонней связи $f(x) = 0$ силами вязкого трения. Пусть $x_N(t)$ – решение уравнений (1.8) (в которых $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$) с начальными данными (1.3).

На промежутке времени решения $x_N(t)$ сингулярных уравнений (1.8) имеют [11, 12] предел $x^\wedge(t)$, причем предельная функция – решение системы (1.4). Так как начальные данные удовлетворяют (1.3), имеют место следующие асимптотические формулы (см., например, [13]):

$$(x_N(t))_k = x_k^{\wedge}(t) + O(\varepsilon) \quad (k < n)$$

$$(x_N(t))_n = \varepsilon x_n^1(t) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon = 1/N \tag{6.2}$$

Подставив выражение (6.2) для x_n в (2.5), получим

$$\varepsilon(x_n^1)^{\cdot} = \varepsilon(F_n + \partial T/\partial x_n)x^{\wedge}(t) + o(\varepsilon)$$

Поэтому

$$x_n^1 = -\int_0^t \mu(s)ds \tag{6.3}$$

Согласно предположению, при $0 < t < \tau_\varepsilon$ ($\tau_\varepsilon = \tau + O(\varepsilon)$) и малых ε координата x_n отрицательна и обращается в нуль в момент времени τ_ε. Следовательно, в интервале $[0, \tau_\varepsilon]$ функция $x_N(t)$ удовлетворяет системе (1.8) и неравенству $f(x) \leqslant 0$. Поэтому при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ функции $x_*(t)$ (из (6.1)) и $x^{\wedge}(t)$ совпадают.

Предположим, что $\mu(\tau) < 0$. По непрерывности функция $\mu(t)$ отрицательна в некоторой окрестности τ. Тогда $x_n^{\cdot}(\tau_\varepsilon) > 0$ при малых $\varepsilon > 0$ и найдется такое $\delta > 0$, что при $\tau_\varepsilon < t \leqslant \tau_\varepsilon + \delta$ движение системы происходит в полупространстве $x_n > 0$. Устремляя ε к нулю, получаем требуемое. Теорема доказана.

Рассмотрим простой пример. Пусть точка единичной массы движется в плоскости x, y причем, в левой полуплоскости (где $x \leqslant 0$) на точку действует сила с компонентами 0, $-g$ ($g = \text{const} > 0$), а в правой (где $x > 0$) 0, g. Рассмотрим движение со связью $y \geqslant 0$ и начальными условиями

$$x(0) = -1, \quad y(0) = 0, \quad x^{\cdot}(0) = 1, \quad y^{\cdot}(0) = 0 \tag{6.4}$$

В соответствии с классическими уравнениями движения точка покидает связь в момент времени $t = 1$ (когда $x = 0$). Функция $\mu(t)$ имеет вид

$$\mu(t) = g, \quad t \leqslant 1; \quad \mu(t) = -g, \, t > 1$$

Первый простой нуль τ интеграл от $\mu(t)$ равен 2. Таким образом, в (0, 1, 0) – модели точка должна сойти со связи в момент времени $t = 2$.

Последний результат можно получить непосредственно. Заменим действие связи силой вязкого трения с компонентами 0, $-Ny^{\cdot}$ (в области $y \leqslant 0$). Тогда решение с начальными данными (6.4) задается формулами

$$x(t) = t - 1; \quad y(t) = \frac{g}{N^2}e^{-Nt} - \frac{g}{N}t + \frac{g}{N^2}, \quad t \leqslant 1$$

$$y(t) = \frac{g}{N^2}(2e^N - 1)e^{-Nt} + \frac{g}{N}t - \frac{2g}{N}\left(1 + \frac{1}{2N}\right), \quad t \geqslant 1 \tag{6.5}$$

Эти формулы справедливы, пока $y \leqslant 0$, т.е. $t \leqslant \tau = 2 + O(1/N)$. При $t > \tau$ точка будет двигаться по параболе в верхней полуплоскости. Устремляя N к бесконечности, получим указанный выше результат о моменте схода со связи.

Рассмотрим теперь другую модель взаимодействия точки с преградой: сила трения отлична от нуля лишь в случае, когда $y < 0$ и $y^{\cdot} < 0$. Тогда формулы (6.5) справедливы для $t \leqslant 1 + O(1/N)$. При больших t точка будет двигаться по параболе в полуплоскости $y > 0$. В пределе, когда $N \to \infty$, точка сходит со связи в момент времени $t = 1$ (как в классической модели).

Последнее наблюдение можно обобщить. Будем считать, что реакция преграды $-\partial\Phi_N/\partial x^{\cdot} \neq 0$ лишь когда $f < 0$ и $f^{\cdot} < 0$. В другие моменты времени она полагается равной нулю. Иными словами, преграда не может "удерживать" систему. Пусть $\mu(0) > 0$ и τ – первый простой нуль функции $\mu(t)$. Можно показать, что если $x_N(t)$ – движение системы с начальными условиями (1.3) под действием указанной выше силы вязкого трения, то при $N \to \infty$ функция $x_N(t)$ стремится к классическому движению системы с односторонней связью $f \geqslant 0$. В частности, $t = \tau$ – момент схода системы со связи. Действительно, согласно (6.2) и (6.3) сила трения обратится в нуль, когда

$$(x_N)^{\cdot}_n = -\varepsilon\mu(t) + o(\varepsilon) \tag{6.6}$$

Так как τ – первый простой нуль функции μ, то по теореме о неявных функциях, первый положительный нуль уравнения (6.6) равен $\tau_\varepsilon = \tau + O(\varepsilon)$, причем в момент времени τ_ε координата x_n и скорость $x^{\cdot}_n$ будут $O(\varepsilon)$. Устремляя ε к нулю, получим требуемое. Этот результат может оказаться полезным при численном решении дифференциальных уравнений с односторонними связями: введение вязкости является стабилизирующим эффектом численных методов интегрирования (ср. с [5]).

Авторы благодарят В.В. Румянцева за обсуждение затронутых в статье вопросов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16244) и Международного научного фонда (MCY 000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пенлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
2. *Rubin H., Ungar P.* Motion under a stroug constraining forse // Communs. Pure and Appl. Math. 1957. V. 10. N 1. P. 65–87.
3. *Козлов В.В. Нейштадт А.И.* О реализации голономных связей // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 858–861.
4. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1991. 189 с.
5. *Baumgarte J.* Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // Computer methods in appl. Mech. and Engng. 1972. V. 1. N1. P. 1–16.
6. *Козлов В.В.* Конструктивный метод обоснования теории систем с неудерживающими связями // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 833–894.
7. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991. 166 с.
8. *Козлов В.В.* Об ударе с трением // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 54–60.
9. *Дерябин М.В.* О реализации неудерживающих связей // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 136–140.
10. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
11. *Карапетян А.В.* О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 42–51.
12. *Бренделев В.Н.* О реализации связей в неголономной механике // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 481–487.
13. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.; Наука, 1973. 272 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.VIII.1994