В. В. Козлов

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ВИХРЕЙ

УДК 532.527
ББК 22.253.315+22.211
К 592

Библиотека «R&C Dynamics», том IV

К 592 **Козлов В. В.** Общая теория вихрей. — Ижевск. Издательский дом «Удмуртский университет», 1998, 238 стр.

ISBN 5-7029-0299-8

Книга посвящена математическому изложению аналогий, существующих между гидродинамикой, геометрической оптикой и механикой. Оказывается, изучение семейств траекторий гамильтоновых систем по существу сводится к задачам многомерной гидродинамики идеальной жидкости. В частности, известный метод Гамильтона — Якоби отвечает случаю потенциальных течений. Рассказано о некоторых приложениях такого подхода, в частности, о вихревом методе точного интегрирования дифференциальных уравнений динамики.

Рассчитана на научных сотрудников и аспирантов, интересующихся математической физикой, механикой и дифференциальными уравнениями.

ISBN 5-7029-0299-8 **ББК 22.253.315+22.211**

Оригинал-макет подготовлен в редакции журнала «Регулярная и хаотическая динамика».

Содержание

Введение

> Англичане преподают механику как науку экспериментальную; на континенте же ее всегда излагают как науку более или менее дедуктивную и априорную. Бесспорно, правы англичане …
>
> *Анри Пуанкаре* «Наука и гипотеза»

Декарт, Лейбниц и Ньютон

Как известно, основные принципы динамики изложены Ньютоном в его знаменитом сочинении «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica», изданном в 1687 году на средства его друга астронома Галлея. По существу, эта книга написана с единственной целью — доказать эквивалентность законов Кеплера и предположения (подсказанного Ньютону Гуком), что ускорение планеты направлено к центру Солнца и что величина ускорения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния между планетой и Солнцем. Для этого Ньютону потребовалось систематизировать принципы динамики (так появились знаменитые законы Ньютона) и изложить основы «теории флюксий» (математический анализ функций одной переменной). Соединение принципа равенства действия и противодействия и закона обратных квадратов привело Ньютона к теории гравитации — взаимодействию на расстоянии. Кроме этого, в своей книге Ньютон обсуждает широкий круг вопросов механики и математики: от законов подобия и теории удара до специальных вариационных задач и условий алгебраичности абелевых интегралов. Практически все в «Principia» впоследствии стало классическим. А. Н. Крылов — переводчик «Principia» на русский язык — в связи с этим сказал, что каждое предложение из книги Ньютона « ... не только не забылось, но разрослось в целые библиотеки руководств, трактатов, диссертаций и десятки тысяч журналов» [26].

После сказанного современному читателю, наверное, покажется странным, что публикация «Principia» Ньютона поначалу не вызвала практически никакой реакции в континентальных научных центрах. Например, Лейбниц в 1689 году (т. е. спустя два года после выхода «Principia») опубликовал статью, в которой он объяснял движение планет в духе теории вихрей Декарта не только действием силы, направленной к Солнцу, но еще и переносом тонкой материей (эфиром), совершающей круговое движение. Впоследствии он неоднократно возвращался к этому вопросу, уточняя детали такой модели. Эти представления Лейбница никак нельзя объяснить его неинформированностью: Ньютон и Лейбниц долгое время состояли в переписке друг с другом. Следует еще добавить, что Лейбниц не был правоверным картезианцем. Кроме спора с Ньютоном о приоритете открытия метода бесконечно-малых, Лейбниц вел длительную полемику со сторонниками Декарта, настаивая на том, что произведение массы тела на квадрат его скорости (живая сила по Лейбницу) является истинной мерой движения, а не произведение массы на скорость (импульс), как считал Декарт.

Ситуация резко изменилась после выхода в 1713 году второго издания «Principia». В нем добавлено развернутое предисловие, написанное издателем Рожером Котсом, членом коллегии св. Троицы Кембриджа, а также общее Поучение, помещенное Ньютоном в конце «Principia». В этих материалах в довольно резкой форме содержится критика декартовой теории вихрей. Насмешливый стиль Котса допускает такие определения картезианской теории, как басня, бредни, нелепая выдумка, вздор и т. д. Стиль самого Ньютона более сдержан, хотя теперь известно, что Ньютон сам тщательно редактировал предисловие Котса. Это предисловие обидело Лейбница, разделявшего общие идеи космогонической теории Декарта и внесшего в нее ряд существенных дополнений, и подлило масла в огонь полемики о приоритете открытия дифференциального и интегрального исчисления. Спор о приоритете хорошо известен (см., например, увлекательную книгу В. И. Арнольда [8]). Напротив, полемика вокруг вихревой теории материи сейчас практически забыта и лишь вскользь упоминается в книгах по истории механики. Между тем, труды Ньютона встретили на континенте сильную оппозицию, которая продолжалась не один десяток лет. Кроме Лейбница, в числе ее убежденных противников были такие выдающиеся ученые, как Гюйгенс, Вариньон, Иоганн и Даниил Бернулли и др. «Немецкие и французские ученые яростно нападают на философию Ньютона и остаются на позициях Декарта», — писал ньютонианец Джонс к Котсу в 1711 году (см. [26], с. 210). Среди аргументов в защиту теории Ньютона выдвигался и тезис свободы мнений: «Пусть они (картезианцы — *В. К.*) остаются при своем мнении, но пусть они будут справедливы и предоставят другим такую же свободу, какую они желают, чтобы была предоставлена им. Пусть же нам будет предоставлено право придерживаться *ньютоновской* философии, которую мы считаем более правильной ... » (из предисловия Котса ко второму изданию «Principia»).

Чтобы лучше разобраться в существе полемики, напомним основные идеи теории Декарта. Они изложены Декартом в «Discours de la méthode» (1637) и в капитальном труде «Principia philosophiae» (1644). Космология Декарта исходит из признания первоначального *хаоса*, который путем движения в соответствии с фиксированными законами упорядочивается в известную схему — *космос* (как тут не вспомнить современные идеи синергетики!). По Декарту, Вселенную заполняет тончайшая всепроникающая жидкость (прототип *эфира*), которая находится в постоянном вихревом движении. Это движение удаляет от оси вихря наиболее крупные частицы материи, из которых затем образуются планеты. Далее, как пишет Де-

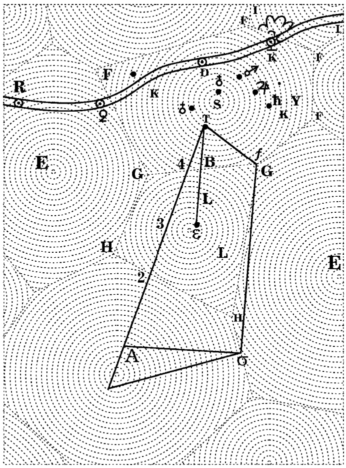

Рис. 1. Вихри во Вселенной (из «Космогонии» Декарта)

карт в своем «Трактате о свете»: «Материя неба должна вращать планеты не только вокруг Солнца, но и вокруг собственного центра ... и, следовательно, образовывать вокруг планет малые неба, вращающиеся в том же направлении, что и большое небо». Сам термин «*вихрь*» (tourbillon) навеян сравнением с течением реки, завихряющейся вокруг несомых ею предметов.

Основная идея вихревой теории разъяснялась Гюйгенсом на простом примере вихревого вращения воды в ведре. Два одинаковых тела, помещенных на разных расстояниях от оси вихря, вращаются с различными скоростями: ближе к оси скорость оказывается большей. Это наблюдение находится в качественном совпадении с законом убывания скоростей планет по мере их удаления от Солнца. Но имеется ли здесь согласие с законами Кеплера?

Ньютон и Бернулли

Этот вопрос рассматривался самим Ньютоном в «Principia» (отдел IX). Согласно Ньютону, если однородная вязкая жидкость приводится в движение равномерно вращающимся вокруг своей оси цилиндром (шаром), то в стационарном случае времена обращений частиц жидкости пропорциональны первой (соответственно, второй) степени их расстояния до оси вращения. В соответствие же с третьим законом Кеплера должна была бы получиться полукубическая функция от расстояния. Поучение к своим теоремам Ньютон заключает словами: «Пусть философы сами посмотрят, при каком условии может быть объяснено вихрями явление, заключающееся в существовании указанного полукубического отношения».

В работе 1730 г., премированной Парижской академией наук, Иоганн Бернулли указал на ошибки в рассуждениях Ньютона. Тема конкурса, объявленного академией, — объяснение эллиптической формы орбит планет (спустя сорок лет после выхода книги Ньютона!). Кстати, в этой работе Бернулли привел аналитический вывод эллиптичности орбит из закона тяготения (который теперь повторяется в руководствах по механике). Ньютон использовал громоздкие геометрические рассуждения в подражание античным авторам. Полученная Бернулли зависимость периода обращения частицы от расстояния тоже не соответствовала закону Кеплера, к тому же его выводы оказались не вполне корректными. Первое правильное решение гидродинамической задачи получено Стоксом в 1845 году: при вращении цилиндра и шара степени расстояний равны соответственно двум и трем.

В конкурсных сочинениях 1732 и 1734 гг. о причине наклонности орбит планет к солнечному экватору И. Бернулли постепенно отходит от теории вихрей. Аналогично эволюционировали взгляды и Даниила Бернулли, разделившего с отцом премии Парижской академии.

Ньютон и Бернулли рассматривали вязкую жидкость. Между прочим, если считать эфир Декарта идеальной жидкостью, то задача получения полукубического отношения легко решается. Для простоты, ограничимся случаем плоскопараллельного течения и найдем условия реализации равномерного вращения частиц жидкости по окружности. Пусть r — расстояние до оси вращения, v — скорость частицы, ρ — плотность жидкости, а p — давление (v, ρ, p — функции от r). Легко показать, что уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho v) = 0$$

выполняется автоматически, а два других уравнения динамики сводятся к одному соотношению

$$\rho \frac{v^2}{r} = p', \tag{1}$$

где штрих обозначает производную по r. Это уравнение фактически имеется у Гюйгенса в его теории центробежной силы. Согласно закону Кеплера, $v = cr^{-1/2}$, $c = \mathrm{const}$. Полагая, например, $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$ (однородная жидкость), из (1) получаем:

$$p = p_0 - \frac{\rho_0 c^2}{r}, \quad p_0 = \mathrm{const}\,.$$

Правда, при малых значениях r давление всегда отрицательно, что не соответствует свойствам реальных жидкостей при обычных условиях. Отметим еще, что ротор поля скоростей кругового движения ортогонален плоскости течения и по величине равен $(rv')/r$. По Ньютону (с уточнениями Стокса), $v = C_1/r$, $C_1 = \mathrm{const}$. Следовательно, в этом случае жидкость совершает безвихревое движение (с многозначным потенциалом). Если принять закон Кеплера, то получим вихревое течение (как и должно быть по Декарту).

Ньютон привел еще один более простой и более сильный аргумент против теории Декарта. По Ньютону, движение небесных тел описывается дифференциальными уравнениями второго порядка: чтобы задать траекторию тела, надо фиксировать не только положения, но и их скорости в некоторый момент времени. Если же справедлива теория Декарта, то тела переносятся эфиром и, следовательно, уравнения движения имеют первый порядок: скорость частиц однозначно определяется их положением. Однако, как замечает Ньютон, наблюдались кометы, которые двигались в сторону, противоположную направлению движения всех планет.

Вольтер, Мопертюи и Клеро

Надо сказать, что далеко не все ученые на континенте разделяли идеи вихревой теории Декарта. Ряд известнейших французских ученых (Паскаль, Ферма, Роберваль и др.) воспринимали идеи Декарта весьма настороженно. Однако в популяризации теории Ньютона главная роль, пожалуй, принадлежала не ученым, а писателю и философу Вольтеру. Как бы мы сейчас сказали, Вольтер был диссидентом. Его «Lettres philosophiques...» основаны на сравнении и противопоставлении положения дел в Англии и Франции. По Вольтеру, Англия — родина человеческого разума; все хорошо на благословенном острове: граждане наслаждаются политической свободой и свободой мысли, и все плохо на родине во Франции. Сравнение Лондонского королевского общества и Парижской академии наук, конечно, не в пользу последней. Согласно Вольтеру, общество независимо, бесплатно и занимается делом, а академия оторвана от практических задач и издает только тома комплиментов. В том же ключе сравниваются Ньютон и Декарт. Ньютон — мудрец, притом скромный, взявшийся за объяснение природы, а Декарт — мечтатель и вся его философия — роман. «Француз, прибывающий в Лондон, находит все в ином виде, как в философии, так и в прочем. Он оставил наполненную Вселенную, а находит пустую. В Париже ее рассматривают как состоящую из эфирных вихрей;

здесь же в том же мировом пространстве ведут свою игру неведомые силы. У нас давление Луны вызывает морской прилив, у англичан море тяготеет к Луне ... В Париже Землю представляют себе в виде дыни; в Лондоне она сплющена с двух сторон» (письмо 14-ое). Насмешка Вольтера в сравнении двух систем вроде бы распределена поровну, однако реакция в Париже и Лондоне оказалась противоположной: во Франции его книга была запрещена, а в Англии ее встретили весьма одобрительно.

Парижская академия наук организовала несколько экспедиций для определения длины дуги меридиана с целью выяснения формы Земли. Экспедиция в Лапландию (1735–1742 гг.) под руководством Мопертюи оказалась успешной: Земля оказалась сплюснутой с полюсов, как предсказывала теория Ньютона. Мопертюи был ньютонианцем и именно он разъяснил Вольтеру суть теории Ньютона. Однако это не спасло впоследствии Мопертюи от злых насмешек Вольтера в связи с теологическими аспектами вариационного принципа динамики, который теперь носит имя Мопертюи.

Постепенно, благодаря в первую очередь работам Алексиса Клеро (кстати, участника экспедиции Мопертюи) теория гравитации Ньютона получает всеобщее признание. Во-первых, это его «Теория фигуры Земли», построенная на законе всемирного притяжения, во-вторых, предвычисление Клеро появления кометы Галлея в 1759 году, основанное на применении теории возмущений. Стоит еще упомянуть, что под редакцией Клеро в 1759 году в Париже вышел французский перевод «Principia» Ньютона, выполненный маркизой Эмилией дю-Шатле. Инициатором издания был все тот же Вольтер.

Согласно Пуанкаре, каждой истине суждено одно мгновение торжества между бесконечностью, когда ее считают неверной, и бесконечностью, когда ее считают тривиальной. Правда, для теории гравитационного взаимодействия Ньютона это мгновение растянулось на жизнь целого поколения. Более того, наша история на этом не заканчивается.

Гельмгольц и Томсон

Интерес к вихревой теории материи оживился в середине XIX века в связи с работами Гельмгольца и Томсона (лорда Кельвина) по вихревому движению идеальной жидкости. Было доказано, что циркуляция скорости по замкнутому контуру, который перемещается вместе с частицами жидкости, постоянна, и, как следствие, был установлен закон вмороженности вихревых линий (вспомним идею Декарта о том, что завихряющийся эфир переносит вместе с собой материальные тела!).

Теория вихревого движения привлекла еще больший интерес, когда Кельвин предложил вихревую теорию атомов *(On Vortex Atoms. Phil. Mag. 1867).* По Кельвину, мир должен быть понят как чистая жидкость (эфир), которая заполнена отдельными, неразрывно связанными друг с другом вихрями Гельмгольца (атомами, связанными в молекулы). С этой точки зрения гравитация должна объясняться статистически (в духе теории Лесажа 1764 г.) как результат толчков со стороны большого числа маленьких вихрей, движущихся с большой скоростью. Томсон предложил их красиво назвать «ихтиодами». Как пишет Клейн в «Лекциях о развитии математики в XIX столетии», « ... теория не вышла за рамки наметок, не превратившихся ни во что ощутимое, но для восприимчивой фантазии она все же сохраняет известное обаяние». Несмотря на это, теория Кельвина послужила поводом к ряду важных исследований по устойчивости и колебаниям различных вихревых структур (см. [46]).

Руководящей идеей программы исследований Томсона было желание найти механическую модель сложных физических явлений, где действие на расстоянии заменялось бы передачей усилий при непосредственном контакте (как и в теории Декарта). Буквально понимаемое высказывание, что механика является основой физики, в то время было популярным и весьма актуальным. В качестве еще одного поучительного примера можно указать на ранние работы Максвелла по электромагнетизму, в которых действие магнита и возникновение индукционных токов моделировалось вращением среды вокруг магнитных силовых линий, причем между вращающимися частями среды помещались небольшие фрикционные шарики (для устранения трения). Эти шарики Максвелл рассматривал как истинное положение электричества. Несмотря на значительные усилия, Максвеллу не удалось далеко продвинуться в построении адекватных механических моделей электромагнетизма. Впоследствии он перешел к привычной теперь полевой точке зрения.

Упомянем еще про попытку решения «проблемы дальнодействия» с помощью теории «*скрытых движений*». Основную идею можно пояснить на примере вращающегося симметричного волчка: поскольку вращение волчка вокруг его оси симметрии заметить невозможно, то можно считать волчок невращающимся и странности в его поведении объяснить действием дополнительных гироскопических и потенциальных сил. В общем случае эту идею можно пытаться реализовать в рамках теории Рауса понижения порядка систем с симметриями. Предположим, что механическая система с $n+1$ степенями свободы движется по инерции и ее лагранжиан, представляющий только кинетическую энергию, допускает однопараметрическую группу симметрий. Понижая порядок системы факторизацией по орбитам действия этой группы, мы видим, что функция Рауса, представляющая лагранжиан приведенной системы с n степенями свободы, содержит слагаемое, не зависящее от скоростей. Это слагаемое можно интерпретировать как потенциал сил, действующих на приведенную систему. Гельмгольц, В. Томсон (лорд Кельвин), Дж. Дж. Томсон, Герц настаивали на том, что все механические величины, проявляющиеся как «потенциальные энергии», на самом деле обусловлены скрытыми «циклическими» движениями. Эта концепция кинетической теории наиболее полно выражена в книге Генриха Герца «Принципы механики, изложенные в новой связи» [20]. Оказывается, системы с компактным конфигурационным пространством действительно можно получить из геодезических потоков с помощью метода Рауса [13]. Однако, в некомпактном случае (наиболее интересном с точки зрения теории гравитации) это уже не так (см. [23, 13]).

О книге

В настоящей книге предпринята еще одна попытка «реабилитировать» вихревую теорию Декарта. Речь, конечно, не идет о построении теории действия на расстоянии в духе идей Гельмгольца и Томсона. Ее основная цель — дать систематическое изложение далеко идущей аналогии между обычной механикой консервативных систем и гидродинамикой идеальной жидкости. Оказывается, семейство фазовых траекторий, составляющих инвариантное многообразие, однозначно проектирующееся на конфигурационное пространство механической системы, допускает естественное и удобное описание в терминах многомерной гидродинамики. С другой стороны, в ряде задач необходимо следить не за отдельной траекторией, а за их семейством. Например, в геометрической оптике при построении изображений основным объектом является *система лучей*, а не отдельные световые лучи. Если еще учесть глубокую аналогию между оптикой и механикой, открытую Иоганном Бернулли и развитую Гамильтоном, то изложенная в этой книге *общая теория вихрей* позволяет с единых позиций охватить основные результаты механики, геометрической оптики и гидродинамики. Эта теория выявляет несколько общих математических идей, которые в разное время и под разными названиями появились в механике, оптике и гидродинамике, что доставляет определенное эстетическое удовлетворение. Кроме этого, общая теория вихрей имеет интересные применения к численным расчетам, теории устойчивости и теории точного интегрирования уравнений динамики.

Перефразируя Ньютона, эту книгу можно было бы назвать

PHILOSOPHIAE CARTESIAN PRINCIPIA MATHEMATICA.

Автор посвящает ее 400-летию со дня рождения Рене Декарта, великого ученого и человека, который, по выражению Вольтера, научил своих современников рассуждать.

Глава I

Гидродинамика, геометрическая оптика и классическая механика

§1. Вихревые движения сплошной среды

1°. При изучении общих свойств вихревых линий важную роль играет уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{rot}(u \times v). \tag{1.1}$$

Здесь $v(x,t)$ — скорость частиц сплошной среды в трехмерном евклидовом пространстве $E^3 = \{x\}$, $u(x,t)$ — некоторое соленоидальное векторное поле: $\operatorname{div} u = 0$. Физический смысл поля u зависит от конкретной постановки задачи. Интегральные кривые векторного поля u (в фиксированный момент времени) будем называть *вихревыми* линиями.

Например, в магнитной гидродинамике (в которой рассматриваются среды с бесконечной проводимостью), уравнению (1.1) удовлетворяет напряженность магнитного поля. В этом случае вихревые линии совпадают с силовыми линиями магнитного поля.

Более фундаментальный пример представляют баротропные течения идеальной жидкости в потенциальном силовом поле. Напомним, что движение жидкости описывается *уравнением Эйлера*:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}v\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho F, \quad F = -\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{1.2}$$

Здесь ρ — плотность жидкости, p — давление, F — плотность внешних массовых сил, V — плотность потенциальной энергии. Для баротропной жидкости найдется функция давления $P(x,t)$, такая, что

$$dP = dp/\rho.$$

В частности, однородные жидкости (когда $\rho = \mathrm{const}$) баротропны. К уравнению Эйлера (1.2) следует добавить *уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \tag{1.3}$$

которое выражает постоянство массы подвижного объема.

В указанных предположениях уравнение (1.2) можно преобразовать в *уравнение Ламба*:

$$\begin{gathered} \frac{\partial v}{\partial t} + \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^T\right] v = -\frac{\partial f}{\partial x}, \\ f = \frac{v^2}{2} + P + V. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Символ T означает транспонирование матрицы Якоби

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left\| \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right\|.$$

Функция f в гидродинамике обычно называется *функцией Бернулли.*

Хорошо известно, что в трехмерном пространстве результат умножения кососимметрической матрицы $\partial v/\partial x - (\partial v/\partial x)^T$ на вектор v равен векторному произведению $(\operatorname{rot} v) \times v$. С учетом этого замечания уравнение (1.4) можно записать в эквивалентном виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \times \operatorname{rot} v - \frac{\partial f}{\partial x}. \tag{1.5}$$

Применяя к обеим частям этого уравнения операцию ротора и замечая, что ротор градиента функции f равен нулю, приходим к уравнению (1.1), в котором $u = \operatorname{rot} v$. Так как $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$, то поле ротора всегда соленоидальное. Вихревые линии — интегральные кривые поля ротора (вихря) скорости, чем и объясняется выбор термина в общем случае.

Движение частиц жидкости в E^3 описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = v(x, t), \quad (*)^\cdot = \frac{d}{dt}(*). \tag{1.6}$$

Пусть $x(t,x_0)$ — его решение с начальным условием $x(0,x_0)=x_0$. Семейство отображений $E^3 \to E^3$, задаваемое формулой

$$x_0 \longrightarrow x(t,x_0), \tag{1.7}$$

назовем *потоком* системы (1.6). В стационарном случае (когда поле v не зависит от t) семейство преобразований (1.7) образует группу. Отображения (1.7) будем обозначать g_v^t или просто g^t, если это не вызовет путаницы.

2°. Пусть D — измеримая область в E^3 и $g^t(D)$ — ее образ при отображении (1.7). Согласно (1.3), масса подвижной области $g^t(D)$ постоянна:

$$\int_{g^t(D)} \rho\, d^3 x = \mathrm{const}\,.$$

Пусть теперь Σ — ограниченная двумерная поверхность с краем $\partial\Sigma = \Gamma$. В механике сплошной среды хорошо известна следующая формула для потока соленоидального поля:

$$\frac{d}{dt}\int_{g^t(\Sigma)} (u,n)\, d\sigma = \int_{g^t(\Sigma)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{rot}(v \times u), n\right) d\sigma, \tag{1.8}$$

где n — единичный вектор нормали к Σ, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве E^3, $d\sigma$ — элемент площади поверхности Σ. Используя соотношение (1.1), из (1.8) получаем закон сохранения потока поля u через подвижную поверхность:

$$\int_{g^t(\Sigma)} (u,n)\, d\sigma = \mathrm{const}\,. \tag{1.9}$$

Отсюда, в свою очередь, выводится *теорема Гельмгольца—Томсона* о вмороженности вихревых линий: поток системы (1.5) переводит вихревые линии в вихревые линии. Кстати сказать, этот результат объясняет появление магнитных бурь на Земле. Дело в том, что Солнце представляет собой бушующий плазменный шар (практически бесконечной проводимости). Время от времени на Солнце наблюдаются протуберанцы: вещество с огромной скоростью выбрасывается на поверхность и затем постепенно рассеивается, двигаясь от Солнца. По теореме Гельмгольца—Томсона, это вещество несет с собой магнитное поле и, достигая Земли, создает магнитные бури.

Пусть теперь Γ — замкнутый контур; он является границей некоторой ограниченной поверхности Σ. Рассмотрим 1-форму

$$(v, dx) = \sum v_i dx^i.$$

Согласно Томсону, интеграл этой формы по Γ

$$\oint_\Gamma (v, dx)$$

называется *циркуляцией скорости* вдоль контура Γ. Применяя формулу Стокса

$$\oint_\Gamma (v, dx) = \int_\Sigma (u, n)\, d\sigma, \quad u = \operatorname{rot} v,$$

и учитывая (1.9), приходим к теореме о постоянстве циркуляции скорости по «жидкому» контуру:

$$\oint_{g^t(\Sigma)} (v, dx) = \mathrm{const}\,. \tag{1.10}$$

Важным следствием этого результата является *теорема Лагранжа* о потенциальных течениях. Напомним, что поле скоростей $v(x, t)$ называется *потенциальным*, если

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{1.11}$$

Функция $\varphi(x, t)$ называется *потенциалом.* Теорема Лагранжа утверждает, что если поле скоростей баротропной идеальной жидкости в потенциальном силовом поле потенциально в начальный момент времени (скажем, $t = 0$), то оно потенциально при всех значениях t.

Подставляя потенциальное поле (1.11) в уравнение Ламба (1.5) и используя очевидное тождество

$$\operatorname{rot}(\partial\varphi/\partial x) = 0,$$

приходим к равенству

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}+f\right)=0.$$

Следовательно, выражение в скобках будет функцией только времени:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+P+V=g(t). \tag{1.12}$$

Это соотношение называется *интегралом Лагранжа—Коши.* После калибровочного преобразования

$$\varphi \to \varphi-\int g(t)\,dt,$$

не меняющего поля скорости, функция g в (1.12) будет равна нулю.

3°. Вернемся к исследованию исходных уравнений (1.1) и (1.3). Положим $w=u/\rho$. Ясно, что интегральные кривые поля w будут введенными ранее вихревыми линиями.

Теорема 1. *Поле* $w(x,t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial w}{\partial t}=[v,w]. \tag{1.13}$$

Скобка $[\cdot,\cdot]$ — *коммутатор* векторных полей. Напомним его определение. Пусть $a=\{a_i\}$ и $b=\{b_j\}$ — два векторных поля. Их коммутатором $[a,b]$ называется поле $c=\{c_k\}$, компоненты которого вычисляются по правилу

$$c_j=\sum_i\left(b_i\frac{\partial a_j}{\partial x^i}-a_i\frac{\partial b_j}{\partial x^i}\right),$$

или, что то же самое,

$$c=\frac{\partial a}{\partial x}b-\frac{\partial b}{\partial x}a.$$

Если L_a, L_b, L_c — операторы дифференцирования вдоль полей a, b, c, то

$$L_c=L_bL_a-L_aL_b.$$

Выражение справа — коммутатор операторов L_a и L_b.

Поля a, b ***коммутируют***, если $[a, b] = 0$. Это свойство имеет место тогда и только тогда, когда фазовые потоки полей a, b перестановочны:

$$g_a^p g_b^q = g_b^q g_a^p$$

для всех $p, q \in \mathbb{R}$.

Теорема 1 сначала была установлена В. И. Арнольдом [4] для однородной идеальной жидкости, когда $\rho = \mathrm{const}$. Здесь можно положить $w = \operatorname{rot} v$. Общий случай рассмотрен в [32]. Если движение среды стационарно, то поля v и u/ρ коммутируют (хотя на первый взгляд кажется, что должны коммутировать поля u и ρv — плотность импульса). Уравнение (1.13) обычно называют ***уравнением Эйлера для изменения момента***. Оно является бесконечномерным аналогом известных уравнений Эйлера, описывающих вращение волчка (см. [64]).

Доказательство теоремы 1.

Вычислим сначала

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\operatorname{rot}(v \times u) + \frac{u}{\rho^2}\operatorname{div}(\rho v). \tag{1.14}$$

С другой стороны,

$$\left[v, \frac{u}{\rho}\right] = \frac{1}{\rho}[v, u] + \frac{u}{\rho^2} L_v \rho. \tag{1.15}$$

Воспользовавшись известным тождеством векторного анализа

$$\operatorname{rot}(a \times b) = [a, b] + a \operatorname{div} b - b \operatorname{div} a$$

и соленоидальностью поля u, преобразуем (1.15):

$$\left[v, \frac{u}{\rho}\right] = \frac{1}{\rho}\operatorname{rot}(v \times u) + \frac{u}{\rho}\operatorname{div} v + \frac{u}{\rho^2} L_v \rho. \tag{1.16}$$

Так как $L_v\rho + \rho \operatorname{div} v = \operatorname{div}(\rho v)$, то из (1.14) и (1.16) будет следовать (1.13). ■

Рассмотим теперь стационарные движения сплошной среды, когда все характеристики движения не зависят явно от времени. Предположим сначала, что $u \times v \neq 0$ (вихревые движения в *сильном смысле*).

Тогда вихревые линии будут отличаться от линий тока — траекторий частиц жидкости (интегральных линий поля v). В этом случае каждой точке x из области течения естественно поставить в соответствие плоскость $\pi(x)$, порожденную линейными комбинациями независимых векторов $v(x)$ и $u(x)$ (или, что то же самое, v и $w = u/\rho$). Согласно теореме 1, поля v и w коммутируют: $[v, w] = 0$. Поэтому, по *теореме Фробениуса*, *распределение* плоскостей *инволютивно* (или *интегрируемо*): через каждую точку x проходит единственная максимальная *интегральная* поверхность M_x этого распределения, у которой касательная плоскость в любой точке $z \in M_x$ совпадает с $\pi(z)$. Ясно, что линии тока и вихревые линии лежат на интегральных поверхностях. В самом общем случае поверхности M могут быть погружены в E^3 весьма сложным образом: они, вообще говоря, не замкнуты.

Свойство интегрируемости распределения плоскостей $\pi(x)$ можно получить по-другому. Рассмотрим векторное поле $s = u \times v$: в каждой точке $x \in E^3$ ненулевой вектор $s(x)$ ортогонален $\pi(x)$. Спрашивается, существует ли семейство поверхностей

$$f(x_1, x_2, x_3) = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

ортогональное полю s? Условие ортогональности сводится к равенству

$$s = g\frac{\partial f}{\partial x},$$

где $g \neq 0$ — некоторая гладкая функция. Так как

$$\operatorname{rot} s = \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial x},$$

то

$$(\operatorname{rot} s, s) = 0. \tag{1.17}$$

Итак, необходимое условие интегрируемости распределения $\pi(x)$ сводится к равенству (1.17). Несложно доказать, что оно достаточно для интегрируемости.

В нашем случае условие (1.17) заведомо выполнено, так как $\operatorname{rot} s = \operatorname{rot}(u \times v) = 0$ ввиду (1.1).

Наиболее просто описывается движение частиц сплошной среды по компактным интегральным поверхностям. Пусть M — компактная поверхность без края. Так как поля v и w касаются M, линейно независимы во всех точках и коммутируют, то поверхность M — двумерный тор (точнее, M диффеоморфна тору) и в некоторых угловых координатах $\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi$ на этом торе дифференциальные уравнения для линий тока и вихревых линий

$$\dot{x} = v(x), \quad x' = w(x)$$

имеют следующий вид:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2; \quad \varphi_1' = \Omega_1, \quad \varphi_2' = \Omega_2 \quad (\omega, \Omega = \mathrm{const}).$$

Доказательство этой дифференциально-топологической теоремы можно найти, например, в книге [5] (гл.10), где рассмотрен более общий случай n-мерных многообразий, допускающих n попарно коммутирующих касательных векторных полей.

Следовательно, в компактном случае линии тока либо замкнуты (и тогда периоды обращения частиц по разным замкнутым траекториям совпадают), либо всюду плотны на M. Первый случай реализуется, когда отношение частот ω_1/ω_2 рационально, а во втором ω_1/ω_2 иррационально.

В координатах φ_1, φ_2 уравнение

$$\frac{dx}{ds} = u(x) = \rho(x) w(x)$$

приводится, очевидно, к виду

$$\frac{d\varphi_i}{ds} = \Omega_i \rho, \quad i = 1, 2$$

и интегральные линии векторного поля u (в магнитой гидродинамике — силовые линии магнитного поля) тоже прямые. Следовательно, они либо все замкнуты, либо всюду плотно обматывают M. Однако, если $\rho \neq \mathrm{const}$, то (в отличие от линий тока) интегральные линии поля u замыкаются через разные промежутки параметра s.

Если касательные поля u и v полны на M (то есть их фазовые потоки g_u^p и g_v^q определены для всех $p, q \in \mathbb{R}$), то в некомпактном случае M диффеоморфна цилиндру или плоскости и в некоторых координатах на M линии тока и вихревые линии тоже выпрямляются в целом.

4°. Описанная конструкция находит наиболее содержательное применение в задаче о баротропных течениях идеальной жидкости в потенциальном силовом поле. Согласно *теореме Бернулли*, функция Бернулли f постоянна на линиях тока и вихревых линиях. Следовательно, интегральные поверхности M совпадают с поверхностями уровня *интеграла Бернулли* $f = c$.

Теорема 2. *Предположим, что область течения жидкости компактна и ограничена регулярной аналитической поверхностью, а поле скоростей* v *аналитично и* $v \times \operatorname{rot} v \neq 0$. *Тогда почти все связные поверхности Бернулли*

$$M = \{x : f(x) = c\}$$

(кроме, быть может, конечного числа) диффеоморфны либо двумерному тору, либо кольцу (прямое произведение отрезка на окружность). При этом на каждом из торов все линии тока либо замкнуты, либо всюду плотны, а на каждом кольце линии тока замкнуты. Периоды обращения частиц жидкости по разным замкнутым траекториям, лежащим на одной поверхности Бернулли, совпадают.

Для несжимаемой жидкости это утверждение доказано в работе [4], а в общем случае — в работе [32].

Доказательство.

Так как $v \times \operatorname{rot} v \neq 0$, то из уравнения Ламба (1.5) вытекает, что f — непостоянная аналитическая функция: $df \neq 0$. Следовательно, все поверхности Бернулли $f = c$ (за исключением, быть может, некоторого конечного числа) регулярны. Это вытекает из изолированности критических значений аналитической функции, заданной на компактном множестве [79]. На регулярных поверхностях Бернулли, очевидно, $v \times \operatorname{rot} v \neq 0$. Если $M = \{f = c\}$ не имеет общих точек с границей, то остается воспользоваться описанной выше общей конструкцией. Случай, когда M пересекается с границей, более простой; он рассмотрен в работе [4]. Линии тока в этих двух задачах изображены на рисунке, заимствованном из [4]. ■

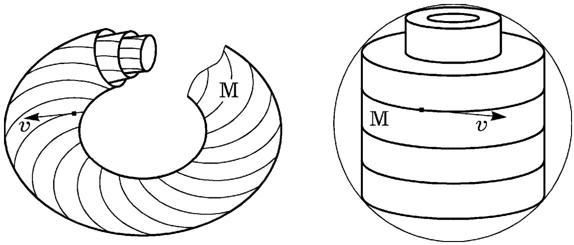

Рис. 2. Линии тока вихревых течений

Пусть теперь $u \neq 0$, однако $u \times v = 0$ (вихревое движение в *слабом смысле*). Тогда линии тока и вихревые линии будут совпадать, а $f \equiv \mathrm{const}$. Здесь уже линии тока могут иметь сложное запутанное поведение и уравнение движения частиц жидкости $\dot{x} = v(x)$ может вообще не иметь непостоянных интегралов. Примером служит так называемое ABC-течение Арнольда на трехмерном торе $\mathbb{T}^3 = \{x, y, z \bmod 2\pi\}$ с евклидовой метрикой. Компоненты поля скоростей v имеют вид

$$A\sin z + C\cos y, \quad B\sin x + A\cos z, \quad C\sin y + B\cos x. \tag{1.18}$$

Здесь $\mathrm{rot}\, v = v$. Как показано С. Л. Зиглиным [24], для почти всех значений A, B, C поле (1.18) не допускает непостоянных аналитических интегралов. Численные расчеты М. Хэннона показывают, что некоторые траектории всюду плотно заполняют трехмерные области на торе $\mathbb{T}^3$. Это свидетельствует о хаотизации течения.

§2. Точечные вихри на плоскости

1°. Рассмотрим плоскопараллельное течение однородной идеальной жидкости. Пусть

$$a(x, y, t), \qquad b(x, y, t)$$

— компоненты скорости v частиц жидкости в декартовых координатах x, y. Из уравнения неразрывности $\operatorname{div} v = 0$ вытекает, что при всех значениях t 1-форма

$$a\,dy - b\,dx$$

является дифференциалом некоторой функции $\Psi(x, y, t)$:

$$a = \partial\Psi/\partial y, \qquad b = -\partial\Psi/\partial x.$$

Следовательно, уравнения движения частиц жидкости

$$\dot{x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \tag{2.1}$$

имеют ***каноническую форму*** дифференциальных ***уравнений Гамильтона***. Роль ***гамильтониана*** играет функция Ψ. В стационарном случае она постоянна на линиях тока. Поэтому Ψ часто называют ***функцией тока***.

В гидродинамике важную роль играет течение с функцией тока

$$\Psi = -\frac{æ}{2\pi}\ln r, \qquad r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2. \tag{2.2}$$

Ей отвечает поле скоростей

$$v = \frac{æ}{2\pi r}\left(-\frac{y - y_0}{r}, \frac{x - x_0}{r}\right). \tag{2.3}$$

В этом случае говорят, что течение порождает ***вихрь интенсивности*** æ, расположенный в точке с координатами x_0, y_0. Поле скоростей (2.3) потенциально: оно является градиентом многозначной функции

$$\Phi = \frac{æ}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y - y_0}{x - x_0}. \tag{2.4}$$

Функции (2.2) и (2.4) — сопряженные гармонические функции:

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Delta\Psi = 0,$$

где $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — *оператор Лапласа.* Легко понять, что интенсивность вихря равна циркуляции скорости

$$\oint a\,dx + b\,dy,$$

вычисленной по любому замкнутому контуру, один раз охватывающему точку (x_0, y_0) против часовой стрелки. Таким образом, все вихревое движение сконцентрировано в одной особой точке с координатами (x_0, y_0).

2°. Если на плоскости заданы n точечных вихрей с интенсивностями $æ_s$ и координатами (x_s, y_s), то естественно расмотреть функцию тока

$$\Psi = -\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{n} æ_s \ln r_s, \qquad r_s^2 = (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2.$$

Движение частицы жидкости в поле n точечных вихрей описывается уравнениями (2.1). Согласно теореме Гельмгольца—Томсона, вихри «вморожены» в идеальную жидкость и их интенсивности не меняются со временем. Следовательно, движение самих вихрей можно описать системой дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \dot{x}_s = \frac{\partial \Psi_s}{\partial y_s}, \quad \dot{y}_s = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial x_s}; \quad 1 \le s \le n, \\ \Psi_s = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k \ne s} æ_k \ln(r_{ks}), \end{gathered} \tag{2.5}$$

где r_{ks} — расстояние между вихрями с интенсивностями $æ_k$ и $æ_s$.

Кирхгоф [29] предложил записывать эти уравнения в более симметричной гамильтоновой форме:

$$\begin{gathered} æ_s \dot{x}_s = \frac{\partial H}{\partial y_s}, \quad æ_s \dot{y}_s = -\frac{\partial H}{\partial x_s}; \quad 1 \le s \le n, \\ H = -\frac{1}{2\pi}\sum_{j \ne k} æ_j æ_k \ln(r_{jk}). \end{gathered} \tag{2.6}$$

Кроме гамильтониана H, эти уравнения допускают еще три интеграла:

$$P_x = \sum æ_s x_s, \quad P_y = \sum æ_s y_s, \quad M = \sum æ_s (x_s^2 + y_s^2)/2.$$

Эти функции имеют прозрачный механический смысл: H — *кинетическая энергия* взаимодействующих вихрей, P — *импульс* плоского течения безграничной жидкости, M — половина *момента импульса* относительно начала координат (см. [29]).

Уравнения Кирхгофа (2.6) можно привести к обычным каноническим уравнениям Гамильтона, если положить

$$\xi = \sqrt{\pm æ_s} x_s, \quad \eta_s = \sqrt{\pm æ_s} y_s, \quad (s = 1, \ldots , n).$$

Здесь знак «+» выбирается при $æ > 0$, а знак «$-$» — при $æ < 0$. Через K обозначим функцию H, представленную в переменных ξ, η. В новых координатах уравнения (2.6) имеют вид

$$\dot{\xi}_s = \mp \frac{\partial K}{\partial \eta_s}, \quad \dot{\eta}_s = \pm \frac{\partial K}{\partial \xi_s}; \quad 1 \le s \le n.$$

В связи с этим замечанием полезно ввести *скобку Пуассона*

$$\{f, g\} = \sum_s \frac{1}{æ_s} \left(\frac{\partial f}{\partial y_s} \frac{\partial g}{\partial x_s} - \frac{\partial f}{\partial x_s} \frac{\partial g}{\partial y_s} \right),$$

которая в переменных ξ, η имеет стандартную форму. Ясно, что гамильтониан H коммутирует с функциями P_x, P_y, M :

$$\{H, P_x\} = \{H, P_y\} = \{H, M\} = 0.$$

Легко проверить равенства

$$\{P_x, P_y\} = -\sum æ_k = \text{const}, \ \{P_x, M\} = -P_y, \ \{P_y, M\} = P_x. \quad (2.7)$$

Следовательно, импульсы P_x и P_y коммутируют, если сумма интенсивностей вихрей равна нулю.

3°. В случае положительных интенсивностей уравнения Кирхгофа (2.6) можно представить также в виде *градиентной* системы. Пусть $(\cdot, \cdot)$ — риманова метрика на многообразии Σ, Φ — функция на Σ. Дифференциальные уравнения

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \Sigma$$

называются *градиентными* или *эволюционными*, если

$$(v, \cdot) = d\Phi(\cdot). \quad (2.8)$$

Потенциальные поля, очевидно, порождают градиентные уравнения. Градиентные системы изучались Ляпуновым в теории устойчивости, С. Смейлом с точки зрения структурной устойчивости, а также Р. Томом и его последователями в теории катастроф. Функцию Φ обычно называют *потенциальной функцией* или *потенциалом.*

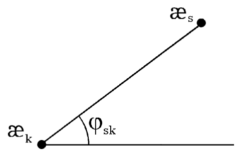

Рис. 3. Потенциал системы точечных вихрей

По аналогии с (2.4), положим (см. рис. 3)

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \sum_{s \neq k} æ_s æ_k \varphi_{sk}, \quad \varphi_{sk} = \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_k}{x_s - x_k}$$

и перепишем уравнения Кирхгофа (2.6) в градиентной форме (2.8):

$$æ_s \dot{x}_s = \frac{\partial \Phi}{\partial x_s}, \quad æ_s \dot{y}_s = \frac{\partial \Phi}{\partial y_s}; \quad 1 \leq s \leq n. \tag{2.9}$$

Здесь риманова метрика в $\mathbb{R}^{2n} = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$ задается формулой

$$\sum æ_s (dx_s^2 + dy_s^2).$$

Из (2.8) вытекает, что

$$\dot{\Phi} = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_*^2, \tag{2.10}$$

где $|\cdot|_*$ — длина ковектора в дуальном пространстве. Следовательно, если Φ — однозначная функция, то $\Phi(x(t))$ при $t \to +\infty$ стремится либо к $+\infty$, либо к некоторой постоянной c (если Σ компактно, то c — критическое значение функции Φ). Поэтому при $t \to +\infty$ решение $x(t)$ либо уходит на бесконечность, либо неограниченно приближается к множеству критических точек функции Φ.

В нашем случае потенциал Φ — многозначная функция. Поэтому результат об асимптотическом поведении решений системы (2.9) здесь не применим. Однако непрерывная ветвь функции Φ с ростом t либо неограниченно возрастает, либо монотонно стремится к некоторой постоянной.

4°. При $n = 2$ формула (2.10) имеет следующий явный вид:

$$\dot{\Phi} = \frac{æ_1 æ_2 (æ_1 + æ_2)}{4\pi^2 r_{12}^2}. \tag{2.11}$$

Исследуем движение двух точечных вихрей более подробно. Из интеграла $H = \mathrm{const}$ вытекает, что расстояние между вихрями r_{12} всегда постоянно. Воспользуемся формулой (2.11) и определением потенциала Φ: с точностью до постоянного множителя Φ совпадает с углом поворота отрезка, соединяющего два вихря. Согласно (2.11), этот отрезок вращается с постоянной угловой скоростью

$$\frac{æ_1 + æ_2}{2\pi r_{12}^2}. \tag{2.12}$$

Следует различать два случая. В первом из них сумма интенсивностей $æ_1 + æ_2$ отлична от нуля. Введем *центр завихренности* — точку с координатами

$$\frac{æ_1 x_1 + æ_2 x_2}{æ_1 + æ_2}, \qquad \frac{æ_1 y_1 + æ_2 y_2}{æ_1 + æ_2}.$$

Эта точка (аналог центра масс) лежит на прямой, проходящей через взаимодействующие вихри и занимает неизменное положение (ввиду постоянства импульсов P_x и P_y). Следовательно, в этом случае отрезок r_{12} равномерно вращается вокруг центра завихренности и траектории вихрей — концентрические окружности с радиусами

$$\frac{æ_2 r_{12}}{æ_1 + æ_2}, \quad \text{и} \quad \frac{æ_1 r_{12}}{æ_1 + æ_2}. \tag{2.13}$$

Во втором случае, когда $æ_1 + æ_2 = 0$, отрезок не вращается, а движется поступательно со скоростью $æ/2\pi r$ ($æ = æ_1 = -æ_2$) в направлении, ортогональном этому отрезку. Величину этой скорости можно получить так. Скорость первого вихря равна произведению радиуса окружности (2.13) на угловую скорость (2.12):

$$\frac{æ_2 r_{12}}{æ_1 + æ_2} \frac{æ_1 + æ_2}{2\pi r_{12}^2} = \frac{æ_2}{2\pi r_{12}}.$$

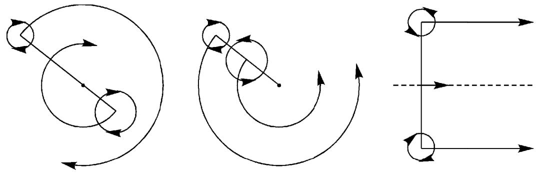

Рис. 4. Динамика пары точечных вихрей

Устремляя затем $æ_2 \to -æ_1$, получим искомую скорость поступательного движения пары вихрей в случае противоположных интенсивностей.

Эти выводы о движении пары вихрей были получены еще Гельмгольцем. Дополним их еще одним результатом из работы [33], устанавливающим связь задачи о двух точечных вихрях с задачей о движении двух материальных частиц, притягивающихся с силой, обратно пропорциональной кубу расстояния между ними. Последнюю задачу впервые рассматривал Ньютон в «Principia» и затем более детально Якоби в своих «Лекциях по динамике».

Теорема 3. *Рассмотрим задачу о движении двух материальных точек с массами $æ_1$ и $æ_2$. Если потенциальная энергия сил притяжения между ними определяется формулой*

$$V = -\frac{æ_1 æ_2 (æ_1 + æ_2)}{8\pi^2 r_{12}^2}, \tag{2.14}$$

то среди движений этих точек имеются все движения пары вихрей с интенсивностями $æ_1$ и $æ_2$.

Доказательство.

Динамика материальных точек описывается, как известно, уравнениями Гамильтона с гамильтонианом

$$H = \frac{X_1^2 + Y_1^2}{2æ_1} + \frac{X_2^2 + Y_2^2}{2æ_2} + V,$$

где $X_k, Y_k (k = 1, 2)$ — канонические импульсы, сопряженные с координатами x_k, y_k. Эта система имеет четыре степени свободы и, стало быть, ее фазовое пространство восьмимерно. Нетрудно проверить, что дифференциальные уравнения Гамильтона

$$\begin{gathered}\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial X_k} = \frac{X_k}{æ_k}, \quad \dot{y}_k = \frac{\partial H}{\partial Y_k} = \frac{Y_k}{æ_k}, \\ \dot{X}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k} = -\frac{\partial V}{\partial x_k}, \quad \dot{Y}_k = -\frac{\partial H}{\partial y_k} = -\frac{\partial V}{\partial y_k}; \quad k = 1, 2\end{gathered} \tag{2.15}$$

имеют четырехмерное *инвариантное* многообразие M^4, определяемое уравнениями

$$\begin{gathered}X_1 = -\frac{æ_1 æ_2}{2\pi}\frac{y_1 - y_2}{r_{12}^2}, \quad Y_1 = \frac{æ_1 æ_2}{2\pi}\frac{x_1 - x_2}{r_{12}^2}, \\ X_2 = -\frac{æ_1 æ_2}{2\pi}\frac{y_2 - y_1}{r_{12}^2}, \quad Y_2 = \frac{æ_1 æ_2}{2\pi}\frac{x_2 - x_1}{r_{12}^2}.\end{gathered} \tag{2.16}$$

Это означает, что если в начальный момент времени траектория системы (2.15) принадлежит M^4, то вся траектория целиком расположена на M^4.

Уравнения (2.16) с учетом соотношений $X_k = æ_k \dot{x}_k$ и $Y_k = æ_k \dot{y}_k$ совпадают с уравнениями Кирхгофа (2.16) при $n = 2$. ■

Если потенциальная энергия (2.14) убывала бы как первая степень расстояния между точками, то динамика пары вихрей находилась бы в соответствии с третьим законом Кеплера. Пока не совсем ясно, можно ли распространить теорему 3 на случай $n \geq 3$ вихрей.

5°. В отличие от задачи трех гравитирующих тел, задача трех вихрей является интегрируемой. Детальный анализ траекторий выполнен Гребли еще в 1877 году (современное изложение см. в [46]). Однако, как показал С. Л. Зиглин [25], задача четырех вихрей в общем случае уже не будет интегрируемой: поведение фазовых траекторий имеет не регулярный, хаотический характер. В частном случае, когда $\sum æ_s = 0$ и когда импульсы P_x, P_y равны нулю, уравнения движения четырех вихрей интегрируются в квадратурах. Метод интегрирования указан в [37], а в книге [46] приведен детальный анализ движения в нескольких важных случаях.

Большой интерес представляют стационарные движения n точечных вихрей, когда расстояния между ними не меняются: система вихрей как твердое тело движется поступательно, либо вращается с постоянной угловой скоростью вокруг их общего центра завихренности. К сожалению, эта алгебраическая задача представляет значительные трудности даже в случае равных интенсивностей вихрей. Дж. Дж. Томсон в 1883 г. исследовал частный случай, когда вихри расположены в вершинах правильного n-угольника. Он нашел, что такое стационарное вращение устойчиво при $n \leq 6$ и неустойчиво при $n > 7$. В работе Л. Кемпбела [65] доказано существование устойчивых стационарных вращений при всех значениях n и с помощью численных расчетов составлен каталог устойчивых равновесных конфигураций для $n \leq 50$. Оказывается, вихри расположены на одной или нескольких концентрических окружностях («атомных оболочках», по терминологии Кельвина). В работах [56, 63] обнаружены неподвижные устойчивые конфигурации n вихрей, когда n является квадратом целого числа. К сожалению, и эта задача еще далека от полного решения. Имеются важные (с точки зрения приложений) примеры стационарных движений бесконечного числа точечных вихрей (например, цепочки Кармана; см. [42], §156).

Уравнения Кирхгофа (2.6) дают нам важный пример гамильтоновых систем дифференциальных уравнений, которые появляются не как привычный результат преобразования Лежандра из классической динамики.

6°. Подчеркнем, что уравнения Гамильтона (2.1) являются следствием одного лишь условия несжимаемости. Поэтому они справедливы и для плоских течений однородной вязкой жидкости, динамика которой описывается *уравнением Навье—Стокса*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \times \operatorname{rot} v - \frac{\partial f}{\partial x} + \nu \Delta v, \tag{2.17}$$

где $\nu > 0$ — коэффициент вязкости, Δ — оператор Лапласа. Рассмотрим частный случай плоскопараллельного течения, когда частицы жидкости равномерно вращаются по концентрическим окружностям в плоскости x, y с центром в начале координат. Ясно, что вектор вихря $\operatorname{rot} v$ имеет компоненты $(0, 0, \zeta)$ и для этого течения поле $v \times \operatorname{rot} v$

потенциально. Применяя к обеим частям (2.17) операцию ротора, получаем для z-компоненты ζ уравнение

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \Delta \zeta, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{2.18}$$

Точно таким же уравнением описывается распространение тепла на плоскости.

Предположим, что вначале (при $t = 0$) мы имеем точечный вихрь интенсивности æ, расположенный в точке $x = y = 0$. Аналогия с известным законом распространения тепла от мгновенного точечного источника подсказывает вид решения уравнения (2.18):

$$\zeta = \frac{æ}{4\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}, \quad r^2 = x^2 + y^2. \tag{2.19}$$

Непосредственным дифференцированием легко убедиться в том, что эта функция действительно удовлетворяет (2.18).

Так как

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \zeta \, dxdy = æ,$$

то суммарная интенсивность вихря не меняется со временем. При $t \to +0$, его «плотность» ζ сосредоточена в начале координат и представляет собой обобщенную функцию Дирака. Величина скорости частиц жидкости для решения (2.19) определяется формулой

$$|v| = \frac{æ}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right). \tag{2.20}$$

Когда t возрастает от нуля до бесконечности, то это значение убывает от $æ/2\pi r$ до нуля. При фиксированном $r > 0$ значение вихря ζ, наоборот, возрастает от нуля до своего наибольшего значения и потом асимптотически приближается к нулю. Таким образом, мы имеем *диффузию* вихря.

По формуле Грина, циркуляция скорости вдоль окружности радиуса r равна

$$2\pi \int_0^r \zeta r \, dr = æ \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right).$$

В отличие от идеальной жидкости, она зависит от времени и при $t \to +0$ она стремится, конечно, к интенсивности æ, а при $t \to \infty$ она убывает до нуля. Стоит отметить, что, как доказано в работе [70], течения вязкой жидкости, в общем случае, вообще не допускают интегральных инвариантов типа (1.9), (1.10). Причина заключается в запутанности (хаотичности) поведения траекторий частиц при $\nu > 0$.

Функция тока Ψ для решения (2.19) зависит от r, t и является первообразной функции (2.20) (при фиксированном t).

§3. Системы лучей, законы отражения и преломления, теорема Малюса

1°. С точки зрения геометрической оптики распространение света в трехмерном евклидовом пространстве $E^3 = \{x\}$ можно представить себе как поток частиц. Траектории частиц называются *лучами.*

Хорошо известно (и интуитивно ясно), что в однородной и изотропной прозрачной среде свет распространяется по прямым линиям с постоянной скоростью. Это свойство, конечно, не выполняется, если среда неоднородна (скорость света зависит от точки $x \in E^3$) или неизотропна (скорость света зависит от направления луча). Оптические свойства среды определяются *показателем преломления*; он равен обратной величине скорости света. Показатель преломления n в общем случае является функцией точки x и направления скорости v :

$$n = f\left(x, \frac{v}{|v|}\right). \tag{3.1}$$

Искривление световых лучей, вызванное изменением показателя преломления, называется *рефракцией.* Простейший вариант рефракции — преломление светового луча на границе раздела двух однородных оптических сред с различными показателями преломления n_1 и n_2 (см. рис. 5). Известно, что для преломления имеют место два экспериментальных закона, открытые Декартом:

(1) падающий и преломленный лучи лежат в одной плоскости, нормальной к границе раздела,

(2) если i_1 и i_2 — углы падения и преломления, то

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

В англоязычной литературе закон преломления обычно связывают с именем голландца Снеллиуса, открывшего этот закон раньше Декарта, но не опубликовавшего его. Это обстоятельство связано с утверждением Гюйгенса, что Декарт, во время пребывания в Голландии, *мог* видеть рукопись Снеллиуса. «Однако, — как пишет Араго, — Гюйгенс не утверждает, что Декарт *действительно* ее *видел*; следовательно, отнимающие честь открытия закона возводят на французского геометра неслыханное ученое хищничество».

Законы Декарта можно сформулировать более кратко: вектор

$$n_1 \frac{v_1}{|v_1|} - n_2 \frac{v_2}{|v_2|} = n_1^2 v_1 - n_2^2 v_2 \tag{3.2}$$

ортогонален поверхности раздела в точке преломления луча. Здесь v_1 и v_2 — векторы скорости света в средах с показателями преломления n_1 и n_2. Такой же вид имеет и *закон отражения* от поверхности (известный, как полагают, античным авторам), только в формуле (3.2) надо положить $n_1 = n_2$.

2°. При построении оптических изображений существенную роль играет не отдельный световой луч, а *система лучей* — семейство световых лучей, «однократно» заполняющее пространство: через каждую точку x (из некоторой области E^3) проходит единственный луч, причем направление лучей гладко зависит от точки x. Таким образом, система лучей однозначно связана с полем $v(x)$ скоростей частиц света. Для однородной и изотропной среды, очевидно, $|v(x)| = \text{const}$ и интегральные линии поля v являются прямыми.

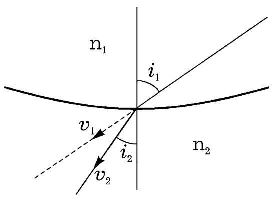

Рис. 5. К закону преломления

Предложение 1. *Векторное поле v любой системы лучей в однородной* *оптической среде удовлетворяет соотношению*

$$v \times \operatorname{rot} v = 0. \tag{3.3}$$

Доказательство.

Без ограничения общности равенство (3.3) достаточно доказать в точке $x = 0$. Предположим, что ось x_1 является световым лучом:

$$v(0) = (c, 0, 0), \quad c \neq 0.$$

Разложим компоненты поля v в ряды Тейлора с точностью до членов второго порядка по x_1, x_2, x_3:

$$\begin{gathered} v_1 = c + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots , \\ v_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \cdots , \quad v_3 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots . \end{gathered} \tag{3.4}$$

Так как вектор $v(0)$ направлен вдоль оси x_1, то $v_2 = v_3 = 0$. Значит, $b_1 = c_1 = 0$. Далее,

$$|v|^2 = c^2 + 2c(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + \cdots .$$

Поскольку $|v| = \mathrm{const}$, то $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Итак, поле (3.4) имеет вид

$$v_1 = c + \cdots , \quad v_2 = b_2x_2 + b_3x_3 + \cdots , \quad v_3 = c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots .$$

Его ротор в точке $x = 0$ имеет компоненты

$$c_2 - b_3,\ 0,\ 0.$$

Следовательно, векторы $\operatorname{rot} v$ и v коллинеарны. Что и требовалось. ■

Равенство (3.3) отмечено впервые, по-видимому, Зоммерфельдом и Рунге в 1911 г. [78].

Найдем условия, при которых система лучей ортогональна некоторому семейству поверхностей в E^3. Эта задача уже рассматривалась нами в §1. Критерием является условие (1.17):

$$(v, \operatorname{rot} v) = 0. \tag{3.5}$$

Сопоставляя (3.4) и (3.5), получаем, что тогда $\operatorname{rot} v = 0$. Следовательно,

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \varphi : E^3 \to \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Такие системы лучей называются *системами Гамильтона.* Функцию $W = \varphi/c^2$ Гамильтон назвал *характеристической функцией*, а Брунс — *эйконалом.* Она удовлетворяет *уравнению Гамильтона в частных производных* или *уравнению эйконала*

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_3}\right)^2 = n^2, \tag{3.7}$$

где $n = 1/c$ — показатель преломления. Вычислим скорость изменения функции W вдоль светового луча:

$$\frac{dW}{dt} = \sum \frac{\partial W}{\partial x_i} v_i = \sum \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 1.$$

Таким образом, время движения частиц света от поверхности $W(x) = s_1$ до поверхности $W(x) = s_2$ равно $s_2 - s_1$. Поэтому функцию W еще называют *оптическим путем.*

Системы лучей, для которых $\operatorname{rot} v \neq 0$, называют *системами Куммера.* Они изучались Куммером чисто алгебраическими средствами безотносительно к оптическим задачам [72].

Приведем простой пример системы Куммера, не являющейся системой Гамильтона:

$$v_1 = c \sin x_3, \quad v_2 = c \cos x_3, \quad v_3 = 0.$$

Здесь $\operatorname{rot} v = v$ и интегральные линии поля v будут, конечно, прямыми, параллельными координатной плоскости $x_1 x_2$.

Плоско-параллельные системы лучей (когда компоненты поля скоростей v не зависят явно от x_3 и $v_3 = 0$) являются системами Гамильтона (ротор скорости ортогонален плоскости $x_1 x_2$). В частности, каждая система лучей на плоскости будет системой Гамильтона.

Предложение 1 устанавливает очевидную аналогию между оптическими системами лучей и стационарными течениями идеальной жидкости (в частном случае, когда функция Бернулли постоянна). Следовательно, системы лучей допускают инварианты (1.9) и (1.10), с помощью которых можно доказать важные теоремы геометрической оптики. Системы лучей Гамильтона отвечают потенциальным течениям, при этом эйконал (умноженный на квадрат коэффициента преломления) соответствует потенциалу скорости, а уравнение эйконала — интегралу Лагранжа—Коши. Системы Куммера отвечают вихревым течениям в слабом смысле (как, например, ABC-течения Арнольда).

3°. В качестве примера применения *оптико-гидродинамической аналогии* докажем *теорему Малюса,* которая является основой аналитической оптики и которая послужила отправным пунктом обширных исследований Гамильтона.

Теорема 4 (Малюс). *Если система лучей ортогональна некоторой регулярной поверхности, то она будет системой Гамильтона и останется таковой после любого числа отражений и преломлений.*

Эта теорема содержится в трактате Малюса по геометрической оптике, представленным им Парижской академии в 1807 году. Кроме Лапласа, Монжа и Лакруа, в состав комиссии по рассмотрению трактата входил также Лагранж. Не узнал ли он в теореме Малюса ближайшего родственника своей теоремы о сохранении потенциальных течений идеальной жидкости?

Доказательство теоремы Малюса.

Рассмотрим две оптические среды 1 и 2 с показателями преломления n_1 и n_2, разделенные регулярной поверхностью Λ (рис. 6). Введем кусочно-гладкое векторное поле $u(x) = n^2 v(x)$: в средах 1 и 2 оно задается формулами $n_1^2 v_1$ и $n_2^2 v_2$. Пусть Γ_1 — замкнутый контур в среде 1.

Рассмотрим трубку M_1 световых лучей, проходящих через точки контура Γ и трансверсально пересекающую поверхность раздела по замкнутой кривой K. После преломления эти лучи образуют трубку M_2 в среде 2. Пусть Γ_2 — замкнутый контур на трубке M_2, гомологичный контуру K.

Докажем сначала, что

$$\oint_{\Gamma_1} (n_1^2 v_1, dx) = \oint_{\Gamma_2} (n_2^2 v_2, dx). \qquad (3.8)$$

Если g^t — фазовый поток поля u, то из (3.8) получаем аналог теоремы (1.10):

$$\int_{g^t(\Gamma)} (u, dx) = \text{const}\,.$$

Поскольку в каждой из сред показатели преломления n_1 и n_2 постоянны, то, согласно предложению 1,

$$u \times \operatorname{rot} u = 0. \qquad (3.9)$$

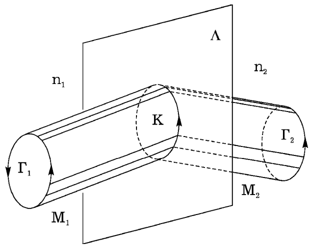

Рис. 6. К доказательству теоремы Малюса

Следовательно, поле $\operatorname{rot} u$ касается поверхности M_1 и его поток через эту поверхность равен нулю. Значит, по формуле Стокса,

$$\oint_{\Gamma_1} (u, dx) = \oint_K (u, dx) = \oint_K (n_1^2 v_1, dx). \qquad (3.10)$$

Аналогично,

$$\oint_{\Gamma_2} (u, dx) = \oint_K (u, dx) = \oint_K (n_2^2 v_2, dx). \qquad (3.11)$$

Контур K целиком лежит на поверхности раздела Λ и по закону Декарта векторное поле $n_1^2 v_1 - n_2^2 v_2$ ортогонально Λ. Следовательно,

$$\oint_K (n_1^2 v_1 - n_2^2 v_2, dx) = 0.$$

Таким образом, интегралы (3.10) и (3.11) равны, что доказывает (3.8).

Пусть теперь световые лучи ортогонально пересекают некоторую регулярную поверхность Σ. Можно считать, что контур Γ_1 лежит на Σ. Но тогда интеграл в левой части (3.8) равен нулю, поскольку векторы $v_1(x)$ ортогональны Γ_1. Следовательно, интеграл в правой части (3.8) обращается в нуль для любого замкнутого контура Γ_2. Отсюда в свою очередь вытекает потенциальность поля $v(x)$. ■

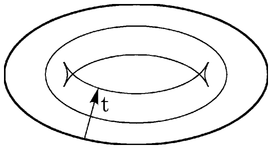

Рис. 7. Появление особенностей

4°. Пусть Σ — гладкая регулярная поверхность и v — векторное поле системы лучей Гамильтона. Положим

$$\Sigma_t = g_v^t(\Sigma), \qquad \Sigma_0 = \Sigma.$$

По теореме Малюса, поверхности Σ_t ортогональны световым лучам; на этих поверхностях эйконал принимает постоянные значения.

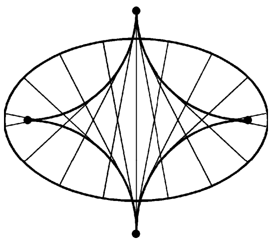

Рис. 8. Каустика эллипса

Оказывается, при $t > 0$ поверхности Σ_t могут иметь особенности. Это явление показано на рис. 7 для эллипса на плоскости; поле v направлено внутрь эллипса. Появление особенностей связано с наличием *каустик* — огибающих семейств световых лучей (каустика по-гречески означает «жгущая»: в этих местах происходит концентрация света). На рис. 8 изображена каустика эллипса (эта кривая — астроида). Каустики поверхности Σ в общем случае сами являются поверхностями. Особенности ортогональных поверхностей Σ_t расположены как раз на каустиках Σ.

Каустики делят пространство на области, которые световые лучи заполняют с различными кратностями: через точки каждой такой области проходит одинаковое число лучей. По этой причине на каустиках эйконал имеет особенности: он начинает ветвиться и становится многозначной функцией.

Каустика допускает следующее конструктивное описание. Пусть x — точка поверхности Σ. Плоскость, проходящая через нормаль к Σ в точке x, пересекает поверхность Σ по плоской кривой. Центр круга кривизны этой кривой в точке x лежит, конечно, на нормали. Если мы будем вращать плоскость сечения вокруг нормали, то кривая пересечения будет постоянно меняться, а вместе с ней будет меняться положение центра круга кривизны и радиус кривизны линии сечения.

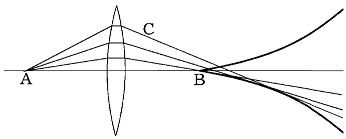

Рис. 9 Каустика от источника света на оси линзы

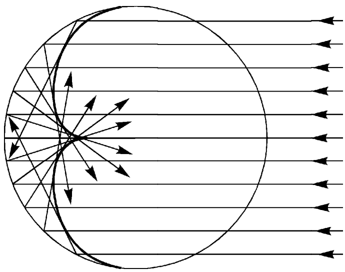

Рис. 10 Каустика в чашечке кофе

За полоборота радиус пройдет через максимум и минимум. Плоскости, которым отвечают эти экстремальные значения кривизны, пересекают поверхность Σ по *главным линиям кривизны*, ортогонально пересекающимся в точке x. Центры кругов кривизны главных линий называются ***фокальными точками*** поверхности Σ. В этих двух точках пересекаются бесконечно близкие нормали к Σ, проходящие через главные линии кривизны. Фокальные точки, разумеется, зависят от выбора точки $x \in \Sigma$. Геометрическое место всех фокальных точек совпадает с каустикой к Σ. Каустика называется также ***фокальной поверхностью.***

Каустики плоских кривых изучал еще Гюйгенс в 1650-х годах в связи со своей теорией эволют и эвольвент. В учебнике Лопиталя по анализу бесконечно-малых (1700 г.) рассмотрены задачи об особенностях и перестройках семейств ортогональных плоских кривых. В 1852 г. Кэли исследовал каустику трехосного эллипсоида. В настоящее время теория особенностей систем лучей Гамильтона сильно продвинута и входит составной частью в *теорию катастроф* (см. обзорную статью [7], а также книгу [9]). Сколько известно автору, особенности систем лучей Куммера в рамках теории катастроф пока не изучались.

Отметим, что на практике каустики обычно возникают после отражения или преломления системы лучей Гамильтона (рис. 9 и 10).

§4. Принцип Ферма, канонические уравнения Гамильтона, оптико-механическая аналогия

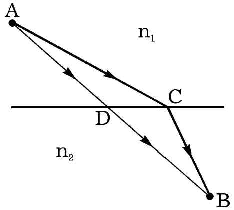

Рис. 11. К принципу Ферма

1°. В работе «Синтез для рефракции» (1662 г.) Ферма показал, что законы Декарта преломления световых лучей выводятся из одного принципа, согласно которому свет распространяется вдоль пути наименьшей продолжительности по времени.

На рис. 11 изображен преломленный луч ACB, длина которого, конечно, больше прямолинейного отрезка ADB. Однако время движения частицы света по пути ACB меньше времени движения по прямой ADB. В связи с этим Ферма пишет, что *« ... природа действует наиболее легкими и доступными путями.* Мы полагаем, что именно так нужно выражать эту мысль, а не так, как это принято обычно говорить, что *природа всегда действует по кратчайшим линиям».*

С *принципом Ферма* согласуется также закон отражения световых лучей. Поэтому принцип Ферма естественно положить в основу всей геометрической оптики. Правда, при этом его надо формулировать как принцип стационарности времени распространения света (а не как принцип минимального времени). Дело в том, что через точки, расположенные «после» каустики, проходят несколько световых лучей различной оптической длины (см. рис. 9).

Время распространения света выражается по формуле

$$t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{x}, x)\, dt, \quad L = |\dot{x}| f\Big(x, \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\Big), \tag{4.1}$$

где $\dot{x} = v$ — скорость движения световых частиц, f — показатель преломления (3.1).

Интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} L(\dot{x}, x)\, dt \tag{4.2}$$

— оптическая длина пути $x\colon [t_1, t_2] \to E^3$. Он является аналогом *действия* по Гамильтону в классической механике. Чтобы подчеркнуть эту аналогию, подынтегральную функцию в (4.1) будем называть *функцией Лагранжа* или *лагранжианом*. Интеграл (4.2) часто называют *действием по Ферма*. Лагранжиан (4.1) обладает следующим свойством однородности:

$$L(\lambda\dot{x}, x) = \lambda L(\dot{x}, x)$$

для всех $\lambda > 0$. Такие лагранжианы называются *параметрическими*: значение действия по Ферма (4.2) зависит только от траектории световой частицы (и направления движения), но не от ее параметризации (т.е. скорости движения). Если s — некоторый новый параметр ($\dot{s} > 0$), то интеграл (4.2) равен

$$\int_{s_1}^{s_2} L(x', x)\, ds, \quad (\cdot)' = \frac{d}{ds}(\cdot).$$

С учетом этих обозначений принцип Ферма можно представить в виде уравнения

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} L\, ds = 0, \tag{4.3}$$

где δ — символ варьирования (введенный Лагранжем). Дадим точные определения. Пусть $x(s)$, $s_1 \leq s \leq s_2$ — некоторый гладкий путь. Его *вариация* — это гладкое семейство путей

$$x_\alpha(s) = x(s, \alpha), \quad \alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

удовлетворяющее двум условиям:

(1) $x_0(s) = x(s)$ для всех $s_1 \leq s \leq s_2$,

(2) $\quad x_\alpha(s_1) = x(s_1), \quad x_\alpha(s_2) = x(s_2)$ для всех α.

Действие по Ферма, вычисленное вдоль путей $x_\alpha(s)$, является функцией от α. *Вариация* δ — это производная по параметру α при $\alpha = 0$. Поскольку s_1 и s_2 не зависят от α (условие (2)), то

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} L\, ds = \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial L}{\partial x}\delta x\right) ds. \tag{4.4}$$

Для гладких функций операции дифференцирования по t и по α перестановочны. Следовательно, $\delta x' = (\delta x)'$. Поэтому формулу (4.4) можно преобразовать интегрированием по частям:

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} L\, ds = \frac{\partial L}{\partial x'}\delta x\Big|_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right)' - \frac{\partial L}{\partial x}\right] \delta x ds.$$

Так как $\delta x = 0$ при $s = s_1$ и $s = s_2$, то принцип Ферма (4.3) принимает следующий вид:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right)' - \frac{\partial L}{\partial x}\right]_{x(s)} \delta x ds = 0 \tag{4.5}$$

для всех вариаций $\delta x(s)$ пути $x(s)$. В вариационном исчислении доказывается (это, кстати, несложно), что критерием стационарности действия на пути $x(s)$ является обращение в нуль выражения в квадратных скобках:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right)' - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \tag{4.6}$$

Эти уравнения в вариационном исчислении называются *уравнениями Эйлера—Лагранжа.* Поскольку в нашем случае лагранжиан L параметрический, то вместе с решением $x(s)$ уравнения допускают семейство решений $x(\lambda s)$, $\lambda > 0$. Световой путь, параметризованный временем t, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \tag{4.7}$$

В механике это уравнение принято называть *уравнением Лагранжа.* По определению показателя преломления, функция $x(t)$ удовлетворяет соотношению $L = 1$.

Итак, гладкий путь $x(t)$ описывает движение световой частицы, если эта функция удовлетворяет уравнению (4.7) и соотношению $L = 1$. Рассмотрим более общий световой путь $x(t)$, представляющий кусочно-гладкую кривую, трансверсальную границам раздела оптических сред. Точки разрыва скорости $\dot{x}(t)$ отвечают моментам отражения или преломления луча. В промежутках между точками разрыва функция $\dot{x}(t)$ удовлетворяет уравнению Лагранжа (4.7) (и, конечно, уравнению $L = 1$), а в точке разрыва $t = \tau$ скорости $\dot{x}(\tau - 0)$ и $\dot{x}(\tau + 0)$ связаны законом отражения или преломления соответственно. Можно показать, что такие пути и только они доставляют стационарное значение действию по Ферма.

2°. Уравнения Лагранжа, записанные в явном виде, содержат вторые производные от x по t и поэтому являются уравнениями второго порядка. Полезно перейти к уравнениям первого порядка, вводя шестимерное фазовое пространство. Обычно уравнения Лагранжа представляют в виде уравнений Гамильтона, применяя *преобразование Лежандра.* Напомним его определение и основные свойства.

Считая x параметром, рассмотрим лагранжиан $L(v, x)$ как функцию от скорости $v = \dot{x}$ (в задачах оптики функция L формально не определена при $v = 0$). Положим

$$y = \frac{\partial L}{\partial v}. \tag{4.8}$$

Это импульс световой частицы. Если *матрица Гессе* вторых частных производных

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^2} = \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j} \right\| \tag{4.9}$$

невырождена, то по теореме о неявных функциях из (4.8) (по крайней мере локально) можно выразить v как функцию от импульса y (при фиксированном x). Оказывается, v является градиентом некоторой функции от y (как и в случае исходного преобразования (4.8)).

Действительно, положим

$$H(x,y) = y \cdot v - L(v,x)\Big|_{v(y,x)} \tag{4.10}$$

и вычислим градиент H по y:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = v + y\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = v + \left(y - \frac{\partial L}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y} = v. \tag{4.11}$$

Соответствие $L \to H$ называется преобразованием Лежандра. В силу двойственности формул (4.8) и (4.11), а также симметрии соотношения (4.10) по отношению к функциям L и H, преобразование Лежандра инволютивно: его квадрат будет тождественным преобразованием.

Оказывается,

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \tag{4.12}$$

Конечно, импульсы y и скорости v здесь следует считать связанными соотношением (4.8) или (4.11). Для доказательства достаточно продифференцировать равенство (4.10) по x:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = y\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} + \left(y - \frac{\partial L}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x}.$$

Теорема 5 (Пуассон—Гамильтон). *Функция $x(t)$ — решение уравнений Лагранжа (4.7) тогда и только тогда, когда функции*

$$x = x(t), \qquad y = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{x(t)}$$

удовлетворяют уравнениям

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{4.13}$$

Дифференциальные уравнения (4.13) принято называть *каноническими уравнениями Гамильтона*, а функцию H — *гамильтонианом.*

Пространство сопряженных переменных x, y называют ***фазовым пространством*** (по предложению У. Гиббса).

Первое уравнение системы (4.13) совпадает с уравнением (4.11) и является непосредственным следствием преобразования Лежандра (оно фактически было получено Пуассоном). Второе уравнение (4.13) получается из уравнения Лагранжа (4.7) после замены $\partial L/\partial \dot{x}$ на импульс y и использования соотношения (4.12). Если воспользоваться соотношением (4.11) и преобразованием Лежандра $H \to L$, то уравнения Гамильтона (4.13) перейдут в уравнение Лагранжа.

3°. К сожалению, в геометрической оптике теорема 1 непосредственно не применима, поскольку лагранжиан (4.1) является параметрическим и поэтому матрица Гессе (4.9) вырождена. Действительно, по формуле Эйлера для однородных функций

$$\frac{\partial L}{\partial v} \cdot v = L.$$

Следовательно, компоненты импульса $\partial L/\partial v$ однородны по v с нулевой степенью однородности. Применяя еще раз формулу Эйлера к $\partial L/\partial v$ в точке $v \neq 0$, получаем, что

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^2} v = 0. \tag{4.14}$$

Следовательно,

$$\det\left|\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\right| \equiv 0.$$

Эту трудность можно преодолеть следующим образом. Введем замкнутое множество точек $v \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющее уравнению $L(v, x) = 1$. Эта поверхность называется ***индикатрисой*** в точке $x \in E^3$. Можно сказать, что индикатриса — это совокупность скоростей частиц света, выпускаемых из точки x по разным направлениям. Например, для изотропной среды индикатриса в точке x является сферой радиуса $1/n(x)$, где n — показатель преломления. Ниже рассматривается важный для оптики случай, когда индикатрисы являются гладкими выпуклыми поверхностями.

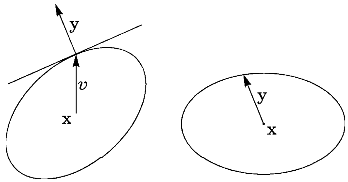

Рис. 12. Индикатриса и фигуратриса

Введем в рассмотрение *фигуратрису* — множество импульсов $y \in \mathbb{R}^3$, определяемых аналитически соотношениями

$$y = \frac{\partial L}{\partial v}, \qquad L(v, x) = 1. \quad (4.15)$$

Можно показать, что фигуратриса также будет выпуклой поверхностью.

Существует единственная гладкая функция $H(x, y)$, положительно-однородная по y ($H(x, \lambda y) = \lambda H(x, y)$ для всех $\lambda > 0$) и равная 1 при всех y, лежащих на фигуратрисе: функция H линейна на каждом луче, проходящем через точку $x \in E^3$, и равна 1 в точке пересечения луча с фигуратрисой. Преобразование

$$v = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad H(x, y) = 1$$

переводит фигуратрису в исходную индикатрису. Таким образом, функции L и H, так же как индикатриса и фигуратриса, двойственны друг другу. Но это не есть двойственность по Лежандру. В основе теории параметрического гамильтониана лежит известное в геометрии преобразование полюсов и поляр относительно единичной сферы.

Теорема 6. *Вдоль световых лучей выполняются соотношения*

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (4.16)$$

Доказательство.

Перейдем к непараметрическому случаю, чтобы воспользоваться преобразованием Лежандра. Введем новый лагранжиан $L^* = L^2/2$, однородный по $\dot{x}$ степени 2. Покажем, что матрица Гессе

$$\left\| \frac{\partial^2 L^*}{\partial v^2} \right\|$$

положительно определена. Зафиксируем точку x и рассмотрим регулярную кривую $v = v(s)$, $v' \neq 0$, лежащую на индикатрисе

$L^*(v(s), x) \equiv 1/2$. Дифференцируя это тождество по s, получим равенства

$$\frac{\partial L^*}{\partial v} \cdot v' = 0, \quad \frac{\partial^2 L^*}{\partial v^2} v' \cdot v' = -\frac{\partial L^*}{\partial v} \cdot v''. \tag{4.17}$$

Поскольку $v' \neq 0$ — касательный вектор и индикатриса — выпуклая поверхность, то ускорение v'' направлено внутрь индикатрисы. Следовательно,

$$\frac{\partial L^*}{\partial v} \cdot v'' < 0.$$

Но тогда, согласно (4.17),

$$\frac{\partial^2 L^*}{\partial v^2} v' \cdot v' > 0. \tag{4.18}$$

Значит, эта квадратичная форма положительно определена на касательной плоскости к каждой точке индикатрисы.

Из формулы Эйлера для однородных функций

$$\frac{\partial L^*}{\partial v} \cdot v = 2L^*$$

вытекает, что производные $\partial L^* / \partial v_k$ — однородные функции по v степени 1. Применяя еще раз формулу Эйлера, получим

$$\frac{\partial^2 L^*}{\partial v^2} v = \frac{\partial L^*}{\partial v}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 L^*}{\partial v^2} v \cdot v = \frac{\partial L^*}{\partial v} \cdot v = 2L^* > 0.$$

Таким образом, неравенство (4.18) справедливо и для вектора v, трансверсального к индикатрисе. Поэтому квадратичная форма (4.18) положительно определена во всем $\mathbb{R}^3$ и следовательно,

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L^*}{\partial v^2} \right\| > 0.$$

Ввиду равенств

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L^*\,dt=\int_{t_1}^{t_2} L\delta L\,dt \quad \text{и} \quad L=1,$$

функция $x(t)$ является экстремалью вариационной задачи

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L^*\,dt=0.$$

Введем канонический импульс

$$y=\frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}}=L\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}.$$

На индикатрисе $L=1$ получаем соотношение (4.15). Поскольку L^* — однородная функция относительно скорости $\dot{x}$ степени 2, то

$$H^*(x,y)=\frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}}\cdot x-L^*=L^*(\dot{x},x).$$

Положим $H^*=H^2/2$. На кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$, задающей движение световой частицы, очевидно, $H\equiv 1$. Следовательно, H — введенная выше функция, двойственная параметрическому лагранжиану L.

Используя теперь теорему 5, получаем уравнения (4.16):

$$\dot{x}=\frac{\partial H^*}{\partial \dot{y}}=H\frac{\partial H}{\partial y}=\frac{\partial H}{\partial y},\quad \dot{y}=-\frac{\partial H^*}{\partial \dot{x}}=-H\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{\partial H}{\partial x}.$$

■

Уравнения (4.16) получены Гамильтоном в работе «О системах лучей», представленной в 1824 году Ирландской академии наук. Впоследствии (1834 г.) он распространил этот результат на динамику консервативных систем.

4°. В частном случае, когда среда изотропна, $L=|\dot{x}|n(x)$. Следовательно, $H=|y|/n(x)$.

Теорема 7. *Световые лучи в оптической среде $E^3=\{x\}$ с показателем преломления $n(x)$ являются траекториями движения материальной точки в потенциальном поле с силовой функцией $n^2/2$.*

Доказательство.

Запишем в явном виде канонические уравнения (4.16) с гамильтонианом $H = |y|/n$ на уровне $H = 1$:

$$\dot{x} = \frac{y}{|y|n} = \frac{y}{n^2}, \quad \dot{y} = \frac{|y|}{n^2}\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x}.$$

Перейдем к новому времени τ по формуле $d\tau = n^2 dt$. Обозначая штрихом дифференцирование по τ, будем иметь:

$$x' = y, \qquad y' = n\frac{\partial n}{\partial x}.$$

Отсюда

$$x'' = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad U = \frac{n^2}{2}.$$

Это — уравнения движения материальной частицы единичной массы в потенциальном поле с силовой функцией U. Что и требовалось. ■

Теорема 7 составляет содержание *оптико-механической аналогии*, установленной Иоганном Бернулли еще в 1696 году.

Применим этот результат к задаче о световых лучах в атмосфере, когда показатель преломления медленно меняется с высотой z :

$$n(z) = n_0(1 + \varepsilon z). \tag{4.19}$$

Ясно, что скорость света уменьшается вместе с плотностью воздуха. Следовательно, в обычных условиях $\varepsilon < 0$. При малых значениях ε можно считать, что

$$\frac{n^2(z)}{2} = \frac{n_0^2}{2} - gz, \qquad g = n_0^2\varepsilon.$$

Но эта силовая функция описывает падение точки в пустоте. Следовательно, световые лучи — это параболы, выпуклые вверх. В частности, у линии горизонта Солнце кажется на $^1/_2$ градуса выше, чем на самом деле. Еще одно любопытное явление такого же рода — это мираж:

путнику в пустыне кажется, что он видит голубую воду. Объяснение миража, найденное впервые Монжем, заключается в следующем. Вблизи раскаленной поверхности Земли воздух более разрежен, что приводит к случаю $\varepsilon > 0$ в формуле (4.19).

Световые лучи — параболы, обращенные выпуклостью вниз. Так что на самом деле путник видит не водяную поверхность, а голубое небо.

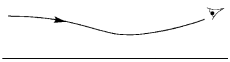

Рис. 13. Мираж

С явлением миража Монж столкнулся во время египетской компании Наполеона, участником которой он был. Объяснение миража Монж дал в небольшой заметке, опубликованной в журнале Египетского института, учрежденного Наполеоном. Как сказал Араго, «по напечатании его записки, даже простые солдаты перестали удивляться миражу, от которого они приходили иногда в страх и недоумение».

§5. Гамильтонова форма уравнений динамики

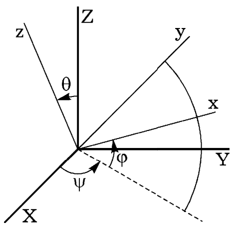

Рис. 14. Углы Эйлера

1°. Напомним сначала основные принципы *лагранжевой механики*. Положения механической системы находятся в однозначном соответствии с точками *конфигурационного пространства* — гладкого многообразия M^n. Число $n = \dim M$ называется *числом степеней свободы* механической системы. Локальные координаты $(x_1, \ldots, x_n) = x$ на M^n в механике обычно называют *обобщенными* или *лагранжевыми* координатами.

В качестве примера рассмотрим твердое тело в E^3, вращающееся вокруг неподвижной точки. Эта система имеет три степени свободы. Положения твердого тела однозначно сопоставляются с вращениями E^3 — ортогональными поворотами, переводящими неподвижные ортогональные оси XYZ в подвижный трехгранник xyz, жестко связанный с твердым телом. Эти повороты задаются ортогональными матрицами 3×3 с определителем, равным $+1$ (ортогональные матрицы с определителем -1 соответствуют преобразованиям, меняющим ориентацию). Совокупность таких матриц образует группу, которая обозначается $SO(3)$ (специальная ортогональная группа поворотов E^3). Это и есть конфигурационное пространство волчка в трехмерном пространстве. Можно показать, что группа $SO(3)$ как трехмерное многообразие диффеоморфна трехмерной сфере, у которой отождествлены антиподальные точки. В качестве локальных координат на $SO(3)$ удобно принять *углы Эйлера* θ, φ, ψ, изображенные на рис. 14.

Они корректно определены, если θ меняется в открытом интервале $(0, \pi)$.

Пусть $t \to x(t)$ — некоторое движение системы. Набор производных локальных координат по времени $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = \dot{x}$ называется скоростью системы. При заменах локальных координат скорости преобразуются по *контравариантному закону*: если $(x'_1, \dots, x'_n) = x'$ — новые координаты, то

$$\dot{x}_i{}' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i{}'}{\partial x_j} \dot{x}_j \tag{5.1}$$

или, более кратко,

$$\dot{x}'_i = J\dot{x},$$

где $J = \|\partial x_i{}'/\partial x_j\|$ — матрица Якоби преобразования $x \to x'$. В силу этого скорости являются *касательными векторами* к M. Вообще, касательные векторы — это один раз *контравариантные тензоры*. Мы говорим, что в точке $x_0 \in M$ задан один раз контравариантный тензор, если в каждой системе координат $(x_1, \dots, x_n)$ (в окрестности x_0) задан набор чисел $v = (v_1, \dots, v_n)$, преобразующихся при переходе к другим координатам $x'_1, \dots, x'_n$ по правилу (5.1):

$$v_i{}' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i{}'}{\partial x_j} v_j.$$

Частные производные вычисляются в точке x_0.

Совокупность всех касательных векторов в точке x_0 образует n-мерное векторное пространство, которое называется *касательной плоскостью* и обозначается $T_{x_0}M$. В механике важную роль играет объединение касательных плоскостей

$$\bigcup_{x\in M} T_xM = TM,$$

называемое пространством *касательного расслоения* многообразия M. Оно само имеет структуру гладкого $2n$-мерного многообразия: локальными координатами на TM служат наборы координат $x_1, \ldots, x_n$ на M и их производных $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$. Пара $(x, \dot{x}) \in TM$ называется *состоянием системы*, а само TM — *пространством состояний.*

Инерционные свойства механической системы определяются ее *кинетической энергией*

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1} a_{ij}(x)\dot{x}_i\dot{x}_j. \tag{5.2}$$

Это гладкая функция на TM, которая на каждой касательной плоскости T_xM является положительно определенной квадратичной формой. С геометрической точки зрения T задает *риманову метрику* на M. Если система движется по инерции (в отсутствии внешних сил), то ее траектории — геодезические линии метрики (5.2).

Сила $(F_1, \ldots, F_n) = F$, действующая на систему, представляет объект иного рода — *ковектор* — один раз *ковариантный тензор.* По определению, это наборы чисел $(u_1, \ldots, u_n) = u$, заданные в каждой локальной системе координат, причем при переходе к другим координатам они преобразуются по правилу

$$u_i{}' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial x_i{}'} u_j, \tag{5.3}$$

или, более кратко,

$$u' = \left(J^T\right)^{-1} u.$$

Укажем важный пример поля ковекторов. Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ — некоторая гладкая функция. Положим

$$u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad 1 \le i \le n. \tag{5.4}$$

Легко проверить, что это — гладкое *ковекторное поле* на M. Оно называется *градиентом* функции f. Подчеркнем, что градиент функции — это не вектор, а ковектор. Ему можно сопоставить касательный вектор только при наличии римановой метрики на M.

Ковектор $u = (u_1, \dots, u_n)$ и вектор $v = (v_1, \dots, v_n)$ можно перемножить по правилу

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i. \tag{5.5}$$

В соответствии с (5.1) и (5.3), это произведение является инвариантом (не зависит от выбора локальных координат). Например, если ковектор u имеет вид (5.4), то произведение (5.5) является производной функции f вдоль векторного поля v.

Движения $t \to x(t)$ механической системы с кинетической энергией T, на которую действует сила F, — это решения дифференциальных *уравнений Лагранжа*

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = F_i, \quad 1 \le i \le n. \tag{5.6}$$

Компоненты силы F_i в общем случае зависят от x, $\dot{x}$ и t. Можно показать, что при заменах локальных координат наборы чисел в левой части равенства (5.6) преобразуются по ковариантному закону. Таким образом, в обеих частях уравнения движения (5.6) стоят ковекторы. Это обстоятельство называется *свойством ковариантности* уравнений Лагранжа. В приложениях важное значение имеют *потенциальные силы*:

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \qquad 1 \le i \le n,$$

где V — некоторая гладкая функция на M, которая называется *потенциальной энергией*. В этом случае уравнения (5.6) можно переписать в более изящном виде:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad L = T - V. \tag{5.7}$$

Функция L называется ***функцией Лагранжа*** или ***лагранжианом.***

Отсюда сразу следует, что движения механической системы в потенциальном поле совпадают с экстремалями вариационной задачи

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0, \qquad \delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0.$$

«Удивительно, что у Лагранжа это предложение приведено лишь между строк; этим объясняется тот странный факт, что это соотношение в Германии, — главным образом благодаря трудам Якоби — а затем и во Франции обычно называется ***принципом Гамильтона***, тогда как в Англии никто не понимает этого обозначения; там это равенство известно под правильным, хотя и мало наглядным наименованием принципа стационарного действия» (Ф. Клейн «Лекции о развитии математики в XIX столетии»).

2°. Инвариантность действия по Гамильтону относительно групп преобразований конфигурационного пространства тесно связана с ***законами сохранения*** — интегралами уравнений Лагранжа. Пусть $v(x)$ — векторное поле на M. Ему можно сопоставить дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{d\alpha} = v(x), \qquad x \in M.$$

Его фазовый поток обозначим g_v^α. Пусть $t \to x(t)$ — движение механической системы — решение уравнений (5.7). Положим

$$x_\alpha(t) = g_v^\alpha(x(t))$$

и вычислим действие по Гамильтону на этих кривых:

$$I[x_\alpha(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(\dot{x}_\alpha(t), x_\alpha(t))\, dt.$$

Обозначая символом δ производную по α при $\alpha = 0$ и используя (4.3), получим:

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot v \Big|_{t_1}^{t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial x} \right] \cdot v\,dt. \tag{5.8}$$

Второе слагаемое в этой формуле обращается в нуль, поскольку при $\alpha = 0$ кривая $x_\alpha(t)$ будет решением уравнений Лагранжа. Предположим, что действие по Гамильтону *инвариантно* относительно действия группы g_v^α. Тогда левая часть (5.8) также равна нулю. Следовательно, согласно (5.8), значение функции

$$f(\dot{x}, x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot v \tag{5.9}$$

постоянно на каждом решении уравнений (5.7). Это известная *теорема Нетер* (1918 г.) Отметим, что производные $\partial L / \partial \dot{x}_i$ преобразуются по ковариантному закону. Так что $\partial L / \partial \dot{x}$ — ковектор; он называется *импульсом* механической системы.

Теорема Нетер справедлива и для *неавтономных* систем, когда лагранжиан зависит явно от времени. В этом случае полезно ввести расширенное конфигурационное пространство

$$\widetilde{M} = M \times \mathbb{R}_t,$$

где $\mathbb{R}_t$ — ось времени. Кривые $t \to x(t)$ естественно параметризовать новым параметром τ: $t = t(\tau)$, $t' > 0$ (штрих обозначает производную по τ). Тогда действие по Гамильтону принимает следующий вид:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} L(\dot{x}, x, t)\,dt = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \widetilde{L}(x', x, t', t)\,d\tau, \quad \widetilde{L} = t' L \left(\frac{x'}{t'}, x, t \right).$$

Лагранжиан $\widetilde{L}$ параметрический; по виду он напоминает лагранжиан (4.1) из геометрической оптики.

Пусть $\widetilde{v}$ — векторное поле на $\widetilde{M}$, порождающее систему уравнений

$$\frac{dx}{d\alpha} = v(x, t), \qquad \frac{dt}{d\alpha} = u(x, t).$$

Здесь v — поле на M, зависящее от t. Если фазовый поток этой системы сохраняет действие по Гамильтону, то уравнения Лагранжа (5.7) имеют интеграл

$$\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial x'}\cdot v+\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial t'}\cdot u. \tag{5.10}$$

Ввиду формул

$$\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial x'}=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}},\qquad \frac{\partial\widetilde{L}}{\partial t'}=L-\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot\dot{x}.$$

Интеграл (5.10) принимает следующий явный вид:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot v-\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot\dot{x}-L\right)u. \tag{5.11}$$

Рассмотрим частный случай, когда лагранжиан L не зависит явно от t. Тогда в качестве поля симметрий можно положить, очевидно, $v=0$, $u=1$. В этом случае интеграл Нетер переходит в интеграл

$$L-\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\cdot\dot{x}.$$

Если $L=T-V$, то эта функция будет *полной энергией* $H=T+V$, взятой с обратным знаком.

Отметим, что теорема Нетер восходит к более ранним наблюдениям Лагранжа и Якоби о связи классических интегралов систем взаимодействующих частиц с инвариантностью уравнений динамики относительно группы преобразований Галилея.

3°. Представим n дифференциальных уравнений Лагранжа второго порядка в виде системы $2n$ уравнений Гамильтона первого порядка. Как и в §4, введем канонические импульсы $(y_1,\dots,y_n)=y$, полагая

$$y_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i},\qquad 1\le i\le n. \tag{5.12}$$

Это — ковекторы — элементы пространства T_x^*M, двойственного касательному пространству T_xM, Для «натурального» лагранжиана $L=T-V$ формула (5.12)

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\dot{x}_j$$

задает изоморфизм линейных пространств T_xM и T_x^*M. Для каких лагранжианов $L(\dot{x}, x, t)$ отображение (5.12) $T_xM \to T_x^*M$ будет обратимым отображением «на»? Оказывается, для этого достаточно потребовать выполнения следующих двух условий:

1) симметричная матрица
$$\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \right\|$$
положительно определена,

2) лагранжиан как функция скорости растет на бесконечности быстрее линейной функции:
$$\frac{L(\dot{x})}{|\dot{x}|} \to +\infty, \quad \text{когда} \quad |\dot{x}| \to \infty.$$
Здесь $|\cdot|$ — некоторая норма в T_xM.

Действительно, в этом случае график функции $L(\dot{x})$ будет выпуклой поверхностью и при каждом значении ковектора y функция
$$y \cdot \dot{x} - L(\dot{x})$$
будет иметь ровно одну критическую точку (см. рис. 15).

Эта точка будет как раз решением уравнения (5.12).

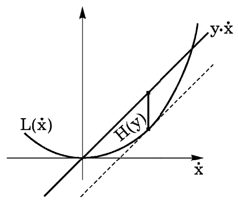

Рис. 15. Преобразование Лежандра

Таким образом, можно ввести функцию Гамильтона
$$H(x, y, t) = y \cdot \dot{x} - L(\dot{x}, x, t)\Big|_{\dot{x} \to y}. \tag{5.13}$$

При фиксированных значениях t гамильтониан будет гладкой функцией на $2n$-мерном многообразии, которое является объединением кокасательных плоскостей
$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M.$$

Формулу (5.13) можно записать в следующем виде:

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \dot{x} - L \Big|_{\dot{x} \to y}.$$

Если $L = T - V$, то гамильтониан будет совпадать с полной *механической энергией: $H = T + V$.*

В соответствии с теоремой Пуассона—Гамильтона (§4), если $t \to x(t)$ — решение уравнений Лагранжа, то пара функций

$$x(t), \qquad y(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{x(t)}$$

удовлетворяет каноническим уравнениям Гамильтона

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}; \quad 1 \leq k \leq n. \tag{5.14}$$

Координаты x_k, y_k будут ***сопряженными каноническими переменными***, а пространство кокасательного расслоения $P = T^*M$ — ***фазовым пространством.***

4°. В гамильтоновой механике важную роль играет дифференциальная 1-форма

$$\varphi = y dx - H dt = \sum y_i dx_i - H dt, \tag{5.15}$$

называемая *формой энергии-импульса* (термин предложен Э. Картаном [28]). Например, интеграл Нетер (5.11) — это значение формы φ на поле симметрий $\widetilde{v}$ пространства-времени:

$$\varphi(\widetilde{v}) = y \cdot v - Hu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot v - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot x - L\right) u.$$

В общем случае, когда гамильтониан зависит от времени, полезно ввести *расширенное фазовое пространство* $\widetilde{P} = P \times \mathbb{R}_t$, $\dim \widetilde{P} = 2n+1$. Форма энергии-импульса (5.15) — это 1-форма на $\widetilde{P}$. Рассмотрим ее внешний дифференциал

$$\phi = d\varphi = -\left[\sum dx_i \wedge dy_i + \sum \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i \wedge dt + \sum \frac{\partial H}{\partial y_i} dy_i \wedge dt\right]. \tag{5.16}$$

Это — внешняя 2-форма, определенная на парах касательных векторов к многообразию $\widetilde{P}$. Если

$$\xi = (x_\xi, \eta_\xi, t_\xi)^T, \quad \eta = (x_\eta, y_\eta, t_\eta)^T$$

— два вектора в точке $z = (x, y, t) \in \widetilde{P}$, то значение $\phi(\xi, \eta)$ можно представить в следующем явном виде

$$-A\xi \cdot \eta,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -E_n & -{H_x}' \\ E_n & 0 & -{H_y}' \\ {H_x}' & {H_y}' & 0 \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

— кососимметрическая матрица порядка $2n+1$, E_n — единичная $n \times n$-матрица.

Любая 2-форма ϕ в нечетномерном пространстве вырождена: для любой точки $z \in \widetilde{P}$ найдется ненулевой вектор $\xi \in T_z\widetilde{P}$, такой, что $\phi(\xi, \eta) = 0$ при всех $\eta \in T_z\widetilde{P}$. Вектор ξ будем называть ***вихревым вектором***. Ясно, что вихревые векторы — это собственные векторы матрицы A с нулевым собственным значением.

Чтобы пояснить происхождение названия «вихревой вектор», обсудим простой пример. Пусть $a = (u, v, w)$ — гладкое векторное поле в трехмерном ориентированном евклидовом пространстве $E^3 = \{x, y, z\}$. Полю a поставим в соответствие 1-форму

$$\varphi = u dx + v dy + w dz$$

и рассмотрим ее внешний дифференциал

$$\begin{aligned} \phi = d\varphi = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx \wedge dy. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Пусть ξ, η — два вектора в точке (x, y, z). По определению внешнего произведения, значение формы $dx \wedge dy$ на векторах ξ, η равно ориентированной площади параллелограмма, построенного на проекциях этих векторов на плоскость переменных x, y, то есть равно проекции векторного произведения $\xi \times \eta$ на ось z. С учетом этого замечания формула (5.18) приобретает вид

$$\phi(\xi, \eta) = (\xi \times \eta, \operatorname{rot} a) = (\operatorname{rot} a \times \xi, \eta).$$

Найдется линейный кососимметрический оператор A, такой, что $(\operatorname{rot} a) \times \xi = A\xi$. Таким образом,

$$\phi(\xi, \eta) = (A\xi, \eta). \tag{5.19}$$

Матрица этого оператора (в декартовых координатах x, y, z) имеет вид (ср. с (5.17))

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial w}{\partial z} - \dfrac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу формулы (5.19), вектор $\operatorname{rot} a$ (вихрь поля a) является вихревым вектором для 2-формы ϕ. Эти замечания служат мотивировкой для выбранной нами терминологии в многомерном случае.

Форма ϕ называется *неособой*, если для всех $z \in \widetilde{P}$ вихревой вектор $\xi(z)$ единственный с точностью до постоянного (ненулевого) множителя. Так, например, условием неособости 2-формы (5.17) является неравенство $\operatorname{rot} a \neq 0$. Поскольку ранг матрицы (5.17) равен $2n$, то форма (5.16) неособая.

Пусть $\xi(z)$ — ненулевое гладкое векторное поле в $\widetilde{P}$, составленное из вихревых векторов формы ϕ. Интегральные кривые этого поля (они не зависят, разумеется, от длины векторов ξ) назовем *вихревыми линиями*. Из вида матрицы (5.17) следует, что если $\xi = (x_\xi, y_\xi, t_\xi)$ —

вихревой вектор, то $t_\xi \neq 0$. Вихревые линии можно найти, интегрируя систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{ds} = \xi(z), \qquad z \in \widetilde{P}.$$

Пусть $x = x(s), y = y(s)$ и $t = t(s)$ — решение этой системы. Поскольку $dt/ds \neq 0$, то вихревые линии можно параметризовать временем t:

$$x = x(t), \qquad y = y(t). \tag{5.20}$$

Теорема 8. *Функции (5.20) удовлетворяют каноническим уравнениям Гамильтона с гамильтонианом H.*

Доказательство.

Действительно, вектор с компонентами

$$\frac{\partial H}{\partial y},\ -\frac{\partial H}{\partial x},\ 1$$

является вихревым. ■

Подчеркнем, что в качестве параметра на вихревых линиях совсем не обязательно выбирать время: если

$$|\partial H/\partial x| + |\partial H/\partial y| \neq 0,$$

то параметром может служить одна из координат $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$.

Теорема 8 устанавливает *вихревой принцип* гамильтоновой механики. Этот результат фактически содержится в книге Эли Картана «Интегральные инварианты». И. С. Аржаных распространил вихревой принцип на системы с непотенциальными силами, а также на неголономные системы [2].

§6. Действие в фазовом пространстве и инвариант Пуанкаре—Картана

1°. Пусть $\widetilde{P} = P \times \mathbb{R}_t$ — расширенное $(2n+1)$-мерное фазовое пространство, $H(x, y, t)$ — гамильтониан. Форму энергии-импульса (5.15)

$$\varphi = y \cdot dx - H dt$$

можно интегрировать по кривым $\gamma\colon [0,1] \to \widetilde{P}$:

$$I[\gamma] = \int_\gamma \varphi. \tag{6.1}$$

Этот интеграл будем называть *действием в расширенном фазовом пространстве* или просто *действием.*

Пусть z — набор переменных x, y, t. Если кривую γ представить аналитически с помощью гладких функций

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad t = t(s), \quad 0 \le s \le 1,$$

то

$$I[\gamma] = \int\limits_0^1 (y \cdot x' - Ht')\, ds, \tag{6.2}$$

где штрих обозначает производную по s. Пусть $t' > 0$ и $t(0) = t_1$, $t(1) = t_2$. Тогда в качестве параметра можно взять время t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Предположим, что координаты и импульсы связаны соотношениями

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}$$

или, что то же самое,

$$y = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}.$$

Тогда действие (6.2) вдоль такой специальной кривой совпадает с действием по Гамильтону

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} L\Big|_{x(t)}\, dt.$$

Вернемся к общему случаю и рассмотрим вариацию кривой γ — гладкое однопараметрическое семейство кривых γ_α, $-\varepsilon < \alpha < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, причем $\gamma_0 = \gamma$. Вариация задается гладкой функцией двух переменных

$$z = z(s, \alpha), \quad s \in [0,1], \quad \alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Производная

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$$

будет гладким векторным полем u, заданным вдоль исходной кривой γ. Оно называется ***полем вариаций*** (и часто обозначается δz). Подчеркнем, что мы рассматриваем вариации общего вида и не предполагаем, что в концевых точках $z_1 = z(0)$ и $z_2 = z(1)$ кривой γ поле u обращается в нуль. Вариация действия (6.1) — это, как обычно, производная от функции $I[\gamma_\alpha]$ при $\alpha = 0$.

Лемма 1 (о вариации действия).

$$\delta I = \varphi(u)\Big|_{z_1}^{z_2} + \int_\gamma i_u \phi, \tag{6.3}$$

где $\phi = d\varphi$, $i_u\phi = \phi(u, \cdot)$ — внутреннее произведение поля u и 2-формы ϕ.
Доказательство.

Поле вариаций u, определенное на кривой γ, можно продолжить до гладкого поля в некоторой окрестности γ. Вариация действия — это производная вдоль поля u в точках кривой γ :

$$\delta I = \int_\gamma L_u \varphi. \tag{6.4}$$

Воспользуемся ***формулой гомотопии***:

$$L_u\varphi = di_u\varphi + i_u d\varphi.$$

Тогда (6.4) принимает следующий вид:

$$\delta I = i_u\varphi\Big|_{z_1}^{z_2} + \int_\gamma i_u \phi.$$

■

Формула (6.3) получена впервые Эли Картаном в его «Интегральных инвариантах». Подчеркнем ее универсальность: она не зависит от вида 1-формы φ.

Теорема 9. *Гладкая кривая γ в $\widetilde{P}$ с концами в точках z_1, z_2 является вихревой линией тогда и только тогда, когда для всех полей вариаций u*

$$\delta I[\gamma] = \varphi(u)\Big|_{z_1}^{z_2}. \tag{6.5}$$

Доказательство.

Действительно, пусть γ — вихревая линия. Тогда касательные к ней векторы обнуляют 2-форму ϕ и, в частности, на касательных векторах $i_u\phi = 0$. Следовательно, согласно (6.3),

$$\int_\gamma i_u\phi = 0, \tag{6.6}$$

что доказывает (6.5). Обратно, если вдоль некоторой кривой γ для всех векторных полей u справедливо (6.6), то $i_u\phi = 0$ на касательных векторах к γ. Поскольку векторы u произвольны, то γ — вихревая линия. Что и требовалось. ■

Из теоремы 9 вытекает важное

Следствие 1. *Вихревые линии в расширенном фазовом пространстве совпадают с экстремалями действия в классе кривых с закрепленными концами.*

Это утверждение составляет *принцип стационарности действия в фазовом пространстве,* предложенный Гельмгольцем и Пуанкаре. Укажем любопытную связь этого принципа с принципом Гамильтона. На кривых в $\widetilde{P}$, параметризованных временем $t \in [t_1, t_2]$, действие I представляется интегралом

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,dt, \qquad \mathcal{L} = y\cdot\dot{x} - H(x, y, t).$$

«Лагранжиан» $\mathcal{L}$ вырожден: он вообще не зависит от скорости $\dot{y}$. Принцип Гельмгольца—Пуанкаре можно записать в виде «принципа Гамильтона»:

$$\delta\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,dt = 0.$$

Уравнения Эйлера—Лагранжа

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right)^{\cdot} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\right)^{\cdot} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}$$

эквивалентны каноническим уравнениям Гамильтона

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}.$$

2°. В качестве простого следствия принципа стационарности действия в фазовом пространстве укажем *метод Уиттекера* понижения порядка автономных гамильтоновых систем.

Пусть $H\colon P \to \mathbb{R}$ — функция Гамильтона, не зависящая явно от времени. Тогда H будет интегралом канонических уравнений

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}; \quad 1 \le k \le n. \tag{6.7}$$

Предположим, что в некоторой точке энергетической поверхности

$$\Sigma_h^{2n-1} = \{(x, y) \in P : H(x, y) = h\}$$

одна из частных производных гамильтониана H отлична от нуля; пусть, например, $\partial H/\partial y_n \neq 0$. Тогда уравнение

$$H(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = h$$

можно разрешить (хотя бы локально) относительно y_n:

$$y_n + K(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, h) = 0.$$

Так как $\dot{x}_n = \partial H/\partial y_n \neq 0$, то при фиксированном значении h фазовые кривые $x = x(t)$, $y = y(t)$, можно параметризовать переменной x_n, которую будем обозначать τ:

$$x_i = x_i(\tau), \quad y_i = y_i(\tau); \quad 1 \le i \le n-1.$$

Теорема 10 (Э.Уиттекер, [57]). *Функции $x(\tau)$, $y(\tau)$ удовлетворяют каноническим уравнениям*

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial x_i}; \quad i \le n-1. \tag{6.8}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Уиттекера.* В общем случае система (6.8) будет уже неавтономной. Если координата x_n *циклическая* (она не входит явно в выражение для гамильтониана), то канонические уравнения Уиттекера автономны и их число степеней свободы снова можно понизить на единицу. Уравнения (6.8) несложно получить прямыми вычислениями, однако мы применим принцип стационарности действия.

Доказательство теоремы Уиттекера.

Пусть

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

— решение канонической системы (6.7). Эта кривая (обозначим ее γ) по предположению лежит на Σ. Следовательно, для вариаций γ в классе кривых с закрепленными концами, лежащих на Σ, будем иметь

$$\delta I[\gamma] = \delta \int_\gamma (y \cdot \dot{x} - H) dt = \delta \int_\gamma y \cdot dx = 0.$$

Поскольку в локальных координатах $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}$ на Σ^{2n-1}

$$\int_\gamma y \cdot dx = \int_\gamma y_1 dx_1 + \cdots + y_{n-1} dx_{n-1} - K dx_n,$$

то остается воспользоваться следствием теоремы 9. ■

Теорема Уиттекера подсказывает способ автономизации уравнений Гамильтона с зависящим от времени гамильтонианом $H(x, y, t)$. С этой целью увеличим размерность фазового пространтва P на две единицы, добавляя две канонически сопряженные переменные $x_{n+1} = t$, y_{n+1} и вводя новый гамильтониан

$$\mathcal{H} = y_{n+1} + H(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, x_{n+1}).$$

Дифференциальные уравнения Гамильтона

$$\dot{x}_s = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_s}, \qquad \dot{y}_s = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_s}; \quad s \leq n$$

совпадают с исходными каноническими уравнениями (6.7). Первое из дополнительных уравнений

$$\dot{x}_{n+1} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_{n+1}} = 1$$

является тривиальным тождеством, а второе

$$\dot{y}_{n+1} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$$

представляет *теорему об изменении энергии* для исходных уравнений (6.7). Полагая $\Sigma^{2n+1} = \{x, y\colon \mathcal{H} = 0\}$ и применяя метод Уиттекера понижения порядка, приходим к обычным каноническим уравнениям с гамильтонианом H.

Замечание. Дуальность времени t и взятой с обратным знаком энергии H можно заметить из явного выражения для 1-формы Картана

$$\varphi = y \cdot dx - H dt.$$

Однако среди $2n + 2$ переменных x, y, t, h, $(h = -H)$ не все являются независимыми: одна из них (переменная h) — известная функция остальных. На самом деле не существенно, относительно какой из $2n + 2$ переменных разрешать уравнение $\mathcal{H} = 0$. Например, в неавтономном случае это уравнение можно разрешить относительно t и тогда роль «времени» будет играть переменная h.

3°. Из теоремы 9 можно вывести *интегральный инвариант Пуанкаре—Картана*, играющий важную роль в теории гамильтоновых систем. Пусть γ_0 — замкнутый путь в расширенном фазовом пространстве $\widetilde{P}$; его можно задать периодической функцией

$$z = z_0(\alpha), \quad \alpha \bmod 2\pi.$$

Согласно §5, через каждую точку γ_0 проходит единственная вихревая линия

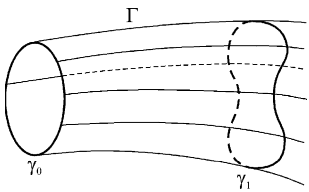

Рис. 16. Вихревая трубка

$$z = z(s, \alpha), \quad s \in \mathbb{R}, \quad z(0, \alpha) = z_0(\alpha). \tag{6.9}$$

Совокупность таких вихревых линий образует цилиндрическую поверхность Γ — ***вихревую трубку***. Переменная s является параметром на вихревых линиях; ее можно выбирать разными способами. Рассмотрим на Γ замкнутую кривую γ_1, которая получается из (6.9), если зафиксировать значение s. Положим, для определенности, $s = 1$. Кривые γ_0 и γ_1, очевидно, гомотопны на Γ (γ_0 непрерывно переходит в γ_1 при изменении параметра s от 0 до 1).

Теорема 11 (Картан, [28]).

$$\int_{\gamma_0} \varphi = \int_{\gamma_1} \varphi. \tag{6.10}$$

Доказательство этой формулы основано на применении теоремы 9. Рассмотрим зависящее от параметра $\alpha \bmod 2\pi$ семейство вихревых линий γ_α

$$z = z(s, \alpha), \qquad 1 \leq s \leq 1$$

и воспользуемся формулой (6.5):

$$\frac{d}{d\alpha} I[\gamma_\alpha] = \varphi\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)\bigg|_{s=1} - \varphi\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)\bigg|_{s=0}.$$

Интегрируя это равенство по α от 0 до 2π, получаем

$$\int\limits_0^1 \varphi\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)\bigg|_{s=1} d\alpha = \int\limits_0^1 \varphi\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)\bigg|_{s=0} d\alpha.$$

Но это и есть искомое соотношение (6.10). ■

Замечание. Теорему Картана можно было бы доказать с помощью формулы Стокса, примененной к вихревой трубке Γ, ограниченной гомологичными циклами γ_0 и γ_1 (как при доказательстве теоремы Малюса из §3).

Интеграл

$$\int_\gamma y \cdot dx - H\,dt, \tag{6.11}$$

вычисленный вдоль замкнутых кривых на расширенном фазовом пространстве, называется *интегральным инвариантом Пуанкаре—Картана.* Формулу (6.10) Картан назвал обобщенным принципом сохранения энергии-импульса [28]. Он же показал, что канонические уравнения Гамильтона с гамильтонианом H являются *единственными* дифференциальными уравнениями, допускающими интегральный инвариант (6.11) (см. [28], п.11).

Из теоремы 11 вытекает важное

Следствие 2 (теорема Пуанкаре, [51]). *Пусть* γ_0 *и* γ_1 *— сечения вихревой трубки* Γ *гиперплоскостями* $t = \mathrm{const}$. *Тогда*

$$\int_{\gamma_0} y \cdot dx = \int_{\gamma_1} y \cdot dx.$$

Этому результату можно дать следующую интерпретацию. Пусть γ — замкнутый контур в фазовом пространстве P и пусть $g^t(\gamma)$ — его образ при сдвиге вдоль траекторий гамильтоновой системы за время t. Тогда

$$\int_{g^t(\gamma)} y \cdot dx = \mathrm{const}. \tag{6.12}$$

Именно так формулировал свою теорему Пуанкаре. Эта теорема аналогична теореме Томсона из гидродинамики. Интеграл (6.12) называется *универсальным интегральным инвариантом Пуанкаре.* Слово «универсальный» означает, что интеграл (6.12) является инвариантом для *всех* гамильтоновых систем, заданных на одном и том же фазовом пространстве. Согласно теореме Ли Хуа-Чжуна [69], любой универсальный инвариант первого порядка отличается от инварианта Пуанкаре лишь постоянным множителем. Более того, как установлено в работе [38], конкретные гамильтоновы системы со сложным поведением фазовых траекторий вообще не допускают других интегральных инвариантов. Примером могут служить уравнения задачи трех тел.

§7. Метод Гамильтона—Якоби и принцип Гюйгенса

1°. Кроме *задачи Коши* (когда по состоянию системы в заданный момент времени надо найти движение), в механике важное значение имеет *краевая задача*: найти движение $t \to x(t)$, которое в заданные моменты времени t_0 и t_1 принимает заданные значения x_0 и x_1. В отличие от задачи Коши, краевая задача разрешима не всегда. Наиболее эффективным методом доказательства ее разрешимости является вариационный метод: среди кривых с закрепленными концами ищется стационарное значение (обычно минимум) действия по Гамильтону. Например, в отсутствие внешних сил (тогда траектории будут геодезическими метрики на M, определяемой кинетической энергией) краевая задача имеет решение, если все движения нестеснены, т. е. определены на всей оси времени (теорема Хопфа—Ринова). Эти две задачи имеют еще одно существенное отличие: краевая задача может иметь несколько различных решений. Простейшим примером служат навесные и настильные траектории снарядов. Более сложный пример доставляет теорема Серра: любые две точки компактного риманова многообразия можно соединить бесконечным числом различных геодезических. Единственности решения краевой задачи препятствуют *сопряженные точки*, где пересекаются бесконечно близкие траектории, выходящие из одной точки.

Зафиксируем точку $(x_0, t_0) \in M \times \mathbb{R}_t$. Предположим, что найдется область U в расширенном конфигурационном пространстве $M \times \mathbb{R}_t$, такая, что для точек (x_0, t_0) и (x, t) краевая задача имеет единственное решение, гладко зависящее от x и t. Вдоль каждого такого решения можно вычислить импульс и тем самым «поднять» эти кривые в расширенное фазовое пространство. Они будут однозначно определяться значениями x и t. Вычисляя вдоль этих кривых действие в расширенном фазовом пространстве, получим гладкую функцию от x, t, которую обозначим S. По формуле вариации действия (теорема 9, §6),

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial t}dt = y dx - H(x, y, t)dt.$$

Следовательно,

$$y = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H = 0.$$

Таким образом, действие S удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) = 0. \tag{7.1}$$

Это уравнение было открыто Гамильтоном в 1824 году в геометрической оптике, а спустя десять лет оно было распространено им на механику систем с потенциальными силами. Уравнение (7.1) называется ***уравнением Гамильтона в частных производных*** или (еще чаще) ***уравнением Гамильтона—Якоби***, поскольку Якоби упростил его вывод и открыл важные свойства этого уравнения.

Если гамильтониан H не зависит явно от t, то решение уравнения (7.1) можно искать в виде

$$S = -ht + W(x),$$

где $h = \mathrm{const}$ (постоянная энергии), а функция W удовлетворяет уравнению

$$H\left(x, \frac{\partial W}{\partial x}\right) = h. \tag{7.2}$$

Например, в задаче о распространении света в изотропной среде

$$H(x, y) = |y|/n(x),$$

где n — показатель преломления, причем постоянная энергии равна 1. Следовательно, в этом случае уравнение (7.2) совпадает с уравнением эйконала (3.7)

$$\sum \left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2 = n^2(x).$$

2°.

Теорема 12. *Пусть* $S(x,t)$ *— решение уравнения Гамильтона—Якоби (7.1). Тогда* n*-мерная поверхность*

$$\Sigma_t = \left\{ x, y \colon y = \frac{\partial S}{\partial x} \right\} \subset P$$

будет инвариантной поверхностью для канонических уравнений Гамильтона с гамильтонианом H.

Свойство *инвариантности* поверхности Σ_t (зависящей от времени как параметра) означает следующее. Пусть $x(t), y(t)$ — решение уравнений Гамильтона с начальными данными

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

Если точка x_0, y_0 лежит на Σ_{t_0}, то для всех значений t точка $x(t)$, $y(t)$ принадлежит Σ_t.

Это свойство можно выразить более кратко, вводя расширенное фазовое пространство $\widetilde{P} = P \times R_t$. В пространстве $\widetilde{P}$ соотношение $y = \partial S / \partial x$ задает фиксированную $(n+1)$-мерную поверхность $\widetilde{\Sigma}$. Ее инвариантность означает, что если вихревая линия пересекается с $\widetilde{\Sigma}$, то она целиком лежит на $\widetilde{\Sigma}$.

Теорема 12 отмечена Пуанкаре в п. 19 его «Новых методов небесной механики» (1892) [51]. Там же дано общее определение *инвариантных соотношений*, занимающих промежуточное положение между решениями и интегралами. Теорема Пуанкаре переоткрывалась разными авторами (см., например, трактат Т. Леви-Чивита и У. Амальди [43], гл. X). На самом деле теорема 12 фактически содержится в теории характеристик Монжа дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. В отличие от уравнения Гамильтона—Якоби, в теории Монжа рассматриваются уравнения, которые могут явно содержать неизвестную функцию. Поэтому в общем случае теорему 12 формулируют в несколько иной форме (см. по этому поводу [41]).

Доказательство теоремы 12.

Положим

$$f = y - \frac{\partial S}{\partial x}.$$

Нам надо показать, что $\dot{f} = 0$, когда $f = 0$. Действительно,

$$-\dot{f} = \frac{\partial H}{\partial x}\bigg| + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\frac{\partial H}{\partial y}\bigg| + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x}.$$

Вертикальная черта означает, что в выражения для производных вместо импульсов подставлен градиент функции S. Дифференцируя (7.1) по x, получаем, что $\dot{f} = 0$. Что и требовалось. ■

В симплектической геометрии поверхности Σ_t называются *лагранжевыми*. Их характеристическое свойство состоит в том, что значение инварианта Пуанкаре

$$\int_\gamma y \cdot dx$$

равно нулю для любого замкнутого контура γ, гомотопного нулю (который можно непрерывно стянуть в точку, не выходя с поверхности Σ). Мы будем их также называть *потенциальными*, имея в виду свойство потенциальности поля импульсов $y(x,t) = \partial S/\partial x$. Кстати сказать, потенциальные поля и потенциалы впервые введены именно Лагранжем. Забегая немного вперед, можно сказать, что наша цель — изучение свойств n-мерных инвариантных многообразий, которые задаются непотенциальными полями импульсов.

3°. Действие по Гамильтону S, являясь функцией от x и t, зависит еще от выбора точки x_0, т. е. от n произвольных параметров. Поскольку $dt = 0$ при $t = t_0$, то по формуле вариации действия

$$\frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial t}dt + \frac{\partial S}{\partial x_0}dx_0 = ydx - Hdt - y_0 dx_0.$$

Следовательно,

$$y = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad -y_0 = \frac{\partial S}{\partial x_0}. \tag{7.3}$$

Эти $2n$ соотношений задают решения канонических уравнений как функции от времени и начальных данных x_0, y_0.

Таким образом, полезно рассматривать n-параметрические семейства решений уравнения Гамильтона—Якоби: $S(x,t,c), c = (c_1, \dots, c_n)$. Такое семейство называется *полным интегралом* уравнения (7.1), если

$$\det\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial c} \right\| \neq 0. \tag{7.4}$$

По теореме о неявных функциях, все фазовое пространство P (или по крайней мере целая $2n$-мерная область в P) расслоено семейством инвариантных поверхностей

$$\Sigma(c) = \left\{ x, y : \; y = \frac{\partial S}{\partial x} \right\}.$$

Теорема 13. *Если известен полный интеграл $S(x,t,c)$ уравнения Гамильтона—Якоби, то общее решение канонических уравнений Гамильтона можно найти из соотношений*

$$y = \frac{\partial S}{\partial x}, \qquad -b = \frac{\partial S}{\partial c}, \tag{7.5}$$

где $b = (b_1, \dots, b_n)$ — произвольные постоянные.

Знак «–» во второй группе уравнений (7.4) поставлен из соображений удобства (ср. с (7.3)). Напомним, что *общее решение* системы $2n$ дифференциальных уравнений Гамильтона — это семейство решений, зависящее от $2n$ произвольных постоянных (их можно выразить через начальные координаты и импульсы). Первое из уравнений (7.5) представляет инвариантное соотношение (по теореме 1), а функции $\partial S/\partial c_1, \dots, \partial S/\partial c_n$ с учетом этого соотношения составляют набор независимых интегралов канонических уравнений Гамильтона. Так как выполнено неравенство (7.4), то по теореме о неявных функциях из второго соотношения (7.5) можно найти координаты x как функции от t и $2n$ произвольных постоянных b, c. Подставляя полученные выражения в первое соотношение (7.5), получим импульсы в виде функций от t, b, c.

Учитывая теорему 12, нам достаточно показать, что производные $\partial S/\partial c$ — интегралы уравнений Гамильтона на инвариантных многообразиях. Действительно,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial c}\right)^{\cdot} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial c} + \frac{\partial^2 S}{\partial c \partial x}\frac{\partial H}{\partial y}\bigg|_{y=\partial S/\partial x}.$$

Однако эта сумма равна нулю, что проверяется дифференцированием уравнения (7.1) по параметру c.

Теорема 13 установлена Якоби в 1837 г. «Следует заметить, что обратная теорема о том, что решение уравнения с частными производными типа Гамильтона приводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (дифференциальных уравнений характеристик), имеющей в рассматриваемом случае форму Гамильтона, высказана Пфаффом и Коши в развитие еще более ранних исследований Лагранжа и Монжа, еще до того как Гамильтон и Якоби начали заниматься вопросами динамики» (Э. Уиттекер [57]). Наиболее эффективный прямой метод решения уравнения Гамильтона—Якоби — это метод разделения переменных: полный интеграл есть сумма слагаемых, каждое из которых зависит только от одной из переменных $x_1, \ldots, x_n, t$.

4°. Лагранж заметил, что *огибающая* семейства решений уравнения в частных производных первого порядка сама является решением этого уравнения. Этот простой результат имеет важные приложения.

Рассмотрим уравнение

$$F(x_1, \ldots, x_m, z, y_1, \ldots, y_m) = 0, \tag{7.6}$$

где z — неизвестная функция от x, а $y_k = \partial z/\partial x_k$. Обычно предполагается, что

$$\sum \left(\frac{\partial F}{\partial y_k}\right)^2 \neq 0. \tag{7.7}$$

Уравнение Гамильтона—Якоби, конечно, имеет вид (7.6). Роль независимых переменных x играют обобщенные координаты и время. Специфика уравнения Гамильтона—Якоби заключается в том, что оно не содержит явно искомой функции z.

Решение $z = z(x)$ уравнения (7.6) определяет в $(m+1)$-мерном пространстве переменных $\{x_1, \dots, x_m, z\} = \mathbb{R}^{m+1}$ гиперповерхность, которая называется *интегральной поверхностью.* В стандартной евклидовой метрике $\mathbb{R}^{m+1}$ вектор $y = \{y_1, \dots, y_m, 1\} \neq 0$ ортогонален этой поверхности. Гиперплоскость в $\mathbb{R}^{m+1}$, проходящую через точку (x, z) ортогонально вектору y, компоненты которого удовлетворяют соотношению (7.6), назовем *допустимой.* Согласно условию (7.7), допустимые плоскости, проходящие через одну и ту же точку $\mathbb{R}^{m+1}$, образуют гладкое $(m-1)$-параметрическое семейство. Таким образом, решение уравнения (7.6) можно трактовать как нахождение гиперповерхностей $z = z(x)$, все касательные плоскости которых являются допустимыми.

Рассмотрим теперь семейство решений $z = z(x, c)$ уравнения (7.6), зависящее от параметров $c = (c_1, \dots, c_r)$, и пусть $Z(x)$ — ее огибающая. Это означает, что для каждой точки $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$, удовлетворяющей уравнению $z_0 = Z(x_0)$, найдется такое значение c_0, что интегральная поверхность $z = z(x, c_0)$ содержит точку (x_0, z_0) и касательная к ней плоскость в этой точке совпадает с касательной плоскостью к поверхности $z = Z(x)$. Поскольку касательная плоскость будет допустимой, то функция $x \to Z(x)$ — решение уравнения (7.6). В этом и состоит теорема Лагранжа, установленная им в 1772 г. в мемуаре, представленном Берлинской академии наук.

В случае, когда уравнение (7.6) не содержит z (именно к такому типу относится уравнение Гамильтона—Якоби) теорему Лагранжа можно слегка видоизменить. Пусть $z(x, c)$ — семейство регулярных решений (7.6), т. е.

$$\sum \left(\frac{\partial z}{\partial x_k} \right)^2 \neq 0.$$

Приравнивая эти функции некоторым константам, получим семейство регулярных гиперповерхностей в $\mathbb{R}^m = \{x\}$:

$$\sigma(c) = \{x \colon z(x, c) = \text{const}\}.$$

Теорема 14. *Огибающая семейства $(m-1)$-мерных поверхностей $\sigma(c)$ (если она существует) является поверхностью уровня некоторого решения уравнения (7.6).*

Надо иметь в виду, что не всякое семейство многомерных поверхностей (многообразий) имеет огибающую. Из курса дифференциальной геометрии хорошо известно, что типичное однопараметрическое семейство кривых на плоскости, а также одно- и двухпараметрические семейства поверхностей в пространстве, имеют огибающие. Однако в общем случае семейство кривых в пространстве, зависящее от одного параметра, уже не имеет огибающей. Рене Том [80] нашел условия, при которых типичное семейство p-мерных многообразий в объемлющем q-мерном пространстве, зависящее от r параметров, имеет огибающее многообразие. Для этого должны выполняться неравенства

$$q - 2p + 1 \leq r \leq q - 1. \tag{7.8}$$

Например, эти условия выполняются, если $p = 1$, $q = 3$, $r = 2$. Таким образом, задача об отыскании огибающей двухпараметрического семейства кривых в пространстве является вполне корректной.

Если $z(x, c)$ — полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби, то число параметров $r = m - 1$. Поскольку $p = m - 1$, $q = m \geq 2$, то условия (7.8) заведомо выполнены. Следовательно, типичные гладкие семейства гиперповерхностей $\sigma(c)$ обязательно имеют огибающие.

5°. Фактическое содержание теоремы 14 было известно Гюйгенсу и изложено им применительно к оптике в его трактате «Теория света» (1690). В этом сочинении Гюйгенса содержатся первые строгие формулировки волновой теории света, предложенной Гуком. Гук и Ньютон, который читал в начале своей научной карьеры лекции по оптике студентам Кембриджа и отстаивал корпускулярную теорию света, вели ожесточенный спор о причине появления цветных колец в тонких пленках (теперь их называют кольцами Ньютона, хотя их открыли Гук и Бойль). В результате Ньютон принял решение вообще ничего не публиковать по оптике, пока жив Гук. Лишь в 1704 г., спустя два года после смерти Гука, Ньютон опубликовал книгу «Optics or a Treatise on the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light», в которой подытожил свои результаты по теории света. Чтобы связать волновые свойства света с корпускулярной теорией, Ньютон предположил, что частицы света периодически через очень малые промежутки времени испытывают приступы (*fits*), при которых меняются их свойства отражения и преломления.

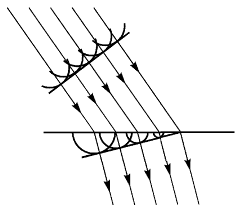

Рис. 17. Преломление света по Гюйгенсу

Картезианец Гюйгенс отрицал действие на расстоянии. Распространение света у Гюйгенса осуществляется с помощью непосредственного механического взаимодействия, приводящего к распространению возбуждения оптической среды — светового эфира, проникающего сквозь все тела. Возбуждение — это переход от покоя к колебательному движению. Каждая частица эфира, становясь возбужденной, заставляет колебаться соседние частицы. Таким образом, свет по Гюйгенсу — это не поток движущихся частиц, а распространение упругих колебаний оптической среды. Согласно *принципу Гюйгенса,* каждую точку эфира, до которой дошло световое возбуждение, надо рассматривать как центр новой сферической волны. Вторичные волны взаимодействуют таким образом, что их огибающая поверхность определяет результирующий волновой фронт. Отсюда сразу же выводятся известные законы отражения и преломления (рис. 17). Вывод основных соотношений геометрической оптики из принципа Гюйгенса (канонические уравнения Гамильтона, уравнение Гамильтона—Якоби), а также обсуждение двойственности между картинами распространения световых лучей и световых волн, можно найти в книге [19] (дополнение I).

Чтобы понять связь принципа Гюйгенса с теоремой 14, обратимся к уравнению эйконала (3.7). Пусть $W(x)$ — одно из его решений. Световые лучи ортогональны поверхностям уровня

$$\sigma(t) = \{x \in \mathbb{R}^3 : W(x) = t\}$$

и время движения частиц света от поверхности $\sigma(t_1)$ до поверхности $\sigma(t_2)$ равно $t_2 - t_1$ (см. §3). Предположим, что световое возбуждение при $t = 0$ локализовано на некоторой поверхности $\sigma_0 = \sigma(0)$. Тогда $\sigma(t)$ представляет поверхность, до которой возбуждение дойдет через время t. Таким образом, $\sigma(t)$ будет фронтом световой волны по Гюйгенсу. Пусть $c = (c_1, c_2)$ — координаты на поверхности $\sigma(t)$. Рассмотрим теперь задачу о распространении света из точек $c \in \sigma(t)$. Пусть $\sigma_c(\tau)$ —

вторичные «сферические» волновые фронты — поверхности, до которых возбуждение дойдет через время τ. Эти поверхности будут поверхностями уровня соответствующих решений уравнения (3.7). Согласно теореме 14, огибающая семейства поверхностей $\sigma_c(\tau)$ будет поверхностью уровня некоторого решения (3.7). Поскольку время движения частиц света от начальной поверхности σ_0 до огибающей равно $t+\tau$, то эта огибающая, очевидно, совпадет с $\sigma(t+\tau)$.

6°. Формально из принципа Гюйгенса вытекает, что вторичные фронты должны иметь огибающую не только впереди фронта световой волны, но и позади него. Френель дополнил принцип Гюйгенса важным предположением (связанным с идеей суперпозиции волн), что вторичные волны позади светового фронта гасят друг друга. Он применил эти идеи к качественным расчетам явлений дифракции и интерференции.

После Френеля развитие оптики пошло по пути изучения упругих колебаний оптической среды — эфира. Так, например, Мак-Куллах в 1839 г. получил для таких колебаний уравнения, совпадающие по форме со знаменитыми уравнениями Максвелла. Однако, эти исследования носили феноменологический характер и не имели под собой надежной физической базы.

Между тем, по мере развития теории электромагнитных явлений, постепенно стало ясно, что свет представляет собой электромагнитную волну. Покажем, как из уравнений Максвелла можно получить основные соотношения геометрической оптики. Для простоты ограничимся рассмотрением случая изотропной, непроводящей и немагнитной среды. При этих предположениях уравнения Максвелла имеют следующий вид:

$$\operatorname{rot} H - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{rot} E + \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \tag{7.9}$$

$$\operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{div} H = 0. \tag{7.10}$$

Здесь E, H — напряженность электрического и магнитного полей, c — скорость света, ε — диэлектрическая проницаемость (она зависит от точки $x \in \mathbb{R}^3$). Из (7.9) можно исключить магнитное поле и получить одно уравнение второго порядка для электрического поля. Для этого применим к первому уравнению оператор $\partial/\partial t$, а ко второму уравнению оператор rot:

$$\operatorname{rot}\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0,\quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}E+\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial H}{\partial t}=0,$$

Исключая $\operatorname{rot}(\partial H/\partial t)$, приходим к уравнению

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+\operatorname{rot}\operatorname{rot}E=0. \tag{7.11}$$

Используя первое уравнение (7.10), нетрудно получить, что $\operatorname{rot}\operatorname{rot}E = -\Delta E$, где Δ — оператор Лапласа, примененный к каждой компоненте поля E. После этого (7.11) принимает вид волнового уравнения

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\Delta E. \tag{7.12}$$

Рассмотрим простые гармонические колебания, в которых компоненты поля E имеют вид

$$f(x)e^{i\omega t},\qquad x=(x_1,x_2,x_3),$$

$\omega = \mathrm{const}$ — частота колебаний. Тогда из (7.12) получаем уравнение для амплитуды f :

$$\Delta f+k^2n^2f=0, \tag{7.13}$$

где $n=\sqrt{\varepsilon}$, $k=\omega/c$. Величина $1/(2\pi k)$ — длина волны; следовательно, в случае коротких волн, k принимает большие значения. Наша задача — найти решения этого уравнения в предельном случае больших k.

Воспользуемся *методом стационарной фазы,* предложенным Кельвиным и примененным в задачах оптики Пуанкаре и Дебаем (см. [45]). Идея метода состоит в том, чтобы искать решение (7.13) в виде

$$u(x)\exp[ikS(x)]. \tag{7.14}$$

Амплитуда u медленно меняется, а фаза ikS очень быстро осциллирует. Метод квазиклассического приближения в квантовой механике также основан на этой идее: решения уравнения Шредингера ищут в виде (7.14), причем роль большого параметра k играет величина, обратная постоянной Планка.

Подставляя (7.14) в (7.13), получим следующее соотношение:

$$k^2 u \left[n^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right] + o(k) = 0.$$

Явное выражение для $o(k)$ (которое на самом деле линейно по k) нам не потребуется. Если разделить это уравнение на k^2 и затем k устремить к бесконечности, то получим известное уравнение эйконала

$$\sum \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^2 = n^2. \tag{7.15}$$

Таким образом, $n = \sqrt{\varepsilon}$ является показателем преломления оптической среды, $S(x) = \mathrm{const}$ представляет приближенное уравнение поверхностей равных фаз, а нормали к этим поверхностям совпадают с направлениями световых лучей.

Обоснование предельного перехода от уравнения (7.13) к уравнению (7.15) на самом деле представляет деликатную задачу, с которой можно познакомиться по книгам [21], [45].

§8. Гидродинамика гамильтоновых систем

1°. Теорема Пуанкаре (теорема 12 §7) дает критерий инвариантности потенциального n-мерного многообразия (n — число степеней свободы), однозначно проектирующегося на конфигурационное пространство: потенциал соответствующего поля импульсов удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби. Мы укажем сейчас условия инвариантности n-мерных потенциальных (вихревых) многообразий.

Пусть Σ_t^n — многообразие в фазовом пространстве $P = T^*M$, однозначно проектирующееся на конфигурационное пространство M. В канонических координатах x, y это многообразие задается уравнениями

$$y = u(x, t), \tag{8.1}$$

где u — некоторое ковекторное поле на M, зависящее, возможно, от времени.

Теорема 15. *Многообразие Σ_t является инвариантным для канонических уравнений Гамильтона с гамильтонианом $H(x, y, t)$ тогда и только тогда, когда поле (8.1) удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\operatorname{rot} u)v = -\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{8.2}$$

где $\operatorname{rot} u = \partial u/\partial x - (\partial u/\partial x)^T$ — кососимметрическая $n \times n$-матрица (ротор ковекторного поля u),

$$v(x, t) = \frac{\partial H}{\partial y}\bigg|_{y=u(x,t)} \tag{8.3}$$

— векторное поле на M, $h(x, t) = H(x, u(x, t), t)$ — функция на M, зависящая от времени как параметра.

Доказательство.

Пусть $f = y - u(x, t)$. Нам надо показать, что $\dot{f} = 0$, когда $f = 0$. Точка означает производную в силу канонических уравнений с функцией Гамильтона H. Таким образом, с одной стороны,

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_{y=u},$$

а с другой —

$$\dot{y} = \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y}\bigg|_{y=u}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}v = -\frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_{y=u}. \tag{8.4}$$

Из определения функции h вытекает тождество

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_{y=u} + \frac{\partial H}{\partial y}\bigg|_{y=u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_{y=u} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^T v.$$

С учетом этого равенства из (8.4) получаем (8.2). ■

Для «натурального» гамильтониана

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x,t)y_i y_j + V(x_1,\ldots,x_n,t)$$

уравнение (8.2) имеет следующий явный вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j,k} g_{jk}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)u_k = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j,k} g_{jk}u_j u_k\right) - \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad (8.5)$$

$i = 1,\ldots,n$. Это — нелинейная система n дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно n неизвестных функций $u_1,\ldots,u_n$. Пусть, например, $n = 3$ и $g_{ij} = \delta_{ij}$. Тогда $u = v$ и уравнения (8.5) будут иметь вид хорошо известных уравнений Ламба из динамики идеальной жидкости (уравнение (1.4)). Поэтому и в общем случае уравнение (8.2) будем называть *уравнением Ламба*, а функцию h — *функцией Бернулли*. Движения системы, фазовые траектории которых лежат на Σ, находятся как решения системы дифференциальных уравнений на M:

$$\dot{x} = v(x,t), \qquad x \in M. \quad (8.6)$$

Теорема 15 содержит как частный случай теорему Пуанкаре из §7. Действительно, пусть потенциальное поле импульсов $u = \partial S/\partial x$ порождает инвариантное многообразие. Тогда $\operatorname{rot} u = 0$ и из (8.2) получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + h = g,$$

где g — некоторая функция t. После калибровочного преобразования

$$S \to S - \int g(t)\,dt,$$

не меняющего поля импульсов, потенциал S удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) = 0. \tag{8.7}$$

Вывод уравнения (8.7) из уравнения (8.2) повторяет вывод интеграла Лагранжа—Коши из уравнений Ламба для потенциальных течений баротропной жидкости в потенциальном поле (см. §1).

Если $\operatorname{rot} u = 0$, то соответствующее инвариантное многообразие Σ мы назвали *потенциальным* или *лагранжевым*. Инвариантные многообразия, для которых $\operatorname{rot} u \neq 0$, будем называть *вихревыми*. Наша цель — изучение вихревых многообразий.

Уравнения (8.2) появились, по-видимому, впервые в вариационном исчислении как *условие согласованности полей экстремалей* (которые, как известно, описываются каноническими уравнениями). Правда, там обычно рассматриваются лишь *самосопряженные* (потенциальные) поля. Поле в вариационном исчислении обозначает n-параметрическое семейство непересекающихся экстремалей; оно порождает n-мерное инвариантное многообразие в $2n$-мерном фазовом пространстве (см. [12, 19]). Условие согласованности поля обычно записывают в виде уравнения (8.4), которое является аналогом *уравнения Эйлера* (1.2) из гидродинамики. Преобразование Ламба (переход от (8.4) к (8.2)) применялось в теории гамильтоновых систем в связи с анализом линейных по импульсам инвариантных соотношений (см. [43, 57]). И. С. Аржаных [3] обобщил уравнение Ламба на негамильтоновы системы (в частности, неголономные) и распространил метод Гамильтона—Якоби для их точного интегрирования. Однако до работы [33] уравнение (8.2) обычно не связывали с идеями гидродинамики.

2°. Обсудим вопрос о существовании решения уравнения Ламба. Пусть M — компактное многообразие без края и пусть $u_0(x)$ — гладкое ковекторное поле, заданное на всем M.

Теорема 16. *При достаточно малых значениях t существует гладкое решение $u(x,t)$ уравнения (8.2), такое, что $u(x,0) = u_0(x)$ при всех $x \in M$.*

Доказательство.

Рассмотрим семейство решений уравнений Гамильтона

$$x = x(t, x_0), \qquad y = y(t, x_0)$$

со следующими начальными условиями:

$$x(0, x_0) = x_0, \qquad y(0, x_0) = u_0(x_0).$$

По теореме о неявной функции отображение $M \to M$, задаваемое формулой $x = x(t, x_0)$, является диффеоморфизмом при малых значениях t. Искомое решениие $u(x,t)$ равно $y(t, x_0)$, где x_0 надо заменить через x и t, разрешив уравнение $x = x(t, x_0)$ относительно x_0.

■

В аналитическом случае (когда гамильтониан H является аналитической функцией на $P \times \mathbb{R}$) теорема 16 есть простое следствие известной *теоремы Коши—Ковалевской:* поскольку система дифференциальных уравнений (8.2) разрешена относительно производных $\partial u_1/\partial t, \ldots, \partial u_n/\partial t$, то ее решения однозначно определяются значениями функций $u_1, \ldots, u_n$ при $t = 0$ и существуют для достаточно малых величин $|t|$. Их можно найти в виде сходящихся рядов по степеням t.

При больших значениях t решение $u(x,t)$ оказывается, как правило, негладким и неоднозначным. Соответствующие примеры для потенциальных решений указаны в §3. В этом случае уравнение Ламба становится непригодным и для описания движения следует использовать исходные канонические уравнения на $P = T^*M$. Считается, что в гидродинамике идеальной жидкости возможно аналогичное явление: за конечное время решение уравнений Эйлера и уравнения непрерывности с гладким начальным данным теряет необходимую гладкость и однозначность. С физической точки зрения это означает, что классическая гидродинамическая модель перестает действовать.

Семейство решений уравнения Ламба $u(t, x, \alpha)$, зависящее от n параметров $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ назовем *полным интегралом* этого уравнения, если

$$\det\left\|\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right\| \neq 0. \tag{8.8}$$

Для потенциальных полей $u = \partial S/\partial x$ это условие переходит в известное условие (7.4):

$$\det\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha}\right\| \neq 0.$$

Пусть $x(t,\alpha,\beta)$ — «полное» решение дифференциального уравнения (8.6)

$$\dot{x} = v(x,t,\alpha) = \left.\frac{\partial H}{\partial y}\right|_{y=u(x,t,\alpha)}, \tag{8.9}$$

то есть

$$\det\left\|\frac{\partial x}{\partial \beta}\right\| \neq 0 \tag{8.10}$$

при $t = 0$ (следовательно, это условие справедливо и при малых $|t| \neq 0$). Утверждается, что

$$x = x(t,\alpha,\beta), \quad y = u(x(t,\alpha,\beta),t,\alpha)$$

— полное решение канонических уравнений Гамильтона:

$$\det\left\|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}\right\| \neq 0.$$

Действительно, при малых значениях t решение уравнения (8.9) имеет вид

$$x = x_0 + tv(x_0,0,\alpha) + o(t),$$

где начальное положение x_0 невырожденным образом зависит от n параметров β:

$$\det\left\|\frac{\partial x_0}{\partial \beta}\right\| \neq 0.$$

Тогда при $t = 0$

$$\left\| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & \partial u/\partial\alpha \\ \partial x_0/\partial\beta & \partial y/\partial\beta \end{pmatrix}.$$

Согласно условиям (8.8) и (8.10), эта матрица невырождена.

Пусть известен полный интеграл уравнения Ламба $u(x,t,\alpha)$. Каждому значениию α отвечает n-мерное инвариантное многообразие уравнений Гамильтона

$$\Sigma(\alpha) = \{x, y\colon y = u(x,t,\alpha)\},$$

зависящее от времени. Из (8.8), по теореме о неявной функции, вытекает, что $2n$-мерное фазовое пространство целиком расслоено на n-мерные многообразия $\Sigma(\alpha)$. Таким образом, в этом случае решение уравнений Гамильтона сводится к решению дифференциальных уравнений (8.8), определенных на n-мерном конфигурационном многообразии M. По теореме Якоби (§7), для потенциальных полей уравнения (8.9) интегрируются с помощью квадратур. В общем случае без дополнительных предположений этого утверждать нельзя (см. гл. IV).

3°. Из теоремы 15 можно вывести ряд полезных следствий. Рассмотрим, например, распространение света в неоднородной изотропной среде. Световые лучи описываются каноническими уравнениями с гамильтонианом $H = |y|/n(x)$, где n — показатель преломления. Кроме того, на действительных траекториях $H = 1$. Рассмотрим систему лучей в $E^3 = \{x\}$; она порождает векторное поле скоростей световых частиц $v(x)$. Этой системе лучей отвечает трехмерное инвариантное многообразие Σ^3 в шестимерном фазовом пространстве $E^3 \times \mathbb{R}^3 = \{x, y\}$. Соответствующее поле импульсов $u(x)$ находится из уравнений

$$\dot{x} = v = \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{y}{|y|n}, \quad H = 1.$$

Откуда $u = vn^2$. Поскольку поле u стационарно и $H \equiv 1$, то уравнение Ламба (8.2) принимает вид

$$(\operatorname{rot} u)v = 0.$$

В трехмерном эвклидовом пространстве это соотношение эквивалентно следующему:

$$v \times \operatorname{rot}(n^2 v) = 0. \tag{8.11}$$

Для однородной оптической среды $n = \text{const}$ и из (8.11) получаем предложение 1 из §3.

4°. Уравнения Ламба полезны при решении краевых задач. В §7 обсуждалась простейшая из них: найти движение $t \to x(t)$, $t_1 \le t \le t_2$ со следующими краевыми условиями

$$x(t_1) = a, \qquad x(t_2) = b, \tag{8.12}$$

где a, b — фиксированные точки конфигурационного пространства M. Мы видели, что эта задача тесно связана с уравнением Гамильтона—Якоби.

Рассмотрим более общую краевую задачу. В $2n$-мерном фазовом пространстве P заданы два n-мерных многообразия Σ_1 и Σ_2. Требуется найти решение уравнений Гамильтона $x{=}x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, такое, что при $t = t_1$ и $t = t_2$ точка с координатами x, y лежит соответственно на Σ_1 и Σ_2. Рассмотрим случай, когда многообразия Σ_1 и Σ_2 однозначно проектируются на M (для краевых условий (8.12) это предположение не выполняется). Тогда поверхности Σ_1 и Σ_2 можно задать уравнениями $y = u_1(x)$ и $y = u_2(x)$, а краевые условия принимают вид

$$y(t_1) = u_1(x(t_1)), \quad y(t_2) = u_2(x(t_2)). \tag{8.13}$$

Эти соотношения образуют алгебраическую систему $2n$ уравнений для отыскания $2n$ начальных данных.

Краевую задачу (8.13) проще всего решать *методом прогонки.* Для этого сначала ищем решение $u(x, t)$ уравнений Ламба с начальным условием

$$u(x, t_1) = u_1(x).$$

Процесс переноса граничных условий, заданных первоначально при $t = t_1$, в каждую точку отрезка $[t_1, t_2]$ называют *прямой прогонкой.* Положив, в частности, $t = t_2$, получим равенство

$$u(x, t_2) = u_2(x),$$

определяющее положение системы при $t = t_2$. Если это значение $x = x_2$ находится однозначно, то наша исходная краевая задача имеет единственное решение. Для его отыскания нужно проинтегрировать систему n дифференциальных уравнений (8.6) с начальным условием $x(t_2) = x_2$. Этот второй этап решения краевой задачи называется *обратной прогонкой.* Значения импульсов находятся по формуле $y = u(x, t)$.

Решение краевой задачи (8.13) методом прогонки имеет большое преимущество по сравнению с традиционным методом, когда сначала отыскивается общее решение уравнений Гамильтона, а затем значения произвольных постоянных подбираются таким образом, чтобы удовлетворить краевым условиям (8.13). Это преимущество особенно отчетливо проявляется при численных расчетах.

В качестве иллюстрации сказанного рассмотрим линейную систему

$$P\ddot{x} + Qx = 0, \qquad x \in R^n, \tag{8.14}$$

где P и Q — симметричные $n \times n$-матрицы, зависящие от времени, причем матрица P положительно определена при всех значениях t. Уравнение (8.14) часто называют *уравнением Штурма—Лиувилля.* Оно играет важную роль в теории второй вариации функционала действия и является вариационным уравнением Эйлера—Лагранжа для лагранжиана

$$L = \frac{1}{2}(P\dot{x}, \dot{x}) - \frac{1}{2}(Qx, x).$$

Уравнение (8.14) можно представить в гамильтоновом виде

$$y = P\dot{x}, \qquad \dot{y} + Qx = 0. \tag{8.15}$$

Для линейных систем краевые условия тоже обычно выбираются линейными:

$$y = A_1 x + b_1 \quad (t = t_1), \quad y = A_2 x + b_2 \quad (t = t_2). \tag{8.16}$$

Здесь A_1, A_2 — квадратичные матрицы (в общем случае несимметричные), b_1, b_2 — постоянные векторы. Если $b_1 = b_2 = 0$, то краевые условия (8.16) будут однородными. Они обычно называются условиями *типа Штурма.* В этом случае краевая задача, очевидно, имеет тривиальное решение $x \equiv 0$. Поэтому для условий типа Штурма обычно рассматривают задачу о существовании нетривиальных (ненулевых) решений.

Ищем инвариантное многообразие системы (8.15) в виде $y{=}Ax{+}b$, где A и b — пока неизвестные функции времени. Условие инвариантности имеет следующий вид (уравнение Ламба):

$$(\dot{A} + AP^{-1}A + Q)x + \dot{b} + AP^{-1}b = 0.$$

Оно эквивалентно двум системам обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{A} + AP^{-1}A + Q = 0, \qquad \dot{b} + AP^{-1}b = 0. \tag{8.17}$$

Первое из них — это матричное *уравнение Риккати.* Прямая прогонка сводится к решению уравнений (8.17) с начальными данными

$$A(t_1) = A_1, \qquad b(t_1) = b_1.$$

Положение системы при $t = t_2$ находится из линейного алгебраического уравнения

$$A(t_2)x + b(t_2) = A_2x + b_2.$$

Если матрица $A(t_2) - A_2$ невырождена, то решение $x = x_2$ находится однозначно. Обратная прогонка — это решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} = P^{-1}Ax + P^{-1}b$$

с начальным условием $x(t_2) = x_2$.

Инвариантное многообразие $y = Ax + b$ системы (8.15) является потенциальным только в том случае, когда матрица A симметрична. Легко показать, что если матрица A, удовлетворяющая уравнению Риккати, симметрична в какой-то момент времени, то $A^T = A$ для всех значений t. Этот простой результат является частным случаем общей теоремы Лагранжа о потенциальности решений уравнений Ламба (см. гл. II). Таким образом, если матрица A_1 несимметрична, то указанное инвариантное многообразие будет вихревым.

5°. Результаты пп. **1°** – **2°** позволяют по-новому взглянуть на вихревую теорию Декарта. Согласно Декарту, движение механических систем описывается дифференциальными уравнениями первого порядка, заданными на конфигурационном пространстве (как в случае точечных вихрей идеальной жидкости, о которых шла речь в §2):

$$\dot{x} = v(x, t), \qquad x \in M. \tag{8.18}$$

Однако в действительности движение системы определяется не только положением, но и скоростью в любой фиксированный момент времени. К тому же Декарт не указал принципов построения поля v для различных механических систем.

Одним из основных достижений Ньютона было осознание того факта, что динамика реальных систем описывается дифференциальными уравнениями *второго* порядка. Конечно, в этом вопросе Ньютон имел предшественников, в первую очередь Галилея, который ввел в механику понятие ускорения и получил простейшие уравнения второго порядка для описания свободного падения тел в пустоте. Для того чтобы свести уравнения движения к исследованию динамической системы (к уравнениям первого порядка), приходится удваивать размерность пространства положений и вводить вспомогательное фазовое пространство. Между тем, как правило, нас интересуют не сами фазовые траектории, а лишь их проекции на конфигурационное пространство.

Однако можно решать задачи динамики, не «выходя» из конфигурационного пространства. Для этого сначала надо найти решение уравнения Ламба (8.2) (которое представляет собой систему уравнений в частных производных на M), а затем решить уравнение (8.18), вычислив векторное поле v по решению уравнения Ламба согласно (8.3). Исходным пунктом такого построения, как и в обычном подходе, является гамильтониан механической системы. Как мы уже видели, использование уравнения Ламба в численных расчетах при решении краевых задач представляет серьезные преимущества по сравнению с традиционными методами, основанными на непосредственном интегрировании $2n$ дифференциальных уравнений Гамильтона. Уравнения Ламба особенно эффективны в тех случаях, когда требуется исследовать n-параметрические семейства решений гамильтоновых систем (как, например, системы лучей в оптике). Согласно теореме 16, уравнения Ламба (8.2) имеют как потенциальные, так и вихревые решения. Одно и то же движение можно по-разному включать в n-мерные семейства решений. Выделение класса потенциальных решений приводит нас к методу Гамильтона—Якоби. Применительно к задачам геометрической оптики этот метод развивал картезианец Гюйгенс.

С физической точки зрения уравнения (8.2)–(8.3) и (8.18) описывают движение *бесстолкновительной среды:* движущиеся по различным траекториям частицы не взаимодействуют друг с другом (в частности, среда настолько разрежена, что ее частицы проходят друг «сквозь» друга не сталкиваясь). Модель бесстолкновительной среды с потенциальным полем начальных скоростей используется в астрофизике для объяснения образования звездных скоплений (соответствующие ссылки можно найти в [9]).

6°. Имея в виду аналогию с гидродинамикой, можно задаться вопросом: допускает ли уравнение (8.18) (где поле v определяется соотношением (8.3)) интегральный инвариант вида

$$\int_{g^t(D)} \rho(x,t)\, d^n x = \mathrm{const}, \qquad \rho > 0. \tag{8.19}$$

В этом случае плотность ρ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \tag{8.20}$$

Инвариант (8.19) можно тогда трактовать как сохранение массы, а уравнение (8.20) как уравнение неразрывности.

Предложение 2. *Пусть $u(t,x,\alpha)$ — полный интеграл уравнения Ламба. Тогда уравнение (8.18) допускает интегральный инвариант (8.19) с плотностью*

$$\rho = \det\left\| \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right\|. \tag{8.21}$$

Доказательство.

Соотношения $y = u(t,x,\alpha)$ можно разрешить (хотя бы локально) относительно α:

$$\alpha_1 = f_1(x,y,t),\ \ldots,\ \alpha_n = f_n(x,y,t).$$

Ясно, что $f_1, \dots, f_n$ — интегралы уравнений Гамильтона. От канонических переменных x, y перейдем к координатам x, α. В новых переменных уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{\alpha} = 0, \qquad \dot{x} = v(x, t, \alpha). \tag{8.22}$$

По *теореме Лиувилля*, фазовый поток гамильтоновой системы сохраняет фазовый объем

$$\mathrm{mes}(D) = \int_D dx_1 \dots dx_n \, dy_1 \dots dy_n.$$

Представим этот интеграл в новых переменных:

$$\mathrm{mes}(D) = \int_D \left| \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right| d^n x d^n \alpha.$$

Следовательно, уравнения (8.22) имеют инвариант с плотностью $\rho = |\partial u / \partial \alpha|$. Поскольку $\alpha = \mathrm{const}$, то при фиксированных значениях α уравнение $\dot{x} = v(x, t, \alpha)$ допускает инвариант (8.19) с плотностью (8.21). ■

§9. Уравнения Ламба и проблема устойчивости

1°. Кроме решения краевых задач, уравнения Ламба полезны в задачах устойчивости и в проблеме точного интегрирования уравнений динамики. Откладывая рассмотрение проблемы интегрирования до гл. IV, мы сейчас кратко обсудим приложение уравнений Ламба к решению задач устойчивости положений равновесия механических систем.

Речь пойдет об условиях устойчивости линейных систем, точнее, о гироскопической стабилизации положений равновесия. Рассмотрим линейную систему с n степенями свободы

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + P x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{9.1}$$

Здесь Γ — кососимметрическая, а P ($\det P \neq 0$) — симметрическая матрицы. Можно себе представлять, что на частицу, движущуюся в $\mathbb{R}^n$, действуют *гироскопическая сила* — $\Gamma\dot{x}$ и потенциальная сила — Px. Гироскопические силы появляются при переходе во вращающуюся систему отсчета (сила Кориолиса), при понижении порядка систем с симметриями, а также при изучении движения заряженных частиц в магнитном поле (сила Лоренца). Они не влияют на сохранность полной механической энергии

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}, \dot{x}) + \frac{1}{2}(Px, x). \tag{9.2}$$

Так как $\det P \neq 0$ по предположению, то $x = 0$ — единственное равновесие системы (9.1). Поскольку уравнения (9.1) линейны, то устойчивость состояния равновесия $x = 0$, $\dot{x} = 0$ эквивалентна условию ограниченности всех решений (9.1). Из интеграла (9.2) сразу же вытекает простая, но очень важная, *теорема Лагранжа—Кельвина:* если потенциальная энергия $V(x) = (Px, x)/2$ имеет минимум в точке $x = 0$, то это равновесие остается устойчивым после добавления любых гироскопических сил. Менее тривиальной является следующая *теорема Кельвина:* если степень неустойчивости нечетна (*степень неустойчивости* — это индекс квадратичной формы V), то гироскопическая стабилизация вообще невозможна. Обзор результатов по проблеме гироскопической стабилизации можно найти в работах [16, 27].

2°. Уравнения (9.1) можно представить в виде уравнений Лагранжа с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}, \dot{x}) + \frac{1}{2}(\dot{x}, \Gamma x) - \frac{1}{2}(Px, x).$$

С помощью преобразования Лежандра можно перейти к уравнениям Гамильтона с квадратичным гамильтонианом и затем воспользоваться теорией инвариантных соотношений из §8. Однако здесь проще действовать непосредственно, не переходя к каноническому виду уравнений (9.1).

Будем искать n-мерные инвариантные многообразия Σ, задаваемые линейными соотношениями

$$\dot{x} = Ax, \tag{9.3}$$

где A — некоторая $(n \times n)$-матрица. Условие инвариантности Σ эквивалентно квадратному матричному уравнению

$$(A + \Gamma)A + P = 0, \tag{9.4}$$

которое заменяет уравнения Ламба. Полагая

$$A = D - \Gamma/2,$$

уравнениие (9.4) преобразуем к следующему виду:

$$D^2 + \frac{\Gamma D - D\Gamma}{2} + P - \frac{\Gamma^2}{4} = 0. \tag{9.5}$$

В канонических переменных

$$x, \quad y = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} + \Gamma x/2$$

инвариантная плоскость Σ имеет вид

$$y = Dx.$$

Следовательно, Σ будет потенциальным в том и только том случае, когда матрица $D = A + \Gamma/2$ симметрична. Уравнения (9.3) допускают квадратичный интеграл

$$h(x) = H\Big|_{\dot{x}=Ax} = \frac{1}{2}(A^T Ax, x) + \frac{1}{2}(Px, x). \tag{9.6}$$

Для потенциальных инвариантных плоскостей $h(x) \equiv 0$.

Если линейная система n-го порядка (9.3) имеет неограниченные решения, то, очевидно, равновесие $x = 0$ неустойчиво. Наоборот, пусть функция h имеет в точке $x = 0$ строгий экстремум (максимум или минимум). Тогда все решения системы (9.3) ограничены. Отсюда, конечно, еще не вытекает устойчивость равновесия $x = 0$ исходной системы (9.1).

Заметим, что квадратное уравнение (9.4) допускает еще одно решение: если A — решение, то матрица $A' = A^T - \Gamma$ также удовлетворяет (9.4) (аналог теоремы Виета). Поэтому наряду с Σ система (9.1) имеет еще одну n-мерную инвариантную плоскость Σ', задаваемую уравнением

$$\dot{x} = A'x = (A^T - \Gamma)x. \tag{9.7}$$

Пусть h' — ограничение полной энергии (9.3) на Σ'. Так как $\det P \neq 0$ по предположению, то из (9.4) вытекает невырожденность матриц A и A'.

Предложение 3. *Пусть* $\det(D - D') \neq 0$. *Тогда*

(1) *инвариантное многообразие Σ' является вихревым,*

(2) *фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n} = \{x, \dot{x}\}$ — прямая сумма n-мерных инвариантных плоскостей Σ и Σ',*

(3) *равновесие системы (9.1) устойчиво в том и только том случае, когда все решения линейных дифференциальных уравнений (9.3) и (9.7) ограничены.*

Доказательство.

Так как $A = D - \Gamma/2$, то $A' = D^T - \Gamma/2$. Поскольку $|D^T - D| \neq 0$, то инвариантная плоскость Σ' вихревая. Если n-мерные плоскости Σ и Σ' имеют общую точку $x, \dot{x}$, отличную от состояния равновесия, то $Ax = (A^T - \Gamma)x$ при некотором $x \neq 0$. Следовательно, матрица $A - A^T + \Gamma = D - D^T$ вырождена. Поэтому $\mathbb{R}^{2n} = \Sigma \oplus \Sigma'$. Каждая из линейных систем (9.3) и (9.7) имеет n линейно независимых решений. В силу (2) эти $2n$ решений образуют базис в $2n$-мерном пространстве всех решений (9.1). ■

Замечание. Кососимметричная матрица $D - D^T$ может быть невырожденной лишь при четных n.

Предложение 4 ([36]). *Пусть квадратичная форма h невырождена и ее индекс нечетный. Тогда равновесие $x = 0$ неустойчиво.*

Доказательство.

Положим $h(x) = (Bx, x)/2$, $B = A^T A + P$ и $\det B \neq 0$ (по предположению). Так как h — интеграл (9.3), то $\dot{h} = (x, BAx) = 0$. Следовательно, матрица $C = BA$ кососимметрическая и невырожденная.

Поэтому $|C| > 0$ и n четно. Пусть $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ — характеристический многочлен матрицы A. Поскольку n четно, то $f(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to \infty$. Согласно предположению, индекс h нечетный. Значит, $|B| < 0$. Следовательно, $f(0) = |A| = |B^{-1}||C| < 0$. По непрерывности многочлен f имеет вещественный положительный нуль и поэтому равновесие $x = 0$ неустойчиво. ■

Учитывая (9.5), нетрудно показать, что

$$B = (D^T - D)A. \tag{9.8}$$

Следовательно, квадратичная форма h невырождена при условии

$$\det(D^T - D) \neq 0. \tag{9.9}$$

Это же неравенство гарантирует невырожденность квадратичной формы h'.

Предложение 5. *Пусть выполнено условие (9.9). Тогда индекс квадратичной формы H равен сумме индексов квадратичных форм h и h'.*

Доказательство.

Так как $|D - D^T| \neq 0$, то (по предложению 3) $\mathbb{R}^{2n} = \Sigma \oplus \Sigma'$. Следовательно, любой вектор x, $\dot{x}$ из $\mathbb{R}^{2n}$ есть сумма векторов $v, \dot{v}$ и $v', \dot{v}'$, причем

$$\dot{v} = Av, \qquad \dot{v}' = A'v'.$$

Воспользуемся очевидным тождеством

$$\frac{1}{2}(x, x) + \frac{1}{2}(Px, x) = \frac{1}{2}(\dot{v}, v) + \frac{1}{2}(Pv, v) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\dot{v}', \dot{v}') + \frac{1}{2}(Pv', v') + (\dot{v}, \dot{v}') + (Pv, v').$$

Ввиду (9.4) билинейная форма

$$(\dot{v}, \dot{v}') + (Pv, v') = ((A + \Gamma)Av, v') + (Pv, v')$$

равна нулю. Следовательно, значение квадратичной формы H в точке $x, \dot{x}$ есть сумма $h(v)$ и $h'(v')$. В частности,

$$\operatorname{ind} H = \operatorname{ind} h + \operatorname{ind} h'.$$

■

Укажем одно важное

Следствие 3. *Пусть потенциальная энергия V имеет максимум, а функция h имеет строгий экстремум в точке $x = 0$. Тогда равновесие $x = 0$ системы (9.1) устойчиво.*

Действительно, поскольку квадратичная форма h имеет строгий экстремум, то она невырождена. Следовательно, согласно (9.8), $\det(D^T - D) \neq 0$. В рассматриваемом случае $\operatorname{ind} H = n$, а $\operatorname{ind} h$ равен либо 0, либо n. Значит, согласно предложению 3, $\operatorname{ind} h'$ равен либо n, либо 0. Таким образом, функция h' имеет в точке $x = 0$ строгий экстремум. Устойчивость равновесия $x = 0$ вытекает теперь из предложения 1.

Эти соображения позволяют в ряде случаев указать конструктивные условия гироскопической стабилизации. Проблема устойчивости сводится к умению решать квадратные матричные уравнения.

3°.

Теорема 17. *Предположим, что потенциальная энергия имеет в точке $x = 0$ строгий максимум, $\det \Gamma \neq 0$ и*

$$\|\Gamma^{-1}\| \cdot \|P^{1/2}\| < \frac{1}{2}. \tag{9.10}$$

Тогда равновесие $x = 0$ системы (9.1) устойчиво.

Здесь $\|\cdot\|$ — любая матричная норма. Эта теорема указана автору С.В.Болотиным. Она обобщает один более ранний результат А.В.Карапетяна.

Доказательство.

Поскольку форма V имеет строгий максимум в точке $x = 0$, то существует положительно определенная матрица $P^{1/2}$. Положим

$A = P^{1/2}X$. Тогда матрица X удовлетворяет уравнению

$$XP^{1/2}X + \Gamma X + P^{1/2} = 0$$

или

$$X = \Phi(X) = -\Gamma^{-1}(XP^{1/2}X + P^{1/2}).$$

Покажем, что Φ отображает единичный шар $\|X\| \le 1$ в себя. Действительно, согласно (9.10),

$$-\Phi(X)\| \le \|\Gamma^{-1}\| \cdot \|XP^{1/2}X + P^{1/2}\| \le$$
$$\le \|\Gamma^{-1}\| \cdot (\|P^{1/2}\| \cdot \|X\|^2 + \|P^{1/2}\|) \le 2\|\Gamma^{-1}\| \cdot \|P^{1/2}\| < 1.$$

Следовательно, по *теореме Боля—Брауэра*, отображение Φ имеет неподвижную точку внутри единичного шара $\|X\| \le 1$.

Полагая $x = P^{-1/2}z$, перепишем интеграл (9.6):

$$h = \frac{1}{2}(Xz, z) + \frac{1}{2}(z, z).$$

Поскольку $\|X\| < 1$, то квадратичная форма h положительно определена.

Таким образом, равновесие $x = 0$ системы (9.1) устойчиво согласно следствию из предложения 3. ■

4°. Оказывается, если выполнено условие (9.9), то линейные уравнения (9.3) можно привести к каноническому виду дифференциальных уравнений Гамильтона. Действительно, в этом случае уравнения (9.3) эквивалентны уравнениям Ламба

$$(D - D^T)\dot{x} = -\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{9.11}$$

где квадратичная форма $h = (Bx, x)/2$ задана формулой (9.6). Запишем уравнение (9.11) в явном виде:

$$\Omega\dot{x} = -Bx, \qquad \Omega = D - D^T. \tag{9.12}$$

Поскольку кососимметрическая матрица Ω невырождена, то (как известно из линейной алгебры) найдется матрица C ($\det C \neq 0$), такая, что $C^T\Omega C = I$, где

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{pmatrix}, \qquad m = n/2.$$

После линейной подстановки $x = Cz$ уравнение (9.12) приводится к виду

$$I\dot{z} = -B'z, \qquad B' = C^T BC.$$

Эта система имеет каноническую форму уравнений Гамильтона

$$\dot{z}_i = \frac{\partial h}{\partial z_{m+i}}, \quad \dot{z}_{m+i} = -\frac{\partial h}{\partial z_i}; \quad 1 \leq i \leq m.$$

Гамильтонианом служит функция h, представленная в новых переменных z. Переменные $z_1, \ldots, z_m$ играют роль канонических координат, а $z_{m+1}, \ldots, z_{2m}$ — канонических импульсов.

Распространение этого результата на нелинейные системы обсуждается в §1 главы II.

Глава II
Общая теория вихрей

§1. Уравнения Ламба и уравнения Гамильтона

1°. Цель настоящей главы — изучение многомерных уравнений Ламба самих по себе. Они связывают ковекторное поле $u(x,t)$, векторное поле $v(x,t)$ и функцию $h(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\operatorname{rot} u)v = -\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{1.1}$$

Тензорные объекты u, v, h заданы на некотором связном гладком многообразии $M^n = \{x\}$.

Векторному полю v отвечает система дифференциальных уравнений на M^n

$$\dot{x} = v(x,t), \tag{1.2}$$

фазовый поток g_v^t которой можно представлять себе как течение жидкости по M^n. Оказывается, это течение по своим свойствам вполне аналогично течению идеальной жидкости в трехмерном евклидовом пространстве.

Конечно, уравнения (1.1)–(1.2) можно изучать безотносительно их происхождения из гамильтоновой механики. Однако с методической точки зрения проще действовать по-другому. Мы покажем, что каждое уравнение (1.1) есть уравнение Ламба для n-мерной инвариантной поверхности некоторой гамильтоновой системы. Это обстоятельство дает возможность воспользоваться известными результатами об уравнениях Гамильтона из первой главы.

Предложение 1. *Пусть u, v, h связаны уравнением (1.1). Тогда в фазовом пространстве $P = T^*M$ найдется гамильтонова система с*

n—мерным инвариантным многообразием

$$\Sigma^n = \{x, y : y = u(x, t)\}, \tag{1.3}$$

такая, что уравнение Ламба для Σ совпадает с уравнением (1.1).

Доказательство.

Положим

$$H = \sum (y_i - u_i)v_i + h.$$

Так как y, u — ковекторы, а v — вектор, то эта формула корректно определяет функцию в T^*M, линейную по импульсам. Поскольку справедливо (1.1), $H|_{y=u} = h$ и

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = v(x, t),$$

то (1.3) будет инвариантным многообразием гамильтоновой системы с гамильтонианом H. ■

Следующий пример показывает, что по уравнению (1.1) гамильтониан H определяется неоднозначно. Положим

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - \varepsilon_1\varepsilon_2 \sin x_1 \cos x_3 -$$

$$- \varepsilon_2\varepsilon_3 \sin x_2 \cos x_1 - \varepsilon_3\varepsilon_1 \sin x_3 \cos x_2,$$

где $\varepsilon_i = \mathrm{const}$. Эта обратимая гамильтонова система, заданная в $P = \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$, допускает инвариантные соотношения

$$y_1 = \varepsilon_1 \sin x_3 + \varepsilon_3 \cos x_2, \quad y_2 = \varepsilon_2 \sin x_1 + \varepsilon_1 \cos x_3,$$

$$y_3 = \varepsilon_3 \sin x_2 + \varepsilon_2 \cos x_1.$$

Они задают течение несжимаемой жидкости по трехмерному тору $\mathbb{T}^3 = \{x_1, x_2, x_3, \bmod 2\pi\}$, причем скорость коллинеарна своему ротору (см. (1.18) из гл. I). Для почти всех значений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ имеются зоны квазислучайного движения частиц.

2°.

Теорема 1 (вариационный принцип). *Гладкая кривая $t \to x(t)$, $t_1 \le t \le t_2$ является решением системы*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\operatorname{rot} u)\dot{x} = -\frac{\partial h}{\partial x} \tag{1.4}$$

тогда и только тогда, когда эта кривая доставляет стационарное значение функционалу

$$P = \int\limits_{t_1}^{t_2} (u \cdot \dot{x} - h)\, dt \tag{1.5}$$

в классе кривых с закрепленными концами.

Это утверждение — следствие вариационного принципа Пуанкаре—Гельмгольца в фазовом пространстве (§6, гл.I): функционал P есть ограничение функционала действия

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} (y \cdot \dot{x} - H)\, dt$$

на кривые в пространстве положений M с помощью инвариантного соотношения $y = u(x, t)$. Можно поступить по-другому, заметив, что уравнения Лагранжа с лагранжианом $\mathcal{L} = \sum u_i \dot{x}_i - h$ совпадают с (1.4).

Биркгоф назвал интеграл вида (1.5) *действием Пфаффа,* а уравнения (1.4) — *уравнениями Пфаффа.* Он рассмотрел случай, когда кососимметричная матрица $\operatorname{rot} u$ невырождена (в частности, n четно). Тогда из (1.4) можно однозначно выразить $\dot{x}$ через x и t. В своих знаменитых «Динамических системах» [11] Биркгоф сформулировал программу изучения уравнений (1.4) (когда $\det(\operatorname{rot} u) \neq 0$). Результаты в этом направлении, полученные до 1983 г., подытожены в монографии Р. Сантилли [77]. Сам Биркгоф особое внимание уделил случаю, когда поле u не зависит явно от времени, не заметив, что тогда (1.4) является обычной гамильтоновой системой.

Действительно, по *теореме Дарбу,* найдется локальное преобразование $x \to z$, такое, что

$$J^T(\operatorname{rot} u)J$$

имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

где J — матрица Якоби $\partial x/\partial z$, E — единичная матрица размера $n/2$. В новых переменных $z_1, \dots, z_n$ уравнение (1.4)

$$J^T(\operatorname{rot} u)J\dot{z} = -J^T\frac{\partial h}{\partial x}$$

имеет каноническую форму

$$I\dot{z} = -\frac{\partial h}{\partial z}.$$

Сопряженными каноническими переменными являются координаты $z_i, z_{n/2+i}$ $(1 \le i \le n/2)$.

Для дальнейшего особый интерес представляют случаи вырождения матрицы ротора.

3°.

Теорема 2. *Система (1.2) допускает относительный интегральный инвариант*

$$\int_{g_v^t(\gamma)} u \cdot dx = \text{const}. \tag{1.6}$$

Здесь γ — любой замкнутый контур на M. Теорема 2 есть следствие теоремы Пуанкаре (из §6 гл. I): интеграл (1.6) — ограничение инварианта Пуанкаре на замкнутые кривые, целиком лежащие на инвариантной поверхности Σ^n. Этот простой, но важный результат распространяет *теорему Томсона* о сохранности циркуляции на многомерный случай.

Теорему 2 можно доказать и непосредственно. Для этого введем 1-форму

$$\omega = \sum u_i dx_i$$

и запишем уравнение Ламба (1.1) в эквивалентном виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + i_v d\omega = -dh. \tag{1.7}$$

Используя формулу гомотопии

$$L_v = i_v d + d i_v,$$

получаем

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + L_v \omega = dg, \tag{1.8}$$

где $g = i_v \omega - h$. Функция g имеет простой механический смысл: это лагранжиан, в котором скорость $\dot{x}$ заменена векторным полем v. Слева в (1.8) стоит $\dot{\omega}$ — полная производная по времени от 1-формы ω в силу системы (1.2).

Пусть γ — некоторый путь (1-цепь) на M. Положим

$$I(t) = \int_{g_v^t(\gamma)} \omega.$$

Нетрудно получить следующую формулу для изменения интеграла I:

$$\dot{I} = \int_{g_v^t(\gamma)} \frac{\partial \omega}{\partial t} + L_v \omega. \tag{1.9}$$

Если путь γ замкнутый (является циклом), то согласно (1.8) и формуле Ньютона—Лейбница, $\dot{I} = 0$. Надо сказать, что формула (1.9) справедлива для любой k-формы ω и любой k-цепи γ.

4°. Из теоремы 2 выводится важное следствие.

Теорема 3. *Если поле $u(x,t)$ потенциально при $t = 0$, то оно будет потенциальным для всех t.*

Это — аналог знаменитой *теоремы Лагранжа* из гидродинамики идеальной жидкости. Ее доказательство очень простое. Если локально $u = \partial\varphi/\partial x$ при $t = 0$, то интеграл (1.6) по достаточно малому замкнутому контуру γ равен нулю. Следовательно, он равен нулю при всех значениях t. Однако, как хорошо известно из анализа, тогда подынтегральное выражение является замкнутой 1-формой.

Легко понять, что если поле u имеет однозначный потенциал φ в целом на M при $t = 0$ (т. е. форма ω точна), то это свойство имеет место при всех t.

В потенциальном случае из уравнений Ламба (1.1) выводится *«интеграл Лагранжа—Коши»*. Действительно, если $u = \partial\varphi/\partial x$, то $\operatorname{rot} u = 0$ и уравнение (1.1) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + h\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + h(x, t) = g(t). \tag{1.10}$$

Это и есть интеграл Лагранжа—Коши. После замены

$$\varphi \to \varphi - \int g(t)\,dt,$$

не меняющей поля импульсов, функция g в правой части (1.10) становится равной нулю.

Если уравнения (1.1) получены как уравнения Ламба для потенциальной инвариантной поверхности уравнений Гамильтона, то (1.10) превращается в известное *уравнение в частных производных Гамильтона—Якоби.*

§2. Сведение к автономному случаю

1°. Общая теория интегральных инвариантов создана Пуанкаре и изложена им в III томе «Новых методов небесной механики». Ряд важных дополнений сделал Эли Картан. Они подытожены в его «Интегральных инвариантах» [28]. Основная идея книги Картана — автономизация дифференциальных уравнений, т. е. переход от пространства положений к пространству-времени, в котором координаты x и время t считаются совершенно равноправными переменными. Эта последовательная релятивистская точка зрения оказалась весьма плодотворной и мы применим ее к уравнениям Ламба.

Введем $(n+1)$-мерное пространство-время $\widetilde{M} = M^n \times \mathbb{R}_t$. Его точки (наборы переменных $x_1, \ldots, x_n, t$) будем обозначать буквой z. Для дальнейшего несущественно, что пространство-время имеет структуру прямого произведения.

Дифференциальные уравнения (1.2) заменяются следующим:

$$\dot{x} = v(x, t), \qquad \dot{t} = 1,$$

или, более кратко,

$$\dot{z} = \tilde{v}(z). \tag{2.1}$$

В координатах $z = \{x, t\}$ поле $\tilde{v}$, конечно, имеет компоненты $v, 1$. Для уравнения (2.1) на самом деле несущественно, что его решения параметризованы временем t. Ключевую роль здесь играют интегральные кривые поля $\tilde{v}$: они касаются во всех своих точках векторов из поля $\tilde{v}$. Если параметризовать интегральные кривые в $\widetilde{M}$ переменной t и затем спроектировать их на M, то получим решения исходного уравнения (2.1). С этой точки зрения важно не само поле $\tilde{v}$, а определяемое им поле направлений (векторы $\tilde{v}$ можно умножить на любую функцию от z, отличную от нуля). Следуя релятивистской механике, интегральные кривые поля $\tilde{v}$ можно называть *мировыми линиями.*

Уравнения Ламба (1.1) имеют следующее эквивалентное представление:

$$\begin{pmatrix} & & & \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ & \operatorname{rot} u & & \cdots \\ & & & \frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x_n} \\ -\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x_1}\right) & \cdots & -\left(\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x_n}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{2.2}$$

Первые n уравнений (по строкам) в точности совпадают с соответствующими уравнениями Ламба, а последнее уравнение

$$\sum \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x_i}\right) v_i = 0$$

есть простое следствие (1.1) (с учетом кососимметричности матрицы $\operatorname{rot} u$).

Кососимметричная матрица $(n+1)$-го порядка в левой части (2.2) есть матрица ротора 1-формы

$$\varphi = \omega - h dt, \qquad \omega = \sum u_i dx_i,$$

определенной на $\widetilde{M}$. Следовательно, уравнение (2.2) допускает следующую инвариантную запись:

$$i_{\tilde{v}} \phi = 0, \qquad \phi = d\varphi. \tag{2.3}$$

2°. В соответствии с терминологией, принятой в §5 гл. I, вектор $\tilde{v}$ — вихревой вектор для замкнутой 2-формы ϕ. Если φ — форма энергии-импульса в расширенном фазовом пространстве, то равенство (2.3) представляет вихревой принцип гамильтоновой механики (см. §5).

Пусть n четно и 2-форма ϕ является неособой. Тогда вектор $\tilde{v}$ определен однозначно с точностью до ненулевого множителя. В общем случае у формы ϕ имеются другие линейно независимые вихревые векторы. Среди них — векторы $\tilde{w}$, имеющие в координатах x, t компоненты $w, 0$, где w — вихревой вектор 2-формы $\Omega = d\omega$ в n-мерном пространстве M. Число независимых вихревых векторов w равно $n - \operatorname{rank}(\operatorname{rot} u)$. Эти векторы играют в нашей теории ключевую роль. Ясно, что векторы вида $\tilde{v} + \tilde{w}$ также будут вихревыми для формы ϕ.

Приведем еще один пример из электродинамики (заимствованный у Картана [28], п.81), где появляется уравнение (2.3). Пусть E и H — электрическое и магнитное поля в пустоте, c — скорость света. Рассмотрим тензор электромагнитного поля $\|F_{ij}\|$ — кососимметрическую матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & cE_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & cE_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & cE_3 \\ -cE_1 & -cE_2 & -cE_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Ей можно поставить в соответствие внешнюю 2-форму

$$F = \sum F_{ij} dx_i \wedge dx_j, \tag{2.5}$$

где x_1, x_2, x_3 — пространственные декартовы координаты в трехмерном евклидовом пространстве, а $x_4 = t$ — время.

Форма F — замкнута: $dF = 0$. Это — следствие двух уравнений Максвелла

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{rot} E = 0, \quad \operatorname{div} H = 0.$$

Следовательно, $F = df$, где 1-форма

$$f = \sum f_i dx_i$$

называется 4-потенциалом электромагнитного поля. Оставшиеся два уравнения Максвелла приводят к волновому уравнению для коэффициентов f_i.

Ранг кососимметрической матрицы (2.4) может быть одним из чисел: 4, 2, 0. Ее определитель равен $c^2(E, H)^2$. Следовательно, $\operatorname{rank} F = 2$, если поля E и H ортогональны и отличны от нуля. Именно этот случай представляет наибольший интерес с точки зрения теории электромагнитных волн.

Итак, пусть всюду $(E, H) = 0$ и $E^2 + H^2 \neq 0$. Тогда замкнутая 2-форма F имеет два вихревых вектора. Их пространственные и временные компоненты равны соответственно

$$H, \quad 0 \tag{2.6}$$

и

$$c[E, H], \quad H^2. \tag{2.7}$$

Проекции интегральных кривых поля (2.6) на $\mathbb{R}^3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ будут магнитными силовыми линиями, а пространственные компоненты поля (2.7) определяют направление распространения электромагнитной волны.

3°. Форму φ можно интегрировать по ориентированным кривым γ в $\widetilde{M}$, что позволяет задать функционал «действия»

$$I[\gamma] = \int_\gamma \varphi. \tag{2.8}$$

Из леммы о вариации действия (§6 гл. I) сразу же выводится *вариационный принцип:* интегральные кривые поля $\tilde{v}$ являются экстремалями функционала (2.8) в классе кривых с фиксированными концами.

Это принцип справедлив и для вихревых полей $\tilde{w}$. Поскольку t-компоненты векторов $\tilde{w}$ равны нулю, то интегральные кривые поля $\tilde{w}$ (вихревые линиии) лежат на гиперповерхностях $t = \mathrm{const}$ и поэтому их можно считать кривыми на конфигурационном пространстве M. В этом случае вариационный принцип можно слегка изменить: вихревые линии являются экстремалями функционала

$$\int_\gamma \omega,$$

где γ — ориентированные кривые на M. Здесь время t считается параметром.

Если коэффициенты 1-формы φ периодичны по t (скажем, с периодом τ), то в качестве пространства-времени $\widetilde{M}$ можно принять «цилиндр» — прямое произведение M и окружности $\{t \bmod \tau\}$. В этом случае среди мировых линий могут оказаться замкнутые кривые. Легко понять, что они доставляют стационарные значения функционалу (2.8), определенному на пространстве всех замкнутых кривых. Этот простой результат может оказаться полезным для доказательства существования периодических решений системы (2.1). Примером может служить теорема Конли—Цендера [67] о наличии $n+1$ различных τ-периодических решений уравнений Гамильтона на $2n$-мерном торе с τ-периодическим гамильтонианом.

4°. Пусть γ_1 — некоторая замкнутая кривая в $\widetilde{M}$. Через каждую точку γ_1 проходит единственная мировая линия. Их совокупность образует цилиндрическую поверхность Г (рис. 18). Пусть γ_2 — еще одна замкнутая кривая на Г, гомологичная γ_1. Тогда

$$\int_{\gamma_1} \varphi = \int_{\gamma_2} \varphi. \tag{2.9}$$

Действительно, по теореме Стокса, разность этих интегралов равна

$$\iint\limits_{\Gamma} \phi, \qquad \phi = d\varphi.$$

Однако этот интеграл равен нулю, поскольку 2-форма ϕ обращается в нуль на любой паре линейно независимых векторов, касающихся Г (ввиду (2.3), поскольку $\tilde{v}$ касается Г по построению).

Равенство (2.9) содержит как частный случай интегральный инвариант Пуанкаре—Картана (§6 гл. I). В качестве формы φ надо взять 1-форму энергии-импульса в расширенном фазовом пространстве.

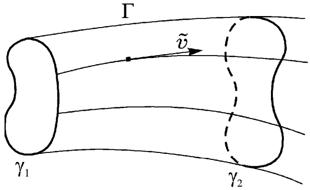

Рис. 18. Трубка мировых линий

Если γ_1 и γ_2 — сечения трубки мировых линий гиперповерхностями $t = t_1$ и $t = t_2$, то равенство (2.9) переходит в теорему 2 из §1.

Заменим теперь мировые линии вихревыми линиями — интегральными кривыми вихревого поля $\tilde{w}$. Поскольку поле $\tilde{w}$ также удовлетворяет (2.3), то интеграл по замкнутому циклу от 1-формы φ будет *относительным инвариантом* для системы уравнений

$$\frac{dz}{d\alpha} = \tilde{w}(z),$$

α — некоторый вещественный параметр, играющий роль времени. Так как t-компонента вектора $\tilde{w}$ равна нулю, то в качестве интересного следствия получаем, что система дифференциальных уравнений на M

$$\frac{dx}{d\alpha} = w(x, t),$$

задающая вихревые линии, при каждом значении t допускает (как и система $\dot{x} = v(x, t)$) интегральный инвариант

$$\int_\gamma \omega.$$

Здесь γ — любой замкнутый контур на конфигурационном пространстве M. Этот факт обобщает наблюдение Картана ([28], п.24), что дифференциальные уравнения траекторий и дифференциальные уравнения вихревых линий в гидродинамике идеальной жидкости допускают один и тот же линейный интегральный инвариант.

5°. По формуле Стокса

$$\int_{\partial\gamma} \omega = \int_{\gamma} d\omega \tag{2.10}$$

каждому относительному интегральному инварианту (порождаемому k-формой ω) отвечает *абсолютный интегральный инвариант* (порождаемый $(k+1)$-формой $\Omega = d\omega$). Это замечание принадлежит Пуанкаре (как и общая формула (2.10)).

Таким образом, система дифференциальных уравнений (1.2) допускает абсолютный инвариант

$$\iint\limits_{\sigma} \Omega, \tag{2.11}$$

где σ — произвольная двумерная поверхность (в общем случае с краем).

Этот результат несложно получить прямым вычислением. Для этого применим операцию внешнего дифференцирования к обеим частям равенства (1.8):

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + L_v \Omega = 0. \tag{2.12}$$

Мы использовали известные тождества:

$$\frac{\partial}{\partial t} d = d \frac{\partial}{\partial t}, \quad dL_v = L_v d, \quad dd = 0.$$

Для доказательства инвариантности интеграла (2.11) осталось использовать равенство (1.9).

Уравнение (2.12) в матричной форме имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} u + \operatorname{rot}((\operatorname{rot} u)v) = 0. \tag{2.13}$$

Точнее говоря, это — матричная форма уравнения

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + di_v \Omega = 0. \tag{2.14}$$

Поскольку форма Ω замкнута ($d\Omega = 0$), то (2.12) и (2.14) эквивалентны.

К уравнению (2.14) приводится известное уравнение (1.1) (гл. I) для изменения соленоидального поля, вмороженного в поток. Для обычного уравнения Ламба в трехмерном евклидовом пространстве уравнение (2.13) принимает вид хорошо известного уравнения для изменения вихря:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} v = \operatorname{rot}(v \times \operatorname{rot} v).$$

6°. Поскольку система (2.1) имеет относительный инвариант (2.9), то она допускает также абсолютный инвариант

$$\int_\sigma \phi, \qquad \phi = d\varphi. \tag{2.15}$$

Легко показать, что 2-формы Ω и ϕ связаны соотношением

$$\phi = \Omega + (i_v \Omega) \wedge dt. \tag{2.16}$$

Действительно, так как $\varphi = \omega - hdt$, то

$$\Phi = d\omega - \frac{\partial \omega}{\partial t} \wedge dt - dh \wedge dt.$$

Согласно (1.7), $-dh = \partial\omega/\partial t + i_v \Omega$. Отсюда сразу следует (2.16).

Формула (2.16) допускает обобщение. Справедливо

Предложение 2. *Предположим, что система (1.2) имеет абсолютный интегральный инвариант с k-формой Ω. Тогда система (2.1) допускает абсолютный инвариант (2.15) с k-формой*

$$\phi = \Omega + (-1)^k (i_v \Omega) \wedge dt. \tag{2.17}$$

При $k = 2$ получаем (2.16). Предложение 2 фактически принадлежит Картану ([28], п.30), только вместо явной формулы для ϕ Картан приводит правило ее вывода: в явное выражение для формы Ω вместо дифференциалов dx_i надо подставить разности $dx_i - v_i dt$.

В качестве примера рассмотрим движение сплошной среды в евклидовом пространстве $E^3 = \{x_1, x_2, x_3\}$, описываемое системой уравнений

$$\dot{x}_1 = v_1, \quad \dot{x}_2 = v_2, \quad \dot{x}_3 = v_3. \tag{2.18}$$

Функции v_i, разумеется, зависят от x и t. Пусть $\rho(x,t)$ — плотность вещества в точке x и в момент времени t. Масса, заполняющая трехмерный объем τ в момент времени t, равна интегралу

$$\int_\tau \rho \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \tag{2.19}$$

Этот интеграл представляет, конечно, абсолютный инвариант системы (2.18). Сохранность интеграла (2.19) выражается известным уравнением неразрывности (1.3) из гл. I.

Применяя к 3-форме $\Omega = \rho \, d^3x$ преобразование (2.17), приходим к 3-форме

$$\phi = \rho(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - v_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dt -$$

$$- v_2 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dt - v_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dt).$$

Картан назвал эту форму *элементом материи.* Если мы рассмотрим трехмерную совокупность частиц сплошной среды, причем каждая частица рассматривается в свой определенный момент ее движения, то в четырехмерном пространстве-времени $\{x_1, x_2, x_3, t\}$ получим трехмерную область τ^*. Интеграл от 3-формы ϕ по τ^*, очевидно, равен общей массе совокупности рассматриваемых частиц.

Как заметил Картан, в общем случае предложение 2 не справедливо для относительных инвариантов. Мы дополним наблюдения Картана следующим утверждением.

Предложение 3. *Предположим, что система (1.2) имеет относительный интегральный инвариант с k-формой Ω:*

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + L_v \Omega = d\Lambda,$$

причем $(k-1)$*-форма* Λ *порождает абсолютный инвариант:*

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + L_v \Lambda = 0.$$

Тогда система (2.1) допускает относительный инвариант с k*-формой (2.17), причем*

$$L_v \phi = \tilde{d}\Psi,$$

где

$$\Psi = \Lambda + (-1)^{k-1}(i_v \Lambda) \wedge dt.$$

Здесь $\tilde{d}$ обозначает операцию внешнего дифференцирования в $(n+1)$-мерном пространстве-времени.

7°. Переход к пространству-времени позволяет просто сформулировать теорему Нетер для уравнений Ламба. Пусть $u(z)$ — векторное поле на $\widetilde{M}$. Ему отвечает система дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{d\alpha} = u(z), \quad -\epsilon < \alpha < \epsilon \quad (\epsilon > 0).$$

Фазовый поток этой системы g_u^α при малых значениях α можно трактовать как операцию варьирования.

Пусть γ — любой отрезок на мировой линии. Будем говорить, что действие (2.8) инвариантно относительно однопараметрической группы g_u^α, если

$$\int_{g_u^\alpha(\gamma)} \varphi = \mathrm{const}\,. \tag{2.20}$$

Теорема 4. *Если группа преобразований* g_u *пространства-времени не меняет значений функционала действия, то уравнения (1.2) имеют первый интеграл* $\varphi(u)$.

Доказательство.

Дифференцируя (2.20) по α и используя лемму о вариации действия, получаем:

$$0 = \delta I = \varphi(u)\Big|_{z_1}^{z_2} + \int_\gamma i_u \phi. \tag{2.21}$$

Здесь z_1, z_2 — концевые точки отрезка γ. Поскольку вектор $\tilde{v}$ касается γ и справедливо равенство (2.3), то интеграл в правой части равенства (2.21) обращается в нуль. Следовательно, функция $\varphi(u)$ принимает постоянные значения на каждой мировой линии. ■

§3. Инвариантные формы объема

1°. Для течений жидкости в $E^3 = \{x\}$ дифференциальная 3-форма $\tau = \rho\, d^3x$ ($\rho(x,t)$ — плотность распределения массы) является инвариантной формой объема:

$$\int_{g_v^t(D)} \tau = \text{const} \tag{3.1}$$

для любой измеримой трехмерной области $D \subset E^3$. Интегральное соотношение (3.1) эквивалентно дифференциальному уравнению неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \tag{3.2}$$

Особенно просто это уравнение выглядит в случае однородной жидкости, когда $\rho = \text{const}$: $\operatorname{div} v = 0$. Если течение жидкости потенциально ($v = \partial\varphi/\partial x$), то для потенциала поля скоростей получаем уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Следовательно, φ — гармоническая функция в E^3. Таким образом, в стационарном случае задача сводится к решению уравнения Лапласа с соответствующими граничными условиями. Вся нужная нам информация от динамических уравнений Эйлера — это теорема Лагранжа о сохранении потенциальности течения идеальной жидкости.

В этом параграфе мы изучаем задачу о наличии инвариантных n-форм (формы объема на M) дифференциальных уравнений (1.2). Они играют роль плотностей и отвечают закону сохранения массы.

2°. Для дальнейшего существенную роль играет понятие *класса* дифференцииальной формы, введенное Э. Картаном [28]. Напомним, что классом p-формы α в точке $x \in M$ называется коразмерность линейного подпространства векторов $\xi \in T_x M$, таких, что

$$i_\xi \alpha = i_\xi d\alpha = 0.$$

Мы будем рассматривать формы *постоянного класса,* когда их класс не зависит от точки x.

Если форма α замкнута ($d\alpha = 0$), то класс α равен коразмерности подпространства таких векторов ξ, что $i_\xi \alpha = 0$. Это число называется также *рангом* формы α. В частности, поскольку любая n-форма τ на n-мерном многообразии замкнута, то τ будет *формой объема* тогда и только тогда, когда ее класс (или ранг) равен n. Отметим также, что класс замкнутой 2-формы всегда четный.

Нам потребуются следующие два простых утверждения (см., например, [22], гл. VI).

(i) Пусть $n = 2s$ четно. Замкнутая 2-форма α имеет максимальный класс n тогда и только тогда, когда

$$\alpha^s = \underbrace{\alpha \wedge \ldots \wedge \alpha}_{\text{s}}$$

— форма объема.

(ii) Пусть $n = 2s + 1$ нечетно. Класс 1-формы α максимальный (равен n) в том и только том случае, когда $\alpha \wedge (d\alpha)^s$ — форма объема.

В §§1 и 2 мы ввели две формы $\omega = \sum u_i dx_i$ и $\Omega = d\omega$. Первая порождает относительный, а вторая — абсолютный интегральные инварианты системы (1.2).

Предложение 4. *Пусть $n = 2s$ четно и класс 2-формы Ω равен n. Тогда система (1.2) допускает интегральный инвариант*

$$\int_\gamma \tau, \tag{3.3}$$

где $\tau = \Omega^s$.

Доказательство.

Действительно, так как 2-форма Ω класса n замкнута, то τ — форма объема на M^n. Далее,

$$\dot{\tau} = (\Omega^s)^{\cdot} = \dot{\Omega} \wedge \Omega \wedge \ldots \wedge \Omega + \Omega \wedge \dot{\Omega} \wedge \ldots \wedge \Omega + \cdots = 0$$

ввиду (2.12). ■

Предложение 4, между прочим, содержит как частный случай знаменитую теорему Лиувилля о сохранении фазового объема в гамильтоновых системах.

Пусть теперь $n = 2s + 1$ нечетно и класс 1-формы ω равен n. Тогда n-форма $\tau = \omega \wedge \Omega^s$ будет формой объема. Однако в общем случае она не будет инвариантной. Действительно, по формуле (1.8),

$$\begin{aligned} \dot{\tau} = \dot{\omega} \wedge \Omega^s + \omega \wedge \dot{\Omega} \wedge \Omega \wedge \ldots \wedge \Omega + \cdots = \\ = \dot{\omega} \wedge \Omega^s = dg \wedge \Omega^s, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $g = i_v\omega - h$ — «лагранжиан».

Так как форма Ω замкнута, то

$$dg \wedge \Omega^s = d(g\Omega^s).$$

Следовательно, для компактного M имеем

$$\frac{d}{dt}\int_M \tau = \int_M dg \wedge \Omega^s = \int_M d(g\Omega^s) = 0.$$

Таким образом, τ — объем всего M сохраняется. Это замечание содержательно лишь в неавтономном случае.

Рассмотрим важный частный случай, когда уравнения (1.1) являются уравнениями Ламба для стационарной n-мерной инвариантной поверхности гамильтоновой системы с квадратичным гамильтонианом

$$H = \left(\sum g_{ij}(x) y_i y_j\right)/2.$$

По формуле Эйлера для однородных функций

$$i_v\omega = \sum y_i \frac{\partial H}{\partial y_i}\Big|_{y=u} = 2h. \tag{3.5}$$

Предложение 5 ([35]). *В рассматриваемом случае уравнения (1.2) допускают интегральный инвариант (3.3), где* $\tau = \omega \wedge \Omega^s$.

Доказательство.

Действительно, согласно (3.5), $g = 2h - h = h$. Уравнение (1.7) в стационарном случае дает нам равенство $dh = -i_v\Omega$. Следовательно,

$$\dot{\tau} = -i_v\Omega \wedge \Omega^s.$$

Так как $\Omega^{s+1} = 0$, то $i_v\Omega^{s+1} = (s+1)i_v\Omega \wedge \Omega^s = 0$. Значит, $\dot{\tau} = 0$. ■

3°. Если класс форм ω и Ω не максимальный, то с их помощью вообще не удается получить форму объема. Таким образом, вопрос о наличии инвариантных мер уравнений (1.2) является содержательной задачей.

В §8 гл. I мы видели, что эта задача просто решается в случае, когда известно полное решение $u(x,t,c)$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ уравнений Ламба для гамильтоновой системы с n степенями свободы. Действительно, для фиксированных значений c уравнения (1.2) допускают инвариант

$$\int_\gamma \rho \, d^n x,$$

где

$$\rho = \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(c_1, \ldots, c_n)}. \tag{3.6}$$

Плотность $\rho(x,t)$ удовлетворяет *уравнению неразрывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0. \tag{3.7}$$

Для потенциальных течений $u = \partial\varphi/\partial x$ полное решение уравнений Ламба переходит в полный интеграл $\varphi(t, x, c)$ уравнения Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, t\right) = 0.$$

В этом случае формула (3.6) принимает вид

$$\rho = \det\left\|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial c_j}\right\|.$$

Невырожденность матрицы вторых производных для потенциала является одним из свойств полного интеграла.

Рассмотрим стационарное решение для гамильтоновой системы с натуральным гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum a_{ij}(x) y_i y_j + V(x).$$

Тогда

$$v_i = \sum a_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$$

и поэтому уравнение (3.7) принимает следующий явный вид:

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\rho \sum_j a_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\Big) = 0. \tag{3.8}$$

Это — аналог уравнения Лапласа для потенциала скоростей однородной жидкости. Если

$$\rho = c\sqrt{g}, \quad g = \det\|a_{ij}\|, \quad c = \mathrm{const},$$

то уравнение (3.8) превращается в уравнение Лапласа—Бельтрами на M с римановой метрикой, определяемой кинетической энергией. В этом случае потенциал φ будет гармонической функцией на M.

§4. Вихревые многообразия

1°. Зафиксируем момент времени t. *Вихревым вектором* в точке $x \in M^n$ мы назвали касательный вектор $w \in T_xM$, такой, что

$$i_w\Omega = 0. \tag{4.1}$$

В матричных обозначениях это равенство имеет вид $(\operatorname{rot} u)w = 0$ (вихревой вектор — это собственный вектор кососимметрической матрицы ротора с нулевым собственным значением).

Согласно (4.1), все вихревые векторы в точке x образуют линейное подпространство $\Pi_x \subset T_xM$. Пусть $m = \dim \Pi_x$. Ясно, что

$$m = n - \operatorname{rank}\Omega.$$

Так как 2-форма Ω замкнута, то ранг Ω равен ее классу. Очевидно, $\operatorname{rank}\Omega$ совпадает с рангом кососимметрической матрицы $\operatorname{rot} u$; это число четное. В частности, $m \geq 1$ в случае нечетной размерности конфигурационного пространства.

В дальнейшем предполагается, что Ω — форма *постоянного ранга* (или класса): ее ранг не зависит от точки x во всем M или в интересующей нас области на M. В этом случае семейство $\{\Pi_x\}$ порождает m-мерное *распределение* касательных плоскостей на M^n. Регулярное m-мерное многообразие $W \subset M$ называется *интегральным многообразием* распределения Π, если в каждой точке $x \in W$ касательная к W m-мерная плоскость совпадает с Π_x:

$$T_xW = \Pi_x.$$

Наконец, распределение Π называется *интегрируемым,* если через каждую точку $x \in M$ проходит интегральное многообразие Π; другими словами, все M расслоено на m-мерные интегральные многообразия распределения Π.

Предложение 6. *Распределение $\{\Pi_x\}$ вихревых векторов интегрируемо.*

Доказательство.

Пусть w_1 и w_2 — два векторных поля на M, составленные из вихревых векторов. Если распределение Π интегрируемо, то поля w_1 и w_2 касаются интегральных многообразий W. Следовательно, их коммутатор $[w_1, w_2]$ также касается W, то есть будет вихревым полем. Это необходимое условие интегрируемости распределения плоскостей Π является также и достаточным (см., например, [61]).

Итак, пусть

$$i_{w_1}\Omega = i_{w_2}\Omega = 0.$$

Воспользуемся формулой ([22], гл. IV.)

$$i_{[w_1,w_2]}\Omega = [L_{w_1}, i_{w_2}]\Omega =$$

$$= L_{w_1}(i_{w_2}\Omega) - i_{w_2}(L_{w_1}\Omega) = -i_{w_2}(L_{w_1}\Omega).$$

С другой стороны, для любого вихревого поля w имеем равенство

$$L_w\Omega = d(i_w\Omega) + i_w d\Omega = 0,$$

поскольку 2-форма Ω замкнута. ■

Интегральные многообразия распределения вихревых векторов будем называть *вихревыми многообразиями.* Они являются естественным обобщением вихревых линий из гидродинамики. Подчеркнем, что в общем случае вихревые многообразия будут разными в различиные моменты времени.

Замечание. При доказательстве интегрируемости распределения вихревых векторов использовалось лишь свойство замкнутости формы Ω.

2°.

Теорема 5. *Поток системы*

$$\dot{x} = v(x, t) \tag{4.2}$$

переводит вихревые многообразия в вихревые многообразия.

Доказательство использует равенство (2.12)

$$\dot{\Omega} = \frac{\partial \Omega}{\partial t} + L_v \Omega = 0, \tag{4.3}$$

которое является условием «вмороженности» формы Ω в поток системы (4.2): ее значение на любой паре векторов, переносимых потоком (4.2), не меняется. Это означает следующее. Пусть $w_1(0)$ и $w_2(0)$ — два вектора, которые касаются M в некоторой точке x_0 в момент времени $t = 0$. Пусть $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — их образы при отображении g_v^t (точнее, его дифференциала dg^t). Это — касательные векторы в точке $x(t) = g^t(x_0)$. Из соотношения (4.3) вытекает равенство

$$\Omega(w_1(t), w_2(t)) = \text{const}\,. \tag{4.4}$$

Пусть теперь $w_1(0)$ — вихревой вектор. Тогда $\Omega(w_1(0), \cdot) = 0$. Следовательно, согласно (4.4), $\Omega(w_1(t), \cdot) = 0$. Значит, $w_1(t)$ будет вихревым вектором при всех значениях t.

Таким образом, дифференциал фазового потока dg^t переводит распределение вихревых векторов при $t = 0$ в распределение вихревых векторов, заданных в момент времени t. Пусть W_0 — вихревое многообразие в начальный момент и $W_t = g^t(W_0)$. Поскольку векторы $w(0)$ касаются поверхности W_0, то их образы $w(t)$ будут касаться W_t. Следовательно, W_t — вихревое многообразие в момент t. ■

Теорема 5 — многомерный аналог знаменитой *теоремы Гельмгольца—Томсона* о вмороженности вихревых линий. При ее доказательстве использовалось уравнение (4.3) и свойство замкнутости формы Ω. Поэтому теорема 5 включает в себя также теорему о вмороженности магнитных линий из магнитной гидродинамики (см. §1 гл. I).

3°. Рассмотрим стационарный случай, когда форма ω, поле v и функция h не зависят явно от времени. Тогда уравнение Ламба (1.7) принимает вид

$$i_v \Omega = -dh, \qquad \Omega = d\omega. \tag{4.5}$$

Теорема 6. *В стационарном случае функция h постоянна на интегральных кривых поля v и на вихревых многообразиях.*

Траектории системы $\dot{x} = v(x)$ можно назвать *линиями тока.* Таким образом, теорема 6 — многомерное обобщение классической *теоремы Бернулли* из гидродинамики идеальной жидкости.

Доказательство.

Так как $\Omega(v, v) = 0$, то из (4.5) вытекает равенство

$$i_v dh = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot v = 0.$$

Следовательно, функция h постоянна на линиях тока.

Пусть теперь w — произвольное векторное поле, составленное из вихревых векторов, которые касаются связного вихревого многообразия W. Так как $i_w \Omega = 0$, то из (4.5) следует тождество

$$0 = i_w i_v \Omega = -i_w dh = -\frac{\partial h}{\partial x} \cdot w$$

Таким образом, функция h принимает постоянное значение на W. ■

4°. Задача нахождения вихревых многообразий существенно упрощается, если ковекторное поле $u(x, t)$ удается представить в виде суммы

$$\frac{\partial S}{\partial x} + A_1 \frac{\partial B_1}{\partial x} + \cdots + A_k \frac{\partial B_k}{\partial x}, \tag{4.6}$$

где $S, A_1, B_1, \ldots$ — некоторые функции от x и t. Ввиду формулы

$$u = \frac{\partial S'}{\partial x} - \sum B_s \frac{\partial A_s}{\partial x}, \quad S' = S + \sum A_i B_i$$

A_s, B_s имеют один и тот же смысл. В гидродинамике функции $S, A_1, B_1, \ldots$ называются *потенциалами Клебша* (см., например, [42], §167).

Если потенциалы $A_1, B_1, \ldots, B_k$ независимы как функции x, то $\operatorname{rank}(\operatorname{rot} u) = 2k$. Поскольку

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \sum \left(\frac{\partial A_s}{\partial x_j} \frac{\partial B_s}{\partial x_i} - \frac{\partial A_s}{\partial x_i} \frac{\partial B_s}{\partial x_j} \right),$$

то вихревые векторы совпадают с касательными векторами к $(n-2k)$-мерным поверхностям

$$\{x \in M : A_1(x,t) = a_1, B_1(x,t) = b_1, \dots, B_k(x,t) = b_k\}, \quad a, b = \text{const}\,.$$

Следовательно, эти поверхности являются искомыми вихревыми многообразиями.

По теореме Дарбу, если 1-форма ω имеет постоянный класс, то потенциалы Клебша всегда существуют. Более того, функции $A_1, B_1, \dots, B_k$ можно принять за новые координаты; обозначим их $x_1, \dots, x_{2k}$. Запишем в явном виде формулы (4.6)

$$u_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1}, u_2 = \frac{\partial S}{\partial x_2} + x_1, \dots, u_{2k+1} = \frac{\partial S}{\partial x_{2k+1}}, \dots, u_n = \frac{\partial S}{\partial x_n}$$

и уравнения Ламба (1.1)

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right), \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dot{x}_{2k-1} = -\frac{\partial}{\partial x_{2k}}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right), \quad \dot{x}_{2k} = \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right),
\end{gathered} \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{2k+1}}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right) = \dots = \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right) = 0. \tag{4.8}$$

Из (4.8) вытекает, что $\partial S/\partial t + h$ — функция лишь от координат $x_1, \dots, x_{2k}$ и времени t. Это соотношение обобщает уравнение Гамильтона—Якоби и переходит в него при $k = 0$ (когда поле u потенциально). Тогда (4.7) будет замкнутой канонической системой дифференциальных уравнений для потенциалов Клебша с гамильтонианом $\partial S/\partial t + h$. Эти наблюдения обобщают известные результаты Клебша и Стюарта (см. [42]) о вихревых течениях идеальной жидкости (когда $n = 3$).

Равенства (4.8) дают нам обобщение второй части теоремы Бернулли: функция $h + \partial S/\partial t$ постоянна на вихревых многообразиях.

5°. Согласно предложению 6, если 2-форма Ω имеет постоянный ранг, то все n-мерное многообразие M расслоено на $(n-2k)$-мерные $(2k = \operatorname{rank}\Omega)$ вихревые многообразия W_x. Введем на M *отношение эквивалентности,* отождествив точки, лежащие в одной связной компоненте вихревых многообразий. Это отношение позволяет определить *фактор-пространство*

$$N = M/W.$$

Локально множество N имеет структуру гладкого $2k$-мерного многообразия. Однако в целом N может иметь сложное топологическое строение. Характер трудностей можно увидеть на примере двумерного тора, расслоенного иррациональными обмотками. Отображение

$$\pi\colon M \to N,$$

которое каждой точке $x \in M$ ставит в соответствие вихревое многообразие W_x (проходящее через x), является *расслоением: M — расслоенное пространство, N — база* расслоения, а вихревые многообразия W_x — его *слои.*

По теореме Гельмгольца—Томсона (теорема 5) фазовый поток g_v^t системы (1.2) переводит вихревые многообразия на M в вихревые многообразия. Следовательно, корректно определено действие g^t на базе N. Дифференцируя отображение

$$z \to g^t(z), \quad z \in N$$

по t, получим векторное поле $V(z,t)$ и систему дифференциальных уравнений на N

$$\dot{z} = V(z,t). \tag{4.9}$$

Эту систему естественно назвать *фактор-системой.*

Ясно, что дифференциал отображения π переводит поле v в поле V. Это — следствие теоремы Гельмгольца—Томсона. Образ произвольного векторного поля на M при отображении $d\pi$ вообще не определен: он зависит от выбора точки на вихревом многообразии. Ясно также, что $d\pi$ переводит вихревые векторы w в нуль. Поэтому вихревые векторы являются ***вертикальными*** векторами. Кроме того, образ векторного поля $v + \sum \lambda_i w_i$ при отображении $d\pi$ равен V для всех λ. Чтобы избежать подобной неопределенности, на M не вводят распределение вертикальных векторов; такие векторы называют ***горизонтальными.*** Распределение горизонтальных векторов на M задает ***связность*** в расслоении $\pi\colon M \to N$.

Идею введения связности можно проиллюстрировать на примере задачи о поднятии путей на базе N до горизонтальных путей на M. Путь $\Gamma(t)\colon [a,b] \to M$ называется горизонтальным, если касательный вектор $\dot{\Gamma}$ является горизонтальным для всех $t \in [a,b]$. Пусть $\gamma\colon [a,b] \to N$ — произвольный гладкий путь на базе и $\pi(x_0) = \gamma(a)$. Легко понять, что найдется единственный горизонтальный путь $\Gamma\colon [a,b] \to M$, такой, что $\Gamma(a) = x_0$ и $\pi(\Gamma(t)) = \gamma(t)$ для всех t. Эта конструкция позволяет определить параллельный перенос векторов на M. С теорией расслоенных пространств можно познакомиться, например, по книге [44].

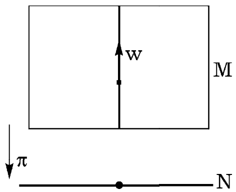

Рис. 19. Фактор-система

6°. Оказывается, система уравнений (4.9) на базе расслоения N имеет вид уравнений Ламба с невырожденной матрицей ротора. Чтобы это показать, зададим вихревые многообразия W как совместные поверхности уровня $2k$ независимых функций

$$f_1(x,t),\ \ldots,\ f_{2k}(x,t).$$

Примем их за первые $2k$ локальных координат и сохраним за новыми переменными прежние обозначения $x_1, \ldots, x_n$. В новых координатах уравнения (1.1) будут иметь тот же вид, а вихревые векторы — линейные комбинации векторов

$$w_{2k+1} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T, \ldots, w_n = (0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots, 1)^T.$$

Соотношение (4.1) эквивалентно следующей серии равенств

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0; \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 2k+1, \dots, n. \tag{4.10}$$

Пусть $p \neq q$ — произвольные индексы. Тогда

$$\frac{\partial u_p}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_p}, \quad \frac{\partial u_q}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_q}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_q \partial x_j} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_q \partial x_p}, \quad \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_p \partial x_j} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_p \partial x_q}.$$

Откуда имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q} - \frac{\partial u_q}{\partial x_p}\right) = 0.$$

Таким образом, в новых переменных элементы матрицы $\operatorname{rot} u$ не зависят от $x_{2k+1}, \dots, x_n$. Учитывая равенства (4.10), получим, что замкнутая 2-форма Ω имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^{2k} \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j,$$

причем коэффициенты ω_{ij} зависят лишь от $x_1, \dots, x_{2k}$ и t.

В соответствии с локальной леммой Пуанкаре,

$$\Omega = d\,(U_1 dx_1 + \dots + U_{2k} dx_{2k}),$$

где U_s — функции от переменных $x_1, \dots, x_{2k}, t$. Поскольку 1-форма

$$\sum_{j=1}^{n} u_j dx_j - \sum_{i=1}^{2k} U_i dx_i$$

замкнута, то (по той же лемме Пуанкаре) она является дифференциалом некоторой функции $S(x_1, \dots, x_n, t)$. Следовательно,

$$u_i = U_i + \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, 2k,$$

$$u_j = \frac{\partial S}{\partial x_j}, \qquad j = 2k+1, \dots, n.$$

Итак, в новых переменных уравнения (1.1) распадаются на две подсистемы

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (\operatorname{rot} U)V = -\frac{\partial}{\partial X}\left(h + \frac{\partial S}{\partial t}\right), \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right) = 0, \quad j = 2k+1, \ldots, n. \tag{4.12}$$

Здесь X — набор локальных координат $x_1, \ldots, x_{2k}$ на базе N. В соответствии с (4.12), функция $h + \partial S/\partial t$ зависит лишь от $x_1, \ldots, x_{2k}, t$ и поэтому (4.11) является уравнением Ламба на N, при этом динамика описывается уравнением $\dot{X} = U(X, t)$. Матрица $\operatorname{rot} U$, конечно, невырождена. С помощью теоремы Дарбу уравнение (4.11) можно преобразовать к каноническому виду дифференциальных уравнений Гамильтона (как это сделано в п.4).

Отметим, что равенства (4.12) представляют локальное обобщение теоремы Бернулли: при каждом фиксированном значении t функция $h + \partial S/\partial t$ постоянна на вихревых многообразиях. Этому наблюдению можно придать глобальный характер, если предположить, что 2-форма $\Omega = d\omega$ стационарная (не зависит явно от t). Если конфигурационное многообразие M односвязно, то найдется такая функция $S(x, t)$ на M, что $\omega = \tilde{\omega} + dS$, где 1-форма $\tilde{\omega}$ не зависит от t. Уравнение Ламба принимает вид

$$i_v \Omega = -d\tilde{h}, \quad \tilde{h} = h + \partial S/\partial t. \tag{4.13}$$

В этом случае вихревые многообразия стационарны и на них функция $\tilde{h}$ принимает значения, которые могут зависеть лишь от времени. Из (4.13) вытекает равенство

$$\frac{d\tilde{h}}{dt} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}.$$

В частности, если функция $\tilde{h}$ не зависит явно от t, то она постоянна на линиях тока.

§5. Уравнение Эйлера

1°. Пусть $w(x,t)$ — гладкое векторное поле на M, состоящее из вихревых векторов. Справедливо

Предложение 7. *Векторное поле*

$$\frac{\partial w}{\partial t}+[w,v]$$

также является вихревым полем.

Следствие 1. *Пусть* $w^{(1)},\dots,w^{(m)}$ $(m=n-\operatorname{rank}(\operatorname{rot}u))$ *— базис вихревых векторных полей. Тогда*

$$\frac{\partial w^{(i)}}{\partial t}+[w^{(i)},v]=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}w^{(j)},\quad i=1,\dots,m,$$

где λ_{ij} *— гладкие функции от* x *и* t.

Доказательство предложения 7.

Воспользуемся результатами §2 и сведем уравнения Ламба (1.1) к автономному случаю. Для этого положим

$$\tilde v=(v_1,\dots,v_n,1),\quad \tilde w=(w_1,\dots,w_n,0),$$

где v_i,w_j — компоненты векторных полей v и w соответственно. Согласно (2.2) и (2.3), $\tilde v$ и $\tilde w$ — вихревые поля некоторой замкнутой 2-формы ϕ:

$$i_{\tilde v}\phi=i_{\tilde w}\phi=0.$$

Воспользуемся следующей формулой (см. [22], гл. IV)

$$i_{[\tilde w,\tilde v]}\phi=L_{\tilde v}i_{\tilde w}\phi-i_{\tilde w}L_{\tilde v}\phi.$$

Так как $i_{\tilde w}\phi=0$ и $L_{\tilde v}\phi=i_{\tilde v}d\phi+di_{\tilde v}\phi=0$, то $[\tilde w,\tilde v]$ — вихревой вектор, компоненты которого равны

$$\frac{\partial w_1}{\partial t}+[w,v]_1,\ \dots,\ \frac{\partial w_n}{\partial t}+[w,v]_n,\ 0. \tag{5.1}$$

Если $w^{(1)}, \ldots, w^{(m)}$ — базис вихревых векторов, то $\tilde{w}^{(1)}, \ldots, \tilde{w}^{(m)}$, $\tilde{v}$ — базис вихревых векторов в расширенном пространстве. Следовательно,

$$[\tilde{w}, \tilde{v}] = \sum \lambda_i \tilde{w}^{(i)} + \mu \tilde{v}.$$

Поскольку t-компонента поля $\tilde{v}$ равна 1, то, согласно (5.1), $\mu \equiv 0$. Следовательно, $\partial w / \partial t + [w, v]$ — вихревой вектор при всех значениях t. ■

Замечание. Предложение 1 хорошо известно в трехмерном случае. Действительно, Пуанкаре, Жоравский и Фридман (см. [75, 60]) нашли критерий вмороженности интегральных кривых векторного поля $w(x,t)$ в поток, порожденный полем скоростей $v(x,t)$: векторы

$$\dot{w} - L_w v \quad \text{и} \quad w$$

коллинеарны. Поскольку

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t} + L_v w$$

и

$$L_v w - L_w v = [w, v],$$

то

$$\frac{\partial w}{\partial t} + [w, v] = \lambda w.$$

2°. Рассмотрим важный частный случай, когда n нечетно и 2-форма Ω неособая при всех значениях t. Тогда в каждой точке $x \in M$ вихревые векторы образуют одномерное подпространство. Справедлива локальная

Теорема 7 ([33]). *При нечетном n в неособом случае найдется гладкое вихревое векторное поле $w(x,t)$, удовлетворяющее уравнению*

$$\frac{\partial w}{\partial t} + [w, v] = 0. \tag{5.2}$$

Это уравнение — аналог известного уравнения Эйлера для изменения момента. Теорема 1 содержит как частный случай теорему 1 из §1 главы 1. Уравнение (5.2) будем также называть *уравнением Эйлера.*

Доказательство теоремы 7.

Согласно предложению 7, в указанных предположениях любое ненулевое вихревое поле удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} + [w, v] = \mu w,$$

где $\mu(x,t)$ — некоторая гладкая функция. Заменим в этом уравнении w на вихревое поле λw и подберем множитель λ так, чтобы новое поле w удовлетворяло уравнению (5.2). Для этого должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + L_v \lambda = \mu \lambda \tag{5.3}$$

или, что то же самое, $\dot{\lambda} = \mu\lambda$, где точка означает полную производную по времени в силу системы (1.2).

Покажем, что уравнение (5.3) локально всегда разрешимо. Прежде всего заметим, что (5.3) можно переписать в эквивалентной форме

$$L_{\tilde{v}} \lambda = \mu \lambda, \tag{5.4}$$

где $\tilde{v}$ — естественное продолжение поля v в расширенное пространство-время $M \times \mathbb{R}_t$. Поскольку $\tilde{v} \neq 0$, то (по теореме о выпрямлении) в некоторых новых локальных координатах $z_1, \ldots, z_{n+1}$ в $M \times \mathbb{R}$ поле $\tilde{v}$ имеет компоненты $1, 0, \ldots, 0$. Поэтому уравнение (5.4) принимает вид

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z_1} = \mu \lambda.$$

Оно легко решается:

$$\lambda = \exp\left(\int \mu \, dz_1\right).$$

■

3°. Особый интерес, конечно, представляет случай, когда $\dim M = 3$. Очевидно, 2-форма $\Omega = d\omega$ будет неособой тогда и только тогда, когда $\Omega \neq 0$.

Рассмотрим натуральную механическую систему с конфигурационным пространством M, гамильтониан которой есть сумма кинетической T и потенциальной V энергий. Наличие метрики

$$T = \frac{1}{2} \sum g_{ij}(x)\, \dot{x}_i \dot{x}_j$$

позволяет в трехмерном случае вычислить ротор поля скорости v (векторного поля на M, зависящего, возможно, от времени). Приведем инвариантное определение поля $\operatorname{rot} v$. Для этого сначала сопоставим векторному полю $v = \{v_i\}$ ковекторное поле $u = \{u_j\}$ с компонентами

$$u_j = \sum_i g_{ij} v_i. \tag{5.5}$$

Положим $\omega = \sum u_j dx_j$ и $\Omega = d\omega$. Пусть

$$\tau = \sqrt{g}\, d^3 x$$

— 3-форма ориентированного объема на M (g — определитель матрицы $\|g_{ij}\|$). Положим, наконец,

$$i_{\operatorname{rot} v} \tau = \Omega. \tag{5.6}$$

В случае евклидова пространства (матрица $\|g_{ij}\|$) единичная) эта формула задает векторное поле обычного ротора. Заметим, что u — значение канонического импульса $y = \partial T / \partial \dot{x}$, вычисленного по полю v. С помощью (5.6) можно указать в явном виде компоненты поля $\operatorname{rot} v$:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right).$$

В этих формулах компоненты u_1, u_2, u_3 вычисляются согласно (5.5). Другой вывод формул для ротора (отличающийся от нашего лишь по форме) можно найти в классической книге Освальда Веблена [17] (см. также [53]).

Рассмотрим еще одну 3-форму $\tau' = \rho\tau$ на M, где ρ — некоторая гладкая положительная функция от x и t, и предположим, что τ' — порождает абсолютный интегральный инвариант

$$\int \tau' \tag{5.7}$$

системы (1.2). Это означает, что произведение $\rho\sqrt{g}$ удовлетворяет уравнению Лиувилля (3.2).

Как видно из (5.6), поле $\operatorname{rot} v$ является вихревым.

Теорема 8. *Вихревое векторное поле*

$$w(x,t) = \frac{\operatorname{rot} v}{\rho} \tag{5.8}$$

удовлетворяет уравнению Эйлера (5.2).

Это утверждение является непосредственным обобщением теоремы 1 из §1 главы I, относящейся к динамике сжимаемой жидкости. Здесь $M = E^3$, метрика евклидова, а инвариант (5.7) — масса вещества в подвижном объеме.

Доказательство теоремы 8.

Из (5.6) и (5.8) имеем равенство

$$i_w\tau' = \Omega.$$

Применяя к обеим частям операцию $\partial/\partial t$, получаем

$$i_{\partial w/\partial t}\tau' + i_w\frac{\partial\tau'}{\partial t} = \frac{\partial\Omega}{\partial t}. \tag{5.9}$$

Далее,

$$L_v i_w\tau' = i_w L_v\tau' + i_{[w,v]}\tau' = L_v\Omega. \tag{5.10}$$

Поскольку формы Ω и τ' порождают абсолютные интегральные инварианты, то

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + L_v\Omega = 0, \quad \frac{\partial\tau'}{\partial t} + L_v\tau' = 0. \tag{5.11}$$

Складывая равенства (5.9), (5.10) и учитывая (5.11), получаем

$$i_{\partial w/\partial t}\tau' + i_{[w,v]}\tau' = 0.$$

Так как 3-форма τ' невырождена, то

$$\frac{\partial w}{\partial t} + [w, v] = 0.$$

■

Замечание. В евклидовом пространстве дивергенция поля ротора равна нулю. Это свойство сохраняется и для произвольного риманова пространства, если дивергенцию векторного поля $v = \{v_i\}$ определить равенством

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum \frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{g} v_i).$$

В римановой геометрии эта величина называется *абсолютной дивергенцией,* а сумма

$$\sum \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \tag{5.12}$$

— дивергенцией *векторной плотности* $\{v_i\}$. Последнее выражение является инвариантом (т.е. не зависит от выбора локальных координат) и для полей вида ρv, где ρ — плотность некоторой формы объема. Именно в таком виде дивергенция входит в уравнение Лиувилля (3.2). Отметим, что (5.12) вообще не зависит от выбора римановой метрики.

4°. Теорема 8 допускает некоторое обобщение на случай произвольного нечетного $n = \dim M$. Пусть $\tau = \sqrt{g}\, d^n x$ — форма объема, а замкнутая 2-форма Ω имеет постоянный класс $n - 1$. Определим векторное поле $w(x, t)$ формулой

$$i_w \tau = \Omega^k, \qquad n = 2k + 1.$$

Поскольку n-форма τ невырождена, то поле w определяется этой формулой однозначно. Поле $w = \operatorname{rot} v$ называется *обобщенным ротором* векторного поля v (см. например, [17]). Его абсолютная дивергенция, конечно, равна нулю. Так как класс 2-формы Ω равен $2k = n - 1$, то w — вихревой вектор при всех значениях x и t.

Теорема 9. *Предположим, что система (1.2) допускает интегральный инвариант (5.7), где $\tau' = \rho\tau$. Тогда векторное поле w/ρ удовлетворяет уравнению Эйлера.*

Теорема 8 вытекает из этого утверждения, если положить $n = 3$: предположения о том, что 2-форма Ω неособая и ее класс равен двум, очевидно, эквивалентны.

§6. Вихри в диссипативных системах

1°. Рассеяние энергии в динамике вязкой жидкости приводит ко многим характерным явлениям, например, к диффузии вихрей (см. §2, гл. I). В динамике систем с конечным числом степеней свободы при небольших скоростях *силы вязкого трения* обычно моделируют с помощью диссипативной функции, введенной Релеем [55].

Пусть M^n — конфигурационное пространство механической системы с n степенями свободы, $(x_1, \ldots, x_n) = x$ — обобщенные координаты, T — кинетическая, а V — потенциальная энергии системы. Уравнения движения механической системы с вязким трением имеют следующий вид:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}, \quad L = T - V. \tag{6.1}$$

Здесь Φ — *функция Релея* — положительно определенная квадратичная форма относительно обобщенной скорости $\dot{x}$. Пусть $H = T + V$ — полная механическая энергия. Из (6.1) вытекает простое равенство

$$\dot{H} = -2\Phi,$$

которое показывает, что энергия, действительно, рассеивается.

Мы рассмотрим случай, когда $\Phi = -\nu T$, где ν — известная положительная функция времени (например, $\nu = \mathrm{const} > 0$). Применяя преобразование Лежандра, перейдем от уравнений Лагранжа (6.1) к обобщенным каноническим уравнениям Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} - \nu y. \tag{6.2}$$

Здесь $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $y = \partial T/\partial\dot{x}$ — канонические импульсы, $H(x, y, t)$ — функция Гамильтона, которую можно считать произвольной известной функцией от x, y и времени t.

Наше первое наблюдение состоит в том, что систему с диссипацией (6.2) можно привести к обычным дифференциальным уравнениям Гамильтона

$$\dot{X} = \frac{\partial K}{\partial Y}, \quad \dot{Y} = -\frac{\partial K}{\partial X} \tag{6.3}$$

с помощью замены

$$X = x, \quad Y = y\mu(t), \quad \mu = \exp\left[-\int \nu(t)\,dt\right].$$

Роль нового гамильтониана играет функция

$$K = \mu H(X,\, Y/\mu,\, t). \tag{6.4}$$

Следовательно, систему (6.2) можно изучать методами гамильтоновой механики. Однако мы предпочтем прямой путь исследования, не опираясь на редукцию к системе (6.3). Следует иметь в виду, что в стационарном случае (когда функции T и V не зависят явно от t) система (6.2) будет автономной, однако при переходе к (1.3) свойство автономности теряется.

2°. Будем искать n-мерные инвариантные поверхности Σ уравнений (6.2) в виде

$$y = u(x, t).$$

Положим, как и раньше,

$$h(x, t) = H(x, u(x, t), t),$$

$$\dot{x} = v(x, t) = \frac{\partial H}{\partial y}\bigg|_{y=u}. \tag{6.5}$$

Несложно показать, что ковекторное поле u, функция h и векторное поле v связаны соотношением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\operatorname{rot} u)v = -\frac{\partial h}{\partial x} - \nu u, \tag{6.6}$$

$$\operatorname{rot} u = \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|.$$

Будем называть (6.6) *обобщенным уравнением Ламба.* В гидродинамике дополнительное слагаемое $-\nu u$ имеет смысл силы внешнего трения. При $\nu = 0$ получаем обычное уравнение Ламба.

Уравнение (6.6) можно представить в эквивалентном виде с помощью внешних дифференциальных форм. Положим, как обычно,

$$\omega = \sum u_i dx_i, \quad \Omega = d\omega.$$

Тогда

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + i_v \Omega = -dh - \nu\omega. \tag{6.7}$$

Применяя к обеим частям операцию внешнего дифференцирования и используя формулу гомотопии, получим

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + L_v \Omega = -\nu\Omega. \tag{6.8}$$

Ясно, что левая часть этого равенства есть полная производная от формы Ω в силу системы (6.5).

Уравнение (6.7) можно несколько преобразовать:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + L_v \omega = dg - \nu\omega, \tag{6.9}$$

где $g = \omega(v) - h$ — лагранжиан рассматриваемой системы, ограниченный на инвариантную поверхность Σ.

3°. Пусть g^t — поток системы (6.5), γ — замкнутый контур на M. Интеграл

$$I = \int_{g^t(\gamma)} \omega \tag{6.10}$$

будет функцией t. Воспользуемся известной формулой

$$\dot{I}(t) = \int_{g^t(\gamma)} \dot{\omega}, \quad \dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + L_v \omega.$$

Поскольку γ — замкнутый контур, то из (6.9) будем иметь

$$\dot{I} = -\nu(t)I.$$

Следовательно,

$$I(t) = I(0)\mu(t). \tag{6.11}$$

Таким образом, если интеграл

$$\int_0^\infty \nu(t)\,dt$$

расходится (например, $\nu = \mathrm{const} \neq 0$), то $I(t)$ монотонно стремится к нулю при неограниченном возрастании t. Это свойство можно рассматривать как *явление диффузии вихрей* в конечномерных диссипативных системах.

Не исключено, что это утверждение справедливо и для диссипативных функций Релея общего вида. В его пользу свидетельствует следующее наблюдение. Если x_0 — изолированный минимум потенциальной энергии V, то эта точка будет асимптотически устойчивым положением равновесия для системы (6.1). В частности, пусть замкнутый контур γ лежит в малой окрестности точки x_0. Тогда контур $g^t(\gamma)$ вырождается в точку x_0 при $t \to +\infty$ и, следовательно, интеграл (6.10) стремится к нулю.

Стоит иметь в виду, что эволюция замкнутых путей в диссипативных системах может приводить к замысловатым множествам. Рассмотрим, например, градиентную систему

$$\dot{x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

на двумерном торе, который реализован в виде поверхности вращения в трехмерном пространстве, а φ — функция высоты точки. На рис. 20, а показана эволюция замкнутого контура из окрестности неустойчивого равновесия: множество точек $g^t(\gamma)$ при $t \to \infty$ стремится к сдвоенной кривой (рис. 20, б).

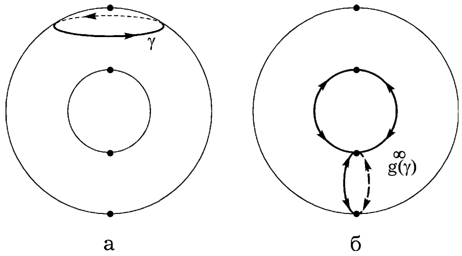

Рис. 20. Эволюция замкнутых путей

В динамике вязкой жидкости уравнение (6.8) заменяется уравнением

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + L_v \Omega = \nu \Delta \Omega, \tag{6.12}$$

где Δ — оператор Лапласа. Асимптотические (при $t \to +\infty$) свойства решений уравнения (6.12) на компактном многообразии M изучены В. И. Арнольдом [6]. В этой работе рассмотрены явления переноса и диффузии произвольных k-форм, удовлетворяющих уравнению (6.12). В нашем случае 2-форма Ω замкнута. Для гидродинамики особое значение имеет случай, когда M является трехмерным тором; к этой задаче приводит изучение течений с периодическими граничными условиями.

В. И. Арнольд показал, что при достаточно большом коэффициенте диффузии

(i) эволюция (6.12) с любым замкнутым начальным условием ($d\Omega = 0$ при $t = 0$) приводит в пределе к стационарной k-форме из того же класса когомологий (т. е. с теми же значениями интегралов по k-мерным циклам);

(ii) в каждом классе когомологий замкнутых k-форм есть стационарная форма, причем такая форма ровно одна.

В нашем случае 2-форма Ω точна. Следовательно, ее класс когомологий тривиальный и поэтому (согласно (ii)) $\Omega \to 0$ при $t \to \infty$.

В пределе интеграл от 1-формы ω (циркуляция жидкости) по любому гомотопному нулю замкнутому контуру γ равен нулю. По-видимому,

$$\lim_{t\to+\infty}\oint_{g^t(\gamma)}\omega = 0.$$

4°. Напомним, что ковекторное поле u будет потенциальным ($u = \partial\varphi/\partial x$) тогда и только тогда, когда интеграл от 1-формы ω по любому замкнутому контуру (стягиваемому в точку) равен нулю. С учетом этого замечания из (6.11) получаем *обобщенную теорему Лагранжа* о потенциальных течениях: если поле $u(x,t)$ потенциально при некотором $t = t_0$, то оно будет потенциальным при всех значениях t.

Подставляя в (6.6) ($u = \partial\varphi/\partial x$), получаем аналог *интеграла Лагранжа—Коши:*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, t\right) + \nu\varphi = f(t). \tag{6.13}$$

Пусть $\theta(t)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot\theta + \nu(t)\theta = f(t).$$

Преобразование $\varphi \to \varphi + \theta(t)$ не меняет поля градиента и позволяет положить в (6.13) $f = 0$. При $\nu = 0$ полученное уравнение совпадает с уравнением Гамильтона—Якоби.

Уравнение (6.13) в стационарном случае (когда функции φ, ν, f не зависят явно от t) получил впервые И. С. Аржаных [3], не связывая, правда, подстановку $\partial\varphi/\partial x$ с теоремой Лагранжа. Им же доказана следующая теорема, обобщающая теорему Якоби о полном интеграле.

Пусть $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_n)$ — полный интеграл уравнения (6.13) (где $f = 0$). Тогда общее решение уравнений (6.2) находится из соотношений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial c} = -\alpha\mu(t), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = y; \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathrm{const}.$$

При $\nu = 0$ получаем теорему Якоби.

Впрочем, теорему Аржаных просто вывести из теоремы Якоби. Для этого в (6.13) (где $f = 0$) сделаем подстановку

$$\varphi = \frac{\psi(x,t)}{\mu(t)}.$$

Функция ψ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mu H\left(x, \frac{1}{\mu}\frac{\partial \psi}{\partial x}, t\right) = 0, \tag{6.14}$$

в которое входят явно лишь производные от ψ. Уравнение (6.14) — это уравнение Гамильтона—Якоби для системы с гамильтонианом (6.4).

5°. Пусть $w_1(t), w_2(t)$ — касательные к M (в общей точке) векторы, которые переносятся потоком системы (6.5). Из (6.8) вытекает равенство

$$\Omega(w_1(t), w_2(t)) = \Omega(w_1(0), w_2(0))\mu(t).$$

Таким образом, если $\Omega(w_1(t), w_2(t))$ обращается в нуль при $t = 0$, то эта функция тождественный нуль для всех значений t. Следовательно, вихревые векторы замкнутой 2-формы Ω вморожены в поток системы (6.5). Отсюда, в свою очередь, вытекает *обобщенная теорема Гельмгольца—Томсона:* поток системы дифференциальных уравнений (6.5) переводит вихревые многообразия в вихревые многообразия.

6°. Если 1-форма ω имеет постоянный класс, то ее локально можно привести к виду

$$\omega = dS + x_1 dx_2 + \dots + x_{2k-1} dx_{2k},$$

где $2k$ — ранг замкнутой 2-формы Ω, S — некоторая гладкая функция от $x_1, \dots, x_n, t$. Координаты $x_1, \dots, x_{2k}$ и функция S — это обобщенные потенциалы Клебша из §4. В этих переменных вихревые многообразия задаются уравнениями

$$x_1 = a_1, \ \dots, \ x_{2k} = a_{2k}; \quad a = \mathrm{const}, \tag{6.15}$$

а обобщенные уравнения Ламба (6.6) имеют следующий явный вид:

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = -\frac{\partial æ}{\partial x_2} - \nu x_1, \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial æ}{\partial x_1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dot{x}_{2k-1} = -\frac{\partial æ}{\partial x_{2k}} - \nu x_{2k-1}, \quad \dot{x}_{2k} = \frac{\partial æ}{\partial x_{2k-1}},
\end{gathered} \tag{6.16}$$

$$\frac{\partial æ}{\partial x_{2k+1}} = \ldots = \frac{\partial æ}{\partial x_n} = 0, \tag{6.17}$$

где $æ = \partial S/\partial t + \nu S + h$.

Из (6.15) и (6.17) получаем *обобщенную теорему Бернулли:* при фиксированных значениях t функция æ постоянна на вихревых многообразиях. Следовательно, уравнения (6.16) представляют собой замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, обобщающую канонические уравнения Гамильтона. Поскольку вихревые многообразия «нумеруются» координатами $x_1, \ldots, x_{2k}$, то отсюда снова получаем теорему Гельмгольца—Томсона.

Глава III
Геодезические на группах Ли с левоинвариантной метрикой

§1. Уравнения Эйлера—Пуанкаре

1°. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — касательные векторные поля на n-мерном конфигурационном пространстве M, линейно независимые в каждой точке M (или некоторой его части). Их коммутаторы можно разложить по векторам $\{v_k\}$ как по базису:

$$[v_i, v_j] = \sum c_{ij}^k v_k. \tag{1.1}$$

Коэффициенты c_{ij}^k — функции от точки $x \in M$.

Скорость системы $\dot{x}$ — также касательный вектор. Следовательно, можно положить

$$\dot{x} = \sum \omega_k v_k. \tag{1.2}$$

Коэффициенты $(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \omega$ — линейные функции от $\dot{x}$ — называются *квазискоростями*, они зависят от выбора полей v. В частности, если в качестве v_k взять векторные поля с операторами дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{1.3}$$

то, очевидно, $\omega_k = \dot{x}_k$.

Лагранжиан механической системы $L(\dot{x}, x, t)$ можно представить в виде функции от ω, x, и t: $L = \mathcal{L}(\omega, x, t)$. Оказывается, в новых переменных уравнения Лагранжа с лагранжианом L примут следующий вид:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_k}\right)^{\cdot} = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ki}^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_j} \omega_i + X_k(\mathcal{L}), \tag{1.4}$$

где X_k — производная Ли вдоль векторного поля v_k.

Уравнения (1.4) получены впервые Анри Пуанкаре в 1901 г. [76]. Если операторы дифференцирования X_k имеют вид (1.3), то *уравнения Пуанкаре* перейдут в обычные уравнения Лагранжа. Следует иметь в виду, что система уравнений (1.4) незамкнута; для ее замыкания надо добавить соотношения (1.2).

2°. Выведем уравнения Пуанкаре. Пусть

$$X_i = \sum_s a_{is} \frac{\partial}{\partial x_s}$$

— явный вид оператора дифференцирования вдоль поля v_i. По определению коммутатора,

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_i X_j = \sum c_{ij}^k X_k$$

или, что то же самое,

$$\sum_l \frac{\partial a_{is}}{\partial x_l} a_{jl} = \sum_l \frac{\partial a_{js}}{\partial x_l} a_{il} + \sum_k c_{ij}^k a_{ks}. \tag{1.5}$$

Учитывая покомпонентную запись соотношения (1.2)

$$\dot{x}_s = \sum_k a_{ks} \omega_k, \quad 1 \leq s \leq n,$$

получаем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_k} = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} \frac{\partial \dot{x}_s}{\partial \omega_k} = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} a_{ks}. \tag{1.6}$$

Далее, используя уравнения Лагранжа, имеем

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_k}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} a_{ks} + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} \frac{\partial a_{ks}}{\partial x_l} \dot{x}_l =$$
$$= \sum \frac{\partial L}{\partial x_s} a_{ks} + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} \frac{\partial a_{ks}}{\partial x_l} a_{il} \omega_i.$$

Учитывая соотношения

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_s} = \frac{\partial L}{\partial x_s} + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} \frac{\partial a_{il}}{\partial x_s} \omega_i,$$

преобразуем полученное равенство:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_k}\right)^{\cdot} = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_s} a_{ks} + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} \left(\frac{\partial a_{ks}}{\partial x_l} a_{il} \frac{\partial a_{is}}{\partial x_l} a_{kl}\right) \omega_i.$$

Используя теперь (1.5), приходим к соотношению

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_k}\right)^{\cdot} = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} a_{js} c^j_{ki} \omega_i + X_k(\mathcal{L}).$$

Наконец, с учетом (1.6) получаем уравнения Пуанкаре (1.4).

3°. Считая лагранжиан $\mathcal{L}$ функцией, выпуклой по ω и возрастающей на бесконечности быстрей любой линейной функции, выполним преобразование Лежандра:

$$m_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_k}, \quad \mathcal{H} = (m \cdot \omega - \mathcal{L})_{\omega \to m}.$$

Тогда как известно,

$$\omega_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m_k}, \quad X_k(\mathcal{L}) = -X_k(\mathcal{H}).$$

Уравнения (1.4) в переменных x, m примут вид

$$\dot{m}_k = \sum_{i,j} c^j_{ki} m_j \frac{\partial H}{\partial m_i} - X_k(\mathcal{H}), \quad 1 \le k \le n. \tag{1.7}$$

Они называются *уравнениями Четаева* [66].

4°. Пусть теперь конфигурационное пространство M является *группой Ли* G. Напомним, что G — группа (с операцией умножения $\tau, \sigma \to \tau\sigma$) и одновременно — гладкое многообразие, причем

(а) $\tau \to \tau^{-1}$ — гладкое отображение $G \to G$,

(б) $\tau, \sigma \to \tau\sigma$ — гладкое отображение $G \times G \to G$.

Для нас основным примером будет группа $SO(3)$ — группа поворотов трехмерного евклидова пространства. Она состоит из ортогональных матриц третьего порядка с определителем, равным единице. Произвольная 3×3-матрица задается девятью произвольными параметрами. Шесть независимых условий ортогональности выделяют в девятимерном пространстве гладкую регулярную трехмерную поверхность — многообразие $SO(3)$. С топологической точки зрения — это трехмерная сфера, у которой отождествлены антиподальные точки. Легко проверить, что операция умножения матриц будет гладким преобразованием этой поверхности. Как уже отмечалось (§5 главы I), группа $SO(3)$ — конфигурационное пространство в задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки.

Поскольку G — группа, то для любых σ, τ найдется единственное ρ, такое, что $\rho\sigma = \tau$ $(\rho = \tau\sigma^{-1})$. Через Φ_ρ обозначим левый сдвиг группы G, порожденный элементом ρ:

$$\Phi_\rho : \xi \to \rho\xi, \quad \xi \in G.$$

Согласно условию (б), Φ_ρ — гладкое отображение группы G на себя. Ясно, что $\Phi_\rho^{-1} = \Phi_{\rho^{-1}}$ — тоже гладкое отображение (условие (а)). Следовательно, Φ_ρ — диффеоморфизм и поэтому его дифференциал $d\Phi_\rho$ есть изоморфизм касательных пространств T_σ и T_τ.

Гладкое векторное поле v на G называется *левоинвариантным*, если

$$d\Phi_\rho v(\sigma) = v(\tau) \tag{1.8}$$

для всех τ и σ. Это условие можно упростить, положив в (1.7) $\sigma = e$ (e — единица группы G):

$$d\Phi_\tau v(e) = v(\tau)$$

для всех $\tau \in G$. Таким образом, левоинвариантные векторные поля на G образуют n-мерное линейное пространство g, изоморфное T_eG.

Если u, v — гладкие векторные поля и Φ — гладкое отображение, то, как легко проверить,

$$d\Phi([u, v]) = [d\Phi(u), d\Phi(v)].$$

С учетом формулы (1.8) из этого факта вытекает важное следствие: коммутатор левоинвариантных полей является левоинвариантным векторным полем. Таким образом, линейное пространство g превращается в *алгебру Ли*, если умножение элементов из g определить как операцию коммутирования. Это умножение обладает следующими свойствами:

1) $[u, v] = -[v, u]$,

2) $[c_1 u_1 + c_2 u_2, v] = c_1[u_1, v] + c_2[u_2, v]; \quad c_1, c_2 \in R$,

3) $[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$ для любых $u, v, w \in g$ (тождество Якоби).

Алгебра g называется *алгеброй Ли* группы G.

Если $v_1, \dots, v_k$ — набор линейно независимых левоинвариантных векторных полей на G, то в равенстве (1.1) коэффициенты c_{ij}^k будут постоянными. Они называются *структурными постоянными* алгебры Ли. Очевидно, $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$.

Аналогично определяются *правоинвариантные* векторные *поля* на группе Ли G, которые переходят в себя при всех правых сдвигах группы G. Легко проверить что линейное пространство правоинвариантных полей с операцией коммутирования является алгеброй, изоморфной алгебре Ли группы G.

Более подробно с этими вопросами можно познакомиться, например, по книге Шевалье [61]. Изложение, ориентированное на применение к дифференциальным уравнениям, см. в [49].

5°. В качестве важного примера рассмотрим группу невырожденных матриц $n \times n$, которая обычно обозначается $GL(n)$. Известные формулы для элементов произведения матриц и обратной матрицы показывают, что $GL(n)$ — группа Ли, размерность которой равна n^2. Вычислим ее алгебру Ли $gl(n)$.

Пусть e — единичная матрица. Рассмотрим касательные векторы к GL в точке e. Пусть $t \to x(t)$ — гладкая кривая на GL и $x(0) = e$. Тогда

$$x(t) = e + tA + o(t), \tag{1.9}$$

где A — некоторая $n \times n$ матрица, и, следовательно, $\dot{x}(0) = A$. Таким образом, касательное пространство T_e совпадает с линейным пространством квадратных матриц порядка n.

При левом сдвиге $x \to zx(t)$ кривая (1.9) перейдет в кривую $t \to zx(t)$. Ее производная при $t = 0$ равна zA. Следовательно, при этом сдвиге вектор A из T_e перейдет в вектор zA, касательный к GL в точке z.

Пусть $z = \|z_{ij}\|$ и $A = \|a_{ij}\|$. Левоинвариантному полю $z \to zA$ отвечает оператор дифференцирования

$$\sum z_{is} a_{sj} \frac{\partial}{\partial z_{ij}}.$$

Пусть $z \to zB$ — еще одно левоинвариантное векторное поле. Их коммутатор в точке $z = e$ равен, очевидно, $[A, B] = BA - AB$. Следовательно, алгебра Ли $gl(n)$ изоморфна пространству всех вещественных $n \times n$-матриц с естественным законом коммутирования.

Алгебра $gl(n)$ играет важную роль в теории алгебр Ли. Согласно *теореме Адо*, каждая алгебра Ли изоморфна некоторой подалгебре $gl(n)$ при подходящем выборе n.

Пусть $z \to Az$ и $z \to Bz$ — два правоинвариантных векторных поля на GL. Их коммутатор равен $AB - BA$; он отличается только знаком от $[A, B]$.

Важное значение с точки зрения приложений играет *специальная ортогональная группа* $SO(n)$, состоящая из ортогональных $n \times n$-матриц с определителем $+1$. Ясно, что $SO(n) \subset GL(n)$, $so(n) \subset gl(n)$, и $\dim(SO(n)) = n(n-1)/2$.

В этом случае матрицы $x(t)$ из (1.9) удовлетворяют соотношению $xx^T = e$. Следовательно,

$$e = (e + tA + o(t))(e + tA^T + o(t)) = e + t(A + A^T) + o(t),$$

откуда $A^T + A = 0$. Таким образом, алгебра $so(n)$ состоит из кососимметричных матриц порядка n.

6°. При $n = 3$ каждой кососимметричной матрице

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

можно поставить в соответствие вектор a трехмерного ориентированного евклидова пространства с компонентами a_1, a_2, a_3. Легко проверить, что по этому правилу коммутатор матриц $[A, B]$ переходит в обычное векторное произведение $a \times b$. Таким образом, алгебра $so(3)$ изоморфна линейному пространству векторов трехмерного пространства, в котором коммутатор совпадает с операцией векторного умножения.

Группа $SO(3)$ — конфигурационное пространство задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки: все положения тела можно получить из некоторого его фиксированного положения с помощью поворотов. Вращение твердого тела задается функцией $t \to x(t)$, где x — ортогональная матрица из $SO(3)$. Скорость вращения $\dot{x}(t)$ есть касательный вектор к группе в точке $x(t)$. Его можно перенести в единицу группы (то есть в алгебру $so(3)$) двумя естественными способами: левым и правым сдвигом. В результате мы получили две кососимметричные матрицы $x^{-1}\dot{x}$ и $\dot{x}x^{-1}$.

Пусть $R(t)$ — радиус-вектор точки тела в неподвижном пространстве. Тогда $R(t) = x(t)R(0)$ и, следовательно,

$$V(t) = \dot{R}(t) = \dot{x}(t)R(0) = \dot{x}x^{-1}R(t).$$

В трехмерном ориентированном пространстве кососимметрический оператор $\dot{x}x^{-1}$ есть оператор векторного умножения $\Omega \times (\cdot)$. В результате получаем *формулу Эйлера* $V = \Omega \times R$. Вектор Ω называется вектором *угловой скорости* в неподвижном пространстве. Таким образом, правоинвариантные векторные поля на $SO(3)$ соответствуют вращениям твердого тела с постоянной угловой скоростью вокруг оси, фиксированной в неподвижном пространстве.

Ортогональное преобразование с матрицей x^{-1} переводит твердое тело в начальное положение. Следовательно, $v(t) = x^{-1}(t)V(t)$ — скорость точки тела в подвижной системе отчета, связанной с твердым телом. Таким образом, $v = x^{-1}\dot{x}r = \omega \times r$, где ω — вектор угловой скорости, а $r = x^{-1}(t)R(t) = R(0)$ — радиус-вектор точки тела в подвижном пространстве. Отсюда вытекает, что левоинвариантные поля на $SO(3)$ отвечают вращениям твердого тела с угловой скоростью, постоянной в подвижном пространстве.

Выберем в твердом теле три взаимно ортогональные оси, проходящие через неподвижную точку (например, главные *оси инерции* тела). Пусть v_1, v_2, v_3 — независимые левоинвариантные поля на $SO(3)$, порожденные вращениями твердого тела с единичной угловой скоростью вокруг этих осей. В силу отмеченного изоморфизма алгебры $so(3)$ и алгебры векторов трехмерного евклидова пространства, получаем следующие формулы для коммутаторов:

$$[v_1, v_2] = v_3, \quad [v_2, v_3] = v_1, \quad [v_3, v_1] = v_2. \tag{1.10}$$

7°. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — некоторая риманова метрика на группе G:

$$\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle = \sum a_{i,j}(x) \dot{x}_i \dot{x}_j.$$

С точки зрения динамики эта метрика определяется кинетической энергией T и задает инерционные свойства системы: $T = \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle / 2$.

Метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$ называется левоинвариантной, если она не меняет значений при всех левых сдвигах. Другими словами, значение билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на любой паре левоинвариантных векторных полей постоянно (не зависит от точки на G).

Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — базис независимых левоинвариантных полей. Положительно определенная матрица Грама

$$I = \|I_{ij}\|, \quad I_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \mathrm{const}$$

называется тензором инерции механической системы в этом базисе. По формуле (1.2),

$$T = \frac{1}{2} \left\langle \sum \omega_i v_i, \sum \omega_j v_j \right\rangle = \frac{1}{2} \sum I_{ij} \omega_i \omega_j.$$

В отсутствие внешних сил уравнения Пуанкаре (1.4) принимают следующий вид:

$$\dot{m}_i = \sum c_{ik}^j m_j \omega_k, \quad m_s = \sum I_{sp} \omega_p. \tag{1.11}$$

Представленные в переменных ω, они являются дифференциальными уравнениями на алгебре g группы G, и в переменных m — на двойственном линейном пространстве g^*.

Уравнения (1.11) будем называть *уравнениями Эйлера—Пуанкаре.* В качестве комментария рассмотрим частный случай, когда G есть группа $SO(3)$. Свойство левоинвариантности кинетической энергии вращающегося волчка очевидно. Используя коммутационные соотношения (1.10), уравнения (1.11) легко привести к форме

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = 0, \tag{1.12}$$

где ω — угловая скорость, а I — тензор инерции тела. Это — знаменитые динамические уравнения Эйлера, опубликованные им в 1758 году.

Уравнения (1.11) составляют половину уравнений движения. К ним следует добавить геометрические уравнения (1.2). С дифференциально-геометрической точки зрения эти уравнения описывают геодезические линии левоинвариантной метрики на группе Ли.

§2. Вихревая теория волчка

1°. Ключевой вопрос применимости общей теории вихрей, развитой в главе II, состоит в нахождении инвариантных многообразий, однозначно проектирующихся на конфигурационное пространство. Этот вопрос легко и естественно решается для *волчка Эйлера* — задачи о вращении по инерции твердого тела с неподвижной точкой в трехмерном евклидовом пространстве. Многие результаты этого параграфа непосредственно обобщаются на более общую задачу о геодезических на группах Ли с левоинвариантной метрикой.

Пусть α, β, γ — ортонормированный репер в неподвижном пространстве. Мы будем рассматривать эти векторы как векторы в подвижном пространстве, связанном с твердым телом. Тогда они уже не будут постоянными; их эволюция со временем описывается *уравнениями Пуассона*

$$\dot{\alpha} + \omega \times \alpha = 0, \quad \dot{\beta} + \omega \times \beta = 0, \quad \dot{\gamma} + \omega \times \gamma = 0. \tag{2.1}$$

Эти уравнения вместе с динамическими уравнениями Эйлера образуют полную систему уравнений движения. Они допускают следующие интегралы

$$(I\omega, \alpha) = c_1, \quad (I\omega, \beta) = c_2, \quad (I\omega, \gamma) = c_3, \tag{2.2}$$

отражающие свойство неизменности вектора кинетического момента тела $K = I\omega$ как вектора неподвижного пространства.

Интегралы (2.2) имеют прозрачную групповую интерпретацию. Вращениям волчка с постоянной угловой скоростью $\omega = \alpha$ отвечает правоинвариантное векторное поле на $SO(3)$. Фазовый поток этого поля состоит, очевидно, из левых сдвигов на группе $SO(3)$. Однако кинетическая энергия волчка инвариантна при левых сдвигах. Следовательно, по теореме Нетер (§5 гл. I), уравнения движения допускают интеграл

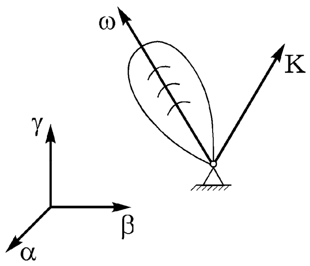

Рис. 21. Вращающийся волчок

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \omega}, \alpha\right) = \text{const}.$$

Из формулы (2.2) вытекает очевидное равенство

$$I\omega = c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma. \tag{2.3}$$

Оно позволяет представить скорость вращения волчка как однозначную функцию на конфигурационном пространстве. Другими словами, векторное равенство (2.3) задает трехмерное стационарное инвариантное многообразие, однозначно проектирующееся на группу $SO(3)$. В дальнейшем рассматривается нетривиальный случай, когда $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \neq 0$.

2°. Для определенности изложения введем в рассмотрение подвижный трехгранник, образованный главными осями инерции твердого тела относительно точки закрепления. В этих осях тензор инерции приводится к диагональному виду: $I = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$.

Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции вектора угловой скорости на эти подвижные оси. Эти предположения упрощают вид кинетической энергии тела

$$T = (I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)/2. \tag{2.4}$$

Для того чтобы представить инвариантные многообразия (2.3) в канонических переменных, введем в качестве обобщенных координат углы Эйлера θ, φ, ψ (§5 главы I). Они однозначно определяют положение главных осей инерции твердого тела относительно неподвижного трехгранника.

Геометрические соотношения (1.2) принимают вид известных *кинематических формул Эйлера* (1760):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi, \\ \omega_2 &= \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi, \\ \omega_3 &= \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Они позволяют представить кинетическую энергию (2.4) как квадратичную форму по обобщенным скоростям $\dot\psi, \dot\theta, \dot\varphi$. Сопряженные импульсы вводим по обычному правилу:

$$p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \dot\psi}, \quad p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}.$$

Используя (2.4) и (2.5), получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} p_\psi &= I_1\omega_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot\psi} + I_2\omega_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot\psi} + I_3\omega_3 \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot\psi} = \\ &= I_1\omega_1 \sin\theta \sin\varphi + I_2\omega_2 \sin\theta \cos\varphi + I_3\omega_3 \cos\theta, \\ p_\theta &= I_1\omega_1 \cos\varphi - I_2\omega_2 \sin\varphi, \\ p_\varphi &= I_3\omega_3. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Известны выражения компонент векторов α, β, γ через углы Эйлера:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi \\ -\cos\psi\sin\varphi - \cos\theta\sin\psi\cos\varphi \\ \sin\psi\sin\theta \end{bmatrix}, \\
\beta &= \begin{bmatrix} \sin\psi\cos\varphi + \cos\theta\cos\psi\sin\varphi \\ -\sin\psi\sin\varphi - \cos\theta\cos\psi\cos\varphi \\ \cos\psi\sin\theta \end{bmatrix}, \\
\gamma &= \begin{bmatrix} \sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Вывод этих формул можно найти, например, в трактате Уиттекера [57].

Учитывая (2.3) и (2.7), из (2.6) получаем окончательный вид инвариантных многообразий в канонических переменных:

$$
\begin{aligned}
p_\psi &= c_3, \\
p_\theta &= c_1\cos\psi + c_2\sin\psi, \\
p_\varphi &= c_1\sin\theta\sin\psi - c_2\sin\theta\cos\psi + c_3\cos\theta.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Интересно отметить, что эти формулы не зависят от моментов инерции тела I_1, I_2, I_3.

Введем в рассмотрение фундаментальную 1-форму

$$\omega = p_\psi d\psi + p_\theta d\theta + p_\varphi d\varphi$$

и 2-форму $\Omega = d\omega$.

Предложение 1. *Если* $\sum c_k^2 \neq 0$, *то* $\operatorname{rank}(\Omega) = 2$.

Таким образом, найденные трехмерные инвариантные многообразия являются вихревыми.

Доказательство.

Действительно, не нарушая общности можно считать, что постоянный вектор кинетического момента K направлен вдоль γ: $K = k\gamma$,

$k = |K| \neq 0$. Тогда в формулах (2.8) можно положить $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = k$. Следовательно, $\omega = k(d\psi + \cos\theta d\varphi)$ и

$$\Omega = k \sin\theta d\varphi \wedge d\theta. \tag{2.9}$$

Поскольку углы Эйлера определены при $0 < \theta < \pi$, то в этих точках $\operatorname{rank}(\Omega) = 2$. По-другому выбирая обобщенные координаты, можно убедиться в том, что 2-форма Ω невырождена и в полюсах $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Что и требовалось. ■

3°. При фиксированном значении k инвариантные соотношения (2.3) (или, что то же самое, (2.8)) задают на группе $SO(3)$ некоторую динамическую систему

$$\dot{x} = v(x), \quad x = (\psi, \theta, \varphi). \tag{2.10}$$

С использованием кинематических формул Эйлера эти уравнения можно легко записать в явном виде:

$$\begin{aligned}
\dot{\psi} &= k\left(\frac{\sin^2\varphi}{I_1} + \frac{\cos^2\varphi}{I_2}\right), \\
\dot{\theta} &= k\left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right)\sin\theta\sin\varphi\sin\psi, \\
\dot{\varphi} &= k\cos\theta\left(\frac{1}{I_3} - \frac{\sin^2\varphi}{I_1} - \frac{\cos^2\varphi}{I_2}\right).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Уравнения (2.11) хорошо известны в связи с точным интегрированием задачи Эйлера [57]. Их фазовый поток задает стационарное «течение» на группе $SO(3)$. Изучим его свойства.

Справедливы следующие утверждения.

а. Вихревые поля w на группе $SO(3)$, коммутирующие с полем скоростей v, порождают вращение твердого тела с угловой скоростью $\omega = \mu\gamma$, $\mu = \mathrm{const}$. В частности, эти вихревые поля правоинвариантны и все вихревые линии замкнуты. Расслоение группы $SO(3)$ вихревыми линиями совпадает с известным в топологии *расслоением Хопфа.*

b. Эти поля определяются соотношениями $i_\omega \Omega = 0$, $\omega(w) = \text{const} \neq 0$.

c. Гамильтонова система на $T^*SO(3)$ с гамильтонианом

$$H' = K^2/2 = [(I_1\omega_1)^2 + (I_2\omega_2)^2 + (I_3\omega_3)^2]/2$$

имеет те же самые трехмерные инвариантные поверхности (2.8). Отвечающие им векторные поля на группе $SO(3)$ вида (2.10) являются вихревыми полями, коммутирующими с полем (2.11).

d. Используя (2.4) и (2.5), можно вычислить g — определитель матрицы коэффициентов g_{ij} кинетической энергии:

$$g = I_1 I_2 I_3 \sin^2\theta. \tag{2.12}$$

Оказывается, уравнения (2.10) допускают интегральный инвариант

$$\operatorname{mes}(D) = \int_D \sqrt{g}\, d^3x. \tag{2.13}$$

Он задает на группе $SO(3)$ меру, инвариантную относительно всех левых и правых сдвигов.

Напомним, что на каждой компактной группе имеется единственная (с точностью до множителя) биинвариантная мера, которая называется *мерой Хаара* [61]. Инвариантую меру системы (2.10) можно также представить в виде интеграла

$$\int \omega \wedge \Omega. \tag{2.14}$$

e. Метрика на $SO(3)$, задаваемая кинетической энергией твердого тела, позволяет вычислить ротор поля v. Это поле — вихревое. Оказывается, $\operatorname{rot} v$ коммутирует с полем v.

f. Интеграл Бернулли h равен $k^2(I^{-1}\gamma, \gamma)/2$. Критические точки функции h — орбиты постоянных вращений волчка вокруг главных осей инерции (с фиксированным значением момента K), и критические значения совпадают со значениями энергии на этих вращениях. Если c не является критическим значением функции h, то поверхность Бернулли $B_c = \{h(x) = c\}$ — двумерный тор с условно-периодическим движением.

4°. Доказательство **a—f** основано на простых прямых вычислениях. Ввиду (2.9) векторные поля

$$\psi' = \mu, \quad \theta' = 0, \quad \varphi' = 0 \tag{2.15}$$

являются вихревыми. Поля (2.11) и (2.15) коммутируют при условии $\mu = \mathrm{const}$. Согласно кинематическим формулам Эйлера поле (2.15) порождает вращение твердого тела с угловой скоростью $\omega = \mu\gamma$, что доказывает **a**.

Так как $\mu = \mathrm{const}$, то $\omega(w) = k\mu = \mathrm{const}$. Отсюда вытекает заключение **b**. Аналогично доказывается **c**.

Согласно предложению 1 из §1 гл. I, уравнения (2.11) допускают интегральный инвариант

$$\int \nu \, d\psi \, d\theta \, d\varphi \tag{2.16}$$

с плотностью

$$\nu = \left| \frac{\partial(p_\psi, p_\theta, p_\varphi)}{\partial(c_1, c_2, c_3)} \right| = \sin\theta.$$

Ввиду формулы (2.12), инвариант (2.16) отличается от (2.13) постоянным множителем. Наличие интегрального инварианта (2.14) для системы (2.10) вытекает из предложения 2 §3 главы II. Поскольку $\sin\theta > 0$ при $0 < \theta < \pi$, то инвариант (2.16) задает меру на группе $SO(3)$. Непосредственное доказательство ее инвариантности относительно левых и правых сдвигов группы $SO(3)$ можно найти, например, в книге [47].

Согласно §5 главы II, компоненты ротора поля (2.11) (во внутренней метрике на $SO(3)$, определяемой кинетической энергией) равны

$$-\frac{k}{\sqrt{I_1 I_2 I_3}}, \ 0, \ 0.$$

Следовательно, поля $\operatorname{rot} v$ и v коммутируют, что доказывает заключение **e**.

Доказательство **f** повторяет рассуждения §1 главы I. Если тензор инерции I не шаровой, то $h \not\equiv \mathrm{const}$ и поэтому поле v не коллинеарно своему ротору.

5°. Для волчка Эйлера нетрудно выписать явные формулы для потенциалов Клебша. Действительно, можно положить

$$S = k\psi, \quad x_1 = k\cos\theta, \quad x_2 = \varphi. \tag{2.17}$$

В интервале $0 < \theta < \pi$ координата x_1, очевидно, меняется монотонно. В этих переменных фундаментальная 1-форма ω имеет следующий вид:

$$\omega = dS + x_1 dx_2.$$

Следовательно, x_1, x_2 и S — потенциалы Клебша.

Факторизация конфигурационного пространства — группы $SO(3)$ по замкнутым вихревым линиям эквивалентна исключению угла прецессии ψ. Правые части уравнений (2.11) не содержат координаты ψ и поэтому уравнения для θ и φ являются уравнениями на базе расслоения $SO(3)$ вихревыми линиями. Нетрудно понять, что эта база диффеоморфна двумерной сфере, для которой θ и φ будут обычными сферическими координатами. Эта сфера в динамике твердого тела обычно называется *сферой Пуассона*.

В соответствие с общими результатами §4 главы II, координаты x_1 и x_2 на сфере Пуассона удовлетворяет дифференциальным уравнениям Гамильтона

$$\dot{x}_1 = -\frac{\partial h}{\partial x_2}, \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial h}{\partial x_1},$$

где

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 x_2}{I_1} + \frac{\cos^2 x_2}{I_2}\right)\left(k^2 - x_1^2\right) + \frac{x_1^2}{2I_3}$$

— функция Бернулли, представленная в канонических координатах x_1, x_2. Расслоение сферы Пуассона линиями уровня функции h изображено на рис. 22.

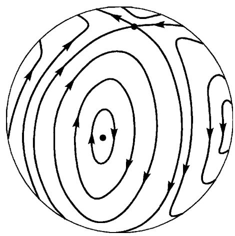

Рис. 22. Динамическая система на сфере Пуассона

6°. В заключение кратко обсудим вихревую теорию волчка Эйлера с диссипацией (§6 главы II). В этом случае динамические уравнения Эйлера принимают вид

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = -\nu I\omega.$$

Здесь $\nu(t) > 0$ — коэффициент вязкости. Эти уравнения вместе с уравнениями Пуассона (2.1) дают соотношения

$$(I\omega, \alpha) = c_1\mu, \quad (I\omega, \beta) = c_2\mu, \quad (I\omega, \gamma) = c_3\mu, \tag{2.18}$$

где $c = \mathrm{const}, \dot{\mu} = \nu$. Без ущерба для общности можно считать, что $c_1 = c_2 = 0$. Полагая $c_2\mu = k(t)$, из (2.18) получим

$$I\omega = k\gamma.$$

Это векторное равенство позволяет найти угловую скорость тела как однозначную функцию его положения и времени:

$$\dot{x} = v(x, t), \quad x = (\psi, \theta, \varphi) \in SO(3).$$

В переменных ψ, θ, φ — углах Эйлера — эта система совпадает с уравнениями (2.11), в которых k будет известной функцией времени.

Как и при $\nu = 0$, векторные поля

$$\psi' = \lambda,\ \theta' = 0,\ \varphi' = 0$$

будут вихревыми и мы снова получаем уже известное нам расслоение группы $SO(3)$ замкнутыми вихревыми линиями. Поскольку правые части уравнений (2.11) не содержат угла прецессии ψ, то фазовый поток уравнений (2.11) (с переменным коэффициентом k) переводит вихревые линии в вихревые линии.

Потенциалы Клебша снова имеют вид (2.17). Функция S и функция Бернулли h теперь зависят от времени. Поскольку $\dot{k} = -\nu k$, то гамильтониан $\mathcal{H}$ из §6 главы II (формула (6.17)) равен, очевидно, функции h. Так как функция h не зависит от угла ψ, то получаем обобщенную теорему Бернулли: при фиксированных значениях t функция h постоянна на вихревых линиях.

§3. Мера Хаара

1°. Основные идеи вихревой теории волчка Эйлера переносятся на более общую задачу о геодезических линиях левоинвариантных метрик на группах Ли.

Пусть G — группа Ли с локальными координатами $x=(x_1, \dots, x_n)$, $T(\dot{x}, x)$ — левоинвариантная метрика, $\omega_1, \dots, \omega_n$ — независимые правоинвариантные поля на группе G.

Предложение 2. *Фазовый поток правоинвариантного (левоинвариантного) поля — семейство левых (правых) сдвигов на G.*

Это — хорошо известный факт теории групп Ли (см., например, [61]). Проиллюстрируем предложение 2 примером матричной группы $GL(n)$. Поскольку каждая группа Ли локально изоморфна некоторой подгруппе GL (*теорема Адо*), то отсюда будет следовать заключение предложения 2 в общем случае.

Итак, согласно §1, правоинвариантное векторное поле на $GL(n)$ имеет вид Az, где A — постоянная $n \times n$-матрица, $z \in GL(n)$. Оно порождает линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{d\alpha} = Az. \tag{3.1}$$

Как известно, ее общее решение имеет вид

$$z = e^{A\alpha} z_0.$$

Соответствие

$$\alpha \to e^{A\alpha} z_0, \quad z_0 \in GL(n)$$

порождает однопараметрическую группу левых сдвигов.

Пусть теперь $z \to zA$ — левоинвариантное поле. Тогда уравнение (3.1) надо заменить на следующее:

$$\frac{dz}{d\alpha} = zA.$$

Его общее решение

$$z = z_0 e^{A\alpha}$$

порождает правые сдвиги на группе $GL(n)$.

Согласно предложению 2, фазовые потоки правоинвариантных векторных полей $w_1, \ldots, w_n$ — семейства левых сдвигов на G. Поскольку кинетическая энергия T левоинвариантна, то уравнения движения допускают n нетеровых интегралов

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \cdot w_1 = c_1, \ \ldots, \ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \cdot w_n = c_n. \tag{3.2}$$

Так как поля $w_1, \ldots, w_n$ линейно независимы в каждой точке G, то при фиксированных значениях c линейную алгебраическую систему (3.2) можно однозначно разрешить относительно скорости:

$$\dot{x} = v(x, c), \quad x \in G. \tag{3.3}$$

Напомним, что на каждой группе Ли имеется единственная (с точностью до постоянного множителя) мера, инвариантная при всех левых (правых) сдвигах. В случае унимодулярной группы эта мера (называемая обычно *мерой Хаара*) биинвариантна. Аналитический критерий унимодулярности заключается в выполнении следующих соотношений для структурных постоянных алгебры Ли:

$$\sum c_{ik}^k = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{3.4}$$

В частности, все компактные группы унимодулярны. Подробности можно найти, например, в книге [61].

Теорема 1 ([40]). *При фиксированных значениях c фазовый поток системы (3.3) сохраняет правоинвариантную меру на G.*

Следствие 1. *Если группа G унимодулярна, то фазовый поток системы (3.3) сохраняет меру Хаара на G.*

Замечание. Как установлено в [34], уравнения Эйлера—Пуанкаре (1.11) на алгебре g допускает инвариантную меру с гладкой плотностью в том и только том случае, когда группа G унимодулярная. В этом случае фазовый поток системы (1.11) сохраняет стандартную меру на g:

$$\int d^n \omega.$$

2°. *Доказательство* теоремы 1 состоит в проверке того факта, что интегральный инвариант из предложения 1 §3 гл. I как раз является правоинвариантной мерой на группе G.

Пусть

$$v_{i1}, \dots, v_{in}$$

— компоненты левоинвариантного поля v_i. В соответствии с (1.2), систему уравнений (3.3) можно переписать в следующем виде:

$$\dot{x}_i = \sum_l v_{il}(x)\omega_l(x, c). \tag{3.5}$$

Система уравнений (1.11) и (1.2) гамильтонова. Следовательно, по теореме Лиувилля, фазовый поток этой системы, представленный в канонических переменных

$$x, \quad y = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}},$$

сохраняет стандартную меру. В переменных x, ω плотность этой меры можно определить как якобиан преобразования

$$x, y \to x, \omega.$$

Положим

$$V = \|v_{ij}\|.$$

Так как

$$y_s = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} = \sum \frac{\partial T}{\partial \omega_i}\frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{x}_s} = \sum m_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{x}_s},$$

то

$$\frac{\partial y}{\partial m} = \frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}}.$$

Следовательно, плотность лиувиллевой инвариантной меры в переменных x, ω равна

$$M = \det \frac{\partial y}{\partial \omega} = \det\Bigl(\frac{\partial y}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial \omega}\Bigr) = (\det V)^{-1} \det I, \tag{3.6}$$

где I — матрица оператора инерции.

Пусть

$$w_i = (w_{i1}, \dots, w_{in}), \quad 1 \le i \le n$$

— правоинвариантные векторные поля на группе G из п. **1°**. По аналогии с (1.2) положим

$$\dot{x}_i = \sum w_{il} s_l, \quad 1 \le i \le n. \tag{3.7}$$

Здесь $s = (s_1, \dots, s_n) \in g$ — скорость рассматриваемой системы. Запишем в явном виде интегралы Нетер:

$$f_j = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_l} \frac{\partial \dot{x}_l}{\partial s_j} = \sum m_k \frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{x}_l} w_{lj} = c_j, \quad 1 \le j \le n. \tag{3.8}$$

Систему уравнений (1.2), (1.11) можно заменить системой (3.5), добавив к ней тривиальные соотношения

$$\dot{c}_1 = \ldots = \dot{c}_n = 0.$$

Плотность меры Лиувилля в переменных x, c равна

$$\rho = M \Big(\det \frac{\partial f}{\partial \omega}\Big)^{-1}.$$

Эта функция, очевидно, дает плотность интегрального инварианта для системы (3.5) с фиксированными значениями c.

Полагая

$$W = \|w_{ij}\|$$

и учитывая формулы (3.6) и (3.8), получим

$$\rho = (\det V)^{-1} \det \Big(\frac{\partial f}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \omega}\Big)^{-1} = (\det W)^{-1}. \tag{3.9}$$

3°. Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений на G

$$\dot{x}_i = \sum v_{il} \omega_l, \tag{3.10}$$

в которую величины $\omega_1, \dots, \omega_n$ входят как постоянные параметры. При всех значениях ω фазовый поток (3.10) представляет семейство правых сдвигов на G.

Лемма 1. *Функция* $\det W^{-1}$ — *плотность интегрального инварианта системы (3.10).*

Следствие 2. *Плотность правоинвариантной меры на группе G равна $c\det W^{-1}$, $c = \mathrm{const} \neq 0$.*

Действительно, каждый правый сдвиг на группе G — сдвиг по траекториям системы (3.10) при подходящих значениях $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

Доказательство леммы 1.

Предположим, что в некотором состоянии положение системы определяется локальными координатами $x_1^0, \ldots, x_n^0$, а правоинвариантные поля представляются векторами $w_1^0, \ldots, w_n^0$. Положим

$$W^0 = \|w_{ij}^0\|.$$

При правом сдвиге на G координаты $x_1^0, \ldots, x_n^0$ переходят в координаты $x_1, \ldots, x_n$, а касательные векторы $w_1^0, \ldots, w_n^0$ в касательные векторы $w_1, \ldots, w_n$. Как хорошо известно,

$$W = JW^0, \quad dx_1 \ldots dx_n = \det J\, dx_1^0 \ldots dx_n^0, \tag{3.11}$$

где J — матрица Якоби преобразования $x_0 \to x$.

Из соотношения (3.10) получаем равенство

$$\det W^{-1}\, dx_1 \ldots dx_n = \det (W^0)^{-1} dx_1^0 \ldots dx_n^0,$$

которое означает, что фазовый поток системы (3.10) имеет интегральный инвариант с плотностью $\det W^{-1}$. ■

Для завершения доказательства теоремы 1 остается воспользоваться формулой (3.9) и заключением леммы 1. ■

4°. Аналогично доказывается

Лемма 2. *Функция* $\det V^{-1}$ — *плотность интегрального инварианта системы (3.7).*

Отсюда вытекает, что плотность левоинвариантной меры на группе G равна $c \det V^{-1}, c = \text{const} \neq 0$. В частности, для унимодулярной группы

$$\frac{\det V}{\det W} = \text{const}\,.$$

Небезынтересно дать прямое доказательство лемм 1 и 2, использующее аналитический критерий унимодулярности (3.4). Точнее, докажем, что при всех значениях ω фазовый поток системы (3.10) сохраняет интегральный инвариант с плотностью $\det V^{-1}$.

Действительно, рассмотрим матрицу

$$K = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} V - \dot{V}, \tag{3.12}$$

где точка обозначает производную в силу системы (3.10). Легко проверить, что j-ый столбец матрицы K равен

$$\sum_{k,j} v_k c_{ij}^k \omega_i,$$

а элемент матрицы $V^{-1}K$ с номером k, j равен

$$\sum c_{ij}^k \omega_i.$$

Умножим равенство (3.12) на V^{-1} слева и вычислим след правой и левой части полученного матричного равенства:

$$\operatorname{tr} V^{-1} K = \operatorname{tr} V^{-1} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} V - \operatorname{tr} V^{-1} \dot{V}.$$

Ввиду предположения (3.4), $\operatorname{tr} V^{-1} K = 0$. Далее

$$\operatorname{tr} V^{-1} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} V = \operatorname{tr} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x}$$

— это дивергенция правой части системы (3.10). Наконец,

$$\operatorname{tr} V^{-1} \dot{V} = \frac{d}{dt} \ln \det V.$$

В результате переходим к тождеству

$$\operatorname{tr}\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}+\frac{d}{dt}\ln\left(\det V\right)^{-1}=0,$$

которое является уравнением Лиувилля для плотности интегрального инварианта $\det V^{-1}$. Что и требовалось.

§4. Скобки Пуассона

1°. Ключевую роль в гамильтоновой механике играют *скобки Пуассона*. Они уже упоминались в гл. I в связи с динамикой точечных вихрей. Мы напомним их определение и основные свойства, а также докажем ряд утверждений, которые будут использованы в дальнейшем.

Каждой упорядоченной паре гладких функций f и g на фазовом пространстве M^{2n} ставится в соответствие функция

$$\{f,g\}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i}-\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right),$$

которая называется *скобкой Пуассона* функций f и g. Производная по времени функции $F(x,y,t)$ в силу гамильтоновой системы с гамильтонианом H, очевидно, равна

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\{F,H\}.$$

Следовательно, сами канонические уравнения можно переписать в следующем виде:

$$\dot{x}_i=\{x_i,H\},\quad \dot{y}_i=\{y_i,H\};\quad 1\le i\le n.$$

Эти соотношения показывают особую роль скобки Пуассона в теории гамильтоновых систем.

Скобка Пуассона удовлетворяет следующим свойствам:

(1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (кососимметричность);

(2) $\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1\{f, g\} + c_2\{f_2, g\}$, где c_1, c_2 — вещественные числа (билинейность);

(3) $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$ (тождество Якоби);

(4) $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$ (правило Лейбница);

(5) если $\{f, g\} = 0$ для всех функций g, то $f = \mathrm{const}$ (невырожденность).

Множество всех гладких функций на фазовом пространстве C^∞ с обычными правилами сложения и умножения на числа образует бесконечномерное линейное пространство. Согласно (1),(2) и (3), операция «внутреннего умножения» $\{\cdot, \cdot\}$ превращает это пространство в алгебру Ли.

Из тождества Якоби вытекает простая, но важная

Теорема 2 (Пуассон). *Скобка Пуассона первых интегралов уравнений Гамильтона также является первым интегралом.*

Отметим, что скобка двух интегралов может оказаться константой или даже нулем. Из теоремы Пуассона вытекает, что интегралы образуют подалгебру Ли в алгебре Ли всех функций.

Если $\{f, g\} = 0$, то говорят, что функции f и g коммутируют или находятся *в инволюции*. Если к тому же f и g не зависят от t, то f — интеграл уравнений Гамильтона с гамильтонианом g, и наоборот g — интеграл уравнений Гамильтона с гамильтонианом f. Эта двойственность объясняет термин «инволюция».

2°. В качестве важного примера рассмотрим нетеровы интегралы (3.2), которые в канонических переменных имеют следующий вид:

$$F_1 = y \cdot w_1, \ \ldots, \ F_n = y \cdot w_n. \tag{4.1}$$

Предложение 3. *Линейные комбинации функций $F_1, \ldots, F_n$ с операцией коммутирования $\{\cdot, \cdot\}$ порождают n-мерную алгебру Ли, изоморфную g.*

Доказательство.

Действительно, поскольку алгебра правоинвариантных полей на группе G изоморфна алгебре Ли g, то поля $w_1, \dots, w_n$ можно выбрать так, чтобы

$$[w_i, w_j] = \sum c_{ij}^k w_k. \tag{4.2}$$

Здесь c_{ij}^k — структурные постоянные алгебры g.

Нетрудно проверить равенства

$$\{F_i, F_j\} = y \cdot [w_i, w_j].$$

Ввиду (4.1) и (4.2) получаем

$$\{F_i, F_j\} = \sum c_{ij}^k F_k. \tag{4.3}$$

■

3°. Пусть $f_1, \dots, f_n$ — функции на фазовом пространстве M^{2n} (возможно, зависящие от t), причем

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \neq 0.$$

Тогда, по теореме о неявных функциях, систему уравнений

$$f_1(x, y, t) = c_1, \ \dots, \ f_n(x, y, t) = c_n \tag{4.4}$$

можно разрешить (по крайней мере локально) относительно импульсов y:

$$y_1 = u_1(x, t, c), \ \dots, \ y_n = u_n(x, t, c), \quad c = (c_1, \dots, c_n). \tag{4.5}$$

Введем $n \times n$-матрицу скобок Пуассона

$$A = \big\|\{f_i, f_j\}\big\|.$$

В выражениях для скобок импульсы следует заменить в соответствии с формулами (4.5).

Лемма 3. $\operatorname{rank}(\operatorname{rot} u) = \operatorname{rank} A$.

Следствие 3. *Если функции $f_1, \ldots, f_n$ находятся в инволюции, то 1-форма*

$$\sum u_i(x,t,c)\,dx_i$$

замкнута при всех значениях t и c.

Доказательство леммы 3.

Воспользуемся очевидным фактом, что функции

$$F_k(x,t,c) = f_k(x, u(x,t,c), t), \quad 1 \le k \le n \tag{4.6}$$

тождественно равны c_k. Следовательно,

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial f_k}{\partial y_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial F_s}{\partial x_i} = \frac{\partial f_s}{\partial x_s} + \sum \frac{\partial f_s}{\partial y_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0.$$

Умножим первое равенство на $\partial f_s/\partial y_i$, а второе на $-\partial f_k/\partial y_i$ и просуммируем по индексу i. В результате придем к соотношениям

$$\{f_k, f_s\} + \sum_{i,j} \frac{\partial f_k}{\partial y_j}\frac{\partial f_s}{\partial y_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = 0, \quad 1 \le k,\ s \le n. \tag{4.7}$$

Введем $n \times n$-матрицу

$$B = \left\|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right\|.$$

Здесь импульсы также исключены с помощью подстановки (4.5). Согласно предположению, матрица B невырождена.

Совокупность соотношений (4.7) можно представить в матричной форме

$$A = -B(\operatorname{rot}\, u)B^T.$$

Как известно, в этом случае ранги матриц A и $\operatorname{rot} u$ совпадают. ■

4°. Пусть $\Phi(x,y,t)$ — еще одна функция на фазовом пространстве, коммутирующая с функциями $f_1, \ldots, f_n$:

$$\{\Phi, f_k\} = 0, \quad 1 \le k \le n. \tag{4.8}$$

Ей можно сопоставить гамильтонову систему

$$\dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Положим

$$w = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=u(x,t,c)}.$$

Ясно, что w — векторное поле на конфигурационном пространстве.

Лемма 4. *Если Φ – функция от $f_1, \ldots, f_n$, то w — вихревое поле:*

$$(\operatorname{rot} u) w = 0. \tag{4.9}$$

Доказательство.

Из (4.4) и (4.5) вытекают тождества

$$y_i \equiv u_i(x, t, f(x, y, t)), \quad 1 \le i \le n.$$

Следовательно,

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial c_s} \frac{\partial f_s}{\partial y_j} = \delta_{ij}, \tag{4.10}$$

где δ_{ij} — символ Кронеккера.

Умножая (4.7) на производные

$$\frac{\partial u_p}{\partial c_k}, \quad \frac{\partial u_q}{\partial c_s},$$

суммируя по индексам k, s и используя (4.10), приходим к равенствам

$$\sum_{k,s} \frac{\partial u_p}{\partial c_k} \frac{\partial u_q}{\partial c_s} \{f_k, f_s\} + \frac{\partial u_p}{\partial x_q} - \frac{\partial u_q}{\partial x_p} = 0.$$

Чтобы проверить справедливость (4.9), умножим полученные соотношения на

$$w_p = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y_p} \right|_{y=u(x,t,c)}$$

и просуммируем по p от 1 до n. Нас интересуют значения

$$\sum_{ksp} \frac{\partial u_p}{\partial c_k} \frac{\partial \Phi}{\partial y_p} \frac{\partial u_q}{\partial c_s} \{f_k, f_s\}.$$

Согласно предположению, функция

$$\phi(x, t, c) = \Phi(x, u(x, t, c), t)$$

зависит лишь от $c_1 = f_1, \ldots, c_n = f_n$. Поэтому

$$\sum_p \frac{\partial \Phi}{\partial y_p} \frac{\partial u_p}{\partial c_k} = \frac{\partial \phi}{\partial c_k}.$$

Далее, сумма

$$\sum_k \frac{\partial \phi}{\partial c_k} \{f_k, f_s\}$$

равна скобке Пуассона $\{\Phi, f_s\}$, которая обращается в нуль согласно предположению. ■

5°. Каждой гладкой функции f, заданной в фазовом пространстве, можно поставить в соответствие каноническую систему дифференциальных уравнений с гамильтонианом f:

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Порождающее ее векторное поле называется *гамильтоновым*; обозначим его v_f.

Пусть L_f — оператор дифференцирования вдоль поля v_f. По определению скобки Пуассона

$$L_f h = \{h, f\}.$$

Лемма 5. *Коммутатор гамильтоновых векторных полей v_f и v_g — гамильтоново поле с гамильтонианом $\{f, g\}$.*

Следствие 4. *Если* $\{f, g\} = 0$, *то* $[v_f, v_g] = 0$.

Доказательство леммы 5 основано на применении тождества Якоби. Действительно,

$$\begin{aligned}(L_g L_f - L_f L_g)h &= L_g\{h, f\} - L_g\{h, g\} = \\ &= \{\{h, f\}, g\} - \{\{h, g\}, f\} = \\ &= -\{\{f, g\}, h\} = L_{\{f,g\}}.\end{aligned}$$

■

§5. Функции Казимира и вихревые многообразия

1°. Сосчитаем скобку Пуассона двух функций f и h, определенных на дуальном пространстве g^*: они зависят только от переменных $m_1, \dots, m_n$. Для этого надо (следуя общему правилу) рассмотреть гамильтонову систему с гамильтонианом h и вычислить полную производную по времени функции f в силу этой системы. В переменных x, m уравнения Гамильтона имеют вид уравнений Четаева (1.7)

$$\dot{m}_k = \sum c_{ik}^j m_j \frac{\partial h}{\partial m_i}; \quad 1 \le k \le n.$$

Поскольку f не зависит от x, то нет смысла записывать замыкающую группу уравнений. Следовательно,

$$\dot{f} = \{f, h\} = \sum c_{ik}^j m_j \frac{\partial f}{\partial m_k} \frac{\partial g}{\partial m_i}. \tag{5.1}$$

Итак, скобка Пуассона функций на g^* также является функцией на g^*. Скобка (5.1) называется *скобкой Ли—Пуассона*; она была впервые введена Софусом Ли в его теории групп преобразований.

Из (5.1) вытекает важная формула

$$\{m_i, m_j\} = \sum c_{ij}^k m_k, \tag{5.2}$$

вполне аналогичная (4.3). Она показывает, что пространство линейных функций на g^* (канонически изоморфное линейному пространству g) является алгеброй Ли относительно скобки Ли—Пуассона; эта алгебра, конечно, изоморфна алгебре g.

Для скобки Ли—Пуассона выполнены условия (1)–(4). Однако она может оказаться вырожденной: могут существовать непостоянные функции, коммутирующие со всеми функциями на g^*. Такие функции принято называть *функциями Казимира.*

Рассмотрим пример. В задаче Эйлера о свободном вращении волчка скобка Ли—Пуассона задается соотношениями

$$\{m_1, m_2\} = m_3, \quad \{m_2, m_3\} = m_1, \quad \{m_3, m_1\} = m_2.$$

Она вырождена: функция $k^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$ (квадрат кинетического момента тела) коммутирует со всеми функциями на $(so(3))^*$. Согласно вихревой теории волчка Эйлера (§2), интегральные кривые гамильтоновой системы с гамильтонианом k^2 являются вихревыми линиями.

2°. Оказывается, функции Казимира тесно связаны с нетеровыми интегралами (4.1).

Лемма 6. $\{m_i, F_j\} = 0$ *для всех* $i, j = 1, \ldots, n$.

Доказательство.

Действительно, примем в качестве гамильтониана функцию m_i. Поскольку она инвариантна при всех левых сдвигах (как и исходная левоинвариантная метрика), то уравнения с исходным гамильтонианом m_i допускают n нетеровых интегралов $F_1, \ldots, F_n$. ■

Например, для волчка Эйлера лемма 6 утверждает, что коммутируют проекции кинетического момента тела на подвижные и неподвижные оси. Это легко проверить непосредственно, используя канонические координаты $\theta, \phi, \psi, p_\theta, p_\phi, p_\psi$. Действительно (в обозначениях §2), кинетический момент в направлении неподвижного вектора γ равен p_ψ, а его проекции на подвижные оси равны $I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3$. Представленные в канонических переменных, они не содержат угла прецессии ψ. Следовательно, их скобка Пуассона с импульсом p_ψ равна нулю.

От канонических координат x, y в фазовом пространстве $T^*G \simeq \simeq G \times g^*$ мы можем перейти к переменным x, m. После этой подстановки нетеровы интегралы становятся функциями от x, m, линейными по $m_1, \ldots, m_n$. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в окрестности единицы группы G, которой отвечает значение $x = 0$.

Лемма 7. *Пусть в единице группы G правоинвариантные поля $w_1, \ldots, w_n$ имеют вид*

$$(1, 0, \ldots, 0)^T, \ldots, (0, 0, \ldots, 1)^T. \tag{5.3}$$

Тогда в этой точке $F_k = m_k$ $(1 \leq k \leq m)$.

Доказательство.

Действительно, как отмечено в §1, лево- и правоинвариантные поля на группе G получаются переносами одного и того же касательного вектора в единице с помощью левых и правых сдвигов. Следовательно, левоинвариантные поля в единице также имеют вид (5.3) и поэтому матрица их компонент $\|v_{ij}\|$ будет единичной. Учитывая (1.2) и (5.3), получим

$$F_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \cdot w_k = \frac{\partial T}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}} \cdot w_k = \frac{\partial T}{\partial \omega} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}} \right)^T w_k = \frac{\partial T}{\partial \omega_k} = m_k.$$

■

Для волчка Эйлера лемма 7 имеет простой смысл. Единица группы $SO(3)$ отвечает совпадению подвижных и неподвижных осей. Следовательно, в этом положении совпадают проекции кинетического момента на подвижные и неподвижные оси.

Предложение 4. *Функции Казимира — это функции от нетеровых интегралов, не зависящие от координат на группе.*

Доказательство состоит из двух частей.

1) Пусть функция

$$\Phi(F_1, \ldots, F_n) \tag{5.4}$$

не зависит от координат $x_1, \dots, x_n$ на группе G. Поскольку $F_k = m_k$ при $x = 0$ (лемма 2), то функция (5.4) совпадает с функцией

$$\Phi(m_1, \dots, m_n). \tag{5.5}$$

Согласно лемме 6, эта функция (а, значит, и (5.4)) коммутирует со всеми нетеровыми интегралами. Ввиду совпадения вида коммутационных соотношений (4.3) и (5.2), функция (5.5) коммутирует со всеми $m_1, \dots, m_n$. Значит, она — функция Казимира.

2) Обратно, пусть (5.5) — функция Казимира. Тогда (5.4) коммутирует со всеми нетеровыми интегралами. Следовательно, она не зависит от точки на группе. Поскольку функции (5.4) и (5.5) совпадают при $x = 0$, то они равны тождественно. ■

3°. При фиксированных значениях нетеровых интегралов

$$F_1 = c_1, \dots, F_n = c_n \tag{5.6}$$

канонические импульсы можно представить как однозначные функции на группе G:

$$y_1 = u_1(x, c), \ \dots, \ y_n = u_n(x, c).$$

Пусть T — левоинвариантная метрика (кинетическая энергия) на группе G, представленная в канонических переменных. Положим

$$\dot{x} = \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=u(x,c)} = v(x, c), \quad x \in G.$$

Поле v, очевидно, совпадает с полем (3.3).

Пусть $\Phi_1(x, y), \ \dots, \ \Phi_k(x, y)$ — функции Казимира. Им можно сопоставить k векторных полей на группе G:

$$w_1(x, c) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\bigg|_{y=u}, \ \dots, \ w_k(x, c) = \frac{\partial \Phi_k}{\partial y}\bigg|_{y=u}.$$

Векторные поля $v, w_1, \dots, w_k$ имеют прозрачный геометрический смысл. Пусть

$$v_T, \ v_{\Phi_1}, \ \dots, \ v_{\Phi_k} \tag{5.7}$$

— гамильтоновы векторные поля на $G \times g^*$, порожденные гамильтонианами $T, \Phi_1, \ldots, \Phi_k$. Поскольку эти функции левоинвариантны, то интегралы Нетер будут интегралами каждого поля (5.7). Следовательно, векторные поля (5.7) касаются каждой n-мерной регулярной поверхности

$$\Sigma_c = \{F_1 = c_1, \ldots, F_n = c_n\} \subset G \times g^*.$$

Образы гамильтоновых полей (5.7) при естественном проектировании $\Sigma_c \to G$ (точка x, y переходит в точку x) — это как раз наши векторные поля $v, w_1, \ldots, w_k$.

Теорема 3. *Справедливы следующие заключения:*

(1) поля $w_1, \ldots, w_k$ — вихревые,

(2) они коммутируют с полем v и между собой,

(3) $\omega(w_j) = \mathrm{const}$, где $\omega = \sum u_i dx_i$.

Это утверждение, отмеченное в работе [71], распространяет на многомерный случай свойства **a—c** вихревой теории волчка (§2).

Доказательство.

Заключение (1) — прямое следствие леммы 4 из §4. Поскольку

$$\{T, \Phi_i\} = 0, \quad \{\Phi_i, \Phi_j\} = 0,$$

то гамильтоновы поля (5.7) коммутируют между собой (лемма 3 из §4). Следовательно, коммутируют проекции на группу G сужений этих полей на инвариантные многообразия Σ_c.

Докажем, наконец, заключение (3). Сперва заметим, что каждая однородная часть разложения функции Казимира в ряд Маклорена по однородным формам переменных $m_1, \ldots, m_n$ сама является функцией Казимира. Поэтому можно ограничиться рассмотрением однородных многочленов. Далее,

$$i_{w_s}\omega = \left(y \cdot \frac{\partial \Phi_s}{\partial y}\right)_{y=u} \tag{5.8}$$

равно $p\Phi_s$, где p — степень однородности Φ_s (формула Эйлера). Согласно предложению 2, функция Казимира — полином от нетеровых интегралов. Поэтому после подстановки $y = u(x, c)$ получаем, что правая часть (5.8) зависит лишь от $c_1, \dots, c_n$. ■

4°. В связи с теоремой 3 возникает естественный вопрос: исчерпывают ли комбинации векторных полей $w_1, \dots, w_k$ все вихревые поля? Ответ на этот вопрос существенно зависит от постоянных нетеровых интегралов $c_1, \dots, c_n$. Например, если $c = 0$, то и $\omega = 0$ и поэтому любое ненулевое векторное поле будет вихревым.

Однако для почти всех значений $c_1, \dots, c_n$ других вихревых полей нет. Эти значения определяются условием, что ранг r кососимметрической матрицы скобок Пуассона

$$\|\{F_i, F_j\}\| = \left\| \sum_k c_{ij}^k c_k \right\|$$

максимальный. Кстати сказать, r — число четное. Можно показать, что количество независимых функций Казимира равно $k = n - r$. Тогда, по лемме 3 из §4, все вихревые векторы сводятся к линейным комбинациям векторов $w_1, \dots, w_k$.

Поскольку поля $w_1, \dots, w_k$ левоинвариантные, то эти векторы линейно независимы во всех точках группы G. Так как они коммутируют, то (по теореме Фробениуса) их линейные комбинации порождают интегрируемое k-мерное распределение касательных векторов на G. Интегральные k-мерные многообразия этого распределения будут как раз *вихревыми многообразиями*.

Если группа G компактна (как для волчка Эйлера), то вихревые многообразия — замкнутые поверхности. Это — аналог свойства замкнутости вихревых линий в случае вращающегося волчка. Поскольку k-мерные вихревые многообразия компактны и допускают k независимых коммутирующих касательных полей, то они будут k-мерными торами. Тор, содержащий единицу группы, будет подгруппой группы G; он называется *максимальным тором* группы G. Максимальные торы играют ключевую роль в классификации компактных групп Ли (см., например, [1]).

Свойство компактности вихревых многообразий позволяет осуществить в целом факторизацию группы G по вихревым многообразиям. После факторизации система уравнений $\dot{x} = v(x, c)$ становится гамильтоновой на фактор-пространстве четной размерности $n - k$. Обсуждение различных аспектов понижения порядка систем с симметриями можно найти в книге [10].

5°. Пусть $H_1, \dots, H_s$ — функции на дуальном пространстве g^*, которые являются первыми интегралами уравнений движения: их скобка Ли—Пуассона с кинетической энергией, представленной в переменных $m_1, \dots, m_n$, равна нулю. Эти интегралы можно продолжить до функций, заданных во всем пространстве. Положим

$$h_1(x, c) = H_1(x, u(x, c)), \ \dots, \ h_s(x, c) = H_s(x, u(x, c)).$$

Если $H_1, \dots, H_s$ не являются функциями Казимира, то для почти всех значений $c \in R^n$ функции $h_1, \dots, h_s$ непостоянные на группе G. Положим еще

$$v_1 = \left.\frac{\partial H_1}{\partial y}\right|_{y=u}, \dots, v_s = \left.\frac{\partial H_s}{\partial y}\right|_{y=u}.$$

Теорема 4. *Функции $h_1, \dots, h_s$ — функции Бернулли (они постоянны на линиях тока и на вихревых линиях), а векторные поля $v_1, \dots, v_s$ на группе G коммутируют с вихревыми полями $w_1, \dots, w_k$.*

Это утверждение — следствие коммутируемости функций $H_1, \dots, H_s$ с нетеровыми интегралами и функциями Казимира. Поскольку к функциям $H_1, \dots, H_s$ можно добавить кинетическую энергию, то теорема 4 — обобщение свойства **f** вихревой теории волчка.

Рассмотрим важный частный случай, когда

$$s = (n - k)/2 \tag{5.9}$$

и независимые интегралы $H_1, \dots, H_s$ попарно находятся в инволюции. Тогда, очевидно,

$$[v_i, v_j] = 0, \quad 1 \le i, j \le s. \tag{5.10}$$

Пусть

$$B_\alpha = \{x\colon h_1(x_1) = \alpha_1, \ldots, h_s(x) = \alpha_s\}$$

— поверхности Бернулли. Для некритических значений $\alpha \in R^n$ они являются регулярными многообразиями размерности $s + k$, которые (по теореме 2) допускают $s + k$ независимых касательных полей

$$v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_k.$$

Согласно теореме 4 и (5.10), эти поля попарно коммутируют. Следовательно, если группа G компактна, то каждая связная компонента поверхности Бернулли будет $(s + k)$-мерным тором.

Для волчка Эйлера $n = 3$, $k = 1$ (единственная функция Казимира — квадрат модуля момента), $s = 1$ (если тензор инерции не шаровой, то интеграл энергии независим с функцией Казимира). Соотношение (5.9) выполнено и поэтому группа $SO(3)$ расслоена на двумерные торы — поверхности Бернулли.

Глава IV
Вихревой метод интегрирования уравнений Гамильтона

§1. Метод Гамильтона—Якоби и теорема Лиувилля о полной интегрируемости

1°. Как известно (§7 гл. I), *метод Гамильтона—Якоби* сводит задачу о решении канонических уравнений

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; \quad 1 \leq i \leq n$$
$$H = H(x, y, t) \tag{1.1}$$

к исследованию уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\Big(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial S}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_n}, t\Big) = 0. \tag{1.2}$$

Пусть $S(x, t, c)$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ — полный интеграл уравнения (1.2): при всех c эта функция удовлетворяет уравнению (1.2) и

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial c} \right\| \neq 0. \tag{1.3}$$

Тогда, по *теореме Якоби*, справедливы соотношения

$$y = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad -a = \frac{\partial S}{\partial c}; \quad a = (a_1, \ldots, a_n), \tag{1.4}$$

из которых находится *общее решение* системы (1.1): координаты x и импульсы y как функции от t и $2n$ произвольных постоянных $a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_n$.

Согласно условию (1.3), из первой группы уравнений можно найти (по крайней мере локально) $c_1, \ldots, c_n$ как функции от x, y, t. Эти функции — независимые интегралы уравнений (1.1), попарно находящиеся в инволюции: $\{c_i, c_j\} = 0$ (лемма 1 из §4 гл. III).

Как заметил Лиувилль (1855 г.), последнее замечание можно обратить.

Теорема 1. *Предположим что известны n независимых интегралов $F_1(x,y,t), \ldots, F_n(x,y,t)$ уравнений (1.1), находящихся попарно в инволюции: $\{F_i, F_j\} = 0$. Тогда уравнения (1.1) интегрируются в квадратурах.*

Интегрирование в квадратурах означает возможность отыскания полного решения с помощью алгебраических операций (включая обращение функций) и вычисления интегралов функций одного переменного.

2°. С методической точки зрения *теорему Лиувилля* проще сначала доказать в автономном случае, когда функции $H, F_1, \ldots, F_n$ не зависят явно от t и, в частности, гамильтониан H является одним из интегралов. Для автономного случая теорема 1 была сформулирована несколько раньше Лиувилля французским математиком Буром. Полезно иметь в виду, что каждая из гамильтоновых систем с гамильтонианом F_i имеет тот же самый набор интегралов. Такие системы называют еще *вполне интегрируемыми.*

Гамильтоновы векторные поля

$$v_{F_1}, \ldots, v_{F_n}$$

касаются интегральных многообразий

$$N_c = \{F_1 = c_1, \ldots, F_n = c_n\}$$

и попарно коммутируют (лемма 3 из §4 гл. III). Следовательно, каждая компактная компонента N_c будет n-мерным тором с условно-периодическими движениями. Обсуждение геометрического варианта теоремы Лиувилля можно найти, например, в книге [5].

3°. Итак, докажем теорему 1 для автономного случая. Будем дополнительно предполагать, что

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \neq 0. \tag{1.5}$$

Это предположение носит технический характер и принято для простоты изложения; оно гарантирует независимость функций $F_1, \ldots, F_n$.

Ввиду (1.5), систему алгебраических уравнений

$$F_1(x, y) = c_1, \ldots, F_n(x, y) = c_n$$

можно локально разрешить относительно импульсов:

$$y_1 = u_1(x, c), \ldots, y_n = u_n(x, c).$$

Согласно следствию из леммы 1 (§4 гл. III), 1-форма

$$\omega = u_1 dx_1 + \cdots + u_n dx_n \tag{1.6}$$

будет полным дифференциалом некоторой функции $W(x, c)$. Кстати, для ее построения достаточно несколько раз вычислить интегралы от функции одного переменного.

Покажем теперь, что

$$H(x, u(x, c)) = h(c). \tag{1.7}$$

Действительно, вычислим производную левой части равенства (1.7) по координате x_i:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial H}{\partial y_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = a_i. \tag{1.8}$$

Поскольку

$$F_k(x, u(x, c)) \equiv c_k, \tag{1.9}$$

то

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial F_k}{\partial y_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0. \tag{1.10}$$

Из (1.8) и (1.10) вытекают равенства

$$\sum_i a_i \frac{\partial F_k}{\partial y_i} = \{H, F_k\} + \sum_{i,j} \frac{\partial H}{\partial y_j} \frac{\partial F_k}{\partial y_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right).$$

Поскольку функции $F_1, \ldots, F_n$ — первые интегралы и 1-форма (1.6) замкнута, то $a \cdot \xi_k = 0$, где

$$a = (a_1, \ldots, a_n)^T, \quad \xi_k = \left(\frac{\partial F_k}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial F_k}{\partial y_n} \right)_{y=u}.$$

Ввиду неравенства (1.5) векторы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ линейно независимы. Следовательно, $a = 0$, что доказывает (1.7).

Положим

$$S(x, t, c) = -h(c)t + W(x, c). \tag{1.11}$$

Поскольку гамильтониан H не зависит явно от t и выполнено (1.7), то при фиксированных значениях c функция (1.11) удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби (1.2). Осталось проверить неравенство (1.3). Из (1.9) вытекают соотношения

$$\sum_i \frac{\partial F_k}{\partial y_i} \frac{\partial u_i}{\partial c_j} = \delta_{kj},$$

или, что то же самое

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial y} \right\| \left\| \frac{\partial u}{\partial c} \right\| = E.$$

Следовательно, матрица

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial c} \right\| = \left\| \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial c} \right\| = \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial c} \right\|$$

невырождена.

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось воспользоваться теоремой Якоби о полном интеграле.

4°. В неавтономном случае (следуя §6 гл. I) полезно расширить фазовое пространство, ввести новые канонические координаты $x_{n+1} = t$, y_{n+1} и перейти к гамильтониану

$$\mathcal{H} = y_{n+1} + H(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, x_{n+1}).$$

Дифференциальные уравнения Гамильтона

$$\dot{x}_s = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_s}, \quad \dot{y}_s = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_s}; \quad 1 \leq s \leq n+1, \tag{1.12}$$

очевидно, эквивалентны исходным уравнениям (1.1). Первые интегралы из теоремы 1 будут теперь иметь вид

$$\mathcal{F}_k = F_k(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, x_{n+1}), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Ясно, что

$$\{\mathcal{F}_k, \mathcal{H}\} = \frac{\partial F_k}{\partial t} + \{F_k, H\} = \dot{F}_k = 0,$$

$$\{\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j\} = \{F_i, F_j\} = 0.$$

Таким образом, гамильтонова система (1.12) с $n+1$ степенями свободы допускает $n+1$ независимых интегралов $\mathcal{H}, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$, находящихся попарно в инволюции. Остается применить к (1.12) автономный вариант теоремы Лиувилля.

5°. Как мы видели (§1 гл. II), гамильтоновы системы дифференциальных уравнений допускают более общее описание:

$$(\operatorname{rot} u)\dot{x} = -\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{1.13}$$

Здесь $(x_1, \ldots, x_n) = x$ — локальные координаты на гладком многообразии M^n, $\operatorname{rot} u$ — невырожденная матрица ротора ковекторного поля $u(x)$, h — гладкая функция на M^n. В силу предположения невырожденности $\operatorname{rot} u$, n будет обязательно четным. По теореме Дарбу, заменой переменных x систему (1.13) локально всегда можно привести к каноническому виду уравнений Гамильтона. Однако это приведение лишь в исключительных случаях удается осуществить в явном виде.

Легко понять, что скобку Пуассона можно определить не только с использованием канонических переменных. Действительно, пусть g — гладкая функция на M^n. Вычислим ее производную в силу системы (1.13):

$$\dot{g} = \{g, h\} = \sum \gamma_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j}. \tag{1.14}$$

Здесь γ_{ij} — элементы матрицы, обратной $\operatorname{rot} u$. Скобки (1.14), очевидно, обладают всеми свойствами скобки Пуассона.

Предположим теперь, что система дифференциальных уравнений (1.13) допускает $n/2$ независимых интегралов

$$f_1 = h, f_2, \ldots, f_{n/2}, \tag{1.15}$$

попарные скобки Пуассона (1.14) которых равны нулю. Спрашивается, можно ли в этом случае проинтегрировать в квадратурах систему (1.13)? Ввиду неконструктивности теоремы Дарбу мы не можем воспользоваться методом Гамильтона—Якоби. Тем не менее для систем вида (1.13) также справедлива теорема Лиувилля, однако ее доказательство основано на других идеях.

Пусть $v_1, \ldots, v_{n/2}$ — гамильтоновы поля, порожденные гамильтонианами (1.15):

$$(\operatorname{rot} u) v_k = -\frac{\partial f_k}{\partial x}, \quad 1 \le k \le n/2.$$

Поле v_1 отвечает исходному векторному полю (1.13). Эти поля попарно коммутируют и касаются $n/2$-мерных интегральных многообразий

$$I_c = \{x \in M : f_1(x) = c_1, \ldots, f_{n/2}(x) = c_{n/2}\}.$$

Таким образом, мы приходим к следующей общей картине: на k-мерном многообразии I^k заданы k векторных полей, которые линейно независимы в каждой точке I и попарно коммутируют между собой. Тогда, оказывается, интегральные кривые каждого из этих полей можно найти с помощью квадратур. Это утверждение является частным случаем *теоремы Софуса Ли* об интегрируемости системы k дифференциальных уравнений, допускающей k-мерную разрешимую группу симметрий. В нашем случае фазовые потоки векторных полей $v_1, \ldots, v_k$ $(k = n/2)$ переводят интегральные кривые каждого поля v_i в интегральные кривые того же поля. Таким образом, мы имеем k-мерную коммутативную группу симметрий (как известно, все абелевы группы являются разрешимыми).

Теорема Ли — это непрерывный аналог знаменитой теории Галуа о решении в радикалах алгебраического уравнения с разрешимой группой перестановок его корней. Ее подробное доказательство с приложениями к уравнениям Гамильтона можно найти в книге [37].

Отметим, что компактные связные компоненты неособых интегральных многообразий I_c будут $n/2$-мерными торами, причем в некоторых угловых координатах на этих торах компоненты векторных полей $v_1, \ldots, v_{n/2}$ постоянны одновременно. Таким образом, фазовые потоки векторных полей v_k сводятся к равномерному движению по прямым линиям (см., например, [5]).

§2. Некоммутативное интегрирование уравнений Гамильтона

1°. Пусть

$$F_1, \ldots, F_m \tag{2.1}$$

— независимые интегралы гамильтоновой системы в $2n$-мерном фазовом пространстве. В автономном случае среди них может быть функция Гамильтона.

Набор функций (2.1) не обязательно инволютивный. Пусть $2r$ — ранг кососимметричной матрицы их скобок Пуассона

$$\|\{F_i, F_j\}\|, \quad 1 \leq i, j \leq m. \tag{2.2}$$

Мы рассматриваем область фазового пространства, где этот ранг постоянен. Отметим, что почти всюду ранг матрицы (2.2) принимает максимальное значение.

Из симплектической геометрии хорошо известно неравенство

$$m \leq n + r.$$

Например, в книге Картана [28] оно является простым следствием других более глубоких результатов. Предположение

$$m = n + r \tag{2.3}$$

часто называется *условием некоммутативной интегрируемости* уравнений Гамильтона. Смысл этого термина будет разъяснен ниже. В частном случае, когда интегралы (2.1) коммутируют ($r = 0$), условие (2.3) переходит в известное условие Лиувилля полной интегрируемости гамильтоновых систем. Условие (2.3) имеет прозрачный смысл: к функциям (2.1) нельзя добавить другие независимые функции без увеличения ранга матрицы их скобок Пуассона.

В теории некоммутативного интегрирования обычно рассматриваются замкнутые наборы интегралов (2.1): их скобки Пуассона являются функциями от $F_1, \ldots, F_n$. Это предположение естественно с точки зрения теоремы Пуассона. Легко понять, что любой набор первых интегралов можно расширить до замкнутого набора с помощью дифференцирований и алгебраических операций (см., например, [26]). Однако предположение замкнутости не всегда необходимо.

2°. В качестве примера укажем *теорему Нехорошева* [48], с которой собственно и началась теория некоммутативного интегрирования. Предполагается, что автономная гамильтонова система допускает $n+k$ независимых первых интегралов

$$F_1, \ldots, F_{n+k}, \tag{2.4}$$

причем первые $n-k$ функций находятся в инволюции со всеми интегралами (2.4). Введем $(n-k)$-мерные интегральные многообразия в $2n$-мерном фазовом пространстве

$$I_c = \{F_1 = c_1, \ldots, F_{n+k} = c_{n+k}\}. \tag{2.5}$$

Н. Н. Нехорошев доказал, что если I_c связно и компактно, то I_c диффеоморфно $(n-k)$-мерному тору, причем в окрестности этого тора найдутся канонические координаты J, p, $\varphi \bmod 2\pi, q$ такие, что

$$J_s = J_s(F_1, \ldots, F_{n-k}), \quad 1 \leq s \leq n-k, \tag{2.6}$$

а сопряженные переменные p, q зависят от всех интегралов (2.4).

Поскольку гамильтониан H системы, очевидно, находится среди первых $n-k$ интегралов, то, согласно (2.6), в новых канонических переменных

$$H = H(J_1, \ldots, J_{n-k}).$$

Следовательно, угловые координаты $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k}$ на $(n-k)$-мерном инвариантном торе равномерно изменяются со временем:

$$\dot{\varphi}_s = \frac{\partial H}{\partial J_s} = \mathrm{const}, \quad 1 \leq s \leq n-k.$$

Докажем первую часть теоремы Нехорошева о том, что компактные связные компоненты интегральных многообразий (2.5) будут торами. Для этого введем $n-k$ гамильтоновых векторных полей $v_1, \ldots, v_{n-k}$, которые порождаются гамильтонианами $F_1, \ldots, F_{n-k}$. Поскольку эти функции по предположению независимы и находятся в инволюции со всеми функциями (2.4), то поля $v_1, \ldots, v_{n-k}$ независимы, касаются I_c и попарно коммутируют. Так как $\dim I_c = n-k$, то отсюда вытекает требуемое (ср. с §1).

Попутно мы доказали, что в предположениях теоремы Нехорошева исходные дифференциальные уравнения Гамильтона интегрируются в квадратурах. Действительно, мы конструктивно строим $(n-k)$-мерные инвариантные многообразия и указываем в явном виде $n-k$ независимых касательных полей, которые попарно коммутируют между собой. Среди этих полей имеется исходное гамильтоново векторное поле. Остается воспользоваться теоремой Ли об интегрируемости в квадратурах системы уравнений, допускающей полную абелеву группу симметрий.

В теореме Нехорошева $m = n+k$, а ранг матрицы скобок Пуассона функций (2.4) допускает очевидную оценку

$$2r \leq n + k - (n-k) = 2k.$$

Следовательно, неравенство $m \leq n+k$ превращается в равенство и поэтому выполнено условие некоммутативной интегрируемости.

3°. Теорема о торическом строении интегральных многообразий при общем условии (2.3) была доказана А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко в предположении, что интегралы (2.1) порождают конечномерную алгебру Ли (их скобки Пуассона линейно выражаются через функции (2.1)). Для замкнутых наборов интегралов общего вида этот результат был получен позже А. В. Стрельцовым. А. В. Браилов доказал интегрируемость в квадратурах гамильтоновых систем с замкнутым набором интегралов, удовлетворяющих условию (2.3). Его идея состоит в том, что в предположении замкнутости можно конструктивно (с помощью алгебраических операций) указать полный набор касательных коммутирующих полей на интегральных многообразиях.

Обзор результатов по теории некоммутативного интегрирования гамильтоновых систем и связь этой теории со старыми результатами Ли, Картана и Дирака можно найти в книге А. Т. Фоменко [59].

4°. В качестве примера вновь рассмотрим волчок Эйлера. Здесь $n = 3$, а $m = 4$: уравнения движения допускают интеграл энергии H и три нетеровых интеграла — проекции кинетического момента K_x, K_y, K_z на неподвижные оси. Ввиду коммутационных соотношений

$$\{H, K_x\} = 0, \, \ldots, \, \{K_x, K_y\} = K_z, \, \ldots$$

ранг матрицы скобок Пуассона в типичных точках равен двум; следовательно, $r = 1$ и выполнено условие некоммутативной интегрируемости (2.3).

Покажем, как в этой задаче применяется теорема Нехорошева. Мы имеем четыре $(3+1)$ интеграла: H, K^2(квадрат модуля кинетического момента), K_y, K_z. Функции H и K^2(в количестве $3-1$) коммутируют со всеми интегралами.

Стоит еще отметить, что H, K^2 и K_x образуют полный независимый набор интегралов в инволюции. Таким образом, все шестимерное фазовое пространство расслаивается на трехмерные инвариантные торы с условно-периодическими движениями. Однако, ввиду наличия еще одного независимого интеграла, эти трехмерные торы расслоены на двумерные торы, целиком лежащие на трехмерных инвариантных многообразиях, выделяемых условиями постоянства проекций K_x, K_y, K_z. При естественном проектировании на конфигурационное пространство, эти двумерные торы переходят в поверхности Бернулли из гидродинамической теории волчка Эйлера.

5°. Все сказанное выше касалось автономного случая. Однако условие некоммутативной интегрируемости (2.3) легко переносится на неавтономный случай. Действительно, предположим, что интегралы (2.1) и функция Гамильтона $H(x, y, t)$ могут явно зависеть от времени. Расширим фазовое пространство, вводя новые сопряженные канонические переменные $x_{n+1} = t, y_{n+1}$ и новый гамильтониан

$$\mathcal{H} = y_{n+1} + H(x, y, x_{n+1}).$$

Функции (2.1) будут интегралами $\mathcal{F}_s = F_s(x, y, x_{n+1})$ расширенной системы:

$$\{\mathcal{F}_s, \mathcal{H}\} = 0, \quad 1 \leq s \leq m. \tag{2.7}$$

Кроме того, согласно §1,

$$\{\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j\} = \{F_i, F_j\}. \tag{2.8}$$

Итак, мы имеем гамильтонову систему с $n+1$ степенями свободы, которая допускает $m + 1$ независимых первых интегралов

$$\mathcal{H}, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m. \tag{2.9}$$

В соответствии с (2.7) и (2.8) ранг матрицы их скобок Пуассона не увеличился и остался равным

$$r = \operatorname{rank} \|\{F_i, F_j\}\|.$$

Следовательно, для расширенной автономной гамильтоновой системы справедливо равенство (2.3).

Из этих замечаний вытекает, в частности,

Теорема 2. *Предположим, что неавтономная гамильтонова система с n степенями свободы допускает $n+k$ независимых интегралов (2.4) (зависящих, вообще говоря, от времени), причем первые $n-k$ из них находятся в инволюции со всеми интегралами (2.4). Тогда уравнения Гамильтона можно проинтегрировать с помощью квадратур.*

§3. Вихревой метод интегрирования

1°. Укажем сначала некоторые наводящие соображения. Предположим, что гамильтонова система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad (3.1)$$
$$x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n)$$

допускает $n + k$ независимых первых интегралов

$$F_1, \dots, F_{n+k}, \qquad (3.2)$$

причем первые $n - k$ функций находятся в инволюции со всеми интегралами (3.2). Согласно §2, в этом случае выполнено условие некоммутативной интегрируемости (2.3). Стоит подчеркнуть, что мы рассматриваем общий неавтономный случай, когда интегралы (3.2) и гамильтониан H могут явно зависеть от времени.

По аналогии с доказательством теоремы Лиувилля о полной интегрируемости, рассмотрим алгебраическую систему n уравнений

$$F_{1+k}(x, y, t) = c_1,\ \dots,\ F_{n+k}(x, y, t) = c_n \qquad (3.3)$$

и предположим дополнительно, что

$$\frac{\partial(F_{1+k}, \dots, F_{n+k})}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \neq 0. \qquad (3.4)$$

Тогда систему (3.3) локально можно разрешить относительно канонических импульсов:

$$y = u(x, t, c),\ c = (c_1, \dots, c_n). \qquad (3.5)$$

Так как при всех значениях c уравнения (3.3) задают n-мерное инвариантное многообразие системы (3.1), то поле (3.5) удовлетворяет уравнению Ламба

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\operatorname{rot} u)v = -\frac{\partial h}{\partial x}, \qquad (3.6)$$
$$v = \left.\frac{\partial H}{\partial y}\right|_{y=u}, \quad h = H(x, u(x, t, c), t).$$

Поскольку выполнено условие (3.4), то, очевидно,

$$\frac{\partial(u_1,\ldots,u_n)}{\partial(c_1,\ldots,c_n)} \neq 0. \tag{3.7}$$

Следовательно, (3.5) представляет собой *полный интеграл* уравнения Ламба (3.6).

Выясним теперь, как соотносятся между собой найденный полный интеграл (3.5) и первые интегралы $F_1,\ldots,F_{n-k}$ из набора (3.2), которые коммутируют со всеми остальными интегралами. Положим

$$v_i(x,t,c) = \left.\frac{\partial F_i}{\partial y}\right|_{y=u}, \quad f_i(x,t,c) = F_i(x,u(x,t,c),c).$$

Ясно, что v_i — векторное поле на конфигурационном многообразии.

Лемма 1. *Функция F_i находится в инволюции с функциями F_{k+1}, ..., F_{k+n} тогда и только тогда, когда для всех значений параметров $c_1,\ldots,c_n$*

$$(\operatorname{rot} u)v_i = -\frac{\partial f_i}{\partial x}. \tag{3.8}$$

Доказательство.

Действительно, соотношения

$$\{F_i,F_s\} = 0, \quad s \geq k+1$$

означают, что функции $F_{k+1},\ldots,F_n$ — первые интегралы дифференциальных уравнений Гамильтона

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial F_i}{\partial y}, \quad \frac{dy}{d\tau} = -\frac{\partial F_i}{\partial x}. \tag{3.9}$$

При этом время t считается постоянным параметром. Следовательно, при фиксированных значениях t алгебраические уравнения (3.3) задают инвариантные многообразия канонических уравнений Гамильтона (3.9). Отсюда, в свою очередь, вытекает справедливость уравнений Ламба (3.8) (в которые не входят производные $\partial u/\partial t$). Обратное утверждение, очевидно, также справедливо. ■

Итак, если известен избыточный набор первых интегралов (3.2), удовлетворяющий условию теоремы Нехорошева, то из уравнений (3.3) можно найти полный интеграл уравнений Ламба (3.6), который удовлетворяет еще $n-k$ «усеченным» уравнениям Ламба (3.8).

2°. Эти рассуждения можно обратить.

Теорема 3 ([39]). *Пусть известен полный интеграл $u(x,t,c)$ уравнения Ламба (3.6), причем*

(a) $\operatorname{rank}(\operatorname{rot} u) = 2k$,

(b) найдутся k интегралов $F_1(x,y,t),\ldots,F_k(x,y,t)$ уравнений Гамильтона (3.1), такие, что $\{F_i,F_j\}=0$ (для всех $1\le i,j\le n$) и при всех значениях c поле $u(x,t,c)$ удовлетворяет каждому из k уравнений

$$\begin{gathered}(\operatorname{rot} u)v_i = -\frac{\partial f_i}{\partial x}, \quad 1\le i\le k,\\ v_i = \left.\frac{\partial F_i}{\partial y}\right|_{y=u}, \quad f_i = F_i(x,u(x,t,c),t),\end{gathered} \tag{3.10}$$

(c) $f_1,\ldots,f_k$ независимы как функции x.

Тогда исходные уравнения Гамильтона (3.1) некоммутативно интегрируемы.

Напомним, что ввиду кососимметричности матрицы $\operatorname{rot} u$, ее ранг — четное число. Метод явного интегрирования дифференциальных уравнений Гамильтона, использующий полный интеграл уравнений Ламба, удовлетворяющий теореме 3, будем называть *вихревым методом интегрирования.*

Рассмотрим частный случай, когда u — потенциальное решение уравнений Ламба:

$$u = \frac{\partial S(x,t,c)}{\partial x}.$$

Тогда $\operatorname{rot} u = 0$ и, следовательно, $k=0$. Условие невырожденности (3.7) переходит в условие

$$\det\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial c}\right\| \neq 0,$$

а S будет полным интегралом уравнения Гамильтона—Якоби. Таким образом, вихревой метод интегрирования содержит как крайний частный случай классический метод Гамильтона—Якоби.

Доказательство теоремы 3.

Нам надо явно указать набор независимых первых интегралов уравнений Гамильтона (3.1), удовлетворяющих условию некоммутативной интегрируемости (2.3).

С этой целью рассмотрим систему n алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} y_1 = u_1(x,t,c),\ \ldots,\ y_n = u_n(x,t,c), \\ c = (c_1,\ldots,c_n). \end{gathered} \tag{3.11}$$

Согласно условию (3.7), из этой системы можно найти (хотя бы локально) постоянные параметры $c_1,\ldots,c_n$ как функции канонических переменных x, y и времени t:

$$c_1 = F_{k+1}(x,y,t),\ \ldots,\ c_n = F_{k+n}(x,y,t). \tag{3.12}$$

Поскольку (3.11) задают инвариантные многообразия уравнений Гамильтона (3.1), то функции (3.12) будут их первыми интегралами. В силу (3.7) функции $F_{k+1},\ldots,F_{k+n}$ независимы. Более того, из условия (c) вытекает функциональная независимость набора интегралов

$$F_1,\ \ldots,\ F_k,\ F_{k+1},\ \ldots,\ F_{k+n}. \tag{3.13}$$

Из условия (b) получаем, что первые k интегралов находятся в инволюции со всеми функциями (3.13) (лемма 1). Следовательно, ранг матрицы скобок Пуассона набора функций (3.13) равен рангу матрицы скобок Пуассона функций (3.12). Согласно лемме 1 из §4 главы III, этот ранг равен рангу матрицы $\operatorname{rot} u$ (то есть $2k$).

Итак, для набора независимых первых интегралов (3.13)

$$m = n + k, \quad r = k$$

и, следовательно, $m = n + r$. ■

Теорема 3 показывает, что вихревой метод интегрирования находится в таком же отношении к условию некоммутативной интегрируемости, как метод Гамильтона—Якоби к условию Лиувилля полной интегрируемости уравнений Гамильтона.

3°. В качестве примера рассмотрим другой крайний случай, когда матрица ротора имеет максимально возможный ранг, равный n. Среди решений уравнения Ламба оно «самое вихревое». В этом случае $n = 2k$ и уравнения Гамильтона (3.1) допускают k инволютивных интегралов, удовлетворяющих условиям (b) и (c) теоремы 3. Оказывается, тогда уравнения Гамильтона можно проинтегрировать в квадратурах.

Этот результат, отмеченный в работе [39], имеет особенно простой смысл в автономном случае, когда функции

$$H = F_1, F_2, \ldots, F_{n/2}$$

и поле u не зависят явно от t. Тогда уравнение Ламба (3.6)

$$(\operatorname{rot} u)\dot{x} = -\frac{\partial h}{\partial x} \tag{3.14}$$

будет гамильтоновой системой в $2k$-мерном фазовом пространстве $\{x\}$ с симплектической структурой

$$\omega = d(u\,dx) = \sum \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j$$

и гамильтонианом h (см. §1). Согласно условиям (b) и (c), функции $h = f_1, f_2, \ldots, f_k$ — независимые интегралы уравнений (3.14). Так как $\{F_i, F_j\} = 0$, то функции $f_1, \ldots, f_k$ также инволютивны относительно симплектической структуры ω. По теореме Лиувилля, уравнения (3.14) интегрируются в квадратурах. Импульсы y находятся из соотношений $y = u(x, c)$. Неавтономный случай сводится к автономному повышением размерности фазового пространства (см. §4).

4°. В работе автора [39] утверждалось, что при выполнении условий (a), (b) и (c) теоремы 3 уравнения Гамильтона можно проинтегрировать в квадратурах. Однако доказательство этого утверждения содержит пробел, восполнить который можно лишь при некоторых дополнительных условиях. Один из таких случаев указан в предыдущем разделе ($n = 2k$).

Вопрос упирается в конструктивную возможность построения $n-2k$ функций от интегралов (3.12), которые коммутировали бы с набором функций (3.12). Добавляя к ним k функций из условия (b), получаем $n-k$ функций, находящихся в инволюции с $n+k$ интегралами (3.13). Решение этой задачи существенно упрощается, если предположить замкнутость набора функций (3.12): их скобки Пуассона выражаются через эти же функции.

Условие замкнутости набора функций (3.12) можно сформулировать в виде свойств матрицы ротора ковекторного поля (3.11). С этой целью введем n линейно независимых ковекторов

$$a_1 = \frac{\partial u}{\partial c_1}, \ldots, a_n = \frac{\partial u}{\partial c_n}.$$

Они, разумеется, зависят от точки x конфигурационного пространства и времени t. Им однозначно сопоставляется дуальный набор линейно независимых векторов $b_1, \ldots, b_n$:

$$(a_i, b_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Легко проверить, что

$$b_j = \left. \frac{\partial F_{n+j}}{\partial y} \right|_{y=u}.$$

Положим (для краткости) $B = \operatorname{rot} u$.

Лемма 2. *Набор функций $F_{k+1}, \ldots, F_{k+n}$ замкнут тогда и только тогда, когда при всех $i, j = 1, \ldots, n$ функции (Bb_i, b_j) не зависят от x и t.*

Таким образом, проверка условий замкнутости требует лишь дифференцирований и алгебраических операций, включая обращения функций. Полный интеграл $u(x,t,c)$ уравнения Ламба назовем *замкнутым,* если выполнены условия леммы 2. В частности, все потенциальные решения замкнуты.

Лемма 2 — простое следствие соотношений (4.7) и (4.10) главы III.

Теорема 4 ([71]). *Пусть известен полный замкнутый интеграл $u(x,t,c)$ уравнения Ламба, удовлетворяющий условиям $(a), (b), (c)$ теоремы 3. Тогда уравнения Гамильтона интегрируются в квадратурах.*

Действительно, в силу лемм 1 и 2 набор интегралов (3.13) уравнений Гамильтона замкнут относительно скобки Пуассона. После этого замечания теорема 4 вытекает из неавтономного варианта теоремы А. В. Браилова об интегрируемости гамильтоновых систем с замкнутым набором интегралов, удовлетворяющих условию (2.3). Поскольку полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби порождает полный замкнутый интеграл уравнения Ламба, то классическая теорема Якоби содержится в теореме 4.

5°. В качестве примера рассмотрим задачу Лиувилля (1858 г.) о вращении по инерции изменяемого тела, когда за счет внутренних сил его частицы перемещаются относительно друг друга. В качестве подвижной системы отсчета можно взять оси инерции тела, корректно определенные в каждый момент времени.

Пусть ω — угловая скорость подвижного трехгранника, K — кинетический момент тела относительно неподвижной точки, $I = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — матрица инерции. Кинетический момент связан с угловой скоростью соотношением

$$K = I\omega + \lambda, \tag{3.15}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — гироскопический момент. Появление дополнительного слагаемого связано с перемещением частиц тела.

По теореме об изменении кинетического момента, динамические уравнения Эйлера имеют вид

$$\dot{K} = \omega \times K = 0. \tag{3.16}$$

Будем считать, что I_i, λ_j — некоторые известные функции времени. Например, если в твердом теле имеются симметричные маховики, свободно вращающиеся вокруг своих осей, то главные моменты инерции и гиростатические моменты будут постоянными величинами. Такую систему Кельвин назвал *гиростатом.* В динамике изменяемого тела возможны и другие постановки задачи. Например, Зейлигер и Четаев рассматривали подобно изменяемое тело и для замыкания системы уравнений (3.15)–(3.16) добавляли уравнение для скорости «лучистого» расширения.

Обсуждение различных аспектов задачи о вращении изменяемого тела можно найти, например, в трактате Рауса [54].

Присоединяя к (3.15)–(3.16) уравнения Пуассона для единичных неподвижных векторов α, β, γ

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \tag{3.17}$$

получим полную систему для определения ориентации главных осей инерции тела. Уравнения (3.16) и (3.17) допускают три интеграла момента

$$(K, \alpha) = c_1, \quad (K, \beta) = c_2, \quad (K, \gamma) = c_3. \tag{3.18}$$

Их следствием является интеграл

$$(K, K) = \mathrm{const}$$

уравнений Эйлера (3.16).

Будем искать трехмерные инвариантные поверхности, однозначно проектирующие на конфигурационное пространство — группу $SO(3)$. Это означает, что кинетический момент K следует искать в виде функций от α, β, γ и времени t. Тогда из (3.16)–(3.17) получаем векторное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial \alpha}(\alpha \times \omega) + \frac{\partial K}{\partial \beta}(\beta \times \omega) + \frac{\partial K}{\partial \gamma}(\gamma \times \omega) = K \times \omega. \tag{3.19}$$

Здесь вместо ω надо подставить $I^{-1}(K - \lambda)$. Это уравнение, конечно, является уравнением Ламба, только оно представлено не в канонических переменных. Переход к уравнениям (3.19) вполне аналогичен переходу от уравнений Гамильтона к уравнениям Пуанкаре—Четаева на алгебрах Ли.

Согласно (3.18), одним из полных решений уравнения Ламба (3.19) будет функция

$$K = c_1 \alpha + c_2 \beta + c_3 \gamma. \tag{3.20}$$

Можно проверить, что в обычных канонических переменных $\theta, p_\theta, \ldots$ оно имеет тот же вид, что и в обычной задаче Эйлера (формулы (2.8) главы II). Полное решение (3.20), очевидно, замкнуто, не содержит явно времени и ранг матрицы ротора равен двум, если $|c| \neq 0$.

Предположим теперь, что уравнения (3.15)–(3.16) допускают интеграл $F(K, t)$, независимый от интеграла момента (K, K). Тогда уравнения движения (3.16)–(3.17) интегрируются в квадратурах. Этот факт можно вывести из теоремы 4.

Действительно, здесь $k = 1$ и функции F отвечает уравнение Пуанкаре—Четаева

$$\dot{K} = K \times \frac{\partial F}{\partial K}, \tag{3.21}$$

к которому надо добавить уравнения Пуассона (3.17). Ясно, что каждая поверхность (3.18) будет инвариантной для уравнений (3.21) и (3.17). Поскольку полное решение (3.20) не зависит явно от времени, то оно удовлетворяет «усеченному» уравнению Ламба (3.10). Следовательно, выполнены условия (a) и (b) вихревой теории интегрирования. Условие (c) вытекает из предположения о независимости функций F и K^2.

Замечание. Результат об интегрируемости в квадратурах уравнений (3.16) и (3.17) вытекает, конечно, из теории некоммутативного интегрирования гамильтоновых систем. Здесь $n = 3$ и нужный набор интегралов составляют функции

$$F, K^2, (K, \alpha), (K, \beta).$$

Первые две из них коммутируют со всеми остальными и ранг матрицы их скобок Пуассона равен, очевидно, двум.

Небезынтересно выписать в явном виде систему уравнений на группе $SO(3)$, обобщающую уравнения (2.11) главы II для волчка Эйлера. Для определенности рассмотрим случай, когда вектор кинетического момента направлен вдоль γ: $K = k\gamma$, $k = |K|$. Считая вектор γ вертикальным, введем углы Эйлера θ, φ, ψ, задающие ориентацию главных осей инерции изменяемого тела. Используя кинематические формулы Эйлера, можно записать уравнения движения на группе $SO(3)$:

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta} &= k\left(\frac{1}{I_1}-\frac{1}{I_2}\right)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi-\frac{\lambda_1\cos\varphi}{I_1}+\frac{\lambda_2\sin\varphi}{I_2},\\
\dot{\varphi} &= k\cos\theta\left(\frac{1}{I_3}-\frac{\sin^2\varphi}{I_1}-\frac{\cos^2\varphi}{I_2}\right)+\frac{\lambda_1\sin\varphi\cos\theta}{I_1\sin\theta}+\\
&\quad+\frac{\lambda_2\cos\varphi\cos\theta}{I_2\sin\theta}-\frac{\lambda_3}{I_3},\\
\dot{\psi} &= k\left(\frac{\sin^2\varphi}{I_1}+\frac{\cos^2\varphi}{I_2}\right)-\frac{\lambda_1\sin\varphi}{I_1\sin\theta}-\frac{\lambda_2\cos\varphi}{I_2\sin\theta}.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Они допускают интегральный инвариант

$$
\mathrm{mes}\,(D)=\iiint\limits_D \sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,d\psi,
$$

который совпадает с двусторонней инвариантной мерой Хаара на группе $SO(3)$.

В этих переменных вихревые поля имеют вид

$$
\theta'=0,\quad \varphi'=0,\quad \psi'=\mu,
$$

а вихревые линии задаются уравнениями $\theta,\varphi=\mathrm{const}$. Поскольку третье уравнение системы (3.22) не содержит явно угол ψ, то отсюда вытекает заключение обобщенной теоремы Гельмгольца—Томсона: поток системы (3.22) переводит вихревые линии в вихревые линии. Факторизация группы $SO(3)$ по замкнутым вихревым линиям приводит к первым двум уравнениям системы (3.22). Они являются замкнутой неавтономной гамильтоновой системой на сфере Пуассона, причем роль симплектической структуры играет стандартная 2-форма площади.

6°. Вихревой метод интегрирования уравнений Гамильтона включает в себя проблему отыскания в явном виде полного интеграла уравнений Ламба. Как нам известно, поиск потенциальных решений сводится к интегрированию одного уравнения Гамильтона—Якоби. Для этой цели Якоби был разработан метод разделения переменных, усовершенствованный в работах Имшенецкого, Штеккеля и других авторов. Поиск непотенциальных решений системы уравнений Ламба дает существенно больше возможностей. К сожалению, эта проблема пока мало изучена.

Чтобы показать характерные трудности, которые встречаются на этом пути, рассмотрим уравнения Гамильтона с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(y, y) + (y, Ax) + V(x). \tag{3.23}$$

Здесь $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ — сопряженные канонические переменные, A — постоянная матрица, V — потенциальная энергия. Появление линейных по импульсам слагаемых в (3.23) связано с наличием гироскопических сил. Для опрелеленности рассмотрим случай, когда матрица A кососимметрическая:

$$A^T = -A.$$

Важным примером служит система

$$\ddot{x}_1 = \omega \dot{x}_2, \quad \ddot{x}_2 = -\omega \dot{x}_1, \tag{3.24}$$

описывающая плоское движение заряженной частицы в перпендикулярном однородном магнитном поле. Эти уравнения имеют вариационную природу: они описываются уравнениями Лагранжа с лагранжианом

$$L = \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} + \frac{\omega}{2}(x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1).$$

Преобразование Лежандра

$$y_1 = \dot{x}_1 - \frac{\omega x_2}{2}, \quad y_2 = \dot{x}_2 + \frac{\omega x_1}{2}$$

позволяет перейти к уравнениям Гамильтона с гамильтонианом

$$H = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \frac{\omega}{2}(x_2 y_1 - x_1 y_2) + \frac{\omega^2(x_1^2 + x_2^2)}{8}. \tag{3.25}$$

В этом примере

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega/2 \\ -\omega/2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Уравнения (3.24) имеют очевидное семейство двумерных инвариантных многообразий, однозначно проектирующихся на конфигурационную плоскость x_1, x_2:

$$\dot{x}_1 = \omega x_2 + c_1, \quad \dot{x}_2 = -\omega x_1 + c_2; \quad c_i = \mathrm{const}.$$

Отсюда сразу видно, что траектории заряда будут окружностями (*круги Лармора*). В канонических переменных эти многообразия имеют вид

$$y_1 = \frac{\omega x_2}{2} + c_1, \quad y_2 = -\frac{\omega x_1}{2} + c_2. \tag{3.27}$$

Если $\omega \neq 0$, то они будут, очевидно, вихревыми.

Для уравнений с гамильтонианом (3.23) будем искать n-мерные инвариантные многообразия в виде (ср. с (3.27))

$$y = Ax + \frac{\partial S}{\partial x}.$$

Тогда уравнение Ламба примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial t} + 2A\left(2Ax + \frac{\partial S}{\partial x}\right) = -\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{3.28}$$

Ясно, что слагаемое $4A^2x$ является градиентом квадратичной формы

$$\Phi = -2(Ax, Ax).$$

Чтобы уравнение (3.28) было непротиворечивым, слагаемое

$$2A\frac{\partial S}{\partial x}$$

должно быть градиентом некоторой функции $R(x)$. Критерий существования функции R заключается в коммутационном матричном равенстве

$$A\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}A = 0.$$

Отметим, что при $n = 2$ оно эквивалентно условию гармоничности функции S: $\Delta S = 0$. В итоге из (3.28) получаем аналог уравнения Гамильтона—Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x}\right) + 2\left(\frac{\partial S}{\partial x}, Ax\right) + R - \frac{1}{2}(Ax, Ax) + V = 0. \tag{3.29}$$

При $n = 2$ можно положить

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = -\frac{\partial R}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} = \frac{\partial R}{\partial x_1}. \tag{3.30}$$

Это — известные уравнения Коши—Римана; S и R — сопряженные гармонические функции. В стационарном случае уравнение (3.29) можно представить в виде уравнения для функции R :

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_2}\right)^2\right] - \omega\left(\frac{\partial R}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial R}{\partial x_2}x_2\right) + \\ + \omega R - \frac{\omega^2}{8}(x_1^2 + x_2^2) + V = h.\end{gathered} \tag{3.31}$$

Здесь h — постоянная энергии. При этом, конечно, надо помнить, что к уравнению (3.31) добавляется условие гармоничности функции R.

Для гамильтониана (3.25)

$$V = \frac{\omega^2(x_1^2 + x_2^2)}{8}. \tag{3.32}$$

Гармоническим полным интегралом (3.30) служит, например, функция

$$R = c_2 x_1 - c_1 x_2,$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, и

$$h = \frac{(c_1^2 + c_2^2)}{2}.$$

Инвариантные многообразия гамильтоновой системы с гамильтонианом (3.25) можно искать в виде

$$y = -Ax + \frac{\partial S}{\partial x}.$$

Тогда $\operatorname{rot} u = -2A$ и уравнение Ламба принимает более простой вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial t} - 2A\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial x}.$$

Полагая

$$2A\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x},$$

приходим к уравнению, аналогичному (3.29):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x}\right) - P - \frac{1}{2}(Ax, Ax) + V = 0.$$

Пусть $n = 2$, матрица A имеет вид (3.26), а функция P определяется из уравнений Коши—Римана (3.30). Тогда в стационарном случае получаем уравнение

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)^2\right] - \omega P - \frac{\omega^2}{8}(x_1^2 + x_2^2) + V = h. \tag{3.33}$$

К нему надо добавить уравнение Лапласа $\Delta P = 0$.

Хотя уравнение (3.33) проще уравнения (3.31), однако для потенциала (3.32) оно не имеет нетривиальных гармонических решений.

§4. Полная интегрируемость фактор-системы

1°. Как мы видели, если $\operatorname{rank}(\operatorname{rot} u)$ постоянен и равен $2k$, то конфигурационное многообразие M^n расслоено $(n - 2k)$-мерными вихревыми многообразиями N. Отождествляя точки, лежащие на одних и тех же связных компонентах вихревых многообразий, приходим к $2k$-мерному фактор-пространству M/N. Обобщенная теорема Гельмгольца—Томсона позволяет корректно определить на M/N фактор-систему, которая также имеет вид уравнений Ламба с невырожденной матрицей ротора (уравнения (4.11) главы II).

Основной результат вихревой теории интегрирования уравнений Гамильтона составляет

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* $(a), (b)$ *и* (c) *теоремы 1 из* §3. *Тогда решения фактор-системы на* M/N *находятся явно с помощью квадратур.*

Этот результат имеет два аспекта. Во-первых, утверждается, что можно явно найти вихревые многообразия матрицы $\operatorname{rot} u$, где $u(x,t,c)$ — полный интеграл исходного уравнения Ламба, и тем самым в явном виде представить уравнения фактор-системы. Во-вторых, утверждается, что дифференциальные уравнения фактор-системы можно явно проинтегрировать с помощью квадратур.

2°. Обсудим сначала второй аспект и предположим, что мы уже привели фактор-систему к уравнению Ламба с невырожденным ротором:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\operatorname{rot} u)\dot{x} = -\frac{\partial h}{\partial x}, \quad x = (x_1, \ldots, x_{2k}). \tag{4.1}$$

Как мы уже отмечали, такие системы уравнений называются *системами Биркгофа* (сам Биркгоф называл (4.1) уравнениями Пфаффа). Ввиду невырожденности ротора, уравнение (4.1) можно явно разрешить относительно скорости:

$$\dot{x} = v(x,t). \tag{4.2}$$

Предположим, что эти уравнения допускают k независимых интегралов

$$f_1(x,t), \ldots, f_k(x,t). \tag{4.3}$$

Каждой из этих функций f_s можно однозначно сопоставить векторное поле v_s по правилу:

$$(\operatorname{rot} u)v_s = -\frac{\partial f_s}{\partial x}. \tag{4.4}$$

В общем случае эти поля, конечно, зависят от времени. Спрашивается, когда они коммутируют при каждом фиксированном значении t?

Чтобы ответить на этот вопрос, введем (как в §1) матрицу $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|$, обратную матрице $\operatorname{rot} u$. Матрица Γ также будет кососимметричной.

Лемма 3. *Если*

$$\sum_{i,j} \gamma_{ij} \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \frac{\partial f_q}{\partial x_j} = 0, \tag{4.5}$$

то $[v_p, v_q] = 0$.

Действительно, соотношение (4.4) показывает, что v_s — гамильтоново поле, порождаемое гамильтонианом f_s, относительно симплектической структуры, задаваемой замкнутой невырожденной 2-формой

$$\Omega = d\Big(\sum u_i\, dx_i\Big).$$

Выражение в левой части (4.5) — это скобка Пуассона функций f_p и f_q, представленная не в канонических переменных $x_1, \ldots, x_{2k}$. После этих замечаний лемма 3 становится следствием леммы 3 из §4 главы II.

По аналогии с гамильтоновым случаем будем говорить, что функции f_p и f_q находятся *в инволюции*. Систему уравнений Биркгофа (4.1) назовем *вполне интегрируемой*, если интегралы (4.3) находятся попарно в инволюции.

Эту терминологию оправдывает

Предложение 1. *Вполне интегрируемая система Биркгофа интегрируется в квадратурах.*

Из этого утверждения вытекает важное

Следствие 1. *Пусть выполнены предположения* $(a), (b)$ *и* (c) *теории вихревого интегрирования и*

$$\operatorname{rank}(\operatorname{rot} u) = n.$$

Тогда уравнения Гамильтона интегрируются с помощью квадратур.

Автономный вариант этого утверждения выведен в §3 из теоремы Лиувилля о полной интегрируемости.

Доказательство предложения 1.

Перепишем уравнения (4.1) и (4.4) в инвариантной форме:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + i_v \Omega = -dh, \tag{4.6}$$

$$i_{v_s} \Omega = -df_s. \tag{4.7}$$

Поскольку функции (4.3) — интегралы системы (4.2), то

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + L_v f_s = 0. \tag{4.8}$$

Из (4.7) с учетом (4.8) получаем

$$L_v i_{v_s} \Omega = -L_v df_s = \frac{\partial}{\partial t} df_s. \tag{4.9}$$

С другой стороны, из (4.6) вытекает равенство

$$i_{v_s} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + i_{v_s} L_v \Omega = 0. \tag{4.10}$$

Вычитая (4.10) из (4.9) и используя (4.7), приходим к соотношению

$$i_{\partial v_s/\partial t} \Omega + i_{[v_s, v]} \Omega = 0.$$

Поскольку 2-форма Ω невырождена, то

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + [v_s, v] = 0. \tag{4.11}$$

Расширим теперь $2k$-мерное x-пространство, добавляя в качестве новой переменной координату t. Введем в расширенном $(2k+1)$-мерном пространстве $k+1$ векторных полей

$$\tilde{v}, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_k, \tag{4.12}$$

которые получаются из полей $v, v_1, \ldots, v_k$ добавлением t-компоненты $1, 0, \ldots, 0$ соответственно. Ввиду предположения об инволютивности интегралов (4.3) поля $v_1, \ldots, v_k$ коммутируют при всех t (лемма 3). Следовательно,

$$[\tilde{v}_i, \tilde{v}_j] = 0; \quad i, j = 1, \ldots, k.$$

Легко проверить (см. §5 главы II), что (4.11) эквивалентны коммутационным соотношениям

$$[\tilde{v}, \tilde{v}_s] = 0; \quad s = 1, \ldots, k.$$

Рассмотрим теперь в $(2k+1)$-мерном расширенном пространстве регулярную $(k+1)$-мерную поверхность

$$I_\alpha = \{x, t : \, f_1 = \alpha_1, \ldots, f_k = \alpha_k\}. \tag{4.13}$$

Ввиду (4.8), поле $\tilde{v}$ касается I_α при всех значениях постоянных α. Это же свойство для векторных полей $\tilde{v}_s$ вытекает из соотношения (4.7). Таким образом, $k+1$ полей (4.12) касаются $(k+1)$-мерных интегральных поверхностей (4.13), линейно независимы в каждой точке и попарно коммутируют. После этого интегрируемость в квадратурах системы (4.1) вытекает из теоремы Ли об интегрируемости дифференциальных уравнений с абелевой группой симметрий. ■

В §1 главы II мы заметили, что локально уравнения Биркгофа (4.1) приводятся к обычным уравнениям Гамильтона. Однако, это приведение не конструктивно и поэтому предложение 1 формально не вытекает из теоремы Лиувилля о полной интегрируемости гамильтоновых систем.

3°. Нам осталось показать, что при выполнении условий $(a), (b)$ и (c) вихревые многообразия находятся с помощью квадратур. Тогда переход к фактор-системе можно осуществить конструктивно.

Рассмотрим семейство поверхностей совместных уровней функций f_i из условия (b) :

$$M_\beta^{n-k} = \{x : \, f_1(x,t) = \beta_1, \ldots, f_k(x,t) = \beta_k\}.$$

В неавтономном случае эти поверхности зависят от времени t как от параметра.

Зафиксируем значение t. Пусть $V_1, \ldots, V_k$ — гамильтоновы векторные поля в $2n$-мерном фазовом пространстве переменных x, y, порождаемые гамильтонианами $F_1, \ldots, F_k$. Поскольку $\{F_i, F_j\} = 0$, эти поля попарно коммутируют: $[V_i, V_j] = 0$. Согласно условию (b), поля V_i касаются n-мерных поверхностей $\Sigma_c = \{x, y\colon y = u(x, t, c)\}$ (лемма 1 §3) и поэтому корректно определены проекции этих полей $v_1, \ldots, v_k$ на конфигурационное пространство. Так как поля V_i попарно коммутируют, то $[v_i, v_j] = 0$.

Поскольку $\{F_i, F_j\} = 0$, то каждая функция F_i является интегралом векторного поля $V_j\colon V_j(F_i) = 0$. Следовательно, $v_j(f_i) = 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, k$. Это значит, что поля v_i касаются каждой поверхности M_β.

С другой стороны, имеются независимые вихревые векторные поля $w_1, \ldots, w_{n-2k}$, которые также касаются M_β. Действительно, согласно (3.10),

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} \cdot w_j = 0.$$

Далее, векторы

$$v_1, \ldots, v_k,\ w_1, \ldots, w_{n-2k} \tag{4.14}$$

линейно независимы. В противном случае

$$\sum \lambda_i v_i + \sum \mu_j w_j = 0 \tag{4.15}$$

с некоторыми λ, μ, причем $\sum |\lambda_i| \neq 0$. Умножая (4.15) слева на $\operatorname{rot} u$ и применяя (3.10), получим

$$\sum \lambda_i (\operatorname{rot} u) v_i = -\sum \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x} = 0.$$

Однако, согласно условию (c), функции $f_1, \ldots, f_k$ независимы. Следовательно, все λ_i равны нулю. Получили противоречие.

Отметим, что число независимых касательных полей (4.14) совпадает с размерностью интегральных поверхностей M_β.

Найдем теперь $(n-2k)$-мерные вихревые многообразия $\operatorname{rot} u$, точнее, пересечение этих многообразий с $(n-k)$-мерными поверхностями M_β. Они k-мерные и поэтому задаются на M_β уравнениями

$$\varphi_1(x) = \gamma_1,\ \ldots,\ \varphi_k(x) = \gamma_k, \quad x \in M_\beta.$$

По определению вихревых многообразий, функции φ_i удовлетворяют уравнениям

$$w_1(\varphi_i) = \cdots = w_{n-2k}(\varphi_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq k. \tag{4.16}$$

Будем искать их из дополнительных условий

$$v_j(\varphi_i) = \delta_{ji}, \quad 1 \leq j \leq k, \tag{4.17}$$

где δ_{ji} — символ Кронекера.

Прежде всего надо показать, что системы уравнений (4.16)–(4.17) имеют решения. Действительно, $[v_i, v_j] = 0$, а коммутаторы $[v_i, w_j]$ линейно выражаются через вихревые векторы w. Это вытекает из предложения 1 §5 главы II с учетом замечания, что уравнение Ламба (3.10) не содержит производной от ковекторного поля u по независимой переменной, играющей роль времени.

Идея доказательства существования решений системы уравнений в частных производных первого порядка (4.16) и (4.17) состоит в следующем. Введем на M_β новые локальные координаты y, z, такие, что вихревые многогобразия задаются соотношениями $y = \mathrm{const}$. Переменные z — координаты на вихревых многообразиях. В новых переменных операторы дифференцирования вдоль вихревых полей имеют вид

$$\sum c_j(y,z)\frac{\partial}{\partial z_j}. \tag{4.18}$$

Пусть

$$\sum a_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum b_j \frac{\partial}{\partial z_j} \tag{4.19}$$

— операторы, отвечающие коммутирующим полям v. Поскольку коммутатор операторов (4.18) и (4.19) имеет вид (4.18), то коэффициенты a_i не зависят от z. Поскольку операторы (4.19), отвечающие различным полям v_s, коммутируют между собой, то тем же свойством обладают k «усеченным» операторов

$$\sum a_i(y)\frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{4.20}$$

В этом случае можно сделать обратитимую замену переменных $y \to \tilde{y}$, после которой операторы (4.19) имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_k}.$$

Осталось заметить, что в новых переменных можно положить

$$\varphi_1 = \tilde{y}_1, \dots, \varphi_k = \tilde{y}_k.$$

Поскольку векторные поля (4.14) независимы, то из (4.16) и (4.17) однозначно находятся (с помощью только алгебраических операций) частные производные от функции φ_i по локальным координатам на M_β. Хорошо известно, что функция восстанавливается по ее частным производным с помощью нескольких интегрирований по одной переменной. Теорема полностью доказана.

§5. Системы с тремя степенями свободы

1°. Рассмотрим наиболее простое из вихревых решений уравнений Ламба, когда

$$\operatorname{rank}(\operatorname{rot} u) = 2 \tag{5.1}$$

и, следовательно, $k = 1$. Согласно условию (b), для интегрируемости в этом случае надо иметь интеграл F уравнений Гамильтона (3.1).

Задача существенно упрощается для автономных систем, когда гамильтониан H не зависит явно от времени. В качестве интеграла F можно взять функцию $H(x, y)$. При этом поле $u(x, c)$, очевидно, удовлетворяет уравнению (3.10), поскольку оно совпадает с исходным автономным уравнениям Ламба. Условие (c) вихревой теории интегрирования переходит в условие

$$d_x H(x, u(x, c)) \neq 0. \tag{5.2}$$

Итак, справедливо

Предложение 2. *Если известно полное замкнутое решение $u(x, c)$ уравнений Ламба, причем выполнены условия (5.1) и (5.2), то уравнения Гамильтона (3.1) интегрируются в квадратурах.*

2°. Оказывается, при $n = 3$ условие замкнутости полного решения в предложении 2 можно снять. Доказательство этого утверждения использует *теорему Эйлера—Якоби* об интегрирующем множителе. Случай $n = 3$ представляет особый интерес с точки зрения аналогии между гидродинамикой и вихревой теорией гамильтоновых систем.

Предложение 3 ([71]). *Пусть $n = 3$ и найдено полное стационарное решение уравнения Ламба, удовлетворяющее условиям (5.1) и (5.2). Тогда уравнение Гамильтона интегрируются в квадратурах.*

Если ранг ротора поля u постоянен, то при $n = 3$ он может быть равен либо нулю, либо двум. В первом случае решение будет потенциальным и интегрируемость уравнений Гамильтона вытекает из теоремы Якоби. Если ранг равен двум, а функция

$$h(x, c) = H(x, u(x, c)) \tag{5.3}$$

не зависит от x, то поле

$$v(x, c) = \left.\frac{\partial H}{\partial y}\right|_{y=u} \tag{5.4}$$

коллинеарно ротору и интегральные кривые поля v могут демонстрировать хаотическое поведение. Напомним, что для потенциальных течений функция h зависит лишь от c.

3°. *Доказательство предложения 3.*

Рассмотрим динамическую систему на M^3, определяемую полем (5.4):

$$\dot{x} = v(x, c). \tag{5.5}$$

При каждом значении $c = (c_1, c_2, c_3)$ она допускает непостоянный интеграл (5.3) и интегральный инвариант с плотностью

$$\rho(x, c) = \det \left\| \frac{\partial u}{\partial c} \right\|.$$

Докажем, что при этих предположениях система дифференциальных уравнений (5.5) на трехмерном многообразии интегрируется в квадратурах.

Перейдем от координат x_1, x_2, x_3 к новым координатам z_1, z_2, z_3, полагая
$$z_3 = h(x_1, x_2, x_3),$$
тогда уравнения (5.5) примут вид
$$\dot{z}_1 = V_1(z_1, z_2, z_3), \quad \dot{z}_2 = V_2(z_1, z_2, z_3), \quad \dot{z}_3 = 0.$$
Они допускают интегральный инвариант с плотностью
$$P(z_1, z_2, z_3) = \rho \det \left\| \frac{\partial x}{\partial z} \right\|.$$
Положим $z_3 = \alpha = \mathrm{const}$. Очевидно, функция
$$P(z_1, z_2, \alpha)$$
будет плотностью интегрального инварианта для системы
$$\dot{z}_1 = V_1(z_1, z_2, \alpha), \quad \dot{z}_2 = V_2(z_1, z_2, \alpha). \tag{5.6}$$
Поскольку
$$\frac{\partial PV_1}{\partial z_1} + \frac{\partial PV_2}{\partial z_2} = 0,$$
то локально 1-форма
$$P(V_1 dz_2 - V_2 dz_1)$$
— полный дифференциал некоторой функции $f(z_1, z_2, \alpha)$:
$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = -PV_2, \quad \frac{\partial f}{\partial z_2} = PV_1.$$
Остается заметить, что функция f — непостоянный интеграл системы (5.6) и ее нахождение, как известно, требует простых квадратур. ■

4°. Для систем на плоскости плотность интегрального инварианта ρ названа Эйлером *интегрирующем множителем.* Якоби распространил наблюдение Эйлера на систему n дифференциальных уравнений, допускающих $n-2$ независимых интегралов и инвариантную меру. Обсуждение строения потоков на интегральных поверхностях таких систем можно найти в книге [31]. Рассуждения п. **3°** соответствуют в гидродинамике известной теореме Клебша о том, что если для стационарного течения известна непостоянная функция Бернулли, то движение частиц жидкости можно найти с помощью квадратур. Роль интегрального инварианта здесь, конечно, играет масса вещества.

Дополнение 1. Инварианты завихренности и вторичная гидродинамика

1°. Рассмотрим баротронное течение идеальной жидкости в потенциальном силовом поле. Оно описывается уравнением Ламба (1.5) (гл. I):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \times \operatorname{rot} v - \frac{\partial f}{\partial x}. \tag{1}$$

Будем рассматривать периодические граничные условия: все характеристики течения 2π-периодически зависят от координат x_1, x_2, x_3. Можно представлять себе течение по трехмерному евклидову тору $M = \{x_1, x_2, x_3 \mod 2\pi\}$.

Пусть $u(x,t)$ — соленоидальное поле на M, удовлетворяющее уравнению (1.1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{rot}(v \times u). \tag{2}$$

Как уже отмечалось, это уравнение играет важную роль в механике сплошной среды. В частности, ему удовлетворяет поле ротора скорости частиц жидкости.

Теорема 1. *Интеграл*

$$I(t) = \int\limits_M (u, v)\, d^3x \tag{3}$$

не зависит от времени.

Для случая $u = \operatorname{rot} v$ эта теорема установлена Жан-Жаком Моро [74].

Доказательство.

Воспользуемся очевидной формулой

$$\dot{I} = \int\limits_M \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right)\right] d^3x. \tag{4}$$

Ввиду (1) и (2) подынтегральное выражение приводится к виду

$$(v \times \operatorname{rot} u, u) + (v, \operatorname{rot}(v \times u)) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}, u\right). \tag{5}$$

С помощью известной формулы

$$(\operatorname{rot} a, b) - (\operatorname{rot} b, a) = \operatorname{div}(a \times b)$$

преобразуем второе слагаемое в (5):

$$(v, \operatorname{rot}(v \times u)) = (v \times u, \operatorname{rot} v) + \operatorname{div}((v \times u) \times v).$$

Далее, ввиду соленоидальности поля u,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, u\right) = \operatorname{div} fu.$$

Таким образом, выражении (4) приводится к дивергентному виду:

$$\operatorname{div}((v \times u) \times v - fu).$$

По формуле Гаусса—Остроградского, интеграл (4) равен нулю. ■

2°. Теорема 1 имеет ряд интересных следствий для случая несжимаемой жидкости, когда $\operatorname{div} v = 0$. Рассмотрим соленоидальные поля $w(x,t)$, удовлетворяющие уравнению Эйлера

$$\frac{\partial w}{\partial t} = [v, w]. \tag{6}$$

Прежде всего докажем простое

Предложение 1. *Если поле w, удовлетворяющее (6), соленоидально при некотором значении t, то оно будет соленоидальным при всех t.*

Доказательство предложения 1.

Используя известное тождество векторного анализа

$$\operatorname{rot}(a \times b) = [a, b] + a \operatorname{div} b - b \operatorname{div} a$$

и предположение о несжимаемости, перепишем уравнение (6):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{rot}(v \times w) - v \operatorname{div} w. \tag{7}$$

Применим теперь к обеим частям этого равенства операцию div и учтем, что $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} w = -L_v(\operatorname{div} w).$$

Следовательно,

$$(\operatorname{div} w)^{\cdot} = 0.$$

■

Из предложения 1 вытекает корректность предположения о соленоидальности поля w. Из равенства (7) вытекает также, что соленоидальное поле w удовлетворяет уравнению (2). Таким образом, из теоремы 1 получаем

Следствие.

$$\int\limits_M (w, v)\, d^3x = \operatorname{const}. \tag{8}$$

Напомним, что уравнение (2) является условием вмороженности в поток жидкости интегральных кривых поля u, а уравнение Эйлера (6) — критерий вмороженности векторного поля w.

3°. Интегральные инварианты (8) имеют интересную интерпретацию в динамике несжимаемой идеальной жидкости.

Рассмотрим группу диффеоморфизмов M, сохраняющих элемент объема. Обозначим эту бесконечномерную группу $\operatorname{SDiff} M$. Алгебра

Ли группы $\mathrm{SDiff}\, M$ состоит из векторных полей на M с нулевой дивергенцией. Определим скалярное произведение двух элементов этой алгебры (т. е. двух соленоидальных векторных полей v_1 и v_2) с помощью формулы

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int (v_1, v_2)\, d^3x.$$

Рассмотрим теперь течение однородной идеальной жидкости в области M; для простоты мы считаем плотность жидкости равной единице. Уравнение неразрывности приводит к условию несжимаемости: $\operatorname{div} v = 0$. Течения жидкости описываются кривыми g^t на группе $\mathrm{SDiff}\, M$: диффеоморфизм $g^t \colon M \to M$ переводит каждую частицу из ее начального положения в положение, которое она занимает в момент времени t.

Несложно проверить, что кинетическая энергия жидкости

$$T = \frac{\langle v, v \rangle}{2} \tag{9}$$

— *правоинвариантная* риманова метрика на группе $\mathrm{SDiff}\, M$. В 60-ые годы было подмечено следующее важное обстоятельство: течения идеальной несжимаемой жидкости — геодезические линии метрики (9). Это — следствие принципа наименьшего действия, который, если угодно, можно считать определением идеальной жидкости (см. [73, 62, 64]).

Как уже отмечалось в гл. III (§3), правые сдвиги включаются в фазовые потоки левоинвариантных полей. Левоинвариантные поля на группе $\mathrm{SDiff}\, M$ — это соленоидальные поля на M, удовлетворяющие уравнению Эйлера (6). Следовательно, по теореме Нетер уравнения геодезических на группе $\mathrm{SDiff}\, M$ допускают бесконечную серию линейных интегралов (8): $\langle w, v \rangle = \mathrm{const}$.

Отметим, что точно такой же вид имеют нетеровы интегралы и в конечномерном случае. Действительно, пусть

$$T = \frac{1}{2} \sum g_{ij}(x) \dot{x}_i \dot{x}_j$$

— кинетическая энергия, задающая скалярное произведение

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum g_{ij} \xi_i \eta_j,$$

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n),\ \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n).$$

Если $w = (w_1, \ldots, w_n)$ — поле симметрий, то интеграл Нетер имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \cdot w = \sum g_{ij} \dot{x}_i w_j = \langle w, \dot{x} \rangle.$$

Строение линейных по скорости интегралов натуральных механических систем и их связь с группами симметрий было исследовано в работе Мориса Леви 1878 года (за 40 лет до публикации Эмми Нетер). В дифференциальной геометрии (где роль кинетической энергии играет риманова метрика) поля симметрий обычно называются *полями Киллинга*; они изучались Киллингом в работе 1892 года.

Поскольку кинетическая энергия (9) представляет собой невырожденную квадратичную форму, то бесконечная серия интегралов (8) позволяет в принципе найти скорость течения v как функцию на группе $\mathrm{SDiff}\, M$. Таким образом, на $\mathrm{SDiff}\, M$ естественным образом возникает бесконечномерная динамическая система, фазовый поток которой схож по своим свойствам со стационарным течением невязкой жидкости. Было бы интересным изучить эту систему с гидродинамической точки зрения, изложенной в гл. III (вихревые векторы и многообразия, поверхности Бернулли, инвариантные меры...). Такой подход можно назвать *вторичной гидродинамикой*.

4°. Теорема Моро на самом деле является частным случаем одного общего наблюдения из §3 гл. II. Пусть 1-форма ω удовлетворяет уравнению Ламба

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + i_v d\omega = -dh$$

и $\Omega = d\omega$. Если M замкнуто и $\dim M = 2s + 1$, то

$$\int\limits_M \omega \wedge \Omega^s = \mathrm{const}. \tag{10}$$

Для течений идеальной жидкости с периодическими граничными условиями $M = T^3$

$$\omega = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3$$

— 1-форма циркуляции. Легко сосчитать, что

$$\omega \wedge \Omega = (\operatorname{rot} v, v)\, dx^3.$$

Соотношение (10) можно обобщить, заменяя Ω любой замкнутой m-формой Φ, вмороженной в поток:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L_v \Phi = 0.$$

Теорема 2. *Пусть M замкнуто и* $\dim M = ms + 1$, s *— целое. Тогда*

$$\int \omega \wedge \Phi^s = \mathrm{const}\,.$$

Доказательство.

Пусть $\tau = \omega \wedge \Phi^s$. Тогда

$$\dot\tau = \dot\omega \wedge \Phi^s + \omega \wedge \dot\Phi \wedge \cdots \wedge \Phi + \cdots = \dot\omega \wedge \Phi^s = dg \wedge \Phi^s,$$

где $g = \omega(v) - h$ — лагранжиан. Так как форма Φ замкнута, то

$$dg \wedge \Phi^s = d(g\Phi^s).$$

Следовательно, по формуле Стокса

$$\frac{d}{dt}\int\limits_M \tau = \int\limits_M dg \wedge \Phi^s = \int\limits_M d(g\Phi^s) = 0.$$

■

Дополнение 2. Квантовая механика и гидродинамика

1°. Как известно, в квантовой механике динамика частицы единичной массы в потенциальном поле с потенциалом $V(x)$, $x \in E^3$ описывается *уравнением Шредингера*

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta\psi + V\psi. \tag{1}$$

Здесь $\psi(x,t)$ — комплекснозначная волновая функция, $\hbar$ — постоянная Планка, $i^2 = -1$. Волновая функция имеет следующий физический смысл: $|\psi(x,t)|^2$ — плотность вероятности нахождения частицы в момент времени t в точке $x \in E^3$. Поэтому принимается, что

$$\int\limits_{E^3} \psi\bar{\psi}\, d^3x = 1. \tag{2}$$

Это предположение корректно, поскольку интеграл в левой части (2) не зависит от t для любого решения уравнения (1).

Полагая

$$\psi = \sqrt{\rho}\exp(iS/\hbar), \tag{3}$$

для скалярных функций $\rho(x,t) \geq 0$, $S(x,t)$ получим следующую систему уравнений

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\Big(\rho\frac{\partial S}{\partial x}\Big) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial S}{\partial x}\Big)^2 + V - \frac{\hbar^2}{2}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = 0. \tag{5}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа.

Сколько известно автору, уравнения (4)–(5) получены впервые Э. Маделунгом. Они изучались также Д. Бомом в связи с его гипотезой «скрытых параметров» — попыткой уйти от вероятностной интерпретации квантовой механики [18]. При $\hbar \to 0$ уравнение (5) перейдет в обычное уравнение Гамильтона—Якоби, описывающее потенциальные семейства траекторий обычной классической частицы с гамильтонианом

$$H = \frac{y^2}{2} + V(x,t),$$

а уравнение (4) будет совпадать с уравнением Лиувилля для плотности интегрального инварианта градиентной динамической системы

$$\dot{x} = \frac{\partial S}{\partial x}. \tag{6}$$

После того, как найден полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби, решение уравнения (4) сводится к простым квадратурам. Подставляя найденные таким путем функции S и ρ в выражение (3), получим так называемое квазиклассическое приближение к решениям уравнения Шредингера (1).

2°. Бом предложил интерпретировать уравнение (5) в общем случае, когда $\hbar \neq 0$, снова как уравнение Гамильтона—Якоби для обычной классической частицы, которая находится в суперпозиции двух потенциальных полей: с потенциалами V и

$$P = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \tag{7}$$

Функцию P Бом назвал квантовомеханическим потенциалом. Конечно, такое представление имеет реальный смысл лишь после того, как найдена функция ρ. Поучительное обсуждение и критические замечания по концепции Бома можно найти в работах из сборника [18].

На самом же деле уравнения (4) и (5) имеют прозрачную гидродинамическую интерпретацию. Уравнение (4) — это уравнение неразрывности для поля скоростей (6), а уравнение (5) — это интеграл Лагранжа—Коши для потенциальных течений «идеальной баротропной» жидкости под действием потенциальных массовых сил с плотностью потенциала V. Квантовомеханический потенциал P играет роль функции давления. Только, в отличие от обычных предположений гидродинамики, P зависит не только от плотности ρ, но и от ее производных.

Таким образом, решения уравнения Шредингера находятся в однозначном соответствии с потенциальными течениями идеальной обобщенно баротропной жидкости с функцией давления (7). Эта аналогия физикам хорошо известна. Ее обсуждение и применение к динамике сверхпроводимости содержится, например, в известном курсе лекций Р. Фейнмана (т. 3, гл. 19). В связи со сказанным возникает интересный вопрос: имеют ли физический смысл вихревые течения этой воображаемой «квантовой» жидкости?

3°. Вновь вернемся к предельному переходу от квантовой механики к классической, когда $\hbar \to 0$. В пределе уравнение (5) будет замкнутым. Пусть g^t — поток динамической системы (6). Предположим, что в начальный момент времени частица локализована в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Другими словами, при $t = 0$ плотность вероятности ρ является дельта-функцией Дирака $\delta(x - x_0)$. Тогда уравнение (4) дает нам, что в произвольный момент времени t плотность $\rho(x, t)$ будет снова δ-функцией:

$$\rho(x, t) = \delta(x - g^t(x_0)).$$

Этот факт легко понять из следующих рассуждений. Пусть D — любая область в $\mathbb{R}^3$, не содержащая точку x_0. Тогда при $t = 0$ будем иметь, что

$$\int\limits_D \rho \, d^3x = 0. \tag{8}$$

Согласно (4), ρ — плотность интегрального инварианта системы (6). Следовательно, равенство (8) будет иметь место в любой момент времени t для любой области D, не содержащей точку $g^t(x_0)$. Что и требовалось. Отметим, что этот вывод, конечно, справедлив для систем дифференциальных уравнений общего вида (не только градиентных).

Таким образом, если при $t = 0$ частица локализована в некоторой точке x_0, то в момент времени t она будет локализована в точке $g^t(x_0)$ и ее закон движения

$$t \to g^t(x_0),$$

конечно, удовлетворяет уравнению Ньютона

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

При $\hbar \neq 0$ ситуация совсем другая. Уравнения (4) и (5) связаны друг с другом и поэтому из-за присутствия квантовомеханического потенциала P сосредоточенная в точке плотность вероятности ρ будет «расплываться» по всему пространству. Это явление, тесно связанное с соотношением неопределенности Гейзенберга, напоминает явление диффузии вихрей в вязкой жидкости (§2 гл.I).

Расплывание плотности вероятности проще всего продемонстрировать на примере свободной частицы на прямой $\mathbb{R} = \{x\}$. Уравнение Шредингера принимает вид

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta\psi. \tag{9}$$

Для простоты записи формул мы положили $\hbar = 2$. В так называемом импульсном представлении решения уравнения (9) имеют вид

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p)e^{i(px-p^2t)}dp, \tag{10}$$

где φ — произвольная квадратично суммируемая функция на прямой:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(p)|^2 dp = 1 \tag{11}$$

(см., например, [58]). Положим, например,

$$\varphi = \left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\varepsilon p^2}{2}}, \quad \varepsilon > 0.$$

Условие нормировки (11), очевидно, выполнено. Используя известные свойства преобразования Фурье, из формулы (10) получаем явное выражение для плотности вероятности:

$$\rho(x,t) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\pi}(\varepsilon^2 + 4t^2)} e^{-\frac{\varepsilon x^2}{\varepsilon^2+4t^2}}. \tag{12}$$

При $t = 0$ получаем формулу

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}.$$

Когда $\varepsilon \to 0$, то это выражение стремится к δ-функции:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} f(x)\, dx = f(0).$$

С другой стороны, при больших значениях t из (12) получаем асимптотическое представление

$$\rho \sim \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{\pi} t} e^{-\frac{\varepsilon x^2}{4t^2}}.$$

Ясно, что при фиксированном $\varepsilon > 0$ эта функция стремится к нулю (равномерно по x), когда $t \to \infty$.

Список литературы

[1] *Адамс Дж.* Лекции по группам Ли. М.: Наука, 1979.

[2] *Аржаных И. С.* Вихревой принцип аналитической динамики. // ДАН СССР, 1949. Т. 65, №5. С.613–616.

[3] *Аржаных И. С.* Поле импульсов. Ташкент: Изд-во Наука Уз.ССР. 1965.

[4] *Арнольд В. И.* О топологии трехмерных стационарных течений идеальной жидкости. // ПММ. 1966. Т. 30, вып. 1. С. 183–185.

[5] *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука. 1979.

[6] *Арнольд В. И.* Несколько замечаний об антидинамо-теореме. // Вестник Моск. ун-та. Сер. Матем., Механ. 1982. №6. С.50–57.

[7] *Арнольд В. И.* Особенности систем лучей // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, вып. 2. С. 77–147.

[8] *Арнольд В. И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. Первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. М.: Наука. 1989.

[9] *Арнольд В. И.* Теория катастроф. М.: Наука. 1990.

[10] *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ АН СССР. 1985.

[11] *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.-Л.: ОНТИ.

[12] *Блисс Дж. А.* Лекции по вариационному исчислению. М.: ИЛ. 1950.

[13] *Болотин С. В.* Замечание о методе Рауса и гипотезе Герца. // Вестник Моск. ун-та. Сер. Матем., Механ. 1986, № 5. С.51–53.

[14] *Болотин С. В., Козлов В. В.* Об асимптотических решениях уравнений динамики. // Вестник Моск. ун-та. Сер. Матем., Механика. 1980. № 4. С. 84–89.

[15] *Борн М.* Оптика. Киев–Харьков: ОНТИ. 1937.

[16] *Булатович Р. М.* Об устойчивости линейных потенциальных гироскопических систем в случаях, когда потенциальная энергия имеет максимум. // ПММ. 1997. Т. 61, вып. 3. С. 385–389.

[17] *Веблен О.* Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: ИЛ. 1948.

[18] Вопросы причинности в квантовой механике. Сб. переводов. М.: ИЛ. 1953.

[19] *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз. 1961.

[20] *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд-во АН СССР. 1959.

[21] *Гийемин В. Стернберг С.* Геометрические асимптотики. М.: Мир. 1981.

[22] *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир. 1973.

[23] *Журавлев В. Ф.* О некоторых свойствах гироскопических систем в связи с концепцией Герца в механике. // Изв. АН СССР. Механ. тверд. тела. 1982. № 2. С. 15–19.

[24] *Зиглин С. Л.* Расщепление сепаратрис и несуществование первых интегралов в системах дифференциальных уравнений типа гамильтоновых с двумя степенями свободы. // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1987. Т. 51, № 5. С. 1088–1103.

[25] *Зиглин С. Л.* Неинтегрируемость задачи о движении четырех точечных вихрей. // ДАН СССР. 1990. Т. 250, № 6. С. 1296–1300.

[26] *Исаак Ньютон.* Сборник статей к трехсотлетию со дня рождения. М.-Л.: Изд-во АН СССР. 1943.

[27] *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем. М.: ВИНИТИ АН СССР. 1983.

[28] *Картан Э.* Интегральные инварианты. М.-Л.: Гостехиздат. 1940.

[29] *Кирхгоф Г.* Механика. М.: Изд-во АН СССР. 1962.

[30] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.-Л.: ОНТИ. 1937.

[31] *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1980.

[32] *Козлов В. В.* Замечания о стационарных движениях сплошной среды. // ПММ. 1983. Т. 47, вып. 2. С. 341–342.

[33] *Козлов В. В.* Гидродинамика гамильтоновых систем. // Вестник Моск. ун-та. Сер. Матем., Механ. 1983. № 6. С. 10–22.

[34] *Козлов В. В.* Об инвариантных мерах уравнений Эйлера—Пуанкаре на алгебрах Ли. // Функц. анализ и его прилож. 1988. Т. 22, № 1. С. 69–70.

[35] *Козлов В. В.* Вихревая теория волчка. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем., Механ. 1990. № 4. С. 56–62.

[36] *Козлов В. В.* Линейные системы с квадратичным интегралом. // ПММ. 1992. Т. 56, вып. 6. С. 900–906.

[37] *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удм. гос. ун-та. 1995.

[38] *Козлов В. В.* Об интегральных инвариантах уравнений Гамильтона. // Матем. заметки. 1995. Т. 58, № 3. С. 379–393.

[39] *Козлов В. В.* Об одном обобщении метода Гамильтона—Якоби. // ПММ. Т. 60, вып. 5. С. 929-939.

[40] *Козлов В. В., Ярощук В. А.* Об инвариантных мерах уравнений Эйлера—Пуанкаре на унимодулярных группах. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем., Механ. 1993. №2. С. 91–95.

[41] *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. II. М.-Л.: Гостехиздат. 1951.

[42] *Ламб Г.* Гидродинамика. М.-Л.: Гостехиздат. 1947.

[43] *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2. М.: ИЛ. 1951.

[44] *Лихнерович А.* Теория связностей в целом и группы голономий. М.: ИЛ. 1960.

[45] *Маслов В. П.* Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука. 1988.

[46] *Мелешко В. В., Константинов М. Ю.* Динамика вихревых структур. Киев: Наукова Думка. 1993.

[47] *Наймарк М. А.* Линейные представления группы Лоренца. М.: Наука. 1958.

[48] *Нехорошев Н. Н.* Переменные действия–угол и их обобщения. // Труды Моск. Мат. Об-ва. 1972. Т. 26. С. 181–198.

[49] *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978.

[50] *Постон Т., Стюарт Й.* Теория катастроф и ее применение. М.: Мир. 1980.

[51] *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. В кн.: Избранные труды, Т. I–II. М.: Наука. 1971, 1972.

[52] *Рашевский П. К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.-Л.: Гостехиздат. 1947.

[53] *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука. 1967.

[54] *Раус Э. Дж.* Динамика системы твердых тел. М.: Наука. 1983.

[55] *Релей.* Теория звука. Т. I, II. М.-Л.: Гостехиздат. 1940, 1944.

[56] *Ткаченко В. М.* О вихревых решетках. // ЖЭТФ. 1965. Т. 49, вып. 6. С. 1875–1883.

[57] *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М.-Л.: Гостехиздат. 1937.

[58] *Фаддеев Л. Д., Якубовский О. А.* Лекции по квантовой механике. Ленинград: Изд-во Ленинградского ун-та. 1980.

[59] *Фоменко А. Т.* Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1988.

[60] *Фридман А. А.* Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости. М.-Л.: ОНТИ. 1934.

[61] *Шевалле К.* Теория групп Ли. Т. I. М.: ИЛ. 1948.

[62] *Юдович В. И.* Плоские нестационарные движения идеальной несжимаемой жидкости. // ДАН СССР. 1961. Т. 136, №3. С. 564–567.

[63] *Aref H.* The numerical experiment in fluid mechanics // J. Fluid Mech. 1986. V. 173. P. 15–41.

[64] *Arnold V. I.* Sur un principe variationnel pour les écoulements stationnaires des liquides parfaits et ses applications aux problèmes de stabilité non linéaires. // J. de Mécanique. 1966. V. 5, №1. P. 29–43.

[65] *Campbell L. J.* Transverse normal models of finite vortex array. // Phys. Rev. 1981. V. 24, №2. P. 514–534.

[66] *Četayev N.* Sur les équations de Poincaré. // C. R. Acad. Sci. Paris. 1927. V. 185. P. 1577–1578.

[67] *Conley C. C., Zender E.* The Birkhoff—Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold. // Invent. Math. 1983. V. 73. P. 33–49.

[68] *Hénon M.* Sur la topologie des lignes de courant dans un cas particularies. // C. R. Acad. Sci. Paris. 1966. V. 262. P. 312–314.

[69] *Hwa Chung Lee.* The universal integral invariants of Hamiltonian systems and application to the theory of canonical transformation. // Proc. R. Soc. of Edinburgh. Sect. A. 1946–48. V. LXII. Part 3. P. 237–246.

[70] *Kozlov V. V.* Dinamical system determined by the Navier—Stokes equations. // Rus. J. Math. Phys. 1993. V. 1, №1. P. 57–69.

[71] *Kozlov V. V.* Hydrodynamics of Noncommutative integration of Hamiltonian Systems. // In: Dynamical Systems In Classical Mechanics. Trasl. Amer. Math. Soc. Ser. 2. 1995. V. 168. P. 227–238.

[72] *Kummer E. E.* Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlungssysteme. // Journ. reine und angew. Math. 1860. V. 57. P. 189–230.

[73] *Moreau J.-J.* Une méthode de «cinématique fonctionnelle» en hydrodynamique. // C. R. Acad. Sci. Paris. 1959. V. 249. P. 2156–2158.

[74] *Moreau J.-J.* Constantes d'un flot tourbillonnaire en fluid parfalt barotrope. // C. R. Acad. Sci. Paris. 1961. V. 252. P. 2810–2812.

[75] *Poincaré H.* Théorie des tourbillons. Paris: G. Carre et Naud. 1893.

[76] *Poincaré H.* Sur une forme nouvelle des équations de la méchanique. // C. R. Acad. Sci. Paris. 1901. V. 132. P. 369–371.

[77] *Santilli R. M.* Foundations of Theoretical Mechanics II. Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics. Springer-Verlag. 1983.

[78] *Sommerfeld A., Runge J.* Anwendung der Vectorrechnung auf die Grundlagen der geometrischen Optik. // Annalen d. Physik. 1911. V. 35. 4 Folge. S. 277–299.

[79] *Souček J., Souček V.* Morse – Sard theorem for real-analitic function. // Comment. Math. Univ. Carol. 1973. V. 13, №1. P. 45–51.

[80] *Thom R.* Sur la théorie des enveloppes. // J. de math. pur et appl. 1962. V. 41 №2. P. 177-192.

Предметный указатель

Валерий Васильевич Козлов

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ВИХРЕЙ

Авторская редакция
Технический редактор С. И. Зянкина
Корректор Е. Ф. Осипова
Компьютерная подготовка А. В. Широбоков

Лицензия ЛР № 020411 от 16.02.97. Подписано к печати
Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,95.
Уч. изд. л. 13,85.
Заказ № 48 Тираж экз.
Издательский дом «Удмуртский университет»,
426011, г. Ижевск, ул. Майская, 23.