О МНОГОЗНАЧНЫХ ИНТЕГРАЛАХ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА

В. В. Козлов - Россия

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова
механико - математический факультет

1, Многозначные интегралы. Пусть

$$x = v(x) \qquad (1.1)$$

- динамическая система на гладком многообразии **M**. Многозначным интегралом системы (1.1) назовем замкнутую 1-форму φ,такую, что локально $\varphi = df$, причем функция $f(x)$ - интеграл уравнений (1.1):

$$f = f / x\, v = 0.$$

Ясно, что многозначные интегралы являются инвариантными 1-формами. Действительно,

$$L_v\varphi = L_v df = dL_v f = 0 \qquad (1.2)$$

Здесь L_v - производная Ли, порождаемая векторным полем **v**.

Отметим, что обратное, вообще говоря, неверно: не каждая инвариантная замкнутая 1-форма будет многозначным интегралом. Действительно, из (1.2) вытекает лишь, что

$$L_v f = f = \mathrm{const}.$$

Если первое число Бетти многообразия **M** равно нулю (т.е. $H^1(M,R) = 0$), то равенство $\varphi = df$, будет верно для некоторой гладкой функции $f: M \to R$. В этом случае все многозначные интегралы будут обычными однозначными интегралами.

Конечно, с локальной точки зрения (например, при явном интегрировании уравнений в квадратурах), нет никакого различия между однозначными и многозначными интегралами. Ситуация резко меняется, если мы изучаем систему в целом. Приведем простой пример эргодической системы с многозначными интегралами. Пусть **M** - двумерный тор $T^2 = \{x,y \bmod 2\Pi\}$ с угловыми координатами x,y, а система (1.1) задается уравнениями

$$x = \alpha, \quad y = \beta \qquad (1.3)$$

$\alpha, \beta = \mathrm{const}$, α / β иррационально. Эта система не допускает даже непрерывных непостоянных интегралов, определенных всюду на T^2 . Однако 1-форма $\varphi = \beta dx - \alpha dy$ будет,очевидно, многозначным интегралом.

Уравнения (1.3), конечно, не гамильтиновы . Однако соответствующие примеры можно привести и для уравнений Гамильтона. Положим

$$q_k = H / P_k, \quad P_k = - H / q_k; \quad k = 1,2$$

$$H = \alpha P_1 + P_2 / \Phi(q_1,q_2). \qquad (1.4)$$

Здесь q_1, $q_2 \bmod 2\Pi$ - угловые обобщеные координаты, p_1, p_2 - соответствующие импульсы,$\alpha = \mathrm{const}$, Φ - положительная 2Π - периодическая функция от q_1 и q_2.

Таким образом, конфигурационное пространство - это двумерный тор

$$T^2 = \{q_1, q_2 \bmod 2\Pi\},$$

а четырехмерное фазовое пространство имеет структуру прямого произведения $R^2 \times T^2$

Как сказано в [1], при подходящем выборе α и аналитической функции Φ система (1.4) не допускает однозначных интегралов, независимых от функции H . Причина заключается в том, что система (1.4) транзитивна на трехмерных уровнях энергии $H=const$.

Между тем, уравнения Гамильтона (1.4) имеют многозначный интеграл

$$\varphi = dq_1 - \alpha\, dq_2,$$

наличие которого позволяет проинтегрировать эти уравнения в квадратурах.

2. Малые знаменатели. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений

$$x = u_0 + u_1 + \dots, \quad y = v_0 + v_1 + \dots, \quad z = w_1 + \dots \quad (2.1)$$

Здесь x,y - угловые переменные, по которым правые части периодичны с периодами 2Π, u_0, v_0 зависят только от z, – малый параметр Системы такого вида очень часто встречается в приложениях и имеют фундаментальное значение для теории нелинейных колебаний (см., например,[2]).

Будем считать, что переменная z меняется в интервале Δ R. Поэтому фазовое пространство системы (2.1) - прямое произведение $\Delta x T^2$. Всюду ниже предполагается, что правые части (2.1) - аналитические функции в $\Delta x T^2$, аналитически зависящие от параметра .

При =0 система (2.1) имеет однозначный интеграл $F=z$ и на каждом инвариантном торе $\{z=z_0\}$ имеется многозначный интеграл

$$v_0(z_0)\ dx - u_0(z_0)\ dy.$$

Оказывается, при малых значениях $\neq 0$ возмущенная система не имеет ни одного ненулевого многозначного интеграла.

Более точно, речь идет о многозначных интегралах вида

$$\varphi \quad = A\ dx + B\ dy + C + dz, \qquad (2.2)$$

где A,B,C - аналитические функции на $\Delta x T^2$, аналитически зависящие от такая постановка задачи в идейном плане восходит к Пуанкаре [3,гл.V].

Разложим функцию w_1 в ряд Фурье:

$$w_1 = \Sigma\ W_{mn}(z) \exp\,[i(mx + ny)].$$

В дальнейшем анализе важную роль играет множество P R = {z}, состоящее из точек z, таких, что

(1) $m u_0(z) + n v_0(z) = 0$ для некоторых целых m,n, не равных одновременно нулю,

(2) $W_{mn}(z) \neq 0$.

Такие множества впервые рассматривались Пуанкаре [3,гл. v] в связи с изучением влияния резонансов на условиях интегрируемости уравнений Гамильтона. В типичной ситуации резонансное множество P всюду плотно заполняет отрезок D. Это обстоятельство является серьезным препятствием для проведения системы (2.1) к "нормальной" форме (см., например [4])

<u>**Теорема**</u>. Предположим, что

(A) $u_0 v_0 - u_0 v_0' \neq 0$,

(B) множество P имеет хотя бы одну предельную точку, лежащую в D.

Тогда система (2.1) не имеет нетривиальных аналитических многозначных интегралов: $\varphi = 0$.

Условие (A) + (B) является известным условием отсутствия однозначных аналитических интегралов (см. [5]). Как показано в [6], при этих предположениях уравнения (2.1) не допускают нетривиальных полей симмерий. Наконец, если дополнительно потребовать выполнения условия

(C) $W_{00}(z) \neq 0$,

то уравнения (2.1) не имеют линейных интегральных инвариантов (как абсолютных, так и относительных) [7].

<u>**Доказательство.**</u> Рассмотрим естественное накрытие фазового пространства системы (2.1)

$\Delta x R^2 \to \Delta x T^2.$

На множестве $\Delta x R^2$ замкнутая форма (2.2) точна:

$\varphi = dF(x,y,z).$

Нетрудно показать, что функция $F : x R^2 \to R$
имеет следующий вид:

$F = a(\ )x + b(\ )y + f(x,y,z,).$ (2.3)

Здесь a,b - аналитические функции только от параметра E, а аналитическая функция f 2Π-периодична по x,y.

Положим

$a = a_0 + a_1 + ...,\quad b = b_0 + b_1 + ...,$

$f = f_0 + f_1 + ...$

Дифференцируя интеграл (2.3) в силу системы (2.1) и полагая затем $= 0$, получаем:

$a_0 u_0 + b_0 v_0 + f_0 / x\, u_0 + f_0 / y\, v_0 = 0.$ (2.4)

Усредняя это равенство по тору T^2, получаем тождество

$a_0 u_0(z) + b_0 v_0(z) = 0.$

В силу условия **(A)** отсюда вытекает, что $a_0 = b_0 = 0$.

Разложим функцию f_0 в ряд Фурье:

$f_0 = \Sigma\ Fmn^0(z) \exp[i(mx + ny)].$

Из (2.4) вытекает цепочка равенства:

$(m u_0 + n v_0) Fmn^0(z) = 0.$

Так как в аналитических функций нет делителей нуля, то с учетом условия **(A)** получаем, что $Fmn^0 = 0$ для всех $m^2 + n^2 \neq 0$.Итак, f_0 зависит лишь от переменной z.

Приравнивая в равенстве $F = 0$ слагаемые первой степени по , получаем соотношение

$a_1 u_0 + b_1 v_0 + f'_0 w_1 + f_1 / x\, u_0 + f_1 / y\, v_0 = 0.$ (2.5)

Пусть

$f_1 = \Sigma\ F_{mn}(z) \exp[i(mx + ny)].$

Если $m^2 + n^2 \neq 0$, то из (2.5) вытекает, что

$f_0 W_{mn} + i(mu_0 + nv_0) F_{mn} = 0$

Пусть $z \in P$. Тогда $f_0(z) = 0$. Так как бесконечное множество P имеет предельную точку в области аналитичности функции f_0, то $f_0(z) = 0$.

Аналогично доказывается, что коэффициенты $a_1,b_1,...$ равны нулю, а $f_1,... =$ **const** . Следовательно, $j_E = 0$.

Теорема доказана.

3. Приложения к гамильтоновым системам. Рассмотрим канонические уравнения

Гамильтона с гамильтонианом

$$H = \Sigma\ H_0(I_1, I_2) + H_1(I_1, I_2, j_1, j_2) + \dots \qquad (3.1)$$

Здесь $I, \varphi \mod 2\Pi$ - переменные действие - угол невозмущенный (когда $= 0$) вполне интегрируемой системы.

Зафиксируем значение полной энергии h. Если кривая

$$H_0(I_1, I_2) = h \qquad (3.2)$$

регулярна, то (по крайней мере локольно) уравнение $H = h$ при малых значениях можно разрешить относительно I_1 или I_2.

Это обстоятельство позволяет записать возмущенные Гамильтона в виде (2.1).

Условие (А) эквивалентно условию изоэнергетической невырожденности невозмущеной системы (аналитическую запись можно найти, например, в [5]). Геометрически это означает, что линия уровня (3.2) не есть прямая.

Пусть

$$H_1 = \Sigma\ H_{mn}(I_1, I_2) \exp[i(m\varphi_1 + n\varphi_2)].$$

Положим

$$B = \{I : m\omega_1 + n\omega_2 = 0,\ H_{mn} \neq 0\},$$

где $\omega_k = H_0 / I_k$ $(k = 1,2)$ - частоты невозмущенной задачи. Легко показать (см.,например,[8,гл.1]), что множество P является пересечением "векового" множества B с линией уровня (3.2).

Таким образом, типичные гамильтоновы системы с гамильтонианом (3.1) не допускают многозначных аналитических интегралов, аналитически зависящих от . Это наблюдение усиливает классический результат Пуанкаре об отсутствии однозначных интегралов "основной проблемы динамики". Так Пуанкаре называл задачу исследования уравнений Гамильтона с гамильтонианом вида (3.1).

Добавление. Для гамильтоновых систем с многозначными интегралами справедлив аналог геомерической теоремы Лиувилля об интегралах в инволюции.

Прежде всего заметим, что корректно определена скобка Пуассона многозначных интегралов. Далее, поверхностью уровня многозначных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ естественно назвать интегральную поверхность интегрируемого распределения

$$\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0.$$

Если для гамильтоновой системы с n степенями свободы найдется n независимых многозначных интегралов, попарные скобки Пуассона которых равны нулю и $(2n - 1)$-мерные энергетические многообразия компактны, то n-мерные поверхности уровня этих интегралов диффеоморфны прямому произведению $T^k \times R^{n-k}$, причем можно выбрать на них k угловых переменных и n-k линейных, которые равномерно меняются со временем.

Если интегралы однозначны, то их совместные уровни компактны и тогда $k = n$. Условие компактности энергетических многообразий гарантирует, что гамильтоновы поля, порожденные многозначными интегралами, не стеснены на n-мерных совместных поверхностях уровня.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (93 - 013 - 16244) и ISF(MCYOO).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kozlov V.V. Phenomena of Nonintegrability in Hamiltonian Systems // Proc.Congr.Math., Berkeley (USA), 1987,P.1161-1170.

2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю.Ф. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: наука. 1974.

3. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. В кн.: Избр.труды, Т.1.М.: Наукаю 1971.

4. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштад А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИб 1985.

5. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Т. 38, вып.1. С.3-67.

6. Козлов В. В. О группах симметрий динамических систем // ПММ. 1988. Т. 52, вып.4. С.531-541.

7.Kozlov V.V. Dynamical systems Determined by the Navier-Stokes Equations // Rus.J.Math.Phys.1993.V.1,n1, p.57-69.

8. Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во Моск.Ун-та. 1980.

Козлов Валерий Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, специалист в области теоретической механики и в смежных областях: качественной теории дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и топологии, вариационного исчисления. Им опубликовано свыше 110 научных работ, среди которых четыре монографии.

Лауреат Государственной премии Российской Федерации, премии АН СССР им.С.А.Чаплыгина, Ломоносовской премии и премии Ленинского комсомола. Был приглашенным докладчиком на Международном конгрессе математиков в Беркли (США). Действительный член Международной академии наук высшей школы.