*Интегральные инварианты после Пуанкаре и Картана**

А. Основы общей теории интегральных инвариантов заложены А. Пуанкаре в III-ем томе его «Новых методов небесной механики» [1]. Важные конкретные примеры интегральных инвариантов были известны, конечно, и до Пуанкаре (например, знаменитая теорема Томсона из гидродинамики о сохранности циркуляции). Теория Пуанкаре развита и дополнена Э. Картаном [2].

Напомним сначала основные определения в современных обозначениях. Пусть

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in M^n, \tag{1}$$

— гладкая динамическая система на многообразии M. Производную Ли вдоль векторного поля v будем обозначать L_v. По формуле гомотопии

$$L_v = di_v + i_v d.$$

Пусть φ — k-форма, γ — k-цепь, g_v^t — фазовый поток системы (1). Справедлива простая формула (см., например, [3, гл. VII]):

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int\limits_{g^t(\gamma)} \varphi = \int\limits_{\gamma} L_v\varphi.$$

Таким образом, если

$$L_v\varphi = 0, \tag{2}$$

то интеграл

$$I[\gamma] = \int\limits_{\gamma} \varphi \tag{3}$$

будет *абсолютным интегральным инвариантом* для системы (1):

$$I\left[g^t(\gamma)\right] = I[\gamma] \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Если

$$L_v\varphi = d\psi, \tag{5}$$

где ψ — некоторая $(k-1)$-форма, то равенство (4) справедливо для любого k-цикла γ: $\partial\gamma = 0$. В этом случае интеграл (3) называется *относительным интегральным инвариантом.*

---

*Работа написана при финансовой поддержке INTAS (проект “Symmetry and cohomology approach to equations of mechanics and mathematical physics; № 96–0793”).

Разделение интегральных инвариантов на абсолютные и относительные, предложенные Пуанкаре, не охватывает все интересные случаи. Например, может оказаться, что

$$L_v\varphi = \psi, \quad d\psi = 0, \tag{6}$$

причем k-форма ψ не является точной. В этом случае равенство (4) имеет место для любого k-мерного цикла, гомологичного нулю. Такой интегральный инвариант назовем *условным*.

Приведем простой пример линейного интегрального инварианта, который является условным, но не относительным. Пусть

$$M^2 = \mathbb{T}\times\mathbb{R} = \{q \bmod 2\pi, p\},$$
$$\dot q = 0,\ \dot p = 1; \quad \varphi = p\,dq.$$

Тогда

$$L_v\varphi = i_v d\varphi = dq.$$

Форма $\psi = dq$ замкнута, но не точна. Поэтому,

$$\dot I\left[g^t(\gamma)\right] = 2\pi$$

для любого замкнутого контура γ, «охватывающего» цилиндр M (например, $\gamma = \{0 \leqslant q < 2\pi,\ p = 0\}$).

Пусть k-форма φ порождает условный или относительный интегральный инвариант. Тогда $(k+1)$-форме $d\varphi$, очевидно, отвечает абсолютный инвариант.

Действительно,

$$L_v d\varphi = dL_v\varphi = d\psi = 0.$$

Это замечание фактически принадлежит Пуанкаре [1, п. 238].

Б. Эли Картан вкладывает в понятие интегрального инварианта несколько иной смысл. По Картану абсолютные интегральные инварианты порождаются дифференциальными формами α, такими, что

$$i_v\alpha = i_v d\alpha = 0. \tag{7}$$

Такие формы Картан называет во введении к своей книге *интегральными формами*. Ввиду формулы гомотопии, из (7) сразу вытекает равенство $L_v\alpha = 0$.

Относительные интегральные инварианты порождаются (по Картану) формами α, такими, что

$$i_v d\alpha = 0. \tag{8}$$

Равенство (8) дает

$$L_v\alpha = di_v\alpha + i_v d\alpha = d\beta,$$

где $\beta = i_v\alpha$. Таким образом, получаем частный случай относительного интегрального инварианта по Пуанкаре.

Подход Картана к теории интегральных инвариантов кажется более узким по сравнению с подходом Пуанкаре. Однако, как пишет Картан во введении к своей книге, «...оказывается, что понятие интегральной формы не отличается существенно от понятия интегрального инварианта. Сопоставление этих двух понятий легло в основу настоящего труда».

Основная идея Картана основана на расширении фазового пространства M путем добавления нового независимого переменного-времени t. В расширенном $(n+1)$-мерном пространстве $\tilde{M} = M \times \mathbb{R}$ уравнение (1) заменяется системой

$$\dot{x} = v(x), \quad \dot{t} = 1. \tag{9}$$

Предложение 1. *Пусть k-форма φ порождает абсолютный инвариант системы* (1) *по Пуанкаре. Тогда система* (9) *допускает абсолютный инвариант по Картану с k-формой*

$$\alpha = \varphi + (-1)^k (i_v \varphi) \wedge dt.$$

Доказательство сводится к проверке двух равенств: $i_{\tilde{v}}\alpha = 0$ и $L_{\tilde{v}}\alpha = 0$, где $\tilde{v}$ — векторное поле на расширенном пространстве, задаваемое уравнениями (9). Предложение 1 фактически принадлежит Картану ([2], п. 30), только вместо явной формулы для α Картан приводит правило ее вывода: в выражение для формы φ вместо дифференциалов dx_i надо подставить разности $dx_i - v_i dt$.

Как заметил Картан ([2], п. 32), в общем случае предложение 1 не справедливо для относительных инвариантов. Мы дополним наблюдение Картана следующим утверждением.

Предложение 2. *Пусть k-форма φ порождает условный интегральный инвариант по Пуанкаре системы* (1)*: $i_\psi d\varphi = dv$. Тогда система* (9) *допускает условную инвариантную k-форму по Картану: $i_{\tilde{v}} d\alpha = 0$, где*

$$\alpha = \varphi + (-1)^{k-1} \psi \wedge dt. \tag{10}$$

Сам Картан фактически использовал формулу (10) в некоторых конкретных ситуациях. Однако, в общем случае он предлагал действовать по-другому ([2], п. 32): если система (1) допускает условный инвариант, то она допускает и абсолютный инвариант (см. А); после этого приведения уже можно воспользоваться предложением 1.

Пусть σ_1 — замкнутая k-мерная поверхность в $\tilde{M}$. Проводя через каждую точку σ_1 интегральную кривую векторного поля $\tilde{v}$, получим $(k+1)$-мерную трубку траекторий Γ. Пусть σ_2 — еще одна k-мерная поверхность, лежащая на Γ и гомологичная σ_1 (т.е. цикл

$\sigma_1 - \sigma_2$ является границей некоторого куска Г). Ввиду условия (8), $(k+1)$-форма $d\alpha$ равна нулю на Г. Следовательно, по теореме Стокса,

$$\int_{\sigma_1} \alpha = \int_{\sigma_2} \alpha. \tag{11}$$

Пусть теперь σ_1 и σ_2 — сечения трубки Г гиперповерхностями $t = t_1$ и $t = t_2$. Тогда в равенстве (11) форму α можно заменить на φ и мы переходим к инварианту Пуанкаре исходной системы (1).

Систематическое использование времени t как независимой координаты в расширенном фазовом пространстве — одна из основных идей книги Картана.

В. Пусть теперь $M^{2n} = T^*N^n$ — фазовое пространство гамильтоновой системы с конфигурационным пространством $N^n = \{x\}$. Введем канонические импульсы $y \in T_x^*N$ и 1-форму

$$\varphi = y\,dx = \sum_1^n y_k dx_k.$$

Как заметил Пуанкаре [1, п. 255], уравнения Гамильтона

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \ \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}; \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{12}$$

допускают линейный относительный инвариант

$$\int_\gamma \sum y_k dx_k, \quad \partial\gamma = 0. \tag{13}$$

Интересно отметить, что инвариант (13) не зависит от гамильтониана H в уравнениях (12). Поэтому (13) иногда называют *универсальным* интегральным инвариантом. Как доказал Ли Хуа Чжун [4], каждый линейный универсальный инвариант уравнений Гамильтона может отличаться от инварианта Пуанкаре (13) лишь постоянным множителем. Этот результат, впрочем, носит формальный характер. Его доказательство основано на анализе инвариантности интеграла от одной и той же 1-формы φ относительно фазовых потоков гамильтоновых систем с разными конкретными гамильтонианами.

Стоит подчеркнуть, что теорема Ли Хуа Чжуна доказана для случая, когда $M = \mathbb{R}^{2n}$. Если первое число Бетти фазового пространства M отлично от нуля, то эта теорема уже не справедлива. К форме φ можно прибавить замкнутую, но не точную 1-форму. Тогда значение интеграла (13) на негомологичных нулю циклах изменится на некоторые ненулевые аддитивные постоянные. В общем случае теорема Ли Хуа Чжуна имеет место лишь для условных интегральных инвариантов.

Пусть v — гамильтоново векторное поле, определяемое дифференциальными уравнениями (12). Нетрудно заметить, что систему (12) можно представить в эквивалентной форме

$$i_v d\varphi = -dH.$$

Согласно предложению 2, расширенная гамильтонова система допускает относительный интегральный инвариант

$$\int \varphi - H\,dt. \tag{14}$$

Это, пожалуй, самый известный результат Картана из его книги [2]. Инвариант (14) называется *интегральным инвариантом Пуанкаре — Картана*, а подынтегральное выражение $\sum y\,dx - H\,dt$ — *формой энергии-импульса*.

Как заметил Картан ([2], п. 11), наличие интегрального инварианта (14) однозначно выделяет гамильтонову систему (12).

Г. Пуанкаре поставил задачу о наличии других интегральных инвариантов уравнений динамики, в частности, в задаче трех тел. В [1, п. 257] он пишет: «Можно задаться вопросом, существуют ли другие алгебраические интегральные инварианты, кроме тех, которые мы только что образовали.

Можно было бы применить либо метод Брунса, либо метод, который я использовал в главах IV и V...».

Пуанкаре понимал, что эта задача тесно связана с условиями интегрируемости уравнений Гамильтона. Не случайно он упоминает главу V, в которой им доказана теорема о несуществовании однозначных аналитических интегралов при типичном возмущении функции Гамильтона. Покажем, что действительно в окрестности инвариантных торов вполне интегрируемые системы допускают несколько различных относительных интегральных инвариантов. В переменных действие-угол J, $\varphi \bmod 2\pi$ уравнения имеют следующий вид:

$$\dot J_1 = \ldots = \dot J_n = 0, \quad \dot\varphi_1 = \omega_1, \ldots, \dot\varphi_n = \omega_n. \tag{15}$$

Здесь ω_k — функция от J. Рассмотрим невырожденный случай, когда

$$\frac{\partial(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{\partial(J_1, \ldots, J_n)} \neq 0.$$

Оказывается, уравнения (15) можно представить в различных неэквивалентных гамильтоновых формах [5]: положим

$$\varphi = \sum_1^n \frac{\partial K}{\partial \omega_k} d\varphi_k,$$

а функция Гамильтона H равна

$$\sum_1^n \omega_k \frac{\partial K}{\partial \omega_k} - K.$$

Здесь K — невырожденная функция от частот $\omega_1, \dots, \omega_n$:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial \omega_i \partial \omega_j} \right\| \neq 0.$$

Различные гамильтоновы представления уравнений (15) «нумеруются» функциями $K(\omega)$. Поэтому, по теореме Пуанкаре, система (15) допускает интегральные инварианты

$$\oint \varphi = \oint \sum_1^n \frac{\partial K}{\partial \omega_k} d\varphi_k.$$

Сам Пуанкаре пытался связать существование новых интегральных инвариантов со свойствами мультипликаторов периодических решений уравнений Гамильтона. Он показал [1, п. 259], что если имеется p различных интегральных инвариантов (когда 1-формы φ независимы), причем коэффициенты форм φ линейны по каноническим переменным (как, например, в (13)), то p мультипликаторов будут равны единице. К сожалению, для общего случая анализ задачи, проведенный Пуанкаре, не привел к законченным результатам. В связи с этим Пуанкаре говорит: «Вероятно, задача трех тел не допускает инвариантных алгебраических соотношений, отличных от тех, которые уже известны. Однако, я еще не в состоянии доказать это» [1, п. 258].

Для некоторых упрощенных вариантов задачи трех тел гипотеза Пуанкаре доказана в работе [6] (см. Л и М).

Д. Согласно Пуанкаре, уравнения Гамильтона допускают абсолютный интегральный инвариант, задаваемый 2-формой $\omega = d\varphi$. Очевидно также, что степени ω ($\omega^2 = \omega \wedge \omega, \dots$) порождают абсолютные инварианты четных степеней. Особый интерес представляет $2n$-форма ω^n, пропорциональная форме объема в фазовом пространстве T^*N. Из ее инвариантности вытекает знаменитая теорема Лиувилля о сохранении фазового объема гамильтоновых систем, известная, конечно, до Пуанкаре и Картана.

Более общо, система (1) на M^n допускает интегральный инвариант

$$\int_D \rho(x)\, d^n x \qquad (16)$$

тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{div} \rho v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0. \tag{17}$$

Это уравнение называется *уравнением Лиувилля*, а функция ρ — плотностью интегрального инварианта. Для гамильтоновых систем $\rho \equiv 1$. Если $\rho > 0$, то интеграл (16) часто называется инвариантной мерой: его значение можно принять за меру mes области D. Таким образом,

$$\operatorname{mes}(g^t D) = \operatorname{mes} D,$$

где g^t — фазовый поток системы (1).

Для систем с инвариантной мерой на компактном M^n Пуанкаре доказал теорему о возвращении, которая положила начало эргодической теории: для почти всех (в смысле меры Лебега) $x \in M$ траектория $g^t x$ бесконечное число раз сколь угодно близко подходит к начальной точке x. Приведем количественный вариант этого результата, установленный недавно Н. Г. Мощевитиным.

Теорема 1. *Пусть положительная функция $\psi(t)$ сколь угодно медленно возрастает к $+\infty$ при $t \to +\infty$ и $\psi(t)/t^{1/n}$ монотонно убывает к нулю при $t \to +\infty$. Тогда для почти каждого $x \in M^n$ найдется последовательность $t_\nu \to +\infty$, такая, что*

$$\rho(g^{t_\nu} x, x) < t_\nu^{-\frac{1}{n}} \psi(t_\nu).$$

Здесь ρ — некоторое расстояние на M. Н. Г. Мощевитин привел пример сохраняющего объем сдвига g на n-мерном торе $\mathbb{T}^n$, для которого

$$\rho(g^t x, x) > C t^{-\frac{1}{n}}, \qquad C = \text{const}$$

при всех $t \in \mathbb{N}$ и всех $x \in \mathbb{T}^n$.

Для уравнений (15) уравнение Лиувилля принимает вид

$$\sum \omega_k \frac{\partial \rho}{\partial \varphi_k} = 0.$$

В предположении невырожденности это уравнение имеет решения, зависящие лишь от переменных действия: $\rho = \rho(J_1, \ldots, J_n)$. Оказывается, все такие инвариантные меры *лиувиллевы* [5]: они получаются возведением в n-ую степень дифференциала 1-формы $\varphi = \sum \partial K/\partial \omega_k d\varphi_k$ из п. Г. Если принять за переменные действие J частоты ω, то свойство лиувиллевости меры с плотностью $\rho(J)$ эквивалентно уравнению

$$\det \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial J_i \partial J_j} \right\| = \rho(J).$$

Это классическое *уравнение Монжа — Ампера*, которое, как известно, локально разрешимо относительно функции K при условии положительности функции ρ.

Е. Согласно теореме Крылова—Боголюбова, любая динамическая система на компактном многообразии имеет хотя бы одну инвариантную меру (см. [7], современное изложение — в [8]). Однако, в общем случае эти меры сингулярные и никак не связаны с гладкой структурой фазового пространства: они могут быть сосредоточены на конечном числе траекторий (например, асимптотически устойчивых положений равновесия).

Укажем некоторые общие условия существования у системы (1) инвариантной меры с гладкой плотностью. Уравнение Лиувилля (17) с учетом положительности плотности ρ можно переписать в виде

$$\dot{f} = -\operatorname{div} v, \quad \text{где} \quad f = \ln \rho. \tag{18}$$

Ясно, что f — гладкая функция на M.

По теореме о выпрямлении траекторий (восходящей к Пуанкаре), в малой окрестности неособой точки систему (1) можно привести к следующему виду

$$\dot{z}_1 = 1, \quad \dot{z}_2 = \ldots = \dot{z}_n = 0. \tag{19}$$

Следовательно, локально система (1) допускает целое семейство инвариантных мер: их плотности — произвольные функции от $z_2, \ldots, z_n$. Таким образом, задачу об интегральном инварианте имеет смысл рассматривать или в окрестности положений равновесия, или же в достаточно больших областях фазового пространства, где траектория обладает свойством возвращаемости (например, во всем M^n).

Теорема 2 ([9]). *Пусть $t \mapsto x(t)$ — решение системы* (1) *с компактным замыканием его траектории. Если система* (1) *допускает инвариантную меру с гладкой плотностью, то существует*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int_0^s (\operatorname{div} v)_{x(t)} dt = 0. \tag{20}$$

Доказательство этого утверждения простое. Пусть $x(t) \in D$ и D — компактная подобласть M. Согласно (18)

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int_0^s (\operatorname{div} v)\, dt = \lim_{s\to\infty} \frac{f\big(x(0)\big) - f\big(x(s)\big)}{s} = 0,$$

так как непрерывная функция f ограничена сверху и снизу на множестве D.

Отметим ряд следствий теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть $x = 0$ — равновесное решение нелинейной системы*

$$\dot{x} = \Lambda x + \ldots. \tag{21}$$

Если $\operatorname{tr}\Lambda \neq 0$, *то эта система не имеет в окрестности точки $x = 0$ интегрального инварианта с гладкой положительной плотностью.*

Действительно, в этом случае $(\operatorname{div} v)_{x=0} = \operatorname{tr}\Lambda$. Остается воспользоваться формулой (20) для решения $x(t) \equiv 0$.

Интересно отметить, что условие $\operatorname{tr}\Lambda = 0$ означает сохранение стандартной формы объема в $\mathbb{R}^n$ фазовым потоком линейной системы $\dot{x} = \Lambda x$. Таким образом, если линейная система с постоянными коэффициентами имеет хотя бы одну инвариантную меру, то она обязательно допускает стандартную инвариантную меру (с единичной плотностью). В работе [9] указаны применения следствия 1 для некоторых задач неголономной динамики.

Предположим теперь, что система (1) на M^n, $n = m + k$ имеет k-мерный инвариантный тор $\mathbb{T}^k$, заполненный траекториями условно периодических движений. В малой окрестности этого тора можно ввести координаты $x_1, \ldots, x_k \bmod 2\pi$, $y_1, \ldots, y_m$, в которых уравнения (1) примут вид

$$\dot{x} = \omega + f(x, y), \qquad \dot{y} = \Omega y + g(x, y). \tag{22}$$

Здесь $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k)$ — нерезонансный набор частот условно-периодических движений на $\mathbb{T}^k$, $f(x, 0) = 0$, $g(x, y) = O(|y|^2)$. Инвариантный тор задается, очевидно, уравнением $y = 0$. Элементы квадратной матрицы Ω порядка m 2π-периодически зависят от $x_1, \ldots, x_n$.

Следствие 2. *Если система* (22) *допускает инвариантную меру с гладкой плотностью, то*

$$\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} (\operatorname{tr}\Omega)\, dx_1 \ldots dx_n = 0. \tag{23}$$

Действительно, согласно теореме Г. Вейля,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int_0^s (\operatorname{div} v)\, dt = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbb{T}^k} (\operatorname{tr}\Omega)\, d^k x$$

для решений $x = \omega t + x_0$, $y = 0$. Остается воспользоваться теоремой 2.

При $k = 0$ матрица Ω имеет постоянные элементы и мы приходим к следствию 1: сумма собственных чисел матрицы Λ равна нулю. Согласно теореме Флоке—Ляпунова, при $k = 1$ с помощью линейной замены координат y, 2π-периодической по x, матрицу Ω можно привести к постоянной матрице. Собственные числа матрицы $\exp(2\pi\Omega/\omega)$

называются мультипликаторами периодической траектории $\mathbb{T}^1$ ($k = 1$). Следствие 2 дает нам необходимое условие существования инвариантной меры в окрестности периодической траектории: произведение ее мультипликаторов равно единице.

Если матрицу Ω можно привести к постоянной, то такой инвариантный тор называется *приводимым*. Обсуждение задачи о приводимости торов при $k > 1$ можно найти в работах [10, 11]. Для приводимых торов условие (23) переходит в простое равенство $\operatorname{tr}\Omega = 0$.

Следствие 1 допускает некоторое уточнение. Вычислим дивергенцию правой части системы (21) и разложим ее в ряд Маклорена

$$-\operatorname{div} v = \operatorname{tr}\Lambda + (a, x) + \ldots$$

Здесь a — некоторый постоянный вектор из $\mathbb{R}^n$.

Предложение 3 ([9]). *Пусть* $X = \Lambda^T$, $Y = \|X, a\|$. *Если* $\operatorname{rank} X < \operatorname{rank} Y$*, то система* (21) *не имеет инвариантной меры в окрестности точки* $x = 0$.

Если матрица Λ невырождена, то ранги матриц X и Y заведомо совпадают.

В приложениях встречаются системы с однородными правыми частями: $v(\lambda x) = \lambda^k v(x)$ с некоторым целым $k \geqslant 1$. Для таких систем критерий существования инвариантной меры с гладкой плотностью дает

Предложение 4 ([12]). *Система дифференциальных уравнений с однородными правыми частями имеет инвариантную меру в том и только том случае, когда ее фазовый поток сохраняет стандартную меру. При этом плотность инвариантной меры является ее первым интегралом.*

Укажем любопытное применение этого утверждения к *уравнениям Эйлера — Пуанкаре* на алгебрах Ли, которые описывают геодезические линии на группах Ли с левоинвариантной метрикой (или, что то же самое, движение по инерции механической системы, кинетическая энергия которой инвариантна при левых сдвигах на группе Ли — конфигурационном пространстве системы). Уравнения Эйлера — Пуанкаре, как известно [13], имеют следующий вид:

$$\dot{m}_i = \sum c^l_{ik} m_l \omega_k, \quad m_s = \sum I_{sp}\omega_p.$$

Здесь c^l_{ik} — структурные постоянные алгебры Ли g, ω (скорость системы) — вектор из g, а m (кинетический момент) — вектор из двойственного пространства g^*, $I = \|I_{sp}\|$ — тензор инерции системы. Пусть g — алгебра Ли группы G — конфигурационного пространства рассматриваемой системы.

Теорема 3 ([12]). *Уравнения Эйлера — Пуанкаре имеют инвариантную меру с гладкой плотностью тогда и только тогда, когда группа G унимодулярна.*

Напомним, что унимодулярность группы означает наличие *меры Хаара*, которая не меняется при левых и правых сдвигах группы G. Аналитический критерий унимодулярности имеет следующий вид: для каждого i выполнено равенство $\sum c_{ik}^k = 0$, где c — структурные постоянные алгебры Ли группы G.

В работе [12] указаны условия наличия инвариантной меры в более общем случае, когда на систему наложены левоинвариантные неголономные связи. Инвариантные меры систем с правоинвариантными связями изучены в [14].

Ж. Задача об инвариантных мерах возмущенных уравнений (15) рассмотрена в работе [9] (даже в более общей ситуации, когда количества медленных и быстрых переменных не совпадают). Ограничимся рассмотрением простейшего из нетривиальных случаев, когда имеется одна медленная z и две быстрых угловых переменных x и y. Уравнения будут иметь следующий вид:

$$\dot{x} = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots, \dot{y} = v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots, \dot{z} = \varepsilon w_1 + \ldots \tag{24}$$

Здесь ε — малый параметр u_0 и v_0 зависят только от z. Правые части этих уравнений — ряды по ε, коэффициенты которых — аналитические функции по x, y, z, 2π-периодические по x и y. Можно считать, что коэффициенты определены и аналитичны в прямом произведении $\Delta \times \mathbb{T}^2$, где Δ — интервал в $\mathbb{R} = \{z\}$, а $\mathbb{T}^2 = \{x, y \bmod 2\pi\}$.

Будем искать решение уравнения (18) в виде ряда по степеням ε

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \ldots$$

с аналитическими в $\Delta \times \mathbb{T}^2$ коэффициентами. Приравнивая в уравнении (18) коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующую цепочку уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{\partial f_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial f_0}{\partial y} v_0 = 0, \\ \frac{\partial f_0}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f_0}{\partial y} v_1 + \frac{\partial f_0}{\partial z} w_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x} u_0 + \frac{\partial f_1}{\partial y} v_0 = \\ = -\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right). \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{25}$$

При $\varepsilon = 0$ система (24) будет вполне интегрируемой: фазовое пространство $\Delta \times \mathbb{T}^2$ расслоено на инвариантные торы $z = \text{const}$ с условно-периодическими движениями. Невозмущенную систему будем называть *невырожденной*, если отношение частот u_0/v_0 — непостоянная функция от z; другими словами, $u_0'v_0 - u_0v_0' \not\equiv 0$ на интервале Δ.

Для невырожденных систем из первого уравнения (25) вытекает, что f_0 — функция только от переменной z. Пусть черта обозначает усреднение по переменным x, y:

$$\overline{F} = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(x,y,z)\,dx\,dy.$$

Применяя операцию усреднения ко второму уравнению системы (25), получим

$$\frac{df_0}{dz}\bar{w}_1 = -\frac{d\bar{w}_1}{dz}.$$

Это соотношение приводит нас к принципу *усреднения*, установленному в [9]: функция $\bar{f}_0$ является плотностью интегрального инварианта усредненной системы

$$\dot{z} = \varepsilon\bar{w}_1. \tag{26}$$

Переход от полной системы (24) к усредненной (26) является стандартным приемом теории возмущений. Отметим одно из следствий принципа усреднения: если функция $\bar{w}_1$ имеет изолированный нуль, то полная система (24) не допускает инвариантной меры с плотностью $\rho = \exp f$, где f задана в виде ряда (25).

Положим

$$w_1 = \sum W_{mn}(z)\exp\left[i(mx+ny)\right]$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = -\sum G_{mn}(z)\exp\left[i(mx+ny)\right]$$

$$f_1 = \sum F_{mn}(z)\exp\left[i(mx+ny)\right].$$

Приравнивая во втором уравнении (25) коэффициенты при одинаковых гармониках, приходим к серии равенств

$$f_0'W_{mn} + i(mu_0 + nv_0)F_{mn} = G_{mn}. \tag{27}$$

Предположим, что при $z = z_0$ выполнено нетривиальное резонансное соотношение $mu_0 + nv_0 = 0$ с некоторыми целыми m, n. Если $W_{mn}(z_0) = 0$, а $G_{mn}(z_0) \neq 0$, то уравнение (27) противоречиво и исходная система (24) не допускает меры с однозначной плотностью, аналитической по параметру ε.

Пусть $W_{mn}(z_0) \neq 0$. Заметим, что при $z = z_0$, очевидно, будут справедливы соотношения

$$f_0'W_{km,kn} = G_{km,kn}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Если хотя бы при одном целом k

$$W_{m,n}G_{km,kn} \neq W_{km,kn}G_{m,n},$$

то система (24) также не имеет инвариантных мер с однозначными и аналитическими плотностями.

Этот метод применен в работе [9] для изучения условий существования инвариантных мер уравнений неголономной механики. Более точно, рассматривается механическая система с конфигурационным пространством в виде трехмерного тора $\mathbb{T}^3 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \bmod 2\pi\}$, лагранжианом $L = (\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2 + \dot\varphi_3^2)/2$ (внешние силы отсутствуют) и связью

$$\dot\varphi_3 = \varepsilon(a_1\dot\varphi_1 + a_2\dot\varphi_2). \tag{28}$$

Здесь ε — малый параметр. При $\varepsilon = 0$ связь (28) будет интегрируемой и мы имеем обычную голономную систему, обладающую инвариантной мерой (согласно классической теореме Лиувилля). В общем случае (когда $\varepsilon \neq 0$) связь (28) будет, конечно, неинтегрируемой. Системы со связями вида (28) Я. В. Татаринов предложил назвать *слабо неголономными*.

С точностью до членов $o(\varepsilon)$ уравнения движения имеют следующий вид:

$$\dot\varphi_1 = J_1, \quad \dot\varphi_2 = J_2, \quad \dot\varphi_1 = \varepsilon(a_1J_1 + a_2J_2), \quad \dot J_1 = \dot J_2 = 0.$$

Медленными переменными будут частоты J_1 и J_2, а также угловая координата φ_3. Здесь невозмущенная система оказывается вырожденной, однако к ней можно применить указанный выше метод поиска плотности инвариантной меры в виде ряда по степеням ε.

Результаты анализа этой задачи можно сформулировать в следующей геометрической форме. Множество всех систем с лагранжианом L и связью (28) имеет естественную структуру бесконечномерного линейного пространства (изоморфного пространству пар функций a_1 и a_2 на трехмерном торе). Обозначим это пространство $\mathbb{K}$. Все системы, обладающие инвариантной мерой (в первом приближении по ε), образуют линейное подпространство $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$. Точно также, системы с интегрируемой связью (28) образуют линейное подпространство $\mathbb{K}''$. Действительно, условия интегрируемости соотношения (28) в первом приближении по ε имеет вид

$$\frac{\partial a_1}{\partial\varphi_2} = \frac{\partial a_2}{\partial\varphi_1}.$$

Оно линейно по a_1 и a_2. По теореме Лиувилля, $\mathbb{K}'' \subset \mathbb{K}'$. Оказывается,

$$\dim \mathbb{K}/\mathbb{K}' = \infty, \quad \dim \mathbb{K}'/\mathbb{K}'' = \infty.$$

Первое соотношение показывает, что наличие инвариантной меры с гладкой плотностью является редким исключением среди неголономных систем. Второе соотношение указывает на существование массивного множества неголономных систем с инвариантной мерой, не сводящихся к голономным системам. Среди них имеются, в частности, *системы Чаплыгина* (для которых функции a_1 и a_2 не зависят от φ_3), которые в первом приближении по ε удовлетворяют всем условиям применимости метода приводящего множителя, гарантирующего существование интегрального инварианта (см. [15]). Было бы интересным выяснить, справедливы ли эти заключения при малых фиксированных значениях $\varepsilon \neq 0$ (а не только в первом приближении по параметру ε).

3. Идея Пуанкаре о связи задачи о линейных интегральных инвариантах с проблемой малых знаменателей [1, п. 257] реализованы в работе [16]. В ней рассмотрена система уравнений (24) с малым параметром ε, которая часто встречается в теории нелинейных колебаний.

В [16] рассмотрена задача об условиях существования у системы (24) относительно интегрального инварианта

$$\oint \varphi_\varepsilon, \tag{29}$$

причем коэффициенты 1-формы φ_ε — однозначные аналитические функции на $\Delta \times \mathbb{T}^2$, аналитически зависящие от ε. Конечно, следует исключить тривиальный случай, когда

$$d\varphi_\varepsilon = 0. \tag{30}$$

При этом условии интеграл (29) тождественно равен нулю в силу теоремы Стокса.

Разложим функцию w_1 в двойной ряд Фурье:

$$w_1 = \sum W_{mn}(z) \exp\left[i(mx + ny)\right].$$

Введем множество $\mathbb{P} \subset \Delta$, состоящее из точек z, таких, что

(1) $mu_0(z) + nv_0(z) = 0$ для некоторых целых m, n, не равных одновременно нулю,

(2) $W_{mn}(z) \neq 0$.

Такие множества впервые рассматривались Пуанкаре в связи с проблемой интегрируемости уравнений Гамильтона [1, гл.V].

Теорема 4 ([16]). *Предположим, что*

(A) *множество* $\mathbb{P}$ *имеет предельную точку* z_*, *внутри* Δ,

(B) $u_0'v_0 - u_0v_0'|_{z_*} \neq 0$,

(C) $W_{00}(z) \not\equiv 0$.

Тогда система (24) *не имеет нетривиальных интегральных инвариантов вида* (29).

Условие (B) означает невырожденность невозмущенной системы (когда $\varepsilon = 0$): отношение частот u_0/v_0 непостоянно. Кроме того, из (B) вытекает, что при $z = z_*$ и $\varepsilon = 0$ правые части (24) не обращаются нуль. Условия (A)+(B) гарантируют отсутствие непостоянных аналитических интегралов и нетривиальных полей симметрий, аналитических по ε [16].

Можно попытаться применить теорему 4 к гамильтоновым системам, мало отличающимся от вполне интегрируемых. Здесь речь может идти о системах с двумя степенями свободы, порядок которых понижен на единицу с помощью интеграла энергии. Применяя метод Уиттекера, приведенной системе можно придать вид неавтономной гамильтоновой системы с периодическим по времени гамильтонианом (см. [17, гл. 1]).

Итак, рассмотрим уравнение Гамильтона

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial z}, \quad \dot{z} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad H_\varepsilon = H_0(z) + \varepsilon H_1(x, y, z) + \ldots \tag{31}$$

Здесь $y \bmod 2\pi$, z — канонические переменные действие-угол невозмущенной системы, функция H считается 2π-периодической по «времени» $x = t$.

Для системы (31) имеем:

$$u_0 = 1, \quad v_0 = \frac{\partial H_0}{\partial z}, \quad w_1 = -\frac{\partial H_1}{\partial y}. \tag{32}$$

Следовательно, условие (B) эквивалентно невырожденности невозмущенного гамильтониана:

$$\frac{d^2 H_0}{dz^2} \neq 0. \tag{33}$$

Множество $\mathbb{P}$, очевидно, совпадает с множеством

$$\left\{ z \in \Delta : \frac{dH_0}{dz} = -\frac{n}{m},\ H_{mn} \neq 0 \right\}, \tag{34}$$

где H_{mn} — коэффициенты Фурье возмущающей функции H_1. Из (32) вытекает, что условие (C) для гамильтоновых систем никогда не выполняется ($W_{00} \equiv 0$). Впрочем, это не удивительно: уравнения (31) имеют интегральный инвариант Пуанкаре — Картана

$$\oint z\,dy - H_\varepsilon dx. \tag{35}$$

Очевидно, этот инвариант нетривиальный (условие вырождения (30) не выполняется).

Укажем достаточные условия несуществования второго интегрального инварианта. Для этого нам потребуется

Лемма 1 ([16]). *Пусть выполнены условия* (A) *и* (B) *теоремы 1. Тогда найдется функция*

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0(z) + \varepsilon\lambda_1(z) + \dots,$$

такая, что

$$d\varphi_\varepsilon = i_v(\lambda_\varepsilon\Omega), \tag{36}$$

где v_c *— векторное поле (24),* $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$.

Покажем, как отсюда выводится заключение теоремы 4. Проинтегрируем 2-формы в обеих частях (36) по двумерному тору $z = \text{const}$. По теореме Стокса интеграл от формы $d\varphi$ равен нулю, а интеграл справа равен

$$\lambda_\varepsilon W_{00} + o(\varepsilon).$$

Применяя условия (C), получаем, что $\lambda_\varepsilon = 0$. Поэтому равенство (36) будет совпадать с условием вырождения (30).

Лемма 2. *Если выполнено* (36), *то* 3*-форма* $\lambda\Omega$ *порождает абсолютный интегральный инвариант системы* (24).

Действительно,

$$0 = dd\varphi = di_v(\lambda\Omega) = di_v(\lambda\Omega) + i_v d(\lambda\Omega) = L_v(\lambda\Omega).$$

Лемма 3. *Предположим, что система* (24) *имеет еще один абсолютный инвариант, порождаемый* 3*-формой* $\lambda'\Omega$, *причем* $\lambda' \neq 0$. *Тогда отношение* λ/λ' *интеграл уравнений* (24).

Этот простой факт (правда, в других терминах) был отмечен Якоби в его «Лекциях по динамике».

Хорошо известно, что фазовый поток уравнений Гамильтон (31) сохраняет «стандартную» 3-форму объема Ω. Более того, для 1-формы «энергии-импульса» из (35) справедливо равенство (36), причем $\lambda_\varepsilon = 1$.

Теорема 5 ([6]). *Пусть выполнено условие* (33), *а множество* (34) *имеет предельную точку внутри интервала* Δ. *Тогда любой условный интегральный инвариант* (29) *гамильтоновой системы* (31) *отличается от инварианта Пуанкаре — Картана* (35) *постоянным множителем* c_ε.

Доказательство. Предположим, что имеется интегральный инвариант вида (29) системы (31). Так как выполнены условия (A) и (B) теоремы 4, то справедливо равенство (36). Учтем теперь, что $L_v\Omega = 0$. Тогда, по леммам 2 и 3, множитель λ_ε в (36) — интеграл системы (31). Однако, при условиях теоремы 5, $\lambda_\varepsilon = c_\varepsilon = \text{const}$ [17, гл. 1]. Итак,

$$d\varphi_\varepsilon = c_\varepsilon d(z\,dy - H_\varepsilon dx).$$

Отсюда вытекает, что значения интегралов (29) и (35) на гомологичных нулю циклах отличаются множителем c_ε. Что и требовалось.

Замечание. Предположим, что

1) $u_0'v_0 - u_0v_0' \neq 0$,

2) $\mathbb{P}$ всюду плотно в Δ,

3) система (24) допускает нетривиальный инвариант (29). Можно показать, что тогда любой другой условный интегральный инвариант системы (24) отличается от (29) постоянным множителем, аналитически зависящим от ε.

Теорему 5 можно применить к плоской круговой ограниченной задаче трех тел. Малым параметром ε здесь служит отношение массы Юпитера к массе Солнца. Динамика третьего тела ничтожно малой массы (астероида) во вращающейся системе отсчета (где Солнце и Юпитер неподвижны) описывается уравнениями Гамильтона [18]

$$\begin{gathered}\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad k = 1, 2, \\ H = H_0 + \varepsilon H_1 + \ldots, \quad H_0 = -\frac{1}{2p_1^2} - p_2.\end{gathered} \tag{37}$$

Разложение возмущающей функции в двойной ряд Фурье было найдено Леверье. Оно имеет следующий вид:

$$H_1 = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} h_{uv} \cos\left[uq_1 - v(q_1 + q_2)\right].$$

Коэффициенты h_{uv}, зависящие от p_1, p_2, вообще говоря, отличны от нуля. Принимая угловую переменную q_2 за новое «время» и применяя процедуру понижения порядка Уиттекера, приходим к уравнениям Гамильтона вида (31). При этом

$$H_0(z) = -\frac{1}{z_2}.$$

Так что условие (33) выполнено автоматически. Можно показать, что множество P заведомо всюду плотно на полуоси $z > 0$. Таким образом, приведенные уравнения Гамильтона ограниченной задачи трех тел не имеют новых относительных интегральных инвариантов, аналитических по параметру ε и независимых от инварианта Пуанкаре — Картана.

И. Теорема 4 применена в работе [16] для выяснения причины отсутствия линейных условных интегральных инвариантов для течений вязкой несжимаемой жидкости. Как известно, в невязком случае сохраняется циркуляция жидкости по подвижному контуру. Это —

знаменитая *теорема Гельмгольца — Томсона*, которая с разных точек зрения обсуждалась Картаном в его книге.

Течение однородной жидкости (плотность ρ постоянна) в потенциальном силовом поле описывается уравнением Навье — Стокса

$$\frac{dv}{dt} = -\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho} + V\right) + \nu\Delta v. \tag{38}$$

Здесь v — поле скоростей, p — давление, V — потенциальная энергия поля сил, ν — коэффициент вязкости. Для простоты мы будем писать p вместо $p/\rho + V$. В силу предположения об однородности, уравнение неразрывности сводится к условию несжимаемости

$$\operatorname{div} v = 0. \tag{39}$$

Мы будем рассматривать стационарные течения, когда поле скоростей v и функция p не зависят явно от времени. В этом случае поле v порождает бездивергентную динамическую систему

$$\dot{x} = v(x), \tag{40}$$

фазовый поток которой сохраняет стандартный объем в $\mathbb{R}^3 = \{x\}$.

Пусть u, v, w — компоненты векторного поля v. Нетрудно понять, что уравнения (38)–(39) допускают следующие частные решения:

$$\begin{gathered} u_0 = \alpha z + \xi, \quad v_0 = \beta z + \eta, \quad w_0 = 0, \quad p = p_0, \\ \alpha, \beta, \xi, \eta, p_0 = \mathrm{const}. \end{gathered} \tag{41}$$

Решение (41) соответствует сдвиговому плоско-параллельному течению.

Будем искать стационарные решения системы уравнений (38)–(39) в виде степенных рядов

$$u = u_0+\varepsilon u_1+\ldots, \quad v = v_0+\varepsilon v_1+\ldots, \quad w = \varepsilon w_1+\ldots, \quad p = p_0+\varepsilon p_1+\ldots \tag{42}$$

Здесь ε — малый параметр, а коэффициенты — аналитические функции от x, y, z, 2π-периодические по x, y. Подставляя ряды (42) в (38)–(39) и приравнивая коэффициенты при ε, мы получаем следующую линейную систему:

$$\begin{aligned} u_0\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_0\frac{\partial u_1}{\partial y} + w_1\alpha + \frac{\partial p_1}{\partial x} &= \nu\Delta u_1, \\ u_0\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_0\frac{\partial v_1}{\partial y} + w_1\beta + \frac{\partial p_1}{\partial y} &= \nu\Delta v_1, \\ u_0\frac{\partial w_1}{\partial x} + v_0\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial p_1}{\partial z} &= \nu\Delta w_1, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Будем решать эту систему методом Фурье. Обозначая коэффициенты Фурье функций u_1, v_1, w_1, p_1 через U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, P_{mn} соответственно, получим линейные уравнения

$$\begin{aligned}
&i\bigl[m(\alpha z+\xi)+n(\beta z+\eta)\bigr]\,U_{mn}+\alpha W_{mn}+im\,P_{mn}=\\
&\qquad\qquad=\nu\bigl[-(m^2+n^2)U_{mn}+U''_{mn}\bigr],\\
&i\bigl[m(\alpha z+\xi)+n(\beta z+\eta)\bigr]\,V_{mn}+\beta W_{mn}+in\,P_{mn}=\\
&\qquad\qquad=\nu\bigl[-(m^2+n^2)V_{mn}+V''_{mn}\bigr],\\
&i\bigl[m(\alpha z+\xi)+n(\beta z+\eta)\bigr]\,W_{mn}+P'_{mn}=\\
&\qquad\qquad=\nu\bigl[-(m^2+n^2)W_{mn}+W''_{mn}\bigr],\\
&i(m\,U_{mn}+n\,V_{mn})+W'_{mn}=0.
\end{aligned}\tag{44}$$

Если $\nu\neq 0$, то уравнения (44) образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая имеет второй порядок относительно U_{mn}, V_{mn} и первый относительно W_{mn} и P_{mn}. Следовательно, для однозначного определения этих коэффициентов мы должны задать их значения и значения производных U'_{mn}, V'_{mn} в некоторой точке $z=z_0$.

Коэффициенты Фурье функций u_k, v_k, w_k и p_k ($k\geqslant 2$) можно найти по индукции. Вопрос о сходимости рядов (42) является содержательной проблемой, которая, однако, решается положительно для так называемых ползущих течений (или течений Стокса), когда в уравнениях (38) пренебрегают производной $\dot v$ [16].

Принимая во внимание разложения (42), мы видим, что система (40) имеет как раз вид (24) и поэтому к ней можно попробовать применить теорему 4. Прежде всего проверим условие (А). Ясно, что

$$mu_0+nv_0=(m\alpha+n\beta)\,z+m\xi+n\eta\equiv 0$$

только если одновременно

$$m\alpha+n\beta=0,\qquad m\xi+n\eta=0.$$

Поскольку $m^2+n^2\neq 0$, то $\alpha\eta-\beta\xi=0$. Поэтому, если

$$\alpha\eta-\beta\xi\neq 0,$$

то невозмущенная система невырождена.

Обсудим теперь условие (В). Ясно, что $mu_0+nv_0=0$ в точке

$$z_{mn}=-\frac{m\xi+n\eta}{m\alpha+n\beta}.\tag{45}$$

Конечно, мы можем исключить из рассмотрения пары целых чисел m, n, удовлетворяющих условию $m\alpha+n\beta=0$. Напомним, что множество $\mathbb{P}$ состоит из точек z_{mn}, в которых $W_{mn}\neq 0$. Если $\nu\neq 0$, то коэффициенты W_{mn} в этих точках могут быть выбраны произвольными. Значит, в общем случае множество $\mathbb{P}$ всюду плотно на оси $\mathbb{R} = \{z\}$. Более точно, это условие может нарушаться на подпространстве бесконечной коразмерности в пространстве всех векторных полей (42). Согласно теореме 4, типичное стационарное течение вида (42) не допускает нетривиальных интегралов, полей симметрий и линейных интегральных инвариантов.

С этой точки зрения интересно рассмотреть случай идеальной жидкости, когда $\nu = 0$. Здесь происходит вырождение системы (44): первое и второе дифференциальные уравнения становятся алгебраическими. В точках z_{mn} они принимают следующий вид:

$$\alpha W_{mn} + im P_{mn} = 0, \quad \beta W_{mn} + in P_{mn} = 0.$$

Следовательно, если $\alpha n - \beta m \neq 0$, то $W_{mn}(z_{mn}) = 0$ и, следовательно, $z_{mn} \notin \mathbb{P}$. Поскольку $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, то мы видим, что в случае $\alpha n - \beta m = 0$ все точки (45) совпадают. Таким образом, множество $\mathbb{P}$ состоит не более, чем из одной точки, и, следовательно, для идеальной жидкости условие (B) не выполняется.

К. Идеи Картана о связи интегральных инвариантов с симметриями дифференциальных уравнений развиты в работе [6]. Вернемся вновь к системе (1) и будем считать, что M — трехмерное многообразие, v — гладкое касательное векторное поле без особых точек. Более того, предположим, что система (1) допускает инвариантную форму объема Ω:

$$L_v \Omega = 0.$$

Форма объема задает каноническую ориентацию M. Если M компактно, то можно считать, что

$$\int_M \Omega > 0.$$

В частности, форма Ω определяет гладкую инвариантную меру системы (1).

Наиболее важный пример систем указанного вида дают гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Здесь M^3 — связная компонента неособой поверхности уровня функции Гамильтона, v — ограничение гамильтонова поля на M, форма объема определяется инвариантной 4-формой Лиувилля (подробности см., например, в [19]).

Лемма 4. (Картан [2, п. 91]) *При сделанных предположениях 2-форма*

$$\Phi = i_v \Omega \tag{46}$$

замкнута и порождает абсолютный интегральный инвариант системы (1).

Действительно,

$$d\Phi = di_v\Omega = L_v\Omega - i_v d\Omega = 0,$$
$$L_v\Phi = L_v i_v\Omega = i_v L_v\Omega = 0.$$

Так как форма (46) замкнута, то локально

$$\Phi = d\varphi.$$

Поскольку $i_v\Phi = 0$, то

$$L_v\varphi = i_v d\varphi + di_v\varphi = d(i_v\varphi).$$

Следовательно, 1-форме φ отвечает «локальный» относительный интегральный инвариант.

Если класс когомологий 2-формы Φ равен нулю, то 1-форма φ корректно определена в целом. В частности, это заведомо так, если

$$H^2(M, \mathbb{R}) = 0. \tag{47}$$

Эти рассуждения фактически содержатся в [2, п. 91]. Правда, там обсуждается случай, когда $M = \mathbb{R}^3$.

В дальнейшем всюду предполагается, что для многообразия M^3 справедлива теорема о разбиении единицы. В частности, сюда относятся компактные многообразия.

Лемма 5. *Пусть Ψ — гладкая 2-форма на M. Найдется векторное поле $x \mapsto u(x)$ такое, что*

$$\Psi = i_u\Omega. \tag{48}$$

Действительно, пусть $\{\lambda_\alpha(x)\}$ — разбиение единицы, подчиненное некоторому открытому покрытию M. Считается, что в областях λ_α можно ввести координаты «в целом». Легко проверить, что в области $\operatorname{supp}\lambda_\alpha$ для 2-формы $\lambda_\alpha\Psi$ алгебраическое уравнение (48) имеет единственное гладкое решение u_α такое, что

$$\operatorname{supp} u_\alpha \subset \operatorname{supp}\lambda_\alpha.$$

Остается положить

$$u(x) = \sum_\alpha u_\alpha(x).$$

Замечание. В аналитическом случае поле u, конечно, будет аналитическим.

Лемма 6. *Предположим, что система* (1) *имеет условный интегральный инвариант*

$$\oint \varphi.$$

Положим

$$d\varphi = i_u\Omega. \tag{49}$$

Тогда векторное поле u является полем симметрий: $[u, v] = 0$.

Доказательство. По определению условного инварианта

$$L_v\varphi = \psi, \quad d\psi = 0.$$

Следовательно,

$$0 = dL_v\varphi = L_v d\varphi = L_v i_u \Omega =$$
$$= (L_v i_u - i_u L_v)\,\Omega = i_{[v,u]}\Omega.$$

Так как форма объема невырождена, то поля u, v коммутируют. Что и требовалось.

Замечание. Лемма 6 остается справедливой, если в (49) заменить форму $d\varphi$ любой замкнутой 2-формой. Условия существования нетривиальных полей симметрий (когда векторы $u(x)$ и $v(x)$ независимы почти всюду) уравнений Гамильтона получены в [20].

Лемма 6 имеет важные приложения к гамильтоновой механике. В качестве примера рассмотрим *геодезический поток* на замкнутой двумерной поверхности Σ. Он определяется заданием римановой метрики. Уравнения геодезических на Σ описываются уравнениями Гамильтона, причем гамильтонианом H служит риманова метрика, представленная в канонических координатах на $T^*\Sigma$. Хорошо известно, что при положительных значениях полной энергии h гамильтоновы системы на трехмерных энергетических поверхностях

$$\{x \in T^*\Sigma : H(x) = h\} \tag{50}$$

изоморфны. Обычно полагают $h = 1$; соответствующая динамическая система называется геодезическим потоком на Σ. Ясно, что геодезический поток имеет относительный интегральный инвариант Пуанкаре — Картана.

Теорема 6 ([6]). *Пусть Σ — аналитическая поверхность рода > 1 с аналитической римановой метрикой. Любой условный инвариант геодезического потока на Σ, определяемый аналитической 1-формой на* (50), *пропорционален инварианту Пуанкаре-Картана.*

Доказательство. Пусть Ω — инвариантная аналитическая 3-форма объема на (50). Если геодезический поток имеет условный интегральный инвариант, определяемый аналитической 1-формой φ, то (по лемме 6) найдется аналитическое поле симметрий u. Однако, геодезический поток на аналитической поверхности не имеет нетривиальных симметрий [21]:

$$u = cv, \quad c = \mathrm{const}.$$

Но тогда, согласно (49),

$$d\varphi = c\,i_v\Omega.$$

Следовательно, рассматриваемый условный интегральный инвариант отличается от инварианта Пуанкаре — Картана постоянным множителем c.

Теорема доказана.

В заключении этого пункта укажем еще на одно приложение полученных результатов к одному из ограниченных вариантов задачи трех тел. Пусть два массивных тела одинаковой массы обращаются вокруг их общего центра масс по эллиптическим орбитам с ненулевым эксцентриситетом, а третье тело ничтожно малой массы все время движется по прямой, ортогональной плоскости массивных тел (подробности см. в [22]). Эта задача предложена А. Н. Колмогоровым для проверки возможности комбинаций финальных движений трех тел по классификации Шази.

Динамика пылинки описывается неавтономной гамильтоновой системой вида (32) с периодическим гамильтонианом. Расширенное фазовое пространство совпадает с прямым произведением

$$\mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 = \{x \bmod 2\pi, y, z\}.$$

Разумеется, эта система имеет инвариант Пуанкаре — Картана (35).

Задача А. Н. Колмогорова неинтегрируема: она не допускает непостоянных аналитических интегралов [22]. Причина заключается в квазислучайном характере поведения ее траекторий. В частности, имеется бесконечное число невырожденных долгопериодических траекторий. Как показано в [20], отсюда вытекает отсутствие нетривиальных аналитических полей симметрий: $u = cv$, $c = \text{const}$. Применяя лемму 6, получаем, что уравнения рассматриваемой задачи не допускают новых условных интегральных инвариантов. Аналогично доказывается отсутствие новых аналитических инвариантов на фиксированных энергетических многообразиях с большой отрицательной энергией плоской круговой ограниченной задачи трех тел. Необходимые подготовительные результаты о структуре множества долгопериодических невырожденных траекторий установлены в [23] методами символической динамики.

Эти результаты, полученные в работе [6], доказывают гипотезу Пуанкаре об отсутствии новых интегральных инвариантов для различных вариантов ограниченной задачи трех тел.

Л. Теми же методами можно изучить вопрос об условных инвариантах второго порядка:

$$\int_D \Phi. \tag{51}$$

Здесь D — двумерный цикл в M^3, Φ — 2-форма. Условия инвариантности интеграла (51) имеет вид

$$L_v\Phi = \Psi, \quad d\Psi = 0. \tag{52}$$

Для относительных инвариантов 2-форма Ψ точна, а для абсолютных инвариантов $\Psi = 0$.

Так как инвариантная 3-форма объема Ω невырождена, то

$$d\Phi = f\Omega, \quad f : M^3 \to \mathbb{R}. \tag{53}$$

Лемма 7. *Функция f — интеграл системы* (1) *на* M^3.

Действительно, применяя (52) и (53), получим:

$$\begin{aligned} 0 &= d\Psi - dL_v\Phi = L_v d\Phi = L_v(f\Omega) \\ &= (L_v f)\Omega + fL_v\Omega = \dot{f}\Omega. \end{aligned}$$

Следовательно, $\dot{f} = 0$. Что и требовалось.

По лемме 4 система (1) имеет абсолютный инвариант $i_v\Omega$. Так что речь может идти о существовании еще одного интегрального инварианта.

Для дальнейшего полезно ввести понятие многозначного интеграла системы (1). Это замкнутая 1-форма ϑ, такая, что

$$i_v\vartheta = 0. \tag{54}$$

Локально $\vartheta = dg$, причем

$$\dot{g} = i_v dg = 0$$

согласно (54). Таким образом, локально функция g является обычным интегралом системы (1). Если

$$H^1(M, \mathbb{R}) = 0, \tag{55}$$

то функция g определена в целом и многозначный интеграл превращается в обычный интеграл системы (1). Так как $\dim M = 3$, то по теореме двойственности Пуанкаре условия (47) и (55) эквиваленты.

Всюду ниже рассматриваемые объекты (M, v, Ω, Φ) считаются аналитическими.

Теорема 7 ([6]). *Пусть M^3 компактно и система* (1) *допускает условный интегральный инвариант* (51), *причем*

$$\Phi \neq ci_v\Omega, \quad c = \mathrm{const}. \tag{56}$$

Тогда система (1) имеет нетривиальный многозначный интеграл $\vartheta \neq 0$.

Доказательство. По лемме 7, функция f из равенства (53) — интеграл системы (1). Если $f \neq \mathrm{const}$, то теорема 7 доказана. Пусть $f = \alpha = \mathrm{const}$. Интегрируя обе части равенства

$$d\Phi = \alpha\Omega \tag{57}$$

по компактному многообразию M и применяя теорему Стокса, получаем

$$\alpha \int\limits_M \Omega = 0.$$

Так как 3-форма Ω есть форма объема, то $\alpha = 0$. Следовательно, согласно (56), форма Φ замкнута.

Положим (лемма 5)

$$\Phi = i_u \Omega.$$

Так как 2-форма Φ замкнута, то по лемме 6, поле u коммутирует с полем v. Возможны два случая: 1) векторы $u(x)$ и $v(x)$ линейно зависимы во всех точках $x \in M$, 2) эти векторы почти всюду независимы. Так как $v \neq 0$, то в первом случае

$$u(x) = \lambda(x)\,v(x), \qquad \lambda : M \to \mathbb{R}.$$

Поскольку u — поле симметрий, то λ — интеграл системы (1) [20]. Если $\lambda \neq \mathrm{const}$, то теорема доказана. Случай $\lambda = \mathrm{const}$ невозможен ввиду условия (56). Во втором случае, как доказано в [24], наличие нетривиального аналитического поля симметрий влечет существование аналитического многозначного интеграла $\vartheta \neq 0$. При этом используется трехмерность фазового пространства M и наличие инвариантной 3-формы объема.

Теорема доказана.

Следствие 3. *В предположениях теоремы 7 уравнение* (1) *явно интегрируется с помощью конечного числа алгебраических операций, дифференцирований и квадратур.*

Дополнительные дифференцирования требуются для отыскания многозначного интеграла (см. также [24]).

Замечание. Теорема 7 справедлива и в случае, когда имеется линейный интегральный инвариант

$$\oint \varphi.$$

Требуется только, чтобы 2-форма $\Phi = d\varphi$ удовлетворяла условию (56).

Поскольку дифференцированные уравнения указанных выше различных вариантов задачи трех тел не допускают нетривиальных полей симметрий и многозначных интегралов, то любой условный интегральный инвариант этих уравнений вида (51) может отличаться только постоянным множителем от инварианта

$$\int\limits_D dz \wedge dy - dH \wedge dx.$$

Так как $M = 3$, то имеет смысл рассматривать лишь абсолютные интегральные инварианты третьего порядка. Соответствующая 3-форма имеет вид $f\Omega$ и по лемме 3 функция f — интеграл уравнений (1). Для рассмотренных выше уравнений динамики $f = \text{const}$.

Интегральные инварианты динамических систем на трехмерных многообразиях с положительной энтропией описаны в работе [25].

Задача об условиях существования интегральных инвариантов гамильтоновых систем со многими степенями свободы требует дополнительного рассмотрения.

М. Как показано в работе [26], наличие интегральных инвариантов тесно связано со свойствами ветвления решений дифференциальных уравнений в плоскости комплексного времени.

Мы рассмотрим эти вопросы на примере систем дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_i = v_i(z_1, \ldots, z_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{58}$$

инвариантных относительно преобразований подобия

$$t \to t/\alpha, \quad z_1 \to \alpha^{g_1} z_1, \ldots, z_n \to \alpha^{g_n} z_n$$

с целыми положительными g_j. Критерий инвариантности уравнений (58) заключается в выполнении соотношений

$$v_i(\alpha^{g_1} z_1, \ldots, \alpha^{g_n} z_n) = \alpha^{g_i+1} v_i(z_1, \ldots, z_n).$$

Такие системы обычно называют *квазиоднородными*, а числа $g_1, \ldots, g_n$ — *показателями квазиоднородности*. Квазиоднородные системы часто встречаются в приложениях. Примером служат уравнения Эйлера — Пуанкаре на алгебрах Ли с квадратичными правыми частями (которые упоминались в п. Ж): здесь можно положить $g_1 = \ldots = g_n = 1$. Несколько более сложными примерами являются *уравнения Эйлера — Пуассона*, описывающие вращение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, а также уравнения задачи n гравитирующих тел.

Оказывается, для квазиоднородных систем задача об условиях однозначности решений в плоскости комплексного времени практически может быть доведена до конца. Мы воспроизведем здесь анализ уравнений (58), выполненный Х. Иошидой [27] по методу Ковалевской. Напомним знаменитый результат Ковалевской: общее решение дифференциальных уравнений Эйлера — Пуассона представляется мероморфными функциями времени t только в тех случаях, когда имеется дополнительный первый интеграл. Именно таким путем она пришла к открытию нового случая интегрируемости, который теперь носит ее имя.

Сначала заметим, что система (58) допускает частные мероморфные решения

$$z_1 = c_1/t^{g_1}, \ldots, z_n = c_n/t^{g_n},$$

где постоянные $c_1, \ldots, c_n$ удовлетворяют алгебраической системе уравнений

$$v_i(c_1, \ldots, c_n) = -g_i c_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Как правило, эти уравнения имеют ненулевые комплексные корни.

Общее решение уравнений (58) ищем в виде

$$z_i = (c_i + x_i)^{-g_i}. \tag{59}$$

Можно показать, что функции $t \mapsto x(t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$t\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} K_{ij} x_j + \sum_{|m|=2}^{\infty} K^{(i)}_{m_1,\ldots,m_n} x^{m_1} \ldots x_n^{m_n}, \tag{60}$$

$$K_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial z_j}(c) + g_i \delta_{ij},$$

$$K^{(i)}_{m_1 \ldots m_n} = \frac{\partial^{m_1+\ldots+m_n} v_i}{\partial^{m_1} z_1 \ldots \partial^{m_n} z_n}(c).$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера. Матрица $K = \|K_{ij}\|$ называется *матрицей Ковалевской*, а ее собственные значения $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — *показателями Ковалевской*.

Предложение 5. *Если $c \neq 0$, то $\rho = -1$ — показатель Ковалевской.*

Действительно, ненулевой вектор $v(c)$ является собственным вектором матрицы K с собственным значением -1. Положим, для определенности, $\rho_1 = -1$.

Теорема 8 (Ляпунов, [28]). *Если все решения системы* (58) *однозначные функции комплексного времени, то*

1) *показатели Ковалевской — целые числа,*

2) *матрица Ковалевской приводится к диагональной форме* $\mathrm{diag}\,[\rho_1, \ldots, \rho_n]$.

Доказательство основано на исследовании уравнений в вариациях

$$t\dot{x} = Kx,$$

которые являются *уравнениями Фукса*. Они имеют частные решения

$$t^{\rho_i}\xi_i, \quad \xi_i \in \mathbb{C}^n, \tag{61}$$

где ξ_i — собственные векторы матрицы K, отвечающие собственным значениям ρ_i. Если ρ_i не целые, то решения (61) (а вместе с ними и функции (59)) ветвятся при обходе точки $t = 0$. Оказывается, свойство ветвления сохранится и для решений полной системы (60).

С. В. Ковалевская решила задачу об условиях мероморфности общего решения системы (58). Для этого необходимо, чтобы ряды Лорана решений (58) содержали $n-1$ произвольную постоянную. Еще один параметр возникает при замене t на $t+\beta$, $\beta = \mathrm{const}$ (ввиду свойства автономности). Необходимое условие мероморфности решений (59) состоит в том, что $\rho_2, \ldots, \rho_n$ — целые неотрицательные числа.

Функция $z \mapsto f(z)$ называется *квазиоднородной* степени m, если

$$f(\alpha^{g_1} z_1, \ldots, \alpha^{g_n} z_n) = \alpha^m f(z_1, \ldots, z_n).$$

Любую аналитическую функцию f можно разложить в ряд по квазиоднородным формам:

$$f(z) = \sum_{m \geqslant 0} f_m(z), \qquad \deg f_m = m.$$

Ясно, что квазиоднородные формы разложения интеграла системы (58) сами будут первыми интегралами.

Теорема 9 ([27]). *Пусть f — квазиоднородный интеграл степени m системы* (58) *и $df(c) \neq 0$. Тогда $\rho = m$ — показатель Ковалевской.*

Этот результат устанавливает замечательную связь между свойством мероморфности общего решения и наличием непостоянных интегралов.

Предположим теперь, что система (58) допускает абсолютный интегральный инвариант, порождаемый k-формой

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k}(z)\, dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_k}.$$

Эту форму также можно разложить в ряд по квазиоднородным формам. Форма ω называется *квазиоднородной формой* степени m, если

$$\begin{gathered} \omega_{i_1 \ldots i_k}(\alpha^{g_1} z_1, \ldots, \alpha^{g_n} z_n) = \alpha^j \omega_{i_1 \ldots i_k}(z), \\ j = m - g_{i_1} - \ldots - g_{i_k}. \end{gathered} \tag{62}$$

Теорема 10 ([26]). *Пусть квазиоднородная k-форма ω степени m порождает абсолютный инвариант системы* (58) *и $\omega \neq 0$ в точке $z = c$. Тогда для некоторых индексов $i_1, \ldots, i_k$ показатели Ковалевской удовлетворяют соотношению*

$$\rho_{i_1} + \ldots + \rho_{i_k} = m. \tag{63}$$

Теорема 10 является далеко идущим обобщением теоремы 9. Действительно, если f — квазиоднородный интеграл степени m системы (58), то $\omega = df$ будет инвариантной квазиоднородной формой степени m. Если $z = c$ не является критической точкой функции f, то в этой точке $\omega \neq 0$. Поскольку ω — 1-форма, то соотношение (63) дает нам, что $\rho_i = m$ для некоторого i.

В частности, если ω — квазиоднородная форма объема степени m, то теорема 10 приводит к следующему соотношению для показателей Ковалевской:

$$\rho_1 + \ldots + \rho_n = m. \tag{64}$$

Например, уравнения Эйлера — Пуанкаре на n-мерной унимодулярной алгебре Ли допускают стандартную инвариантную меру, порождаемую n-форму объема $dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$. Согласно (62), она будет квазиоднородной степени $n (j = 0)$ с показателями квазиоднородности $g_1 = \ldots = g_n = 1$. Следовательно, из (64) вытекает, что в этом случае сумма всех показателей Ковалевской равна n.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим волчок Эйлера, описываемый дифференциальными уравнениями в $\mathbb{R}^3$

$$I\dot{\omega} = I\omega \times \omega. \tag{65}$$

Здесь ω — вектор угловой скорости, I — тензор инерции. Уравнения (65) — это уравнения Эйлера — Пуанкаре на алгебре $so(3)$. Для уравнений (65) имеются нетривиальные решения алгебраической системы

$$(Ic) \times c = -Ic, \quad c \neq 0.$$

Кроме этого, они допускают два квадратичных интеграла

$$(I\omega, \omega), \quad (I\omega, I\omega),$$

дифференциалы которых линейно независимы в точке $\omega = c$, если тензор инерции I не шаровой. Следовательно, по теореме Иошиды, $\rho = 2$ — показатель Ковалевской кратности два. Итак, показателями Ковалевской являются числа $-1,\ 2,\ 2$, сумма которых равна $\dim so(3) = 3$.

В работе [26] на самом деле рассматривалась более общая задача о наличии тензорных инвариантов уравнений (58) — тензорных полей вида

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(z),$$

инвариантных при действии фазового потока системы (58). Например, (1,0)-тензорам отвечают поля симметрий. В [26] доказано, что существование тензорных инвариантов влечет *резонансные* соотношения для показателей Ковалевской, обобщающие равенства (63):

$$\rho_{i_1} + \ldots + \rho_{i_p} - \rho_{j_1} - \ldots - \rho_{j_q} + m = 0. \tag{66}$$

В частности, если имеется нетривиальное поле симметрий со степенью квазиоднородности m, то среди показателей Ковалевской имеется число $\rho = -m$. Поскольку поле v само является полем симметрий со степенью квазиоднородности $m = 1$, то мы приходим к заключению предложения 5.

Н. В этом пункте мы обсудим круг вопросов, поднятых Картаном в главах XV и XVI. Он не рассматривает подробно общей задачи интегрирования системы дифференциальных уравнений, допускающих заданное число известных интегральных инвариантов, ограничившись наиболее простым случаем, когда система (1), заданная на n-мерном многообразии, имеет $n-1$ линейных абсолютных инвариантов.

Мы расширим задачу Картана, имея в виду использование известных тензорных инвариантов произвольной структуры. Прежде всего полезно задаться вопросом: сколько независимых инвариантов вообще необходимо иметь для точного интегрирования системы (1)? Наше наблюдение состоит в следующем: кроме тривиального инварианта — поля симметрий v — надо знать еще $n-1$ инвариантов. Поясним этот эмпирический факт некоторыми примерами. Хорошо известно, что для явного интегрирования автономной системы n дифференциальных уравнений достаточно знать $n-1$ независимых интегралов, либо $n-1$ независимых полей симметрий, порождающих разрешимую алгебру Ли (*теорема Ли*), либо $n-2$ независимых интегралов и инвариантную меру (*теорема Эйлера — Якоби*). Знаменитая *теорема Лиувилля* о полной интегрируемости гамильтоновых систем также подтверждает это наблюдение: в системе с n степенями свободы достаточно иметь n независимых интегралов, находящихся попарно в инволюции; кроме этих интегралов гамильтонова система имеет еще n гамильтоновых полей симметрий, порождаемых этими интегралами (гамильтониан, конечно, порождает тривиальный инвариант).

Картан рассматривает похожую ситуацию: предполагается, что система (1) допускает $n-1$ независимых инвариантных 1-форм $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$:

$$i_v\phi_j = 0, \quad L_v\varphi_j = 0, \quad j = 0, \ldots, n-1.$$

В п. 156 показано, что с самого начала можно считать выполненными равенства

$$d\varphi_k = \sum_{p<q} c^k_{pq}\varphi_p \wedge \varphi_q \tag{67}$$

с постоянными коэффициентами c^k_{pq}.

Картан вводит $n-1$ векторных полей $u_1, \ldots, u_{n-1}$ с помощью равенств

$$i_{u_j}\varphi_k = \delta_{jk}, \tag{68}$$

где δ-символ Кронекера. Ввиду предположения о независимости 1-форм φ, равенства (68) однозначно определяют набор независимых полей u_j с точностью до слагаемых вида λv, где λ — некоторая функция. В п. 164 показано, что эти поля являются полями симметрий (т. е. $[v, u_j] = \lambda_j v$ для всех j), а также выведены соотношения

$$[u_p, u_q] = -\sum c_{pq}^k u_k + \lambda_{pq} v.$$

Здесь λ_j и λ_{pq} — некоторые гладкие функции.

Поэтому, если коэффициенты в (67) являются структурными константами некоторой разрешимой алгебры Ли, то уравнения (1) интегрируются с помощью квадратур (теорема Ли).

На эти факты можно взглянуть с иной точки зрения. Вместо общей системы (1) будем рассматривать квазиоднородную систему (58) из п. Н и предположим, что она допускает квазиоднородные тензорные инварианты с целыми степенями, структура которых и их количество определяется указанными выше теоремами об интегрируемости. Если предположить дополнительно, что в выделенной точке $z = c$ эти инварианты не обращаются в нуль, то все показатели Ковалевской оказываются целыми числами с простыми элементарными делителями (т. е. выполнены заключения теоремы Ляпунова о необходимых условиях однозначности общего решения).

В связи с этим замечанием возникают два предположения.

1) При выполнении условий известных теорем об интегрируемости все решения квазиоднородной системы (58) в виде рядов (59), действительно, являются однозначными функциями комплексного времени.

2) Дополнительные условия на тензорные инварианты, фигурирующие в условиях теорем об интегрируемости (структура коммутационных соотношений для полей симметрий в теореме Ли, свойства структурных постоянных в соотношении (67)) можно вывести из условия однозначности решений квазиоднородных систем.

Это наблюдение приводит к следующему эвристическому способу получения условий интегрируемости: число и тип ее инвариантов должны приводить к ряду соотношений между показателями Ковалевской вида (66) таких, что эти показатели с необходимостью являются целыми.

В качестве примера укажем следующее утверждение, которое, по-видимому, ранее не упоминалось.

Теорема 11. *Пусть система* (1) *имеет* $n-2$ *независимых коммутирующих векторных полей симметрий* $u_3, \ldots, u_n$ *и инвариантную* n*-форму* Ω*, таких, что*

$$L_{u_k}\Omega = 0, \quad 3 \leqslant k \leqslant n.$$

Тогда эта система интегрируема в квадратурах.

Замечание. Для квазиоднородных систем наличие $n-2$ квазиоднородных полей симметрий, линейно независимых в точке $z=c$, влечет целочисленность (и отрицательность) $n-2$ показателей Ковалевской (п. Н). Еще один из показателей равен -1. Существование инвариантной меры дает соотношение (64), из которого вытекает целочисленность оставшегося показателя Ковалевской.

Доказательство теоремы 11. Во-первых, заметим, что $di_v\Omega = L_v\Omega - i_v d\Omega = 0$. Далее,

$$i_{u_3}(di_v\Omega) = (-di_{u_3} + L_{u_3})(i_v\Omega) = -d(i_{u_3}i_v\Omega) + L_{u_3}i_v\Omega = 0.$$

Поскольку u_3 — поле симметрий, то $[v, u_3] = 0$ и

$$L_{u_3}i_v\Omega = i_v L_{u_3}\Omega = 0.$$

Следовательно,

$$d(i_{u_3}i_v\Omega) = 0.$$

Аналогично получаем

$$d(i_n i_{u_{n-1}} \dots i_{u_3} i_v\Omega) = 0.$$

По лемме Пуанкаре,

$$\Omega(v, u_3, \dots, u_n, \cdot) = df.$$

Отсюда получаем, что $i_v df = L_v f = 0$ и $i_{u_k} df = L_{u_k} f = 0$. Следовательно, f является интегралом (1) и каждого из векторных полей $u_k (k \geqslant 3)$. Поскольку векторы $v, u_3, \dots, u_n$ независимы, то $f \neq \mathrm{const}$.

Таким образом, поля $v, u_3, \dots, u_n$ касаются интегральных гиперповерхностей $\Sigma_a = \{x : f(x) = a\}$ и коммутируют. Остается применить теорему Ли для ограничения системы (1) на Σ_a. Утверждение доказано.

К сожалению, теория интегрирования дифференциальных уравнений с использованием тензорных инвариантов пока еще недостаточно развита. Полученные в этом направлении результаты пока носят разрозненный характер. В заключение этого пункта укажем один специальный результат, найденный недавно П. Топаловым.

Теорема 12 ([29]). *Предположим, что геодезический поток на изоэнергетической поверхности Q^3 допускает тензорный инвариант типа (p,q), который обязательно обращается в нуль на конечном числе замкнутых траекторий N. Тогда геодезический поток имеет непостоянный интеграл на универсальной накрывающей над $Q^3 \setminus N$.*

Стоит, наверное, отметить, что обращение в нуль тензорного инварианта не является типичным свойством.

О. В качестве примеров, иллюстрирующих общую теорию инвариантов, Э. Картан постоянно использует гамильтоновы системы, динамику идеальной жидкости и геометрическую оптику. Оказывается, эти три на вид различные теории имеют под собой одну общую математическую конструкцию, в которой интегральные инварианты играют центральную роль.

Как хорошо известно, уравнения движения идеальной жидкости (уравнения (38) при $\nu = 0$) можно представить в следующей форме:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\operatorname{rot} v) \times v = -\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{69}$$

где $f = v^2/2 + P + V$, P — функция давления (для однородной жидкости $P = p/\rho$). Уравнение (69) называется *уравнением Ламба*.

Рассмотрим теперь распространение света в неоднородной изотопной среде с показателем преломления $n(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$: световые частицы движутся по лучам со скоростью, равной $1/n$. При построении оптических изображений существенную роль играют не отдельные лучи, а *системы лучей* — семейства световых лучей, однократно заполняющих пространство: через каждую точку x проходит единственный луч, причем направление луча гладко зависит от точки x. Таким образом, система лучей однозначно связана с полем скоростей $v(x)$ световых частиц. Можно показать, что это поле удовлетворяет уравнению

$$(\operatorname{rot} n^2 v) \times v = 0. \tag{70}$$

Для однородной среды, когда $n = \mathrm{const}$, уравнение (70) совпадает с уравнением стационарного течения жидкости, когда поле скоростей коллинеарно своему ротору. Примером служит известное ABC-течение Арнольда: компоненты поля скорости имеют вид

$$A\sin x_3 + C\cos x_2, \quad B\sin x_1 + A\cos x_3, \quad C\sin x_2 + B\cos x_1.$$

Здесь $\operatorname{rot} v = v$. Поскольку поле 2π-периодично по координатам x_1, x_2, x_3, то его можно рассматривать на трехмерном торе. Для почти всех значений A, B, C на торе имеются области с хаотическим поведением траекторий.

Нетрудно найти условия, при которых система лучей ортогональна некоторому семейству поверхностей в $\mathbb{R}^3$:

$$(v, \operatorname{rot} n^2 v) = 0.$$

Сопоставляя с (70), получаем, что тогда $\operatorname{rot} n^2 v = 0$. Следовательно,

$$n^2 v = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

Такие системы лучей называются *системами Гамильтона*. Классическим результатом является *теорема Малюса*: если система лучей ортогональна некоторой регулярной поверхности, то она будет системой Гамильтона и останется таковой после любого числа отражений и преломлений. Теорема Малюса просто доказывается с применением линейного интегрального инварианта

$$\oint n^2(v, dx)$$

и обсуждается Картаном в п. 193.

Системы лучей, для которых $\operatorname{rot} n^2 v \neq 0$, называются *системами Куммера*. По сравнению с системами Гамильтона они меньше изучены.

Рассмотрим теперь канонические уравнения Гамильтона (12) с гамильтонианом $H(x, y, t)$, который может явно зависеть от времени. Предположим, что эти уравнения имеют n-мерное инвариантное многообразие, задаваемое уравнениями

$$y = u(x, t), \tag{71}$$

где u — гладкое ковекторное поле на конфигурационном многообразии N^n.

Введем векторное поле скорости v на N, положив

$$v(x, t) = \dot{x} = \left.\frac{\partial H}{\partial y}\right|_{y=u},$$

а также функцию $h(x, t) = H\bigl(x, u(x, t), t\bigr)$. Оказывается, поля u, v и функция h связаны соотношением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\operatorname{rot} u)\, v = -\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{72}$$

где

$$\operatorname{rot} u = \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|$$

— кососимметричная $n \times n$-матрица. При $n = 3$ значение $(\operatorname{rot} u)\, v$ совпадает с обычным векторным произведением $(\operatorname{rot} u) \times v$.

Уравнение (72) по виду совпадает с (69); будем его также называть *уравнением Ламба*. Сходство вида уравнений (69), (70) и (72) дает возможность развить аналогию между гидродинамикой, геометрической оптикой и гамильтоновой механикой. Наличие инвариантных соотношений (71) позволяет свести уравнения Гамильтона (12) в $2n$-мерном фазовом пространстве к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x, t) \tag{73}$$

на n-мерном конфигурационном пространстве. Система (73) обладает многими свойствами, характерными для течений идеальной жидкости [30].

Положим $\omega = \sum u_i dx_i$, $\Omega = d\omega$. Тогда (72) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + i_v \Omega = -dh.$$

Система (71) допускает относительный интегральный инвариант

$$\oint \omega.$$

Это — аналог *теоремы Томсона* о сохранении циркуляции.

Поле u назовем потенциальным, если $\operatorname{rot} u = 0$; локально $u = \partial\varphi/\partial x$. Справедлива *теорема Лагранжа*: если при $t = 0$ поле u потенциально, то оно будет потенциальным при всех t. Это — простое следствие теоремы Томсона. Подставляя $u = \partial\varphi/\partial x$ в уравнение (72), получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, t\right) = f, \tag{74}$$

где f — некоторая функция t. В гидродинамике соотношение (74) называется *интегралом Лагранжа—Коши*, а в гамильтоновой механике — *уравнением Гамильтона—Якоби*. После калибровки потенциала

$$\varphi \mapsto \varphi - \int f(t)\, dt$$

функцию f в правой части (74) можно сделать равной нулю.

Ненулевые векторы w, удовлетворяющие равенству $(\operatorname{rot} u) w = 0$ (или $i_w \Omega = 0$), в гидродинамике называются *вихревыми* векторами. Распределение вихревых векторов интегрируемо: через каждую точку $x \in N$ проходит единственное максимальное интегральное многообразие этого распределения, которое в каждой своей точке касается всех вихревых векторов. Такие многообразия естественно назвать *вихревыми*. По терминологии Картана — это характеристические многообразия 2-формы Ω. Подчеркнем, что вихревые многообразия определяются при фиксированном значении t.

Справедлив аналог *теоремы Гельмгольца — Томсона*: фазовый поток системы (73) переводит вихревые многообразия в вихревые многобразия. В стационарном случае (когда поля u, v и функция h не зависят явно от t) функция h постоянна на линиях тока (интегральных кривых поля v) и на вихревых многообразиях. Это — обобщение знаменитой *теоремы Бернулли*.

Для исследования уравнений Ламба можно применить идеи и методы, развитые в книге Картана. При этом раскрываются интересные связи между подходом Картана и идеями из гидродинамики. Например, согласно п. 119 главы XII, 1-форму ω локально можно привести к следующему виду:

$$\omega = dS + x_1 dx_2 + \ldots + x_{2k-1} dx_{2k}. \tag{75}$$

Здесь S — некоторая гладкая функция от x и t, а $2k$ — ранг 2-формы $\Omega = d\omega$. Запишем в явном виде компоненты ковекторного поля u

$$u_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1},\ u_2 = \frac{\partial S}{\partial x_2} + x_1, \ldots, u_{2k+1} = \frac{\partial S}{\partial x_{2k+1}}, \ldots, u_n = \frac{\partial S}{\partial x_n},$$

и уравнение Ламба (72)

$$\dot{x}_1 = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right),\ \dot{x}_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right), \tag{76}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{gathered} \dot{x}_{2k-1} = -\frac{\partial}{\partial x_{2k}}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right),\ \dot{x}_{2k} = \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right), \\ \frac{\partial}{\partial x_{2k+1}}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right) = \ldots = \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right) = 0. \end{gathered} \tag{77}$$

Из (77) вытекает, что $\partial S/\partial t + h$ — функция лишь от координат $x_1, \ldots, x_{2k}$ и времени t. Эти соотношения обобщают уравнение Гамильтона — Якоби и переходят в него при $k = 0$, когда поле u потенциально. При этом функция S будет играть роль действия по Гамильтону.

Таким образом, (76) будет замкнутой системой канонических уравнений Гамильтона с гамильтонианом $\partial S/\partial t + h$.

Согласно (75), в этих переменных

$$\Omega = dx_1 \wedge dx_2 + \ldots + dx_{2k-1} \wedge dx_{2k}$$

и поэтому вихревые многообразия (характеристические $(n-2k)$-мерные поверхности) задаются уравнениями

$$x_1 = \alpha_1, \ldots, x_{2k} = \alpha_{2k}, \quad \alpha = \text{const}.$$

Поскольку производные $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{2k}$ зависят лишь от $x_1, \ldots, x_{2k}, t$, то отсюда сразу же вытекает теорема Гельмгольца — Томсона о вмороженности вихревых многообразий в поток системы (73).

В гидродинамике переменные $x_1, \ldots, x_{2k}$ и функция S называются *потенциалами Клебша*. Еще в 1857 г. Клебш представил 1-форму циркуляции скорости $v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3$ в виде (75). При $n = 3$ уравнения (76) и (77) получены Клебшем и Стюартом (см., например, [31]).

П. В гидродинамике к уравнению (69) добавляют *уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \tag{78}$$

эквивалентное наличию интегрального инварианта

$$\int \rho\, d^3x$$

— массы подвижного объема. Спрашивается, допускает ли подобные инварианты система (79) в общем случае?

В этом вопросе существенную роль играет понятие *класса* дифференциальной формы, введенное Картаном (гл. IV). Мы будем рассматривать формы постоянного класса. Напомним, что класс замкнутой 2-формы всегда четный.

Предложение 6. *Пусть $n = 2s$ четно и класс 2-формы $\Omega = d\omega$ равен n. Тогда система* (73) *допускает интегральный инвариант*

$$\int \tau, \quad \tau = \Omega^s. \tag{79}$$

Это утверждение, между прочим, содержит как частный случай знаменитую теорему Лиувилля о сохранении фазового объема в гамильтоновых системах.

Пусть теперь $n = 2s + 1$ нечетно и класс 1-формы ω равен n. Тогда n-форма $\tau = \omega \wedge \Omega^s$ — форма объема на M, однако в общем случае она не будет инвариантной. Действительно, для производной по времени от τ можно получить следующее выражение:

$$\dot\tau = dg \wedge \Omega^s,$$

где $g = i_v\omega - h$ — *лагранжиан* рассматриваемой задачи. Поскольку форма Ω замкнута, то

$$dg \wedge \Omega^s = d(g\Omega^s).$$

Поэтому для компактного M имеем

$$\frac{d}{dt}\int_M \tau = \int_M dg \wedge \Omega^s = \int_M d(g\Omega^s) = 0.$$

Таким образом, τ-объем всего M сохраняется. Это замечание, однако, содержательно лишь для неавтономных систем.

Рассмотрим важный частный случай, когда уравнения (72) являются уравнениями Ламба для стационарной n-мерной инвариантной поверхности гамильтоновой системы с гамильтонианом, квадратичным по импульсам (этот случай отвечает движению по инерции).

Предложение 7 ([32]). *В рассматриваемом случае, когда форма ω имеет нечетный класс $n = 2s + 1$, система* (73) *допускает интегральный инвариант* (79), *где $\tau = \omega \wedge \Omega^s$.*

Если класс форм ω и Ω не максимальный, то с их помощью вообще не удается получить форму объема. Таким образом, вопрос о наличии инвариантных мер уравнений (73) является содержательной задачей.

Наиболее общий подход заключается в поиске *полного решения* $u(x,t,c)$, $c = (c_1,\dots,c_n)$ уравнений Ламба, которое удовлетворяет условию невырожденности:

$$\rho = \frac{\partial(u_1,\dots,u_n)}{\partial(c_1,\dots,c_n)} \neq 0. \tag{80}$$

Для потенциальных решений $u = \partial\varphi/\partial x$ полное решение уравнения Ламба переходит в *полный интеграл* $\varphi(t,x,c)$ уравнения Гамильтона—Якоби (74). В этом случае неравенство (80) принимает известный вид

$$\det\left\|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial c_j}\right\| \neq 0.$$

Метод Гамильтона — Якоби обсуждается Картаном в гл. XIV.

Предложение 8. *При фиксированных значениях с функция (80) удовлетворяет уравнению неразрывности* (78), *где* $\operatorname{div} = \sum \partial/\partial x_i$.

Таким образом, система (73) допускает интегральный инвариант

$$\int \rho\, d^n x.$$

Предложение 8 выводится из теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема гамильтоновых систем.

В заключение рассмотрим вопрос о существовании инвариантной меры уравнений (73) в задаче о геодезических линиях левоинвариантных метрик на группах Ли. Пусть G — группа Ли, g — ее алгебра, T — левоинвариантная метрика на G — кинетическая энергия механической системы с пространством положений G. Если $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in g$ — скорость системы, то

$$T = \frac{1}{2}\sum I_{ij}\omega_i\omega_j. \tag{81}$$

Ввиду предположения о левоинвариантности, $I_{ij} = \mathrm{const}$. Симметричная положительно определенная матрица $I = \|I_{ij}\|$ — тензор инерции системы. Теорема об изменении момента приводит к уравнениям Эйлера — Пуанкаре на алгебре g (см. п. Ж), которые следует дополнить $n(=\dim G)$ кинематическими соотношениями

$$\dot{x}_i = \sum_j v_i^j \omega_j, \tag{82}$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — локальные координаты на группе G, $v_j = (v_1^j, \ldots, v_n^j)$ — левоинвариантные поля на G, для которых справедливы коммутационные соотношения

$$[v_i, v_j] = \sum_k c_{ij}^k v_k.$$

Пусть $w_1, \ldots, w_n$ — правоинвариантные поля на группе G. Их фазовые потоки представляют семейства левых сдвигов. Поскольку лагранжиан T левоинвариантен, то уравнения движения на TG допускают n независимых *нетеровых интегралов*

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \cdot w_i = c_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{83}$$

Ввиду (81) и (82), левые части этих уравнений линейны по ω. Из (83) скорости ω можно представить как однозначные функции на группе G (при фиксированных значениях $c_1, \ldots, c_n$). В результате получаем автономные уравнения на группе G вида (73):

$$\dot{x}_i = \sum v_i^j(x)\, \omega_j(x, c). \tag{84}$$

Теорема 13 ([33]). *Если группа G унимодулярная (т.е. $\sum {c_i}^k{}_k = 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$), то при всех значениях c фазовый поток системы* (84) *сохраняет меру Хаара на G.*

Напомним, что на каждой группе имеется единственная (с точностью до постоянного множителя) мера, инвариантная при всех левых (правых) сдвигах. В случае унимодулярной группы эта мера (называемая мерой Хаара) биинвариантна. В частности, все компактные группы унимодулярны.

Теорема 13 доказывается с помощью предложения 8. Она является следствием более общего результата: фазовый поток системы (84) сохраняет правоинвариантную меру на G (см. [33]).

Р. В п. М введены многозначные интегралы динамических систем. Этот объект естественным образом возникнет также в связи с теорией Картана интегрирования системы n дифференциальных уравнений с известным набором $n - 1$ независимых инвариантных 1-форм (п. О).

Пусть, например, все константы C_{pq}^k в (67) равны нулю. Тогда 1-формы $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ будут многозначными интегралами. Действительно, $d\varphi_k = 0$ и $i_v\varphi_k = 0$. Следовательно, локально $\varphi_k = df$, где f — некоторая непостоянная гладкая функция, и

$$i_v df = L_v f = 0.$$

Можно задаться вопросом, существуют ли вообще многозначные интегралы? Вот простой пример системы на n-мерном торе $\mathbb{T}^n = \{x_1, \ldots, x_n \bmod 2\pi\}$:

$$\dot{x}_1 = \omega_1, \ldots, \dot{x}_n = \omega_n, \tag{85}$$

где ω — нерезонансный набор постоянных частот. Функции

$$\omega_j x_i - \omega_i x_j \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j) \tag{86}$$

(точнее, их дифференциалы) являются многозначными интегралами; среди них $n - 1$ независимых. Стоит отметить, что ввиду эргодичности система (85) не допускает ни одного однозначного интеграла, который был бы непостоянной непрерывной функцией на $\mathbb{T}^n$.

Можно привести примеры многозначных интегралов канонических уравнений Гамильтона. Положим

$$H = \sum \omega_i y_i + f(x_1, \ldots, x_n),$$

где $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$, а постоянные числа ω рационально несоизмеримы. Гамильтониан H — однозначная функция на фазовом пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$. Уравнения Гамильтона с гамильтонианом H допускают набор многозначных интегралов (86). Можно показать, что при подходящем выборе аналитической функции f и набора чисел $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Эта гамильтонва система не имеет обычных однозначных интегралов независимых от гамильтонианы H (см. [34, 35]).

Функция H и $n - 1$ независимых многозначных функций из (86) образуют полный набор инволютивных интегралов. Стоит отметить, что для многозначных интегралов корректно определена их скобка Пуассона. Далее, поверхностью уровня многозначных функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (1-форм) естественно назвать интегральную поверхность интегрируемого n-мерного распределения

$$\varphi_1 = \ldots = \varphi_n = 0.$$

Для гамильтоновых систем с многозначными интеграми справедлив аналог *геометрической теоремы Лиувилля* об интегралах в инволюции: если для гамильтоновой системы с n степенями свободы найдется n независимых многозначных интегралов, попарные скобки Пуассона которых равны нулю и $(2n - 1)$-мерные энергетические многообразия компактны, то n-мерные поверхности уровня этих интегралов диффеоморфны прямому произведению $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, причем можно выбрать на них k угловых и $n-k$ линейных переменных, которые равномерно меняются со временем [36].

Если интегралы однозначны, то их совместные уровни компактны и тогда $k=n$. Условие компактности энергетических многообразий гарантирует, что гамильтоновы поля, порожденные интегралами, не стеснены на n-мерных совместных поверхностях уровня.

В заключение обсудим вопрос о многозначных интегралах геодезического потока на компактном римановом многообразии (M^n, ds). Справедлива

Теорема 14 ([37]). *Если $n>2$, то любой многозначный интеграл геодезического потока будет точной 1-формой. Если $n=2$ и геодезический поток допускает многозначный интеграл, то обязательно найдется однозначный первый интеграл.*

Укажем пример многозначного интеграла, когда M является двумерным тором $\mathbb{T}^2$. Пусть ds — плоская метрика на $\mathbb{T}^2$. Введем угловые координаты x_1, x_2, θ на единичном расслоении $T_1^*\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^2$: x_1, x_2 — координаты на конфигурационном торе, θ — угловая переменная на единичном слое. Тогда форма $d\theta$ — многозначный интеграл.

Список цитированной литературы

[1] *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. т. III // Избр. труды. Т. II. М.: Наука, 1972.

[2] *Картан Э.* Интегральные инварианты. М.—Л.: Гостехиздат, 1940.

[3] *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973.

[4] *Hwa Chung Lee.* The universal integral invariants of Hamiltonian systems and application to the theory of canonical transformations // Proc. R. Soc. of Edinburgh. Sect. A. 1946–48. V. LXII. Part 3. P. 237–246.

[5] *Козлов В. В.* Лиувиллевость инвариантных мер вполне интегрируемых систем и уравнение Монжа—Ампера // Матем. заметки. 1993. Т. 53. №4. С. 45–52.

[6] *Козлов В. В.* Об интегральных инвариантах уравнений Гамильтона // Матем. заметки. 1995. Т. 58. №3. С. 379–393.

[7] *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л.: Гостехиздат. 1949.

[8] *Синай Я. Г.* Введение в эргодическую теорию. М.: ФАЗИС. 1996.

[9] *Козлов В. В.* О существовании интегрального инварианта гладких динамических систем // ПММ. 1987. Т. 51. №4. С. 538–545.

[10] *Jorba A., Simo C.* On the reducibility of linear differentional equations with quasiperiodic coefficients // J. Diff. Eg. 1992. V. 98. P. 111–124.

[11] *Treschev D. V.* An estimate of irremovable nonconstant terms in the reducibility problem // In: Dynamical Systems in Classical Mechanics. AMS Translations. Ser 2. V. 168. 1995. P. 91–128.

[12] *Козлов В. В.* Об инвариантных мерах уравнений Эйлера—Пуанкаре на алгебрах Ли // Функц. анализ и его прилож. 1988. Т. 22. №1. С. 69–70.

[13] *Poincaré H.* Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique // C. R. Acad. Sci. Paris. 1901. V. 132. P. 369–371.

[14] *Веселов А. П., Веселова Л. Е.* Потоки на группах Ли с неголономной связью и интегрируемые негамильтоновы системы // Функц. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. №4. С. 65–66.

[15] *Чаплыгин С. А.* К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // В кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР. 1933. С. 207–215.

[16] *Kozlov V. V.* Dynamical systems determined by the Navier-Stokes equations // Rus. J. Math. Phys. 1993. V. 1. №1. P. 57–69.

[17] *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ. 1980.

[18] *Шарлье К. Л.* Небесная механика. М.: Наука.

[19] *Аносов Д. В., Синай Я. Г.* Некоторые гладкие динамические системы // УМН. 1967. Т. 22. №5. С. 107–172.

[20] *Козлов В. В.* О группах симметрий динамических систем // ПММ. 1988. Т. 52. №4. С. 531–541.

[21] *Козлов В. В.* О группах симметрий геодезических потоков на замкнутых поверхностях // Матем. заметки. 1990. Т. 48. №5. С. 62–67.

[22] *Алексеев В. М.* Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика // УМН. 1981. Т. 36. №4. С. 161–176.

[23] *Llibre J., Simo C.* Oscillatory solutions in the planar restricted three-body problem // Math. Ann. 1980. V. 248. №2. P. 153–184.

[24] *Bolotin S. V., Kozlov V. V.* Symmetry fields of geodesic flows // Rus. J. Math. Phys. 1995. V. 3. №3. P. 279–296.

[25] *Тен В. В.* Аналитические инварианты динамических систем с положительной энтропией. Вестик Моск. ун-та. Сер. 1, Матем., Механ. 1997. №5.

[26] *Козлов В. В.* Тензорные инварианты квазиоднородных систем дифференциальных уравнений и ассимптотический метод Ковалевской—Ляпунова // Матем. заметки. 1992. Т. 52. Вып. 2. С. 46–52.

[27] *Yoshida H.* Necessary condition for the existence of algebraic first integrals // Celectial Mechanics. 1983. V. 31. P. 363–399.

[28] *Ляпунов А. М.* Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Собр. соч. Т. I. М.: Изд-во АН СССР. 1954.

[29] *Топалов П.* Тензорные инварианты натуральных механических систем на компактных поверхностях и соответствующие им интегралы // Матем. сборник (в печати).

[30] *Козлов В. В.* Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестник Моск. ун-та. Сер. Матем., Механ. 1983. №6. С. 10–22.

[31] *Ламб Г.* Гидродинамика, М.: Гостехиздат. 1947.

[32] *Козлов В. В.* Вихревая теория волчка // Вестник Моск. ун-та. Сер. Матем., Механ. 1990. №4. С. 56–62.

[33] *Козлов В. В., Ярощук В. А.* Об инвариантных мерах уравнений Эйлера—Пуанкаре на унимодулярных группах // Вестник Моск. ун-та. Сер. Матем., Механ. 1993. №2. С. 91–95.

[34] *Kozlov V. V.* Phenomena of Nonintegrability in Hamiltonian Systems // Proc. Int. Congr. Math. Berkeley. USA. 1986. P. 1161–1170.

[35] *Мощевитин Н. Г.* О существовании и гладкости интеграла гамильтоновой системы определенного вида // Матем. заметки. 1991. Т. 49, №5. С. 80-85.

[36] *Козлов В. В.* О многозначных интегралах уравнений Гамильтона // Проблемы нелинейного анализа в инженерный системах. 1995. Вып. 1. С. 30–34.

[37] *Ten V. V.* Multi-valued Integrals of Geodesic Flows // Rus. J. Math. Phys. 1998 (в печати).