ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2002, том 382, № 4, с. 478–481

МЕХАНИКА

УДК 532.582.33

О ДВИЖЕНИИ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ТЕЛА С ЖЕСТКОЙ ОБОЛОЧКОЙ И МЕНЯЮЩЕЙСЯ ГЕОМЕТРИЕЙ МАСС

© 2002 г. Академик В. В. Козлов, С. М. Рамоданов

Поступило 28.08.2001 г.

1. ДВИЖЕНИЕ ИЗМЕНЯЕМОГО ТЕЛА

Рассмотрим задачу о движении в бесконечном объеме однородной идеальной жидкости тела с твердой оболочкой. Предполагается, что жидкость совершает безвихревое движение и покоится на бесконечности. Однако, в отличие от классической постановки задачи о движении твердого тела, мы считаем, что под действием внутренних сил геометрия масс тела может изменяться по заранее известному закону. Например, внутри корпуса известным способом движется материальная точка.

Предположим, что в начальный момент времени тело вместе с жидкостью покоились. Спрашивается, можно ли за счет подходящего изменения геометрии масс тела (под действием только внутренних сил) переместить его корпус из данного положения в любое наперед заданное? На первый взгляд кажется, что это невозможно, поскольку центр масс системы тело + жидкость покоится. Однако данный аргумент нельзя принимать во внимание: во-первых, центр масс бесконечного объема жидкости не определен, а во-вторых, нас интересует только перемещение корпуса тела, а не жидкости.

Сформулируем наш основной результат для тела, граница которого имеет три взаимно ортогональные плоскости симметрии. Оказывается, если не все присоединенные массы тела (зависящие лишь от формы границы) равны между собой, то за счет перемещения точек внутри корпуса может быть создана тяговая сила. Более того, при подходящем управлении геометрией масс тело можно переместить из любого положения в любое другое. Заметим, что свойство полной управляемости тела теряется, если все присоединенные массы совпадают.

Рассматриваемая задача является частным случаем более общей задачи о движении деформируемого тела в жидкости, которая имеет существенное значение при изучении механизма плавания рыб, а также явления кавитации. Первые результаты в этом направлении получены Тейлором [1] и Лайтхиллом [2]. Они рассматривали движение в вязкой жидкости; обмен энергией между телом и жидкостью происходит из-за схода вихрей с острых кромок тела, а также благодаря инерционному воздействию жидкости на тело. В [3] рассмотрена модельная задача о динамике деформирующейся пластины в жидкости. Собственное движение пластины представляет собой бегущую волну. Приведена оценка влияния параметров волны на величину тяговой силы. Качественное объяснение механизма движения рыб на основании модели движения в твердом канале дано в [4].

В этой связи возникает вопрос о возможности движения тела за счет деформирования своей границы в идеальной жидкости, совершающей безвихревое движение. Положительный ответ дан в работе [5]. Схожая задача рассмотрена также в [6]. Подход работы [5] повторен в [7]. В [8] показана возможность создания тяговой силы при движении изменяемой пластины бесконечной длины в идеальной жидкости без вихрей. Наиболее строго эта задача рассмотрена в [9]. Предполагается, что в результате деформации (в отсутствие жидкости) положение центра масс и главных осей не меняется. Сила и момент, действующие со стороны жидкости на тело, находятся с помощью обобщенной теоремы Лагалли [10].

В нашей работе изучается более сложная задача о возможности прогрессивного движения тела с жесткой границей в идеальной жидкости без вихрей.

2. ТЕОРЕМА ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Итак, рассмотрим движение твердого тела с тремя ортогональными плоскостями симметрии, внутри которого может перемещаться (под действием внутренних сил) материальная точка массы m. Свяжем с твердым телом подвижную систему отсчета $O\xi\eta\zeta$ так, чтобы кинетическая энергия системы тело + жидкость имела вид

$$T' = \frac{(Av, v)}{2} + \frac{(C\omega, \omega)}{2}.$$

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Здесь v – скорость точки O, ω – угловая скорость тела в подвижных осях, $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$, $C = \mathrm{diag}(c_1, c_2, c_3)$; все постоянные числа a_k и c_k положительны.

Движение точки массы m задается некоторыми известными функциями $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$. Проекции абсолютной скорости этой точки на подвижные оси $\xi\eta\zeta$ имеют вид

$$u_1 = v_1 + \dot\xi - \omega_3\eta + \omega_2\zeta,$$

$$u_2 = v_2 + \dot\eta + \omega_3\xi - \omega_1\zeta,$$

$$u_3 = v_3 + \dot\zeta + \omega_1\eta - \omega_2\xi.$$

Здесь v_1, v_2, $v_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – компоненты вектора $v(\omega)$.

Полная кинетическая энергия изменяемого тела равна

$$T = T' + \frac{m(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)}{2}.$$

Теоремы об изменении импульса и кинетического момента в подвижных осях дают обобщенные уравнения Кирхгофа

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega}\right)^{\cdot} + \left[\omega, \frac{\partial T}{\partial \omega}\right] + \left[v, \frac{\partial T}{\partial v}\right] = 0,\\ \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^{\cdot} + \left[\omega, \frac{\partial T}{\partial v}\right] = 0.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Как показано в [9], уравнениями такого вида описывается и движение тела с изменяемой границей. В работах [5–7] уравнения (2.1) в явном виде не использовались.

Уравнения (2.1) надо дополнить кинематическими соотношениями. Пусть θ, φ, ψ – углы Эйлера, определяющие ориентацию подвижного трехгранника $(\xi\eta\zeta)$ относительно неподвижной системы (xyz). Пусть x, y, z – координаты точки O. Мы используем кинематические формулы Эйлера

$$(\dot\theta, \dot\psi, \dot\varphi)^T = B(p, q, r)^T \tag{2.2}$$

и формулы перехода от подвижного трехгранника к неподвижному

$$(\dot x, \dot y, \dot z)^T = D(v_1, v_2, v_3)^T. \tag{2.3}$$

Выражения для элементов матриц B и D (D – ортогональная матрица) через углы Эйлера хорошо известны (см., например, [11]). Уравнения (2.1)–(2.3) представляют собой полную систему уравнений движения рассматриваемой системы.

Предположим, что система начала движение из состояния покоя. Тогда интегралы импульса и кинетического момента примут вид

$$\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial T}{\partial \omega} = 0.$$

В силу положительной определенности формы T' эти уравнения можно разрешить относительно v и ω. Подставляя найденные выражения в кинематические соотношения (2.2) и (2.3), получим

$$(\dot x, \dot y, \dot z, \dot\theta, \dot\varphi, \dot\psi)^T = U\dot\xi + V\dot\eta + W\dot\zeta. \tag{2.4}$$

Компоненты шестимерных векторов U, V, W зависят от функций $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$, углов Эйлера, а также коэффициентов формы T' как параметров. Уравнения (2.4) представляют собой замкнутую систему дифференциальных уравнений первого порядка на группе движений $e(3)$ трехмерного пространства; функции ξ, η, ζ служат управлениями. Положение твердого тела определяется шестью параметрами $(x, y, z, \theta, \varphi, \psi) = z$, $z \in e(3)$.

З а м е ч а н и е. *Указанная редукция является примером более общей конструкции для механических систем с конфигурационным пространством в виде группы Ли и левоинвариантной кинетической энергией. Если движение происходит без воздействия внешних сил, то роль интегралов импульса и момента играет полный набор нетеровых интегралов* [12].

Рассматриваемую систему назовем вполне управляемой, если для любого $\varepsilon > 0$ и любых двух положений тела z_1 и z_2 найдутся кусочно-гладкие управляющие функции $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$, $t_1 \le t \le t_2$ такие, что

$$|\xi(t)| \le \varepsilon, \quad |\eta(t)| \le \varepsilon, \quad |\zeta(t)| \le \varepsilon,$$

$$z(t_1) = z_1, \quad z(t_2) = z_2.$$

Время движения $t_2 - t_1$ существенно зависит от параметра ε.

Т е о р е м а. *Система будет вполне управляемой тогда и только тогда, когда не все присоединенные массы a_1, a_2, a_3 равны между собой.*

Действительно, если $a_1 = a_2 = a_3$, то x, y, z как функции времени ограничены. Это вытекает в свою очередь из неподвижности "центра масс" системы тело + жидкость + точка – интеграла уравнений (2.4):

$$(a + m)(x, y, z)^T + mD(\xi, \eta, \zeta)^T = \mathrm{const}.$$

Для доказательства достаточности введем расширенное девятимерное пространство M с координатами x, y, z, θ, φ, ψ, ξ, η, ζ. Уравнения (2.4) задают распределение трехмерных касательных плоскостей. Введем три независимых допустимых векторных поля V_1, V_2, V_3 с компонентами $(U, 1, 0, 0)$, $(V, 0, 1, 0)$ и $(W, 0, 0, 1)$ соответственно.

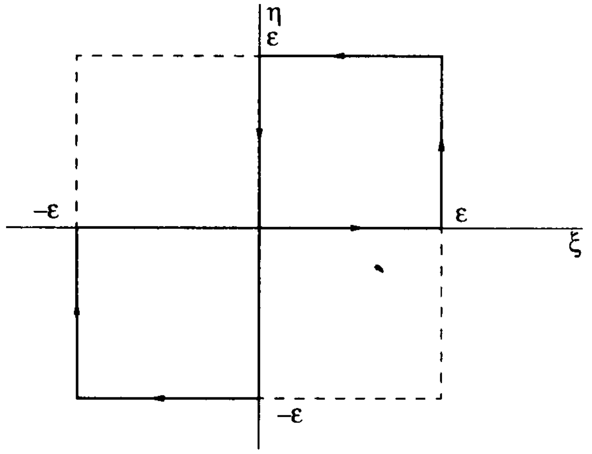

Рис. 1.

Следуя подходу Рашевского–Чжоу [13], рассмотрим 9 векторных полей

$$V_1, V_2, V_3, [V_1, V_2], [V_1, V_3], [V_2, V_3], \quad [V_1, [V_1, V_2]], [V_3, [V_1, V_3]], [V_2, [V_2, V_3]], \tag{2.5}$$

где [,] – скобка Якоби. Оказывается, если $a_2 \neq a_3$, то при малых значениях ξ, η, ζ эти векторы линейно независимы в каждой точке $e(3)$.

Действительно, определитель матрицы 9×9, составленной из компонент векторов (2.5), при $\xi = \eta = \zeta = 0$ равен

$$\frac{(-2a_3^2m - 3a_3^2a_2 + a_2^2m + 3a_3a_2^2 + a_3a_2m)P(a_1, a_2, a_3)}{Q(a_1, a_2, a_3)c_1^2c_2^2c_3^2\sin\theta}.$$

Здесь $P(a_1, a_2, a_3)$, $Q(a_1, a_2, a_3)$ – многочлены с положительными коэффициентами. Поскольку $a_k > 0$, то это выражение обращается в нуль лишь при $a_2 = a_3$.

Если несколько по-иному выбрать коммутаторы (2.5), то условие независимости $a_2 \neq a_3$ перейдет в условие $a_1 \neq a_2$ или $a_1 \neq a_3$.

Осталось воспользоваться теоремой Рашевского–Чжоу, согласно которой любые две точки связной области в M, заданной неравенствами $|\xi| \leq \varepsilon$, $|\eta| \leq \varepsilon$, $|\zeta| \leq \varepsilon$ (ε мало), можно соединить кусочно-гладкой кривой, составленной из отрезков интегральных кривых полей V_1, V_2 и V_3.

3. ГАРАНТИРОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Укажем явный способ управления геометрией масс тела внутри твердой оболочки, который позволяет перевести тело с неравными присоединенными массами из одного положения в любое другое. С этой целью рассмотрим сначала вспомогательную задачу о прогрессивном плоскопараллельном движении тела, когда одна из плоскостей симметрии (например, $\zeta = 0$) все время остается неизменной. Материальная точка m тоже движется в этой плоскости.

Конфигурационным пространством служит группа $e(2)$; обобщенными координатами являются x, y – координаты точки O тела и φ – угол поворота. Чтобы упростить вычисления, рассмотрим предельный случай, когда $a_1 \to 0$, $a_2 \to \infty$, а c_3 стремится к конечному пределу. Возможность такого предельного перехода обоснована в [14]. В этом случае уравнения (2.4) принимают следующий вид:

$$\dot{x} = v\cos\varphi, \quad \dot{y} = v\sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad v = -\left(\xi + \frac{\kappa\xi\eta\dot{\eta}}{1+\kappa\xi^2}\right), \quad \omega = -\frac{\kappa\xi\dot{\eta}}{1+\kappa\xi^2}, \tag{3.1}$$

где $\kappa = \dfrac{m}{c_3}$.

Пусть точка m движется с постоянной по величине скоростью по замкнутой кривой, изображенной на рис. 1. С помощью (3.1) можно сосчитать приращение координат за период:

$$\Delta x = 0, \quad \Delta y = -2\varepsilon\left(1 + \sin\mu - \frac{\sin\mu}{\mu}\right), \quad \Delta\varphi = 0; \tag{3.2}$$

здесь $\mu = \dfrac{\kappa\varepsilon^2}{1+\kappa\varepsilon^2}$. При малых $\varepsilon \neq 0$, очевидно $\Delta y \neq 0$. Следовательно, в среднем тело будет смещаться широкой стороной вперед. Ввиду аналитичности, этот вывод сохраняется и для почти всех значений параметров.

Замечание. *Из первых двух уравнений* (3.1) *видно, что движение тела подчиняется неинтегрируемой связи* $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$. *Однако это движение происходит не по законам неголономной механики, а в соответствии с принципами вакономной механики, развитой в работе* [14].

Пусть в момент времени t_1 тело занимает заданное положение, его центр масс совпадает с геометрическим центром (точкой O); в частности, материальная точка m при $t = t_1$ находится в точке $O_1 = O$. С помощью вращения симметричных маховиков (гиродинов) тело можно повернуть вокруг точки O_1 и привести его в любое наперед заданное положение. Эта задача хорошо изучена с разных точек зрения. Если $a_1 \neq a_2$, то повернем тело так, чтобы плоскость симметрии $\zeta = 0$ содержала заранее заданную точку O_2, в которой должен находиться центр тела в момент времени t_2.

Воспользуемся теперь формулами (3.2), справедливыми для плоскопараллельного движения. Ясно, что $\Delta y \to 0$, когда $\varepsilon \to 0$ (как ε^3). Следовательно, подбирая малое ε, можно добиться того, чтобы расстояние между точками O_1 и O_2 было равно $n\Delta y$, где n – некоторое целое число. Следовательно, если точка m, выходя из точки O, сделает равно n оборотов по "восьмерке" из рис. 1, то центр тела займет положение O_2. При этом точка m снова окажется в точке O.

После этого надо снова (например, с помощью симметричных маховиков) повернуть тело вокруг точки O_2 и придать ему наперед заданную ориентацию.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта "Ведущие научные школы" (00–15–96146)) и программы "Интеграция" (А-00-97).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Taylor G.I.* // Proc. Roy. Soc. London. A. 1952. V. 214. P. 158–183.
2. *Lighthill J.M.* // J. Fluid. Mech. 1960. V. 9. P. 305–317.
3. *Wu T.Y.* // J. Fluid. Mech. 1961. V. 10. P. 321–344.
4. *Лаврентьев М.А., Лаврентьев М.М.* // ПМТФ. 1962. № 4. С. 3–9.
5. *Benjamin T.B., Ellis A.T.* // Phil. Trans. Roy. Soc. London. A. 1966. V. 260. P. 221–240.
6. *Saffman P.G.* // J. Fluid. Mech. 1967. V. 28. P. 385–389.
7. *Воинов О.В., Петров А.Г.* // ДАН. 1973. Т. 212. № 5. С. 1086–1088.
8. *Kuznetsov V.M., Lugovtsov B.A., Sher Y.N.* // Arch. Rath. Mech. Anal. 1967. V. 25. № 5. P. 367–387.
9. *Galper A., Miloh T.* // Proc. Roy. Soc. London. A. 1993. V. 442. P. 273–299.
10. *Landweber L., Miloh T.* // J. Fluid. Mech. 1980. V. 96. P. 33–46.
11. *Уиттекер Э.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.
12. *Козлов В.В.* Общая теория вихрей. Ижевск: Издат. дом. "Удмурт. ун-т", 1998. 238 с.
13. *Рашевский П.К.* // Учен. зап. Моск. пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ.-мат. наук. 1938. № 2. С. 83–94.
14. *Козлов В.В.* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1983. № 3. С. 102–113.