В. В. Козлов

ТЕПЛОВОЕ РАВНОВЕСИЕ ПО ГИББСУ И ПУАНКАРЕ

Институт Компьютерных Исследований

Москва ♦ Ижевск

2002

УДК 536

РФФИ

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №02-01-01059.

Козлов В. В.

Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 320 стр.

В книге развиваются идеи Гиббса и Пуанкаре о тепловом равновесии механических систем. Хотя идеи Гиббса широко известны, многие из поставленных им проблем не решены до сих пор. Наоборот, глубокие результаты Пуанкаре по кинетике оказались невостребованными и вообще неизвестными специалистам по статистической механике.

Рассматриваемый в настоящей книге круг вопросов группируется вокруг трех связанных друг с другом тем: слабая сходимость вероятностных мер (плотности которых — решения уравнения Лиувилля), иерархия хаотичности динамических систем Гамильтона, теория возмущений ансамбля слабо взаимодействующих подсистем.

Полученные результаты позволяют лучше понять природу необратимого поведения термодинамических систем, дать новую интерпретацию второго начала термодинамики о росте энтропии, а также дать строгий вывод канонического распределения Гиббса, не опирающийся на эргодическую гипотезу.

Текст книги структурирован в виде очерков: четыре главы в значительной степени независимы друг от друга. К каждой из глав имеется комментарий и библиография. Добавления посвящены свойствам инвариантных мер с гладкой плотностью, условиям существования дополнительных законов сохранения — первых интегралов уравнений Гамильтона, а также явлению диффузии в нелинейных динамических системах.

Книга предназначена для математиков, механиков и физиков, интересующихся классической статистической механикой и вопросами обоснования термодинамики.

ISBN 5-93972-187-7

http://rcd.ru

Оглавление

Предисловие

В этом году исполняется ровно 100 лет с момента выхода небольшой по объему книги Дж. Гиббса «Основные принципы статистической механики», которая оказала огромное влияние на развитие этой науки. Она до сих пор не устарела, легко читается[1] и содержит много не реализованных идей.

В физической литературе часто смешивают (и даже отождествляют) подходы Гиббса и Больцмана к основаниям статистической механики[2]. Однако, такой взгляд лишен основания. Подход Гиббса безупречен с математической точки зрения: на гладком многообразии вводятся две *согласованные* структуры — фазового пространства динамической системы и вероятностного пространства. Как замечает сам Гиббс, этот общий подход оказывается полезным не только для обоснования термодинамики. Наоборот, эвристический подход Больцмана использует приближенный анализ механизма столкновения молекул. Его кинетическое уравнение нестрогое и формально даже противоречит принципам динамики. Однако оно верно «ухватывает» суть явления и служит основой прикладных расчетов в динамике разреженных газов.

С другой стороны, многие математики считают, что идея Гиббса о том, что вероятность в механике следует вводить только с помощью начальной плотности распределения, явно недостаточна для обоснования термодимики (особенно неравновесной) и поэтому отдают предпочтение исследованию метода Больцмана. По их мнению, таким путем нельзя даже прийти к нулевому началу термодинамики (= постулат о существовании теплового равновесия), поскольку переносимая фазовым потоком плотность распределения вероятностей, как правило, не имеет предела при неограниченном возрастании времени. Последнее обстоятельство, действительно, имеет место. Однако, для обоснования термодинамики (переход от микро- к ма-

[1] Правда, Пуанкаре счел ее «несколько трудной для чтения», а Эйнштейн высказался более определенно: «... многие прочли его книгу, проверили каждый шаг излагаемых в ней доказательств и *ничего не поняли*».

[2] Интересный сопоставительный анализ физического и математического способов мышления (и выражения мыслей) имеется во введении к недавней книге В. П. Маслова «Квантовая термодинамика».

кроуровню описания) достаточно существования *слабого* предела вероятностной меры. Оказывается, для многих важных классов *нелинейных* гамильтоновых систем слабая сходимость имеет место и этот круг вопросов составляет существенную часть нашей книги.

В связи со сказанным следует упомянуть о вкладе Анри Пуанкаре в теорию термодинамического равновесия. Я почему-то считал, что Пуанкаре никогда особо не интересовался статистической механикой. Такого же мнения держались многие, кто знаком с его творчеством и кому я задавал этот вопрос. Между тем Пуанкаре оставил глубокий след практически во *всех* разделах математики, механики и математической физики. В частности, в статистической механике. Упомяну лишь его работу «Замечания о кинетической теории газов», опубликованную в 1906 году (практически вслед за выходом классической книги Гиббса). В ней Пуанкаре, в частности, открыл,что идеальный газ, рассматриваемый как бесстолкновительная сплошная среда, независимо от начального распределения с течением времени равномерно заполнит прямоугольный ящик с зеркальными стенками. Этот поразительный по простоте и нетривиальности факт показывает природу *необратимого* поведения локально обратимых систем. В этой же работе Пуанкаре фактически использовал (не оговаривая этого явно) идею слабой сходимости вероятностных мер при анализе II-го начала термодинамики о росте энтропии. К сожалению, его замечательные идеи оказались непонятыми и невостребованными специалистами по статистической механике.

Другой круг вопросов. рассматриваемых в нашей книге, связан с теорией возмущения гамильтоновых систем. Напомним, что в классическом методе Дарвина – Фаулера вывода канонического распределения Гиббса исходят из ансамбля слабо взаимодействующих подсистем общей гамильтоновой системы. При этом существенную роль играет *эргодическая гипотеза*: при сколь угодно малом взаимодействии объединенная гамильтонова система должна быть эргодической на фиксированных многообразиях уровня интеграла энергии. Это обстоятельство позволяет свести задачу о вычислении искомой плотности вероятностей к некоторой известной комбинаторной проблеме. Однако, как показывают результаты КАМ-теории (Колмогоров – Арнольд – Мозер), во многих важных случаях (с достаточно гладкими потенциалами парного взаимодействия) эргодическая гипотеза вообще не справедлива. На этот важный момент в современной статистической механике, к сожалению, не обращают должного внимания.

Кстати сказать, я считал, что знаменитая работа А. Н. Колмогорова по теории возмущений гамильтоновых систем была навеяна как раз вопросами обоснования статистической механики (в частности, старой проблемой эргодичности). Дело в том, что статистической механикой активно занимался А. Я. Хинчин, с которым А. Н. Колмогоров начинал свои исследования в области теории вероятностей и математической статистики (на мой взгляд, книга А. Я. Хинчина «Математические обоснования статистической механики», 1943 г. остается лучшим введением в обсуждаемый круг вопросов). Из общения с А. Я. Хинчиным он мог вынести представление о состоянии исследований по статистической теории динамических систем. Однако, А. Н. Колмогоров похоже специально не интересовался классической статистической механикой (в отличие от проблемы турбулентности) и, как описал в своих воспоминаниях В. И. Арнольд, его интерес к теории возмущений гамильтоновых систем связан с весьма частной задачей о динамических системах на торе с перемешиванием. Похоже, сам А. Я. Хинчин тоже не обратил внимание на естественную связь теоремы А. Н. Колмогорова (1954) и эргодической гипотезы в статистической механике.

Конечно, с 50-х годов прошлого столетия в теории динамических систем многое изменилось. Поэтому полезно взглянуть на проблемы обоснования термодинамики с новой точки зрения. В частности, для наших целей интерес представляют препятствия к существованию однозначных первых интегралов уравнений динамики. Дело в том, что согласно Гиббсу, плотность распределения вероятностей является неотрицательной *однозначной* функцией, заданной во *всем* фазовом пространстве. Однако, как заметил еще Пуанкаре, локально существующие первые интегралы в редких случаях можно продолжить на все фазовое пространство. Препятствием является (в частности) разрушение резонансных торов при добавлении возмущения. В связи с этим возникает необходимость в детальном изучении иерархии неинтегрируемых гамильтоновых систем, упорядоченных по свойству гладкости дополнительных (к интегралу энергии) первых интегралов. Развивая идеи Гиббса и Пуанкаре, можно указать метод получения канонического распределения Гиббса без привлечения эргодической гипотезы.

Текст книги структурирован в виде связанных друг с другом *очерков* по статистической теории гамильтоновых систем. При желании каждую из четырех глав можно читать независимо. Содержащиеся в них новые методы классической статистической механики позволяют лучше понять природу необратимого поведения термодинамических систем, дать новую интерпретацию второго начала термодинамики о росте энтропии, а также дать строгий вывод канонического распределения Гиббса, не опирающийся на эргодическую гипотезу. К каждой из глав имеется комментарий и библиография. Имеется несколько добавлений, посвященных свойствам инвариантных мер с гладкой плотностью, условиям существования дополнительных интегралов уравнений Гамильтона, а также явлению диффузии в нелинейных динамических системах. Некоторые из них написаны вместе с моими учениками, которых я дружески благодарю.

В. Козлов

В кинетической теории газов имеется еще много вопросов, вызывающих затруднения у тех, кто привык к математической строгости.

А. Пуанкаре

ВВЕДЕНИЕ

Гамильтоновы системы, статистическая механика и равновесная термодинамика

1. Форма притока тепла. Традиционное изложение классической термодинамики связано с некоторыми затруднениями методического характера, о которых писал еще Клейн [33]. По его словам, читателю «... предлагается пробиваться к цели сквозь барьеры непривычных математических понятий по пути, с трудом проложенному первыми исследователями (Карно, Клаузиус), между тем как очертания этой цели могут быть уже издали ясно и отчетливо постигнуты, если только обратить внимание в соответствующую сторону». Достаточно вспомнить, что обычно одним и тем же символом (dQ) обозначаются как дифференциалы функций, так и бесконечно-малые приращения величин, которые функциями вообще не являются. На самом деле естественным способом изложения равновесной термодинамики является *метод внешних дифференциальных форм*.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — внешние параметры термодинамической системы, τ — *абсолютная температура* ($\tau > 0$). Состояние термодинамической системы в тепловом равновесии определяется значениями a, τ. В термодинамике фундаментальное значение имеет 1-*форма притока тепла*

$$\omega = dE + \sum A_i \, da_i, \tag{1.1}$$

где E — *внутренняя энергия* системы, A_i — *обобщенная сила*, отвечающая лагранжевой координате a_i. Например, если в качестве координаты принять объем газа, то обобщенная сила будет, как известно, давлением. Величины E и A_i — функции от a и τ. Их задание входит в определение термодинамической системы. Соотношения $A_i = f_i(a_1, \ldots, a_n, \tau)$ обычно называются *уравнениями состояния*. Кроме объема в качестве обобщенных координат часто фигурируют концентрация, заряд, намагниченность, электрическая поляризация, тензор деформации. При этом обобщенными силами являются соответственно химпотенциал, потенциал, магнитная напряженность, электрическая напряженность, тензор напряжения.

Пример. Идеальный газ, заключенный в замкнутый сосуд, как термодинамическая система имеет всего лишь один внешний параметр — это объем v сосуда. Соответствующая сопряженная величина (обобщенная сила) — это давление p газа на стенки сосуда. Уравнение состояния $p = mR\tau/v$ или (в более привычной форме)

$$pv = mR\tau$$

называется *уравнением Клапейрона* (или Клапейрона – Менделеева). Здесь R — универсальная газовая постоянная, m — число «молей» газа в сосуде. В статистической механике постоянную mR обычно обозначают Nk, где k — *постоянная Больцмана*, а N — число частиц в сосуде. Согласно *закону Джоуля*, для идеального газа $E = mc\tau$, где $c = \text{const} > 0$ — удельная теплоемкость газа.

Дифференциальная форма

$$\sum A_i \, da_i \tag{1.2}$$

— работа сил A на бесконечно-малом перемещении da. В термодинамике предполагается, что при фиксированных значениях τ форма (1.2) замкнута (*первое начало термодинамики*). Если пространство состояний $\{a_1, \ldots, a_n\}$ совпадает с $\mathbb{R}^n$ (или, более общо, с односвязной областью в $\mathbb{R}^n$), то (по лемме Пуанкаре) эта форма будет точной (является дифференциалом некоторой гладкой функции от a).

Будем предполагать, что

$$\sum (\partial A_i/\partial \tau)^2 \neq 0. \tag{1.3}$$

Значит, форма притока тепла (1.1) не замкнута. Ее внешний дифференциал $d\omega$ равен

$$\Omega = \sum \frac{\partial A_i}{\partial \tau} \, d\tau \wedge da_i. \tag{1.4}$$

Матрица этой 2-формы — кососимметрическая $(n+1)\times(n+1)$-матрица:

$$\begin{Vmatrix} 0 & \dfrac{\partial A_1}{\partial \tau} & \dots & \dfrac{\partial A_n}{\partial \tau} \\ -\dfrac{\partial A_1}{\partial \tau} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{\partial A_n}{\partial \tau} & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}. \tag{1.5}$$

Ввиду предположения (1.3) ранг дифференциальной формы (1.4) равен 2. Поскольку 2-форма Ω замкнута, то *класс* этой формы совпадает с ее рангом.

На самом деле в термодинамике предполагается большее: класс формы притока тепла ω равен двум. Это означает, что в каждой точке $(\tau, a_1, \dots, a_n)$ коразмерность линейного пространства векторов w, таких, что

$$i_w\omega = 0, \qquad i_w\Omega = 0,$$

равна 2. Здесь i — *внутреннее произведение* вектора и внешней формы. Хорошо известно, что 1-формы класса 2 имеют интегрирующий множитель. Более точно, по *теореме Дарбу*, локально всегда найдутся две независимые гладкие функции f и g, такие, что $\omega = f\,dg$.

Согласно *второму началу термодинамики* [52,27], такое представление существует в целом:

$$\omega = \tau\, dS, \tag{1.6}$$

где S — *энтропия* термодинамической системы — гладкая функция от $\tau, a_1, \dots, a_n$. Множитель τ по своему физическому смыслу всегда положителен.

Равновесная термодинамика — это по сути дела геометрия дифференциальных форм постоянного класса 2.

Пример. Для идеального газа второе начало термодинамики принимает вид

$$\tau\, dS = mc\, d\tau + \frac{mR\tau}{v}\, dv.$$

Следовательно, с точностью до несущественной константы энтропия равна

$$S = mc\ln\tau + mR\ln v. \tag{1.7}$$

Отметим еще, что из (1.4) и (1.6) вытекают равенства

$$\frac{\partial A_i}{\partial \tau} = \frac{\partial S}{\partial a_i}, \qquad i \geqslant 1. \tag{1.8}$$

2. Адиабатические процессы. Процессом, происходящим в термодинамической системе, называется ориентированный путь

$$\gamma : \Delta \to M,$$

где Δ — интервал числовой оси $\mathbb{R}$, $M = \{\tau, a_1, \ldots, a_n\}$ – пространство состояний. Ориентация пути указывает направление процесса. В равновесной термодинамике процесс трактуется как бесконечно медленная смена равновесных состояний термодинамической системы. Такие процессы являются *обратимыми*.

Интеграл от 1-формы ω по пути γ — это количество тепла, полученное системой во время процесса, а интеграл

$$\int\limits_\gamma \sum A_i \, da_i$$

равен работе внешних сил. Процесс называется *адиабатическим*, если он происходит без притока или оттока тепла.

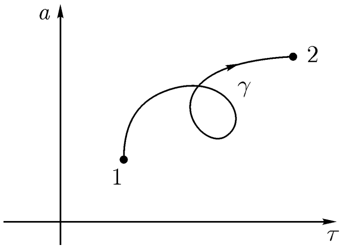

Рис. 1. Обратимый квазистатический процесс

Второе начало термодинамики эквивалентно *соотношению Клаузиуса*:

$$\int\limits_\gamma \frac{\omega}{\tau} = 0$$

для любого замкнутого пути γ. Для адиабатических процессов работа внешних сил не зависит от пути:

$$\int\limits_\gamma \sum A_s \, da_s = E(1) - E(2).$$

Это — *закон сохранения энергии*.

Пусть гладкий путь γ параметризован параметром $\alpha \in \Delta$: координаты τ, a — гладкие функции α. Можно вычислить скорость процесса:

$$v_0 = \frac{d\tau}{d\alpha}, \qquad v_1 = \frac{da_1}{d\alpha}, \ \ldots, \qquad v_n = \frac{da_n}{d\alpha}.$$

Критерий адиабатичности выражается равенством

$$i_v\, dS = \frac{\partial S}{\partial \tau} v_0 + \sum \frac{\partial S}{\partial a_i} v_i = 0, \tag{2.1}$$

где $v = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$.

Обратно, пусть в пространстве состояний M задано векторное поле $v(\tau, \alpha)$. Ему можно поставить в соответствие автономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = v_0(\tau, \alpha), \qquad \frac{da_i}{d\alpha} = v_i(\tau, \alpha), \qquad i \geqslant 1, \tag{2.2}$$

решения которой — квазистатические процессы рассматриваемой термодинамической системы.

Если процесс не изотермический ($v_0 \neq 0$), то в качестве параметра α на пути γ можно принять абсолютную температуру: $a_i = a_i(\tau)$. Тогда в (2.2) $v_0 = 1$. При таком соглашении с учетом формулы (1.6) для адиабатического процесса имеем

$$i_v\, d\omega = i_v(d\tau \wedge dS) = (i_v\, d\tau) \wedge dS - d\tau \wedge (i_v\, dS) = dS. \tag{2.3}$$

Это уравнение по форме совпадает со стационарным уравнением Ламба из гидродинамики, которое описывает изменение вихря (ротора скорости) баротропной идеальной жидкости в потенциальном силовом поле. В этом случае S совпадает (с обратным знаком) с функцией Бернулли. Уравнение (2.3) появляется естественным образом при исследовании инвариантных многообразий гамильтоновых систем, которые однозначно проектируются на конфигурационное пространство, а также в геометрической оптике при анализе систем лучей, однократно заполняющих область трехмерного пространства (подробности см. в [39]).

Кстати сказать, классические уравнения Гамильтона, описывающие динамику консервативных механических систем, также имеют вид (2.3). Действительно, пусть $q_1, \ldots, q_n$ — локальные (обобщенные) координаты механической системы с n степенями свободы, а $p_1, \ldots, p_n$ — сопряженные им канонические импульсы. Введем 1-форму действия $\omega = \sum p_s\, dq_s$; ее внешний дифференциал

$$d\omega = \sum dp_s \wedge dq_s$$

будет невырожденной 2-формой. Положим $S = -H$, где $H(p, q)$ — функция Гамильтона (полная энергия). Легко проверить, что векторное поле v, которое однозначно определяется из уравнения (2.3), порождает каноническую систему дифференциальных уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (1 \leqslant s \leqslant n).$$

Вихревая теория равновесных адиабатических процессов развита в работе [34]. Отметим два следствия уравнения (2.3), касающиеся вариационных принципов для адиабатических и изотермических процессов.

Пусть γ — гладкий путь в M, параметризованный параметром α, $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$ и

$$v = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$$

— поле скоростей (2.2) на γ. Рассмотрим функционал

$$I[\gamma] = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\omega(v) + S]\, d\alpha, \qquad \omega(v) = i_v\omega \tag{2.4}$$

в классе путей с фиксированными концами. Справедлив следующий вариационный принцип:

путь γ — стационарная точка функционала (2.4) тогда и только тогда, когда

1) $d\tau = 1 \ (v_0 = 1)$,

2) путь γ представляет адиабатический неизотермический процесс.

Вариационные принципы такого типа в литературе по термодинамике, по-видимому, не отмечались (см. [25, 7]).

Для доказательства этого утверждения введем функцию Лагранжа

$$\mathscr{L} = \omega(v) + S = \tau\frac{dS}{d\alpha} + S$$

и воспользуемся уравнениями Эйлера – Лагранжа

$$\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \tau'}\right)' = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \tau}, \qquad \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial a'}\right)' = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial a}. \tag{2.5}$$

Здесь штрих обозначает производную по α. Второе уравнение дает соотношение

$$\tau' \partial S/\partial a = \partial S/\partial a.$$

Ввиду предположения (1.3) и равенств (1.8), $\tau' = 1$. Первое уравнение (2.5) приводится к соотношению

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \sum \frac{\partial S}{\partial a_i} v_i = 0,$$

эквивалентному условию адиабатичности.

Адиабатические *изотермические* процессы характеризуются следующим более простым вариационным принципом: функционал

$$J[\gamma] = \int\limits_{\gamma} \omega \tag{2.6}$$

принимает стационарное значение в классе путей с фиксированными концами. Это утверждение легко доказывается тем же способом.

Замечание. Значение функционалов (2.4) и (2.6) на адиабатических процессах (соответственно, неизотермических и изотермических) равно разности значений функции τS в концевых точках. Напомним, что произведение τS равно разности внутренней и *свободной* энергий термодинамической системы.

Выразительным примером адиабатического необратимого процесса является *свободное расширение газа в пустоту*. Этот процесс протекает быстро и не является квазистатическим. Рассмотрим два сосуда с объемами v_1 и v_2, соединенные трубкой, в которой имеется заслонка. Предположим, что в начальный момент газ сосредоточен в первом сосуде, а во втором сосуде — вакуум. После резкого снятия перегородки начинается свободное расширение газа в пустоту. Через некоторое время плотность и давление газа в сообщающихся сосудах выравниваются.

Такой опыт описал Джоуль в своей работе «On the Changes of Temperature produced by the Rarefaction and Condensation of Air», опубликованной в 1845 году. Джоуль хотел выяснить изменение температуры газа после расширения. С этой целью он поместил оба сосуда в водяную ванну с теплонепроницаемыми стенками и измерял температуру воды. В первый сосуд с помощью насоса нагнетается воздух до давления в 22 атмосферы, а из второго сосуда воздух, наоборот, откачивается. Через некоторое время после свободного расширения газа в термодинамической системе устанавливается тепловое равновесие. Оказалось, что температура газа τ_2 после расширения равна начальной температуре τ_1 (см. рис. 2). Отсюда Джоуль сделал вывод, что внутренняя энергия E является функцией только температуры.

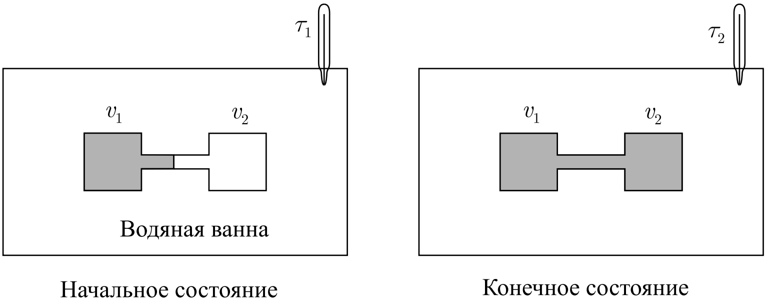

Рис. 2. Опыт Джоуля по расширению газа в пустоту.

Равенство температур $\tau_1 = \tau_2$ позволяет вычислить приращение энтропии в результате свободного расширения идеального газа. Действительно, по формуле (1.7),

$$\Delta S = mR \ln \frac{v_+}{v_-},$$

где $v_- = v_1$, $v_+ = v_1 + v_2$. Ясно, что $\Delta S > 0$ и, следовательно, в результате адиабатического расширения энтропия идеального газа увеличивается.

3. Парадокс возвращаемости. Согласно классической кинетической теории, *идеальный газ* представляет собой систему N одинаковых частиц, помещенных в сосуд с объемом v. Газ считается разреженным в том смысле, что его отдельные частицы вообще не взаимодействуют друг с другом.

В физической литературе идеальный газ обычно отождествляют (причем безосновательно) с *газом Больцмана–Гиббса*, состоящим из N одинаковых шариков, которые упруго сталкиваются друг с другом. Однако уравнение состояния такого газа, полученное известными методами статистической механики, будет отличаться от классического уравнения Клапейрона. Таким образом, газ Больцмана–Гиббса является простейшей моделью *реального* (а не идеального) газа.

Примем упрощающее предположение о пренебрежении кристаллической структурой стенок сосуда, содержащего рассматриваемый идеальный газ. Другими словами, реальные стенки сосуда заменяются идеализированными поверхностями, действие которых на падающие частицы газа сводится к простому упругому отражению.

Итак, рассмотрим движение идеального газа из N частиц в ящике с зеркальными стенками, имеющем форму k-мерного прямоугольного параллелепипеда Π^k. С физической точки зрения особый интерес, конечно, представляет случай $k = 3$.

Зададим Π^k как область в $\mathbb{R}^k = \{z_1, \ldots, z_n\}$, определенную неравенствами

$$0 \leqslant z_1 \leqslant l_1, \ldots, 0 \leqslant z_k \leqslant l_k,$$

где $l_1, \ldots, l_k$ — ребра Π^k. Ясно, что

$$\operatorname{vol} \Pi^k = l_1 \ldots l_k.$$

Будем считать, что частицы газа движутся по инерции. Таким образом, газ представляет гамильтонову систему с kN степенями свободы. Эта система *вполне интегрируемая*: имеется kN функционально независимых первых интегралов (законов сохранения), попарно находящихся в инволюции. Ими являются квадраты импульсов каждой частицы в проекции на оси $z_1, \ldots, z_k$.

Хорошо известно, что ввиду свойства полной интегрируемости фазовое пространство (размерности $2kN$) должно расслаиваться на kN-мерные *инвариантные торы*, которые заполнены траекториями *условно-периодических движений*. Покажем, что эти торы являются 2^k-листными *накрытиями* параллелепипеда Π^k, разветвленными на границе Π^k.

Поскольку частицы движутся независимо друг от друга, то нам достаточно рассмотреть случай $N = 1$. Чтобы сделать конструкцию накрытия более наглядной, изучим сначала одномерный случай (когда $k = 1$). Итак, пусть имеется всего одна частица на отрезке $0 \leqslant z \leqslant l$. В каждом положении частица может иметь две скорости $\pm w$. Чтобы устранить такую «двузначность», зеркально отразим отрезок относительно одного из концов и отождествим концы полученного удвоенного отрезка (как показано

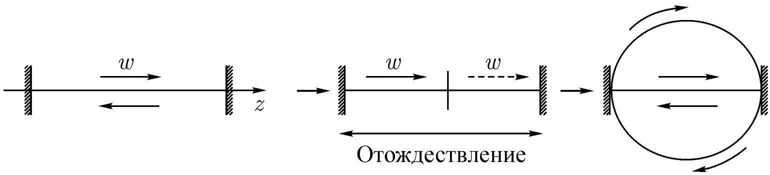

Рис. 3. Накрытие отрезка.

на рис. 3). В результате вместо колебательного движения точки вдоль отрезка мы получим вращательное движение по окружности в одну сторону.

Накрытие $\mathbb{T}^1\{\varphi \mod 2\pi\} \to \Pi^1$ можно представить следующими явными формулами:

$$\varphi = \pi z/l, \qquad \begin{gathered}\text{когда } z \text{ увеличивается от } 0\\ \text{до } l \text{ (точка движется вправо),}\end{gathered}$$

$$\varphi = 2\pi - \pi z/l, \qquad \begin{gathered}\text{когда затем } z \text{ уменьшается от } l\\ \text{до } 0 \text{ (точка движется влево).}\end{gathered}$$

После одного полного колебания частицы вдоль отрезка переменная φ получит приращение 2π. Угловая скорость движения по окружности $\mathbb{T}^1$ будет равна

$$\dot{\varphi} = \omega = \pi w/l.$$

Таким образом, в новых переменных $\varphi \mod 2\pi$, ω *регуляризованные* уравнения движения одной частицы принимают вид

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{\omega} = 0.$$

На рис. 4 показано построение накрытия прямоугольника ($k = 2$).

В общем случае, когда в параллелепипеде движутся N частиц, конфигурационным пространством служит прямое произведение

$$(\Pi^k)^N = \underbrace{\Pi^k \times \ldots \times \Pi^k}_{N \text{ раз}}.$$

Положим для краткости $n = kN$. Аналогично строится накрытие

$$\mathbb{T}^n\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n \mod 2\pi\} \to (\Pi^k)^N.$$

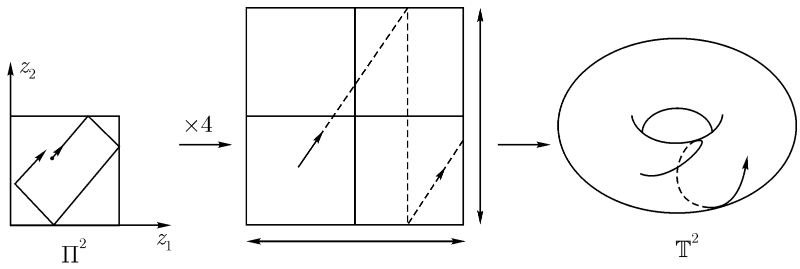

Рис. 4. Накрытие прямоугольника

В новых угловых переменных $\varphi_s \mod 2\pi$ $(1 \leqslant s \leqslant n)$ уравнения движения идеального газа принимают вид

$$\dot{\varphi}_s = \omega_s, \qquad \dot{\omega}_s = 0; \qquad 1 \leqslant s \leqslant n. \tag{3.1}$$

Как известно из теории интегрируемых гамильтоновых систем, в окрестности каждого инвариантного тора системы с n степенями свободы можно ввести канонические *координаты действие-угол* $I_1, \ldots, I_n$; $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \mod 2\pi$, в которых уравнения Гамильтона принимают вид

$$\dot{\varphi}_s = \omega_s(I_1, \ldots, I_n), \qquad \dot{I}_s = 0; \qquad 1 \leqslant s \leqslant n. \tag{3.2}$$

Более того,

$$\omega_s = \frac{\partial H}{\partial I_s}, \qquad 1 \leqslant s \leqslant n,$$

где H — гамильтониан системы — функция только от переменных действия $I_1, \ldots, I_n$. В *невырожденном* случае, когда

$$\det \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j} \right\| = \frac{\partial(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{\partial(I_1, \ldots, I_n)} \neq 0,$$

вместо переменных I можно принять ω и тем самым свести уравнения (3.2) к уравнениям (3.1). Таким образом, система (3.1) является *универсальной* системой дифференциальных уравнений для невырожденных вполне интегрируемых гамильтоновых систем.

Фазовым пространством Γ динамической системы (3.1) служит прямое произведение $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n = \{\varphi \mod 2\pi, \omega\}$. Инвариантные n-мерные торы задаются уравнениями $\omega_s = \mathrm{const}\ (1 \leqslant s \leqslant n)$. Рассмотрим более детально движения на фиксированном торе.

Уравнения (3.1) легко решаются:

$$\varphi_s = \omega_s t + \varphi_s^\circ, \qquad 1 \leqslant s \leqslant n. \tag{3.3}$$

Эти функции задают *условно-периодическое* движение на торе $\mathbb{T}^n$; числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$ называются *частотами* этого движения, а константы $\varphi_1^\circ, \ldots, \varphi_n^\circ$ — *начальными фазами.*

Пусть $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ — интегрируемая функция. Величина

$$\overline{f} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(\varphi)\, d^n\varphi, \qquad d^n\varphi = d\varphi_1 \ldots d\varphi_n$$

называется *пространственным* (или *фазовым*) *средним* функции f. Ограничим функцию f на траекторию условно-периодического движения (3.3):

$$f(t, \varphi^\circ) = f(\omega_1 t + \varphi_1^\circ, \ldots, \omega_n t + \varphi_n^\circ).$$

Если предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t, \varphi^\circ)\, dt = \langle f \rangle$$

существует, то он называется *временны́м средним* функции f. Ясно, что $\langle f \rangle$, вообще говоря, зависит от начальных фаз φ°.

Резонансом называется линейное соотношение между частотами

$$(k, \omega) = k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n = 0$$

с целыми $k_1, \ldots, k_n$, не равными одновременно нулю. Ясно, что почти все (в смысле меры Лебега) наборы частот $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ *нерезонансные*.

Теорема. *Если f — интегрируемая по Риману функция, то временное среднее $\langle f \rangle$ существует и является интегрируемой (по Риману) функцией на $\mathbb{T}^n$. Если, кроме того, частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ не резонансные, то*

$$\langle f \rangle = \overline{f}.$$

Эта теорема, доказанная Германом Вейлем в 1916 году, была первой *эргодической теоремой*. Ей предшествовали более частные результаты Боля и Серпинского.

Следствие 1 (теорема о равномерном распределении). *Пусть частоты нерезонансные, D — измеримая по Жордану область на $\mathbb{T}^n$ и $\nu(T)$ — часть времени $t \in [0, T]$, когда $\varphi(t) \in D$. Тогда*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\nu(T)}{T} = \frac{\operatorname{mes} D}{\operatorname{mes} \mathbb{T}^n}.$$

Действительно, пусть f — характеристическая функция (индикатор) множества D; она интегрируема по Риману. Остается применить теорему Вейля.

Пример. Пусть D_1 и D_2 — две измеримые области на торе равной меры, а $\nu_1(T)$ и $\nu_2(T)$ — времена из отрезка $0 \leqslant t \leqslant T$, в течении которых система находится в областяхD_1 и D_2 соответственно. Тогда при $T \to \infty$

$$\frac{\nu_1(T)}{T} \sim \frac{\nu_2(T)}{T}.$$

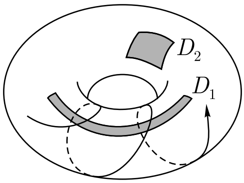

Рис. 5. Равномерное распределение.

Следствие 2 (теорема Кронекера). *Если ω нерезонансно, то любая траектория $\varphi = \omega t + \varphi^\circ$ всюду плотна на $\mathbb{T}^n$.*

Следствие 3 (теорема о возвращении). *Каждая траектория $\varphi(t) = \omega t + \varphi^\circ$ бесконечно много раз сколь угодно близко подходит к начальному положению φ°.*

Действительно, пусть

$$(k^{(1)}, \omega) = \ldots = (k^{(m)}, \omega) = 0$$

— полная система независимых резонансов. Тогда торы

$$\mathbb{T}_c^{n-m} = \{\varphi \in \mathbb{T}^n : (k^{(1)}, \varphi) = c_1, \ldots, (k^{(m)}, \varphi) = c_m\}$$

будут инвариантными и движения $\varphi(t) = \omega t + \varphi^\circ$ на них будут условно-периодическими с несоизмеримыми частотами. Остается воспользоваться теоремой Кронекера.

Применим эти соображения к идеальному газу, который в начальный момент времени заключен в одной из половинок сосуда. После снятия перегородки частицы газа будут двигаться уже по всему объему сосуда. Оказывается, через некоторое время весь газ снова соберется в первоначальной области. Такое поведение газа, однако, никогда не наблюдается. *Парадокс возвращаемости* указан Цермело в работе 1896 г. Эрнст Цермело более известен своими результатами по аксиоматической теории множеств. Работу по кинетической теории теплоты, в которой содержится ставший знаменитым парадокс возвращаемости, он написал в молодости, когда работал ассистентом у Макса Планка.

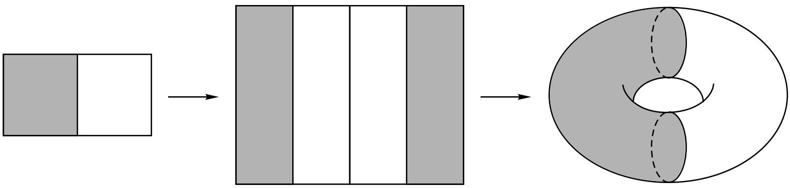

Рис. 6. К парадоксу Цермело

Для доказательства сначала рассмотрим динамику одной частицы в k-мерном параллелепипеде П. При переходе к накрытию $\mathbb{T}^k \to \Pi$ мы получаем область D на торе, точки которой отвечают точкам в левой части П (на рис. 6 она заштрихована). Ясно, что

$$\operatorname{mes} D = (\operatorname{mes} \mathbb{T}^k)/2.$$

Если газ состоит из N невзаимодействующих частиц, то в «конфигурационном» торе $(\mathbb{T}^k)^N$ следует выделить область

$$D_N = D \times \ldots \times D = D^N,$$

точкам которой соответствуют начальные состояния газа, когда все его частицы расположены в левой половинке П. Легко показать, что

$$\frac{\operatorname{mes} D_N}{\operatorname{mes}(\mathbb{T}^k)^N} = \frac{1}{2^N}. \tag{3.4}$$

Эта простая формула естественным образом согласуется с правилом умножения вероятностей независимых событий.

Итак, согласно следствию 3, если в начальный момент система находилась в области D_N, то через некоторое (пусть большое) время она снова окажется в этой области. Следовательно, газ из N частиц бесконечное число раз снова окажется в левой половине сосуда. Более того, так как в общем случае частоты движений по тору $(\mathbb{T}^k)^N$ не резонансные, то почти наверное весь газ соберется в правой половине сосуда и частота этих событий одна и та же (она равна 2^{-N} и не зависит от k — размерности пространства).

Ответ Больцмана на критику Цермело по существу следующий: время возвращения, возможно, превосходит возраст Солнечной системы. Вспомним, что в одном литре газа содержится примерно $N = 6 \cdot 10^{23}$ частиц (*число Авогадро*). Так что вероятность возвращения $2^{-6\cdot 10^{23}}$ чудовищно мала. Для сравнения, согласно Литтлвуду, вероятность того, что обезьяны, барабанящие по пишущей машинке, отпечатают текст «Гамлета», равна $33^{-27000} > 2^{-6\cdot 10^5}$.

Стоит отметить, что парадокс Цермело имеет место и для газа Больцмана – Гиббса. Только здесь надо использовать общую *теорему Пуанкаре о возвращении* (см., например, [53]). Собственно, исходным пунктом упомянутой работы Цермело 1896 г. была как раз теорема Пуанкаре.

На самом деле противоречия кинетической теории Максвелла – Больцмана, связанные со свойствами *обратимости* и *возвращаемости* уравнений классической динамики, обсуждал сам Пуанкаре в его более ранней работе 1893 г. «Механицизм и опыт» (Mécanisme et l'expérience), опубликованной в популярном журнале «Rev. Metaphys. et Morale».

Вначале Пуанкаре упоминает о попытке немецкого физика и математика Германа Гельмгольца решить проблему необратимости с помощью гипотезы «*скрытых циклических движений*». Поскольку циклические координаты не входят в выражение для функции Лагранжа, то их изменение непосредственно не наблюдается. С другой стороны, после исключения циклических координат по методу Рауса, получаем систему с меньшим числом степеней свободы, функция Лагранжа которой содержит линейные по скорости слагаемые, и поэтому уравнения движения перестают быть инвариантными относительно обращения времени (см. по этому поводу [5], гл. III). Нельзя ли представить себе, что и в мире молекул имеются подобные скрытые от нас циклические движения (молекулы со «спином»), объясняющие механизм необратимого поведения? Однако эта остроумная гипотеза приводит нас к отсутствию *непосредственной* обратимости, но она по-прежнему основана на *косвенной* обратимости.

Далее Пуанкаре пишет: «Англичане предложили гипотезу совершенно другого рода. Чтобы разъяснить ее смысл я прибегну к услугам сравнения: если имеется 100 кг пшеницы и одно зерно ячменя, то спрятать это зерно в пшенице очень легко, но отыскать его снова почти невозможно, так что это явление кажется в некотором смысле необратимым. Это происходит потому, что зерна малы и их много; подобным образом кажущаяся необратимость природных процессов обусловлена тем обстоятельством, что молекулы слишком малы и их слишком много, чтобы наши грубые органы чувств могли иметь дело с ними . . .

Развитие этой идеи послужило началом возникновения кинетической теории газов, которая вплоть до настоящего времени представляет собой наиболее серьезную попытку примирения механицизма и опыта.

Однако все эти трудности остались непреодоленными. Теорема, которую легко доказать, говорит нам, что ограниченный мир, подчиняющийся только законам механики, всегда будет проходить через состояние, очень близкое к его начальному состоянию . . .

. . . для того, чтобы наблюдать переход тепла от холодного тела к горячему, вовсе не обязательно обладать острым зрением, разумом и проворством «демона» Максвелла — для этого достаточно иметь лишь немного терпения.

. . . Проблема оказывается настолько сложной, что с ней невозможно иметь дело, соблюдая все требования строгости. Приходится выдвигать определенные упрощающие гипотезы; но являются они законными и согласующимися между собой? Я не уверен».

Я прошу прощения у читателя за столь длинное цитирование: наверное, трудно сказать лучше и точнее.

4. Распределение Максвелла. Считается, что тепловое равновесие наступает после очень большого числа столкновений между молекулами, в результате которых скорости частиц газа оказываются распределенными по *нормальному закону*. Этот результат Максвелла, опубликованный в работе 1866 г. «On the dynamical theory of gases», является ключевым для всей кинетической теории. До Максвелла считалось, что в результате столкновений скорости частиц выравниваются.

Максвелл предложил несколько способов доказательства нормального распределения. Вначале он использовал предположение о статистической независимости компонент скоростей молекул. Этот способ наиболее популярен и повторяется во многих учебниках по статистической механике. Надо сказать, что это простое рассуждение восходит к Гауссу, который таким путем впервые вывел свой знаменитый закон.

Мы приведем более поздний подход Максвелла, который часто приписывают Борелю. Он интересен тем, что в существенных моментах совпадает с известным *методом Дарвина–Фаулера*, с помощью которого обычно выводят более общее *распределение Гиббса*.

Стоит подчеркнуть, что в этом случае нормальное распределение по скоростям получается в результате предельного перехода, когда число частиц N стремится к бесконечности (как в центральной предельной теореме теории вероятностей). Тогда как при первом способе рассуждений проекции скорости частицы рассматриваются как независимые случайные величины, которые оказываются нормально распределенными независимо от общего числа частиц.

Как заметил однажды Пуанкаре (со ссылкой на своего приятеля физика Липпманна), в нормальный закон верят все. Правда, при этом математики считают его законом природы, тогда как физики убеждены в том, что он является математической теоремой.

Итак, рассмотрим газ, состоящий из N одинаковых частиц с массой m, двигающихся в n-мерном пространстве. Пусть $v_1, \ldots, v_N$ — их скорости; компоненты вектора v_i обозначим

$$v_{i,1}, \ \ldots, \ v_{i,n}.$$

Как найти $P\{\alpha < v_{i,1} < \beta\}$ — вероятность того, что проекция скорости i-ой точки на первую ось заключена в интервале (α, β)?

Мы рассматриваем идеальный газ; так что взаимодействия между молекулами нет. Пусть E — полная энергия. Тогда

$$v_1^2 + \ldots + v_N^2 = \frac{2E}{m}; \qquad v_j^2 = (v_j, v_j).$$

Допустим, что энергия E пропорциональна числу частиц N: $E = \sigma N$, причем σ не зависит от N.

Состояние газа определяется точкой

$$(v_{1,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{N,n}) \in \mathbb{R}^{nN}$$

на поверхности $(nN-1)$-мерной гиперсферы $S^{nN-1}(R)$ радиуса

$$R = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \left(\frac{2\sigma N}{m}\right)^{1/2}.$$

Нас интересует *сферическая зона*

$$\alpha < v_{i,1} < \beta \tag{4.1}$$

на S^{nN-1}.

Чтобы вычислить вероятность события (4.1), надо ввести на сфере S *вероятностную меру*. Для любой измеримой области $B \subset S$ положим

$$P(B) = \frac{\operatorname{mes} B}{\operatorname{mes} S},$$

где mes — стандартная мера ($(nN-1)$-мерный объем) на сфере S как гиперповерхности в nN-мерном евклидовом пространстве. Так что

$$P\{\alpha < v_{i,1} < \beta\} = \frac{\operatorname{mes}\{\alpha < v_{i,1} < \beta\}}{\operatorname{mes} S}. \tag{4.2}$$

Обоснование этой формулы — отдельный вопрос, который мы обсудим позже. Во всяком случае ссылок на изотропность пространства $\mathbb{R}^n$ и равноправие направлений скоростей частиц газа явно недостаточно: эти соображения никак не учитывают форму границы сосуда. Формулу (4.2) следует рассматривать как *постулат Максвелла* о тепловом равновесии газа.

Объемы в формуле (4.2) легко сосчитать с помощью перехода к сферическим координатам:

$$P = \frac{\int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(1 - \frac{mx^2}{2\sigma N}\right)^{\frac{nN-3}{2}} dx}{\int\limits_{-R}^{R} \left(1 - \frac{mx^2}{2\sigma N}\right)^{\frac{nN-3}{2}} dx}.$$

Устремляя теперь N к бесконечности, получаем окончательную формулу для вероятности:

$$P = \frac{\int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{n}{2}\frac{mx^2}{2\sigma}}\,dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n}{2}\frac{mx^2}{2\sigma}}\,dx}.$$

Таким образом, каждая компонента скорости каждой частицы распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $2\sigma/(nm)$. Это распределение в статистической механике называется *распределением Максвелла*. Для практических целей особое значение имеет, конечно, случай, когда $n = 3$. Плотность распределения компоненты $w = v_{i,j}$ имеет вид

$$\rho(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{nm}{2\sigma}}\,e^{-\frac{n}{2}\frac{mw^2}{2\sigma}}. \tag{4.3}$$

Имея формулу для плотности, можно вычислить средние значения любых динамических величин. Вычислим, например, среднюю кинетическую энергию частицы, приходящуюся на ее одну степень свободы:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{mw^2}{2}\rho(w)\,dw = \frac{\sigma}{n}.$$

Обычно полагают это выражение равным $k\tau/2$, где τ — абсолютная температура, k — постоянная Больцмана. Тогда формула (4.3) для плотности распределения Максвелла принимает следующий вид:

$$\rho = \frac{e^{-\frac{E}{k\tau}}}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{E}{k\tau}}\,dw}, \qquad E = \frac{mw^2}{2}. \tag{4.4}$$

В этом выводе нормального распределения остался непроясненным постулат Максвелла о том, что вероятностная мера на $S^{nN-1}(R)$ пропорциональна стандартной мере на сфере как однородном пространстве. Конечно, этот постулат можно принять в качестве *определения* теплового равновесия, как это предлагает Марк Кац в своей книге [30] (наверное, в соответствии со старым правилом превращать проблемы в определения). Но такой прием вряд ли нас сможет полностью удовлетворить.

С точки зрения уже упоминавшегося более общего подхода Дарвина–Фаулера, следует рассмотреть систему N *слабо взаимодействующих* частиц и предположить, что такая более сложная система является *эргодической* на энергетической гиперповерхности $E = N\sigma$, где E — полная энергия системы (с учетом слабого взаимодействия). Тогда, как известно, на этих поверхностях имеется *единственная* вероятностная мера, инвариантная относительно фазового потока динамической системы из N взаимодействующих частиц. Можно показать, что при исчезновении возмущения эта мера (после усреднения по пространству) переходит в стандартную меру на гиперсфере как однородном пространстве. Подчеркнем, что (согласно Дарвину и Фаулеру) система должна быть эргодической при *сколь угодно малом* взаимодействии между частицами газа. Однако это предположение заведомо не выполнено, например, для сосуда в виде тела вращения: в этом случае имеется дополнительный интеграл — сохраняется момент импульса системы относительно оси вращения. Круг вопросов, связанный с эргодической гипотезой, мы обсудим подробнее в гл. IV.

5. Вероятностные меры. Идеи Максвелла и Больцмана о тепловом равновесии были развиты Гиббсом в несколько ином направлении. Основы *общего метода* Гиббса изложены в его книге «Elementary principles in statistical mechanics, developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics», изданной в Нью-Йорке в 1902 г. Основная идея Гиббса заключается во введении на гладком многообразии M двух *согласованных* структур. С одной стороны, M — это фазовое пространство некоторой динамической системы, а с другой — это вероятностное пространство, на котором задана некоторая вероятностная мера. Условие согласованности состоит в том, что фазовый поток динамической системы переносит вероятностную меру. Применительно к гамильтоновым динамическим системам подход Гиббса позволяет, в частности, обосновать равновесную термодинамику. «Но, — как замечает сам Гиббс, — несмотря на то, что возникновение статистической механики исторически обусловлено исследованиями в области термодинамики, она, очевидно, в высшей степени заслуживает независимого развития как в силу изящества и простоты своих принципов, так и потому, что она приводит к новым результатам и проливает новый свет на старые истины в областях, совершенно чуждых термодинамике».

Итак, рассмотрим *динамическую систему* на гладком многообразии $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$, заданную дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = v(x), \quad x = \{x_1, \ldots, x_n\} \in M. \tag{5.1}$$

Здесь v — гладкое касательное векторное поле на M. Пусть $\{g^t\}$ — *фазовый поток* этой системы (g^t — сдвиг точек M по траекториям системы (5.1) за время t).

Вслед за Гиббсом будем считать, что пребывание системы в состоянии $x \in M$ является *случайным событием*. Пусть D — измеримая область в M и $P\{x_0 \in D\}$ — вероятность того, что в начальный момент времени $t = 0$ система находится в области D. Точки области D переносятся фазовым потоком ($x_t = g^t(x_0)$) и через время t они заполнят область $g^t(D)$. Естественное *условие согласованности* структуры динамической системы и структуры вероятностного пространства выражается равенством

$$P\{x_t \in g^t(D)\} = P\{x_0 \in D\}. \tag{5.2}$$

В духе геометрической теории вероятностей определим вероятность $P\{x_t \in g^t(D)\}$ как интеграл

$$\int\limits_{g^t(D)} \rho_t(x)\, d^n x, \quad d^n x = dx_1 \ldots dx_n, \tag{5.3}$$

где $\rho_t(x)$ — неотрицательная интегрируемая функция на M, зависящая от времени t как параметра. Ясно, что при всех $t \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_M \rho_t\, d^n x = 1. \tag{5.4}$$

Это означает, что пребывание системы *в каком-то* состоянии $x \in M$ является *достоверным событием*.

В силу условия согласованности (5.2), для любой измеримой области D интеграл (5.3), как функция времени, будет константой. Следовательно, этот интеграл является *интегральным инвариантом* системы (5.1). Как хорошо известно (см., например, [39, 53]), в таком случае плотность распределения вероятностей $\rho_t(x)$ удовлетворяет *уравнению Лиувилля*

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_t v) = 0, \tag{5.5}$$

где $\mathrm{div} = \Sigma \partial / \partial x_i$ — *дивергенция* векторного поля. Отметим, что это уравнение справедливо и в более общем случае, когда поле v явно зависит от времени.

Уравнение Лиувилля имеет фундаментальное значение для всей статистической механики. Оно является уравнением в частных производных первого порядка и для его решения надо задать *данное Коши* — начальное значение плотности вероятностей: $\rho_0 = \rho(x)$. Если нам известно *общее* решение обыкновенного дифференциального уравнения (5.5), то уравнение Лиувилля легко решается. Пусть, например, $\rho = \delta(x - x_0)$, где δ — дельта-функция Дирака. Тогда

$$\rho_t(x) = \delta(x - g^t(x_0)).$$

Правда, здесь все строго детерминировано и по сути дела нет никакого *распределения* вероятностей. Кроме того, надо иметь в виду, что δ-функция Дирака в точном смысле вообще не является функцией на M.

Уравнение Лиувилля (5.5) по форме совпадает с *уравнением неразрывности* в механике сплошной среды. Поэтому можно считать, что уравнения (5.1), (5.5) описывают течение жидкости с полем скоростей v и плотностью ρ. Следуя Гиббсу, такую систему назовем *ансамблем-жидкостью* или просто *ансамблем* динамических систем. Другими словами, ансамбль Гиббса — это совокупность идентичных динамических систем, распределенных в одном и том же фазовом пространстве с некоторой плотностью.

Подход Гиббса допускает еще одну интерпретацию. Предположим, что мы хотим найти движение x_t с начальным условием x_0. Однако, как правило, начальное условие x_0 удается реализовать с ошибкой, которая распределена по какому-либо закону (скажем, нормальному). Если ρ — плотность начального распределения ошибок, то в момент времени t ошибки распределены с плотностью ρ_t, которая есть решение уравнения Лиувилля с данным Коши ρ. Некоторые авторы приписывают эту интерпретацию Максу Борну, однако этот круг вопросов подробно обсуждает сам Гиббс во второй главе своей книги.

Уравнение (5.5) можно представить в следующем эквивалентном виде:

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial \rho_t}{\partial x_i} v_i + \rho_t \operatorname{div} v = 0.$$

Следовательно, если $\operatorname{div} v = 0$, то плотность распределения вероятностей является *первым интегралом* исходной системы (5.1):

$$\dot{\rho}_t = \frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial \rho_t}{\partial x_i} v_i = 0.$$

Это простое но важное наблюдение позволяет указать явный вид решения уравнения Лиувилля с начальным данным $\rho(x)$:

$$\rho_t(x) = \rho(g^{-t}(x)). \tag{5.6}$$

Действительно, пусть $\rho_t(x)$ — первый интеграл системы (5.1). Тогда функция $\rho_t(g^t(x_0))$ не зависит явно от времени и, следовательно, равна $\rho(x_0)$. Остается воспользоваться обратной формулой $x_0 = g^{-t}(x)$.

Статистической динамической системой будем называть тройку $(M,\ \{g^t\},\ \{P\})$, где M — гладкое многообразие, $\{g^t\}$ — фазовый поток — группа гладких обратимых преобразований M, $\{P\}$ — вероятностные меры на M, которые переносятся фазовым потоком. В отличие от обычной динамической системы, состояния такой системы уже не точки фазового пространства M, а вероятностные меры на M. Эволюция статистической динамической системы однозначно определяется начальным данным — заданием меры P в некоторой фиксированный момент времени. В случае, когда мера P имеет гладкую плотность, эта эволюция описывается уравнением Лиувилля. Состояние системы Гиббс назвал *статистическим равновесием*, если мера P инвариантна относительно потока $\{g^t\}$; другими словами, решение уравнения Лиувилля не зависит от t. Статистическое равновесие гамильтоновой динамической системы можно назвать *тепловым равновесием*. Системы в статистическом равновесии представляют основной объект *эргодической теории*, которая, кстати сказать, возникла как раз в связи с проблемой обоснования термодинамики.

Спрашивается, всегда ли имеются статистически равновесные состояния? Верно ли, что при неограниченном возрастании времени статистическая динамическая система стремится к одному из равновесных состояний? Положительный ответ на второй вопрос для гамильтоновых систем обосновывает *нулевое начало термодинамики* о необратимом стремлении изолированных механических систем к тепловому равновесию.

Для компактного M положительный ответ на первый вопрос дает *теорема Крылова–Боголюбова* (см. [53, 63]). Вторая задача существенно сложнее. Во-первых заметим, что сходимости в обычном смысле здесь нет: решения уравнения Лиувилля как функции t, как правило, осциллируют и вообще не имеют никакого предела при $t \to \infty$. Во-вторых, при переходе к *макроскопическому* описанию динамики сходимость вероятностной меры $d\mu_t = \rho_t\, d^n x$ следует рассматривать в *слабом* смысле. Напомним, что мера $d\mu_t$ *слабо сходится* к мере $d\overline{\mu}$, если для любой непрерывной функции $\varphi : M \to \mathbb{R}$ с компактным носителем

$$\int\limits_M \varphi(x)\, d\mu_t \to \int\limits_M \varphi(x)\, d\overline{\mu} \tag{5.7}$$

при $t \to \infty$. Если система (5.1) с самого начала имеет инвариантную меру, то в равенстве (5.7) можно выбирать другие классы «пробных» функций $\{\varphi\}$.

Можно показать, что если $d\mu_t$ слабо сходится к $d\overline{\mu}$, то $d\overline{\mu}$ — это именно та вероятностная мера на M, которая «конструируется» в ходе доказательства теоремы Крылова – Боголюбова. Следует иметь ввиду, что предельная мера $d\overline{\mu}$ может оказаться *сингулярной* и вообще не иметь плотности.

Пример. Пусть $M = \mathbb{R} = \{x\}$, а динамическая система задается уравнением $\dot{x} = -x$. Все его решения стремятся к положению равновесия $x = 0$ при $t \to +\infty$. Решение уравнения Лиувилля с начальным данным $\rho(x)$ имеют вид

$$\rho_t(x) = e^t \rho(e^t x).$$

При $t \to +\infty$ это семейство функций расходится (например, $\rho_t(0) \to +\infty$, когда $t \to +\infty$).

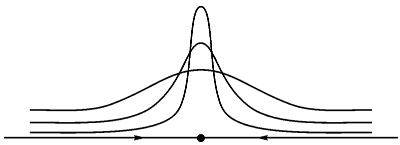

Рис. 7. Эволюция плотности вероятностной меры

Однако семейство мер $d\mu_t = \rho_t(x)\, dx$ на прямой имеет слабый предел. Действительно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, d\mu_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\varphi(e^{-t}x)\, dx \to \varphi(0)$$

при $t \to +\infty$ (поскольку непрерывная функция φ имеет компактный носитель). Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x)\,dx = \varphi(0),$$

то $d\overline{\mu} = \delta(x)\,dx$ будет предельной мерой. Эта мера сингулярная: она не является непрерывной относительно обычной меры Лебега на прямой. Носитель меры $d\overline{\mu}$ совпадает с аттрактором динамической системы — точкой $x = 0$. Относительно этой меры все множества на прямой измеримы: $\overline{\mu}(A) = 1$, если $0 \in A$ и $\overline{\mu}(A) = 0$, если $0 \notin A$.

Надо иметь в виду, что слабой сходимости вероятностных мер $d\overline{\mu}_t = \rho_t(x)\,d^n x$ может не быть даже в самых простых случаях.

Пример. Пусть $M = \mathbb{T}^n$ — n-мерный тор с угловыми координатами $x_1, \ldots, x_n \bmod 2\pi$, а динамическая система порождается уравнениями

$$\dot{x}_1 = \omega_1, \ldots, \dot{x}_n = \omega_n, \quad \omega_s = \mathrm{const}. \tag{5.8}$$

Будем считать частоты ω_s нерезонансными. Фазовый поток, очевидно, сохраняет обычную меру $d^n x$ на $\mathbb{T}^n$. Пусть A — собственное измеримое подмножество $\mathbb{T}^n$ $(\operatorname{mes} A < \operatorname{mes} \mathbb{T}^n)$ и ρ — плотность равномерного распределения в области A: $\rho(x) = 1/\operatorname{mes} A$, если $x \in A$, и $\rho(x) = 0$, если $x \notin A$. Пусть $B \subset \mathbb{T}^n$ — носитель пробной функции $\varphi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$, причем множества A и B не пересекаются. Будем считать, что $\varphi > 0$ во внутренних точках B.

Ввиду формулы (5.6), носитель меры $d\mu_t = \rho_t\,d^n x$ будет перемещаться как одно целое по траекториям системы (5.8). Согласно теореме Кронекера, этот носитель будет время от времени пересекать область B и тогда интеграл

$$J(t) = \int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi(x)\,d\mu_t(x)$$

становится положительным. С другой стороны, по теореме о возвращении, бесконечное число раз носитель меры $d\mu_t$ окажется сколь угодно близко к своему начальному положению и тогда J становится равным нулю. Следовательно, функция $J(t)$ заведомо не имеет предела при $t \to \infty$.

Выяснение условий слабой сходимости решений уравнений Лиувилля — одна из ключевых задач, которые рассматриваются в этой книге.

Задача о наличии инвариантных мер с гладкой плотностью (интегральных инвариантов) обсуждается в добавлении 1.

6. Распределение Гиббса. Рассмотрим теперь гамильтонову динамическую систему с n степенями свободы. Фазовым пространством служит $2n$-мерное гладкое симплектическое многообразие Γ с каноническими локальными координатами $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$. Динамическая система задается каноническими уравнениями Гамильтона

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}; \quad 1 \leqslant s \leqslant n, \tag{6.1}$$

где $H(p, q)$ — функция Гамильтона или гамильтониан.

Обычно Γ является пространством кокасательного расслоения конфигурационного n-мерного многообразия $\mathscr{N} = \{q\}$, а функция Гамильтона равна сумме $T + V$, где

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}(q) p_i p_j$$

— кинетическая энергия (при всех $q \in \mathscr{N}$ она положительно определена по импульсам), а $V : \mathscr{N} \to \mathbb{R}$ — потенциальная энергия.

Гамильтоново касательное векторное поле v из (6.1) бездивергентное:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_s}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s}\Big) + \frac{\partial}{\partial p_s}\Big(-\frac{\partial H}{\partial q_s}\Big) = 0.$$

Следовательно, фазовый поток гамильтоновой системы сохраняет ее фазовый объем — меру $d\mu = d^n p\, d^n q$ (*теорема Лиувилля*). В добавлении 2 показано, что все инвариантные меры *вполне интегрируемых* систем *лиувиллевы*. Далее, решения уравнения Лиувилля — первые интегралы уравнений Гамильтона. Поскольку энергия H является первым интегралом, то любая функция от H будет стационарным решением уравнения Лиувилля. Таким образом, можно положить

$$\rho = cf(\beta H), \tag{6.2}$$

где $f(\cdot)$ — некоторая функция одной переменной, c — нормировочный множитель, а β — постоянный множитель, размерность которого обратна размерности энергии (чтобы формула (6.2) была корректной и не зависела от единиц измерения). Ясно, что

$$c^{-1} = \int\limits_{\Gamma} f(\beta H)\, d^n p\, d^n q;$$

этот интеграл, конечно, должен быть сходящимся.

Гиббс предположил, что $f(z) = e^{-z}$. Таким образом, формула (6.2) принимает вид

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\int e^{-\beta H}\, d^n p\, d^n q}. \tag{6.3}$$

Это распределение вероятностей называется *распределением Гиббса*. Смысл параметра β зависит от рассматриваемого круга вопросов. Для целей обоснования термодинамики полагают $\beta = 1/k\tau$, где τ — абсолютная температура, k — постоянная Больцмана.

Какие аргументы можно привести в пользу выбора распределения (6.3)? Во-первых, оно содержит как частный случай распределение Максвелла (4.4) для идеального газа: если компоненты скоростей всех молекул статистически независимы, то после перемножения плотностей (4.4) получим формулу (6.3), где H будет полной кинетической энергией системы невзаимодействующих частиц.

Далее, можно рассмотреть задачу о тепловом равновесии частиц в однородном поле силы тяжести. Гамильтониан частицы имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgz,$$

где m — масса частиц, z — высота над горизонтом, g — ускорение свободного падения. После интегрирования по импульсам плотности распределения Гиббса, получим плотность распределения частиц по высоте:

$$\widetilde{\rho}(z) = ce^{-\frac{mgz}{k\tau}}. \tag{6.4}$$

Эта формула была получена еще Лапласом в 1823 году как точное решение уравнений механики сплошной среды. Формулу (6.4) обычно связывают с именем Больцмана, хотя ее раньше вывел Максвелл тем же статистическим методом.

Пусть теперь фазовое пространство Γ представляется в виде прямого произведения фазовых пространств меньшей размерности:

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_k, \quad \Gamma_s = \{p^{(s)},\, q^{(s)}\}.$$

Число канонических (симплектических) координат $q^{(s)}$ и импульсов $p^{(s)}$ равно половине размерности Γ_s. Предположим, что исходный гамильтониан $H : \Gamma \to \mathbb{R}$ представляется в виде суммы

$$H = H_1(p^{(1)},\, q^{(1)}) + \ldots + H_k(p^{(k)},\, q^{(k)}).$$

Можно считать, что каждый гамильтониан $H_s : \Gamma_s \to \mathbb{R}$ порождает подсистему

$$\dot{q}^{(s)} = \frac{\partial H}{\partial p^{(s)}} = \frac{\partial H_s}{\partial p^{(s)}}, \quad \dot{p}^{(s)} = -\frac{\partial H}{\partial q^{(s)}} = -\frac{\partial H_s}{\partial q^{(s)}} \tag{6.5}$$

общей системы с гамильтонианом H. Эти подсистемы *динамически независимы*: ввиду формул (6.5) изменение начальных условий для канонических переменных $p^{(s)}$, $q^{(s)}$ $(s \neq j)$ никак не сказывается на зависимости $p^{(j)}$ и $q^{(j)}$ от времени t. С другой стороны, ввиду формулы Гиббса (6.3), подсистемы общей гамильтоновой системы оказываются *статистически независимыми*:

$$\frac{e^{-\beta H}}{\int\limits_{\Gamma} e^{-\beta H}\, dp\, dq} = \prod_{s=1}^{k} \frac{e^{-\beta H_s}}{\int\limits_{\Gamma_s} e^{-\beta H_s}\, dp^{(s)}\, dq^{(s)}}.$$

В частности, отдельные подсистемы «имеют» одну и ту же температуру. Таким образом, свойства статистической и динамической независимости оказываются эквивалентными друг другу. Это важное обстоятельство будет неоднократно использовано нами в дальнейшем. Напомним, что согласно А. Н. Колмогорову, именно понятие статистической независимости выделяет теорию вероятностей из общей теории меры.

Однако главным аргументом в пользу выбора распределения вероятностей (6.3) является следующий ключевой результат Гиббса: усредняя динамические характеристики гамильтоновой системы, зависящей от параметров, по плотности (6.3), мы получим некоторую термодинамическую систему, которая удовлетворяет всем аксиомам термодинамики.

Итак, пусть $H(p, q, a)$ — гамильтониан, зависящий от нескольких параметров $a = (a_1, \ldots, a_m)$. Внешними параметрами термодинамической системы, которую мы поставим в соответствие гамильтоновой динамической системе, будут как раз параметры $a_1, \ldots, a_m$, а абсолютная температура τ вводится с помощью параметра $\beta = 1/k\tau$, где k — постоянная Больцмана.

Определим внутреннюю энергию E термодинамической системы как среднее значение (математическое ожидание) механической энергии H по распределению Гиббса (6.3):

$$E(a, \tau) = \int\limits_{\Gamma} H\rho\, d^n p\, d^n q. \tag{6.6}$$

Далее, обобщенную силу A_i, отвечающую координате a_i, определим как среднее от $-\partial H/\partial a_i$:

$$A_i = -\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial H}{\partial a_i}\,\rho\,d^n p\,d^n q. \tag{6.7}$$

Здесь мы используем следующую *аналогию*: в соответствии с уравнениями Гамильтона

$$-\frac{\partial H}{\partial q} = \dot{p}, \tag{6.8}$$

изменение импульса $\dot{p}$ будет обобщенной *силой*, отвечающей лагранжевой координате q.

Теорема Гиббса. *Дифференциальная форма*

$$\omega = dE + \Sigma A_i\,da_i$$

равна $\tau\,dS$, где

$$S = k(\ln Z - \beta\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}), \quad Z = \int\limits_{\Gamma} e^{-\beta H}\,d^n p\,d^n q. \tag{6.9}$$

Таким образом, 1-форму ω можно интерпретировать как форму притока тепла; функция S будет энтропией построенной термодинамической системы. Соответствие, ставящее гамильтоновой динамической системе с параметрами определенную термодинамическую систему, можно назвать *термодинамизацией* классической механической системы. Эта операция вполне аналогична *квантованию* классических систем.

Докажем теорему Гиббса. Сначала с использованием *статистического интеграла Z* представим соотношения (6.6) и (6.7) в несколько ином виде:

$$E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad A_i = \frac{1}{\beta}\,\frac{\partial \ln Z}{\partial a_i} \quad (1 \leqslant i \leqslant m). \tag{6.10}$$

Далее,

$$\omega = dE + \Sigma A_i\,da_i = -d\,\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta}\Sigma\,\frac{\partial \ln Z}{\partial a_i}\,da_i.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\beta\omega &= -\beta d\,\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} + \Sigma\,\frac{\partial \ln Z}{\partial a_i}\,da_i = \\ &= -d\Big(\beta\,\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\Big) + \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\,d\beta + \Sigma\,\frac{\partial \ln Z_i}{\partial a_i}\,da_i = \\ &= d\Big(\ln Z - \beta\,\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\Big).\end{aligned}$$

Что и требовалось.

В термодинамизации по Гиббсу есть один не совсем ясный момент: использование формулы (6.7) для обобщенной силы по аналогии с (6.8). Мы проясним этот момент в гл. IV, опираясь на принципы аналитической механики и эргодическую теорему Биркгофа – Хинчина.

Часто в качестве термодинамических параметров используют параметры, которые явно не входят в выражение для функции Гамильтона. Например, объем сосуда с газом. В этом случае формулы (6.7) и (6.8) непосредственно нельзя применить, однако можно воспользоваться формулами (6.10), подсчитав прежде статистический интеграл.

Пример. Рассмотрим в сосуде $D \subset \mathbb{R}^3$ с объемом v идеальный газ, состоящий из N невзаимодействующих частиц с массой m. Здесь в качестве единственного термодинамического параметра выступает объем газа v. Вычислим статистический интеграл

$$Z = \int\limits_{\mathbb{R}^{3N}} \int\limits_{D^N} e^{-\beta H}\, d^{3N}p\, d^{3N}q,$$

где

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{(p_i,\, p_i)}{2m}.$$

По теореме Фубини,

$$Z = v^N \int\limits_{\mathbb{R}^{3N}} e^{-\beta H}\, d^{3N}p.$$

Переходя к сферическим координатам в $\mathbb{R}^{3N}$, получаем следующую формулу для статистического интеграла:

$$Z = \mathrm{const}\,\frac{v^N m^{3N/2}}{\beta^{3N/2}},$$

где постоянный множитель зависит только от N.

Следовательно,

$$\ln Z = N\ln v - \frac{3N}{2}\ln\beta + \frac{3N}{2}\ln m + \mathrm{const}$$

и поэтому

$$E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta} = \frac{3N}{2\beta} = \frac{3}{2}\,Nk\tau, \tag{6.11}$$

$$p = \frac{1}{\beta}\,\frac{\partial\ln Z}{\partial v} = \frac{Nk\tau}{v}. \tag{6.12}$$

Здесь p — давление газа на стенки — обобщенная сила, отвечающая объему сосуда.

В классической термодинамике Nk полагают равным mR, где R — универсальная газовая постоянная, а m — число молей газа. Таким образом, уравнение (6.11) дает нам закон Джоуля $E = (3/2)mR\tau$, а уравнение состояния (6.12) совпадает с уравнением Клапейрона $pv = mR\tau$.

В заключение этого пункта укажем формулу, выражающую энтропию через плотность распределения вероятностей Гиббса:

$$S = -k\int\limits_\Gamma \rho\ln\rho\, d^np\, d^nq. \tag{6.13}$$

Эта формула замечательна тем, что с ее помощью можно определить энтропию для распределения вероятностей с *любой* плотностью ρ. Она играла важную роль в работах К. Шеннона по теории информации и А. Н. Колмогорова по теории динамических систем.

Для доказательства (6.13) вспомним, что $\rho = e^{-\beta H}/Z$. Следовательно,

$$-\int\limits_\Gamma \rho\ln\rho\, d^np\, d^nq = \ln Z + \beta\int\limits_\Gamma He^{-\beta H}\, d^np\, d^nq \Bigg/ \int\limits_\Gamma e^{-\beta H}\, d^np\, d^nq.$$

Коэффициент при β — это среднее значение полной энергии. В соответствии с (6.10) он равен $-\partial\ln Z/\partial\beta$. Остается воспользоваться формулой (6.9).

7. Кинетическое уравнение Больцмана и возрастание энтропии. Выходу в свет книги Гиббса предшествовала публикация знаменитого сочинения Людвига Больцмана «Vorlesungen über Gastheorie» (в двух частях: 1896 и 1898 г.г.), в котором подведен итог его тридцатилетних исследований по кинетике. Основным достижением Больцмана является его *кинетическое уравнение*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial r},\, v\right) = \frac{\delta^2}{2} \int d^3\omega \int d^2 e [f' f_1' - f f_1] |(\omega - v) \cdot e|, \tag{7.1}$$

которое описывает изменение плотности вероятности $f(r,\, v,\, t)$ того, что частицы (являющиеся твердыми шарами диаметра δ) в момент времени t находятся в точке $r \in \mathbb{R}^3$ и имеют скорость v. Выражение в левой части уравнения Больцмана представляет левую часть уравнения Лиувилля для одной свободной частицы. Выражение справа — *интеграл столкновений*. Поясним смысл обозначений. Предполагается, что частицы, имеющие скорость v (в объеме d^3v), и частицы, имеющие скорость ω (в объеме $d^3\omega$), сталкиваются в точке $r \in \mathbb{R}^3$. В момент удара линия центров шаров определяется единичным вектором e (в области d^2e на единичной сфере $|e| = 1$). Величина $f_1(r,\, \omega,\, t)$ имеет смысл плотности распределения второй частицы до удара. Знак штрих означает, что в выражения для f и f_1 вместо v и ω надо подставить скорости шаров после удара.

Больцман вывел и более общее уравнение, когда частицы движутся в силовом поле и взаимодействуют между собой по закону центральных сил. Относительно современного состояния теории уравнения Больцмана см. [17]

В связи с уравнением (7.1) надо иметь ввиду следующие обстоятельства. Во-первых, уравнение Больцмана *приближенное*: оно учитывает только *парные столкновения* между частицами. Таким образом, уравнение (7.1) применимо к *разреженным* газам. Во-вторых, оно не является следствием только уравнений динамики. Больцман сделал существенное предположение о *статистической независимости* парных столкновений (Stosszahlansatz по терминологии П. и Т. Эренфестов): число парных соударений пропорционально произведению числа сталкивающихся частиц. Эти предположения (особенно второе) обуславливают с самого начала необратимый характер решений уравнения Больцмана.

Больцман вывел из уравнения (7.1) ряд важных следствий. Он показал, что при $t \to +\infty$ любое начальное распределение стремится к распределению Максвелла. Больцман доказал также, что функция времени

$$H(t) = \iint f \ln f \, d^3r \, d^3v$$

монотонно убывает с ростом t (это — знаменитая *H-теорема Больцмана*). Он *интерпретировал* функцию $-H$ как термодинамическую энтропию и получил тем самым закон *монотонного* возрастания энтропии, что выражает второе начало термодинамики для необратимых процессов.

Однако, такая интерпретация не вполне оправдана. Дело в том, что энтропия определяется как интеграл от функции $-\rho \ln \rho$ по *всему* фазовому пространству системы взаимодействующих частиц (см. формулу (6.13)). Полная энтропия (иногда ее называют *гиббсовской*), как показал Пуанкаре [55], всегда постоянна. Этот простой результат справедлив не только для гамильтоновых систем.

Теорема. *Пусть v — бездивергентное векторное поле на замкнутом многообразии M и*

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_t v) = 0.$$

Тогда

$$\int\limits_M \rho_t \ln \rho_t \, d^n x = \text{const}.$$

Заметим, что вместо $\rho \ln \rho$ можно взять любую функцию от плотности. Действительно,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int\limits_M f(\rho_t) \, d^n x &= \int\limits_M \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \rho_t}{\partial t} \, d^n x = \\
&= -\int\limits_M \frac{\partial f}{\partial \rho} \Sigma \frac{\partial \rho_t v_i}{\partial x_i} \, d^n x = -\int\limits_M \Big[\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i + f \operatorname{div} v \Big] \, d^n x = \\
&= -\int\limits_M \operatorname{div}(f v) \, d^n x = 0
\end{aligned}$$

ввиду замкнутости M.

Постоянство энтропии для гамильтоновых систем заведомо имеет место в том случае, когда энергетические поверхности компактны. Если же M не замкнута, то заключение теоремы остается в силе при условии, что плотность достаточно быстро стремится к нулю на бесконечности.

Основные возражения в кинетическом методе Больцмана вызывала его H-теорема. Было совсем непонятно, как удалось Больцману объяснить необратимое приближение к равновесию, используя каким-то образом обратимые механические модели. В этом заключается *парадокс обратимости Лошмидта* (кстати сказать, Лошмидт был учителем Больцмана). О парадоксе возвращаемости уже шла речь выше.

Разъяснение этих парадоксов состоит в том, что кинетическое уравнение Больцмана не является *одним только следствием* уравнений динамики. Дополнительное предположение вероятностного характера хотя и представляется правдоподобным, однако оно (в отличие от подхода Гиббса) *не согласовано* с принципами динамики. Поэтому, несмотря на хорошую разработанность и широкое использование в прикладных расчетах, кинетический метод Больцмана все же оставляет чувство некоторой неудовлетворенности. Ведь все равно (согласно Пуанкаре) при соприкосновении двух тел, более теплого A и более холодного B, рано или поздно почти наверное наступит момент, когда самопроизвольно (без участия демона Максвелла или чего-нибудь в это роде) тело A вновь нагреется, а тело B охладится.

Отчасти под влиянием критики Лошмидта и Цермело, в своих более поздних работах Больцман допускал существование во Вселенной относительно небольших зон, в которых в течение относительно небольшого промежутка времени нарушаются законы термодинамики. Однако, не все с этим согласны (см., например, [54]). Идея Больцмана о том, что в большей части фазового пространства системы взаимодействующих частиц имеет место «почти» распределение Максвелла – Больцмана – Гиббса, была развита Р. Толменом [96], А. Я. Хинчиным [75] и др. авторами (см. по этому поводу [87], а также [95]).

Как уже отмечалось, вывод Больцманом кинетического уравнения носит эвристический характер. Н. Н. Боголюбов предложил другой метод, основанный на использовании уравнения Лиувилля и имеющий существенно более общий характер. Исследования Боголюбова были продолжены Борном, Грином, Кирквудом и Ивоном. Поэтому *цепочку уравнений Боголюбова* часто называют *Б – Б – Г – К – И-цепочкой*. Эти результаты считаются неоспоримой вершиной статистической механики.

Кратко суть метода Боголюбова состоит в следующем. Рассматриваются динамические системы из N идентичных частиц и, следуя Гиббсу, изучается функция распределения $\rho_N(x_1, \ldots, x_n, t)$ в фазовом пространстве, где x_i кратко обозначают набор координат и импульсов i-ой частицы. Функция ρ_N считается симметричной относительно $x_1, \ldots, x_N$ и удовлетворяет уравнению Лиувилля. Усреднением по части переменных вводится *s-частичная функция распределения*

$$F_s(x_1, \ldots, x_s, t) = V^s \int \cdots \int \rho_N \, dx_{s+1} \ldots dx_N,$$

где V — объем сосуда с газом. Рассматривается случай, когда $V/N \to v$ при $N \to \infty$. Далее, для частичных функций распределения выводится цепочка зацепляющихся уравнений, которая становится предметом исследования. Для того, чтобы выделить интересующие нас решения, Боголюбов вводит предположение, что импульсы частиц в отдаленном прошлом, когда частицы находились сравнительно далеко друг от друга, были *статистически независимы*. Это предположение не самоочевидно и в определенной степени аналогично Stosszahlansatz'у Больцмана. В результате для разреженного однородного газа, состоящего из малых частиц сферической формы, для одночастичной функции распределения F_1 выводится кинетическое уравнение Больцмана. Подробнее об этом см. в [9, 28, 69].

Как уже говорилось, полная гиббсовская энтропия всегда постоянна. Однако частичная больцмановская энтропия вовсе не обязана быть постоянной. И это обстоятельство *никак не связано* с парадоксами обратимости или возвращаемости. Приведем иллюстративный

Пример. Пусть $M = \mathbb{R}^2 = \{x_1, x_2\}$, а бездивергентная динамическая система задается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_1, \qquad \dot{x}_2 = -x_2.$$

Пусть начальное распределение будет гауссовским:

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}.$$

По формуле (5.6) легко найти плотность распределения в текущий момент времени:

$$\rho_t(x_2, x_2) = \rho(e^{-t} x_1, e^t x_2).$$

Здесь M некомпактно, однако ρ очень быстро убывает на бесконечности и поэтому интеграл

$$S(t) = \int\limits_M \rho_t \ln \rho_t \, dx_1 \, dx_2$$

сходится и гиббсовская энтропия корректно определена. Легко показать (с помощью рассуждений Пуанкаре или непосредственно), что $S(t) \equiv \mathrm{const}$.

Усредним теперь ρ_t, скажем, по переменной x_2:

$$f_t(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(e^{-t}x_1, \, e^t x_2) \, dx_2 = e^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(z, \, e^t x_2) \, dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \, e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}}, \qquad \sigma = e^{-t}.$$

Вычислим теперь энтропию по Больцману:

$$H(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_t \ln f_t \, dx_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left[-\frac{x^2}{2\sigma^2} - \ln \sqrt{2\pi}\,\sigma \right] dx =$$
$$= \mathrm{const} - \ln \sigma = \mathrm{const} + t.$$

Итак, больцмановская энтропия возрастает, причем неограниченно.

Имея ввиду результат о постоянстве гиббсовской энтропии, И. Пригожин настаивает на том, что эта величина не может быть *аналогом* термодинамической энтропии ([54], гл. 8). Однако это утверждение выглядит несколько странным с точки зрения классических результатов Гиббса, которые изложены в п. 6. Более того, Пригожин считает твердо установленным, что нельзя построить теорию необратимых процессов на основе теории ансамблей Гиббса.

В конце концов, как справедливо замечает Дж. Уленбек, нельзя поумнеть только от вычисления интегралов. Нужны новые идеи. Наша идея состоит в том, чтобы считать *слабые пределы* решений уравнения Лиувилля плотностями распределения вероятностей в состоянии теплового равновесия. Изучение слабых пределов вполне естественно с точки зрения обоснования термодинамики, поскольку при переходе к макроскопическому описанию нас интересует поведение средних значений (математических ожиданий) динамических величин. Поскольку энтропию системы на самом деле можно вычислять лишь в состояниях ее теплового равновесия, то после замены плотности распределения ее слабым пределом энтропия получает неотрицательный скачок, величина которого согласуется с предсказаниями феноменологической термодинамики. Развитие этого круга идей является основным содержанием настоящей книги. Оно позволяет по-новому осветить известные проблемы классической статистической механики.

Глава I

Кинетика бесстолкновительной сплошной среды

§ 1. Тепловое равновесие

Установление теплового равновесия газа в сосуде является одной из центральных проблем неравновесной статистической механики. Общепризнанной моделью служит газ Больцмана – Гиббса — совокупность большого (но конечного) числа одинаковых твердых шариков, упруго сталкивающихся друг с другом и со стенками сосуда. Согласно классическому подходу, основанному на использовании кинетического уравнения Больцмана, сначала практически мгновенно устанавливается максвелловское распределение по скоростям, а затем (уже не так быстро и с колебаниями) происходит выравнивание плотности газа [14].

Правда, при таком подходе возникает ряд затруднений принципиального характера. Во-первых, уравнение Больцмана приближенное. Оно не учитывает кратных соударений, а также предполагает статистическую независимость числа парных столкновений. Последнее предположение (Stosszahlanzatz по П. и Т. Эренфестам [79]) правдоподобно, но, конечно, не вытекает непосредственно из динамики модели газа Больцмана – Гиббса. Кроме того, есть трудности в согласовании решений уравнения Больцмана со свойством обратимости уравнений динамики и с теоремой Пуанкаре о возвращении (обсуждение этого круга вопросов см. в [30, 69]).

Логическая возможность согласования необратимого поведения системы со свойствами обратимости и возвращаемости была продемонстрирована М. Кацем [30, 31] на так называемой *круговой модели*, не имеющей, впрочем, прямого отношения к теории газов. Фазовое пространство в модели Каца — набор белых и черных шаров в вершинах правильного n-угольника. Кроме этого, выделено некоторое множество M вершин n-угольника, состоящее из $m < n/2$ элементов. Динамика круговой модели определяется поворотом на один элемент против часовой стрелки. Если при этом шар не принадлежал множеству M, то его цвет не изменяется, а если принадлежал M, то цвет шарика меняется на противоположный. Ясно, что динамика такой системы инвариантна относительно направления вращения (обратимость). Можно также проверить, что за $2n$ сдвигов система придет в свое начальное состояние (возвращаемость).

Пусть $N_c(t)$ и $N_b(t)$ — количество черных и белых шаров в целочисленные моменты времени t. Как доказал Кац, среднее значение отношения

$$\left\langle \frac{N_c(t) - N_b(t)}{n} \right\rangle,$$

вычисленное по всем возможным положениям множества M, убывает при $n \to \infty$ как $(1-2\mu)^t$, где μ — предельное значение отоношения m/n. Таким образом, если $\mu < 1/2$, то по истечении достаточно большого времени число белых и черных шаров в среднем будет совпадать.

Круговая модель Каца является усовершенствованным вариантом более ранней модели Эренфестов [79], обладавшей лишь свойством обратимости. Она также демонстрирует характерную особенность обычного способа рассуждений в статистической механике: вычисление усредненных значений, предельный переход по числу частиц ($n \to \infty$), а затем уже предельный переход по времени ($t \to \infty$). Последний момент связан с тем, что среднее время возвращения стремится к бесконечности вместе с n и поэтому рассматривают временной диапазон, меньший по порядку этой величины.

На самом деле в обосновании термодинамики имеются дополнительные затруднения несколько иного сорта. Дело в том, что *идеальный газ* рассматривается как система невзаимодействующих частиц. В частности, они не могут сталкиваться друг с другом. Именно при этом предположении в статистической механике выводится уравнение состояния идеального газа. Если же учесть взаимодействие (в частности, допустить возможность столкновений), то каноническое распределение Гиббса даст нам уравнение состояния, которое будет отличаться от классического уравнения Клапейрона (см. по этому поводу [21]).

С другой стороны, как показано в работах [44,81], уравнение Клапейрона выводится из общих принципов статистической механики в предположении, что плотность распределения вероятностей есть однозначная функция от полной энергии системы частиц. Подчеркнем, что эта функция вовсе не обязана совпадать с плотностью распределения Максвелла.

Идеальный газ — это фундаментальная модель механики сплошной среды и статистической механики. Поэтому особое значение приобретает проблема обоснования необратимого поведения идеального газа, не использующее механизм Больцмана парных столкновений. И совсем не очевидно, что на самом деле такой механизм необратимости существует.

§ 2. Идеальный газ как бессолкновительная сплошная среда

Указанные выше трудности можно преодолеть, если рассматривать идеальный газ как *бесстолкновительную сплошную среду*. Сразу следует отметить, что гипотеза о сплошности газа хорошо согласуется с непрерывностью распределения частиц газа по скоростям.

Кроме этого, бесстолкновительные модели играют существенную роль во многих разделах математической физики. Укажем, например, теорию Я. Б. Зельдовича, объясняющую появление неоднородностей в распределении пылевидного вещества во Вселенной (см. [4]). Другой важный пример — уравнение Бюргерса. Оно описывает динамику жидкости без давления и является одним из возможных упрощений уравнений Навье–Стокса [77]. Многомерная гидродинамика инвариантных многообразий гамильтоновых систем, развитая в книге [39], также описывает эволюцию бесстолкновительной среды.

Идеальный газ как бесстолкновительную сплошную среду впервые рассматривал, по-видимому, А. Пуанкаре в [55]. Он изучал поведение идеального газа в прямоугольном параллелепипеде

$$\Pi^n = \{0 \leqslant z_1 \leqslant l_1, \ldots, 0 \leqslant z_n \leqslant l_n\}$$

(l_s — ребра параллелепипеда) для значений $n = 1$, 2 и 3. Такой газ Пуанкаре назвал *одномерным*. По терминологии Пуанкаре, *трехмерный газ* составляют молекулы, которые могут сталкиваться друг с другом. Основное его наблюдение состоит в том, что независимо от начального распределения с течением времени газ стремится к равномерному заполнению П. Тем самым идеальный газ демонстрирует необратимое поведение. Каждая частица газа бесконечное число раз подходит сколь угодно близко к своему начальному положению. Однако, ввиду неравномерности свойства возвращаемости, имеет место необратимая *диффузия* газа. Кроме того, уравнения движения басстолкновительной среды инвариантны при отражении времени $t \mapsto -t$. Таким образом, еще в 1906 году на упрощенной модели (имеющей самое прямое отношение к кинетической теории) Пуанкаре продемонстрировал совместимость свойств обратимости и возвращаемости с необратимым поведением динамической системы.

К сожалению, эти замечательные идеи Пуанкаре оказались непонятыми и невостребованными. Комментарии к работе Пуанкаре 1906 года в III-ем томе его собрания сочинений на русском языке совершенно не касаются существа дела.

В последнее время появились интересные работы по кинетической теории, в которых также используется модель бесстолкновительной среды. Упомянем в качестве примера *динамический демон Максвелла* [99,100]. Однако, они также не содержат упоминания пионерской работы Пуанкаре.

Правда, Пуанкаре рассмотрел лишь самые простые варианты и в его работе нет точных формулировок, а также полных и строгих доказательств в современном понимании этих слов. Однако его идеи заслуживают того, чтобы наконец-то (спустя почти 100 лет) они оказались вовлечеными в орбиту современной неравновесной статистической механики. Наша цель — развить идеи Пуанкаре о тепловом равновесии идеального газа как бесстолкновительной сплошной среды.

Итак, рассмотрим динамику частиц в n-мерном параллелепипеде Π^n. Ясно, что Π^n допускает естественное 2^n-листное накрытие n-мерным тором $\mathbb{T}^n = \{x_1, \ldots, x_n \bmod 2\pi\}$, разветвленное на границе Π^n. Переменные x и z связаны следующим образом: $x = \pi z/l$, если z возрастает от 0 до l, и $x = 2\pi - \pi z/l$, если z убывает от l от 0 (см. п. 3 Введения).

Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — компоненты скорости частицы газа в $\Pi^n \subset \mathbb{R}^n = \{z\}$. Тогда скорости изменения ее x-координаты равны

$$\omega_1 = \frac{\pi v_1}{l_1}, \ldots, \omega_n = \frac{\pi v_n}{l_n}. \tag{2.1}$$

Следовательно, в переменных $x \bmod 2\pi$, ω динамика частиц газа в Π описывается уравнениями

$$\dot{x}_s = \omega_s, \quad \dot{\omega}_s = 0 \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{2.2}$$

§ 3. Первая теорема о диффузии

Уравнения (2.2) описывают эволюцию интегрируемой системы. Фазовое пространство

$$\Gamma^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n = \{\omega, x \bmod 2\pi\}$$

расслоено на инвариантные торы $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) = \mathrm{const}$, которые заполнены условно-периодическими траекториями с частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Для почти всех $\omega \in \mathbb{R}^n$ эти траектории всюду плотны (и даже равномерно распределены) на торе $\omega = \mathrm{const}$.

Такая картина вообще характерна для вполне интегрируемых гамильтоновых систем с компактными энергетическими поверхностями [5]. В окрестности инвариантных торов можно ввести *переменные действие-угол* $x \bmod 2\pi$, y, в которых уравнения Гамильтона принимают вид:

$$\dot{y}_s = 0, \quad \dot{x}_s = \omega_s(y); \quad 1 \leqslant s \leqslant n. \tag{3.1}$$

В *невырожденном* случае, когда

$$\frac{\partial(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \neq 0,$$

от переменных y можно перейти к новым переменным ω. В этих координатах уравнения (3.1) принимают вид (2.2). Таким образом, уравнения (2.2) представляют *универсальный* вид уравнений движения невырожденных вполне интегрируемых систем.

Пусть $f(\omega, x)$ — интегрируемая по Лебегу функция, 2π-периодическая по каждой из координат $x_1, \ldots, x_n$. Пусть функция $g\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману; в частности, она ограничена. Введем функцию времени

$$K(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{T}^n} f(\omega, x - \omega t) g(x)\, d^n x\, d^n \omega. \tag{3.2}$$

Так как функция $f(\omega, x - \omega t)$ интегрируема по Лебегу при всех значениях t, а g — измеримая и ограниченная функция, то интеграл (3.2) корректно определен.

Функция $K(t)$ имеет прозрачную интерпретацию. Прежде всего заметим, что $x - \omega t = x_0 = \mathrm{const}$ ввиду уравнений (2.2). Пусть, согласно Гиббсу, $f \geqslant 0$ — плотность распределения интегрируемых систем в Γ (плотность вероятностной меры), а g — характеристическая функция измеримой по Жордану области D на $\mathbb{T}^n$. Ясно, что

$$\langle f \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n} f\, d^n x\, d^n \omega = 1.$$

Нетрудно понять, что тогда $K(t)$ равно доли всех систем, фазы которых (т. е. координаты x точек на $\mathbb{T}^n$) принадлежат области D.

Изучим поведение функции $K(t)$ при $t \to \infty$.

Теорема 1. *Существует*

$$\lim_{t\to\pm\infty} K(t) = \langle f\rangle\overline{g}, \tag{3.3}$$

где

$$\overline{(\cdot)} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{T}^n} (\cdot)\, d^n x.$$

Вернемся к случаю, когда f — плотность распределения вероятностной меры, а g — характеристическая функция измеримой области D. Тогда соотношение (3.3) переходит в равенство

$$\lim_{t\to\pm\infty} K(t) = \frac{\operatorname{mes} G}{\operatorname{mes}\mathbb{T}^n}. \tag{3.4}$$

Следовательно, независимо от начального распределения при неограниченном возрастании времени система оказывается равномерно распределенной по фазам. Этот результат свидетельствует о наличии необратимой диффузии в невырожденных интегрируемых системах.

Доказательство теоремы 1 разобьем на несколько пунктов. Поскольку интегрируемую по Лебегу функцию можно представить в виде разности двух неотрицательных интегрируемых функций, то будем считать, что $f \geqslant 0$.

1) Пусть $g(x) = \overline{g} = \mathrm{const}$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} f(\omega,\, x-\omega t) g\, d^n x\, d^n\omega = \langle f\rangle\overline{g}$$

по формуле замены переменных в кратных интегралах.

2) Пусть $g(x) = \exp i(m,\, x)$, $m \in \mathbb{Z}^n$ и $m \neq 0$. Полагая $u = x - \omega t$, получим

$$K(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_{-m}(\omega) e^{i(m,\omega)t} d^n\omega,$$

где

$$f_{-m} = \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(\omega,\, u) e^{i(m,u)} d^n u$$

— коэффициент Фурье функции f как функции на $\mathbb{T}^n$, умноженный на $(2\pi)^n$. По теореме Фубини функция $f_{-m}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу. Следовательно (согласно теории преобразования Фурье), $K(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

3) Из п.п. 1 и 2 вытекает, что теорема 1 справедлива для любого тригонометрического полинома g.

4) Воспользуемся теперь известным утверждением из теории интеграла Римана (ср. с [18]). Пусть функция $g\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, найдутся два тригонометрических многочлена g_1 и g_2, таких, что

$$\text{(a)}\quad g_1(x) \leqslant g(x) \leqslant g_2(x) \ \text{ для всех } \ x \in \mathbb{T}^n,$$
$$\text{(b)}\quad \overline{g}_2 - \overline{g}_1 < \varepsilon.$$

Доказательство этого утверждения использует аппроксимационную теорему Вейерштрасса.

5) Положим

$$K_j(t) = \int\limits_{\Gamma} f(\omega,\, x - \omega t) g_j(x) d^n x\, d^n \omega; \quad j = 1,\, 2.$$

Поскольку $f \geqslant 0$, то для всех t

$$K_1(t) \leqslant K(t) \leqslant K_2(t).$$

Согласно п. 3 при $t \to \infty$ разность $K_2(t) - K_1(t)$ стремится к

$$\langle f \rangle (\overline{g}_2 - \overline{g}_1) < \langle f \rangle \varepsilon. \tag{3.5}$$

Здесь использовано свойство (b) из п. 4.

Таким образом, неравенство (3.5) имеет место для всех $t > T_1(\varepsilon)$.

6) Согласно п. 3, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T_2(\varepsilon)$ такое, что для всех $t > T_2(\varepsilon)$ имеем

$$|K_j(t) - \langle f \rangle \overline{g}_j| < \varepsilon. \tag{3.6}$$

С другой стороны, по свойству (a) и с учетом неравенства $f \geqslant 0$ имеем

$$\langle f \rangle \overline{g}_1 \leqslant \langle f \rangle \overline{g} \leqslant \langle f \rangle \overline{g}_2. \tag{3.7}$$

Из (3.5)–(3.7) вытекает, что при $t > \max(T_1(\varepsilon),\, T_2(\varepsilon))$

$$|K(t) - \langle f \rangle \overline{g}| < 3 \langle f \rangle \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Эти рассуждения напоминают доказательство теоремы Вейля о равномерном распределении [18]. Собственно говоря, у Пуанкаре нет точной формулировки утверждения о предельном равномерном распределении по фазам. Он ограничился рассмотрением п. 2 в частном случае, когда $n = 1$, в предположении, что функция f непрерывно дифференцируема по ω.

§ 4. Выравнивание плотности

Пусть $f(\omega, x) \geqslant 0$ — плотность распределения частиц газа в фазовом пространстве при $t = 0$, а $g(z)$ — характеристическая функция измеримой области G в Π^n. По определению плотности $\langle f\rangle = 1$. С другой стороны, используя явные формулы 2^n-листного накрытия $\mathbb{T}^n \to \Pi^n$, получим

$$\overline{g} = \frac{1}{l_1 \ldots l_n} \int\limits_{\Pi^n} g(z)\, d^n z = \frac{\operatorname{mes} G}{\operatorname{mes} \Pi}. \tag{4.1}$$

Следовательно, по теореме 1,

$$\lim_{t\to\pm\infty} K(t) = \frac{\operatorname{mes} G}{\operatorname{mes} \Pi}.$$

Таким образом, с течением времени t доля частиц газа, находящихся в области $G \subset \Pi$, пропорциональна объему G. Итак, приходим к следующему результату (сформулированному в работе Пуанкаре [55]): независимо от вида начального распределения f при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ произойдет необратимое выравнивание плотности газа в сосуде Π. Подчеркнем еще раз, что диффузия бесстолкновительной среды обусловлена неравномерностью возвращаемости ее частиц по начальным данным.

Поскольку разность $K(t) - \operatorname{mes} G / \operatorname{mes} \Pi$ стремится к нулю, то флуктуации плотности идеального газа неограниченно убывают с ростом времени. Для газа Больцмана – Гиббса, состоящего из *конечного* числа частиц, прежде всего надо дать строгое определение выравнивания плотности. К сожалению, до настоящего времени в этом направлении нет точных теоретических результатов. Однако в любом случае (ввиду теоремы Пуанкаре о возвращении) выравнивание плотности газа Больцмана – Гиббса должно сопровождаться *незатухающими флуктуациями*. Вопросы численного моделирования газа Больцмана – Гиббса обсуждаются, например, в работе [92].

Чтобы оценить скорость выравнивания плотности идеального газа, рассмотрим простой пример. Будем считать, что по скоростям частицы газа распределены по нормальному закону:

$$f(\omega,\, x) = \frac{\lambda(x)}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}}, \tag{4.2}$$
$$\omega^2 = \omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2.$$

Здесь λ — неотрицательная измеримая функция на $\mathbb{T}^n$, причем

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} \lambda(x)\, d^n x = 1. \tag{4.3}$$

Если интерпретировать (4.2) как плотность распределения Максвелла, то дисперсия σ^2 пропорциональна абсолютной температуре τ.

В рассматриваемом случае имеет место равенство

$$K(t) - \frac{\operatorname{mes} G}{\operatorname{mes} \Pi} = \sum_m{}' g_m \lambda_{-m} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}}}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{i(m,\omega)t} d^n\omega, \tag{4.4}$$

где g_m — коэффициент Фурье поднятия функции $g(z)$ на $\mathbb{T}^n$, а $(2\pi)^n \lambda_m$ — коэффициент Фурье функции $\lambda\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$. Согласно (4.3), имеем простую оценку $|\lambda_m| \leqslant 1$. С другой стороны, с учетом формулы (4.1) имеем следующее неравенство:

$$|g_m| \leqslant \frac{\operatorname{mes} G}{\operatorname{mes} \Pi}.$$

Следовательно, из (4.4) получаем неравенство

$$\left| K(t) - \frac{\operatorname{mes} G}{\operatorname{mes} \Pi} \right| \leqslant \frac{\operatorname{mes} G}{\operatorname{mes} \Pi} \sum_{m \neq 0} e^{-\frac{\sigma^2 t^2 (m,m)}{2}}. \tag{4.5}$$

Ряд справа сходится при всех $t > 0$ (если, конечно, $\sigma \neq 0$) и его сумма чрезвычайно быстро стремится к нулю, когда $t \to \pm\infty$.

Сумма мажорирующего ряда

$$\sum_{m \neq 0} e^{-\frac{\sigma^2 t^2 (m,m)}{2}} \tag{4.6}$$

выражается через тэта-функции. Она равна

$$[\theta_3(0,\,q)]^n - 1,$$

где $q = \exp(-\sigma^2 t^2/2)$, а третья тэта-функция определяется рядом

$$\theta_3(v,\,q) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{i2\pi n v}.$$

Ясно, что $\theta_3(v,\,q) \to 1$ при $q \to 0$.

Оценка (4.5) универсальна в том смысле, что в нее не входит функция λ. В частности, в качестве λ можно взять δ-функцию Дирака. В этом случае газ в начальный момент будет сосредоточен в одной точке (что, кстати сказать, не противоречит гипотезе о бесстолкновительности среды). Так как σ^2 пропорционально τ, то ряд (4.6) зависит на самом деле от комбинации $t\sqrt{\tau}$. Поэтому время выравнивания плотности убывает с ростом температуры как $1/\sqrt{\tau}$.

Отметим, что в отличие от модели Каца (и обычных представлений о механизме теплового равновесия в газах) выравнивание плотности происходит без предварительного усреднения по состояниям и детерминированно.

§ 5. Вторая теорема о диффузии

Пусть функции $f,\, g\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ интегрируемы вместе со своим квадратом (из класса $L_2(\Gamma)$). Ясно, что при всех значениях t функция $f(\omega,\, x - \omega t)$ также принадлежит L_2. Поэтому корректно определена функция

$$K(t) = \int\limits_{\Gamma} f(\omega,\, x - \omega t) g(\omega,\, x)\, d^n x\, d^n \omega.$$

Теорема 2. *При указанных предположениях*

$$\lim_{t\to\pm\infty} K(t) = (2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{f}\,\overline{g}\, d^n\omega. \tag{5.1}$$

Этот результат, конечно, не вытекает из теоремы 1 (впрочем, как и теорема 1 не является следствием теоремы 2). В работе Пуанкаре [55] формула (5.1) не упоминается.

Прежде чем доказывать теорему 2, укажем одно вспомогательное утверждение. Пусть

$$\sum f_m(\omega)e^{i(m,x)} \quad \text{и} \quad \sum g_m(\omega)e^{i(m,x)} \tag{5.2}$$

— ряды Фурье функций f и g при фиксированном значении ω. По теореме Фубини, эти ряды определены для почти всех $\omega \in \mathbb{R}^n$. Более того, для почти всех ω функции f и g принадлежат $L_2(\mathbb{T}^n)$. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} f(\omega,\, x-\omega t)g(\omega,\, x)\, d^n x = (2\pi)^n \sum_m f_m g_{-m} e^{-i(m,\omega)t}. \tag{5.3}$$

Так как $f,\, g \in L_2$, то функции $|f_m g_{-m}|$ интегрируемы в $\mathbb{R}^n$ при всех $m \in \mathbb{Z}^n$. Положим $g'_m = g_m \exp[i(m,\, \omega)t]$. Ясно, что $g'_m g'_{-m} = g_m g_{-m}$.

Лемма 1.

$$\sum_m \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_m g'_{-m} + f_m g'_m|\, d^n\omega < \int\limits_{\Gamma} (f^2 + g^2)\, d^n x\, d^n \omega. \tag{5.4}$$

Это — вариант неравенства Бесселя. Оно показывает, в частности, что ряд в левой части неравенства (5.4) сходится равномерно по $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство леммы. Воспользуемся очевидным неравенством

$$|f_m g'_{-m} + f_{-m} g'_m| \leqslant f_m f_{-m} + g_m g_{-m}.$$

Поскольку f_m и f_{-m} комплексно сопряжены, то $f_m f_{-m} \geqslant 0$. Аналогично, $g_m g_{-m} \geqslant 0$.

Теперь нам осталось доказать неравенство

$$\sum_m \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_m f_{-m}\, d^n\omega \leqslant \int\limits_{\Gamma} f^2\, d^n x\, d^n\omega. \tag{5.5}$$

Аналогичное неравенство имеет место и для функции g.

Действительно, пусть f_N — конечная сумма членов ряда Фурье (5.2), таких, что $|m| < N$. Тогда

$$0 \leqslant \int\limits_{\Gamma} (f - f_N)^2\, d^n x\, d^n\omega = \int\limits_{\Gamma} f^2\, d^n x\, d^n\omega - \sum_{|m|<N} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_m f_{-m}\, d^n\omega.$$

Следовательно, неравенство (5.5) справедливо для любой частичной суммы ряда в левой части (5.3). Переходя к пределу при $|m| \to \infty$, получаем требуемое.

Докажем теперь теорему 2. По лемме 1 (с учетом известных теорем Леви и Лебега) ряд (5.3) сходится для почти всех ω и его можно почленно интегрировать. Интегрируя обе части равенства (5.3) по всему $\mathbb{R}^n$, приходим к соотношению

$$K(t) = (2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{f}\overline{g} d^n\omega + (2\pi)^n \sum_{m\neq 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_m(\omega) g_{-m}(\omega) e^{-i(m,\omega)t} d^n\omega.$$

Так как функции $f_m g_{-m}$ интегрируемы по Лебегу, то каждый член ряда в правой части стремится к нулю, когда $t \to \pm\infty$. Согласно лемме, этот ряд сходится равномерно по t. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$, такое, что сумма членов ряда с номерами $|m| > N(\varepsilon)$ будет меньше $\varepsilon/2$ при всех значениях t. Конечная сумма остальных слагаемых стремится к нулю, когда $t \to \pm\infty$. Следовательно, найдется $T(\varepsilon)$ (зависящее на самом деле от $N(\varepsilon)$) такое, что при $|t| > T(\varepsilon)$ эта сумма будет меньше $\varepsilon/2$. Итак, при $|t| > T(\varepsilon)$ сумма указанного ряда оказывается меньше ε, что доказывает теорему.

Отметим одно простое следствие теоремы 2. Пусть $h(\omega)$ — плотность распределения вероятностей в $\mathbb{R}^n = \{\omega\}$, а f и g — функции из $L_2(\mathbb{T}^n)$. Тогда при $t \to \pm\infty$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} h(\omega) \Bigg[\int\limits_{\mathbb{T}^n} f(x+\omega t) g(x)\, d^n x \Bigg] d^n\omega \to \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(x)\, d^n x \int\limits_{\mathbb{T}^n} g(x)\, d^n x.$$

Таким образом, в среднем функции $f(x+\omega t)$ и $g(x)$ при больших $|t|$ становятся статистически независимыми: интеграл от произведения равен произведению интегралов.

Теорема 2 позволяет ответить на вопрос об эволюции плотности распределения f при неограниченном возрастании времени. На первый взгляд кажется, что плотность $f(\omega, x - \omega t)$ осциллирует условно-периодически и поэтому вообще не имеет предела при $t \to \infty$. Однако плотность распределения вероятностей «существует» не сама по себе, а только при усреднении некоторой фиксированной функции из L_2. Поэтому эволюцию f при $t \to \infty$ следует понимать в *обобщенном* смысле, как это обычно делается в теории обобщенных функций (см., например, [2]).

Чтобы понять, как интегрируемая система (2.2) распределена в фазовом пространстве Γ при $t \to \infty$, введем характеристическую функцию g следующего множества

$$G = \{x \bmod 2\pi,\, \omega\colon x'_s \leqslant x_s \leqslant x''_s,\, \omega'_s \leqslant \omega_s \leqslant \omega''_s,\, 1 \leqslant s \leqslant n\}.$$

Ясно, что

$$\langle g \rangle = \begin{cases} (2\pi)^{-n} \prod\limits_{s=1}^{n} (x''_s - x'_s), & \text{если } \omega' \leqslant \omega \leqslant \omega'', \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 & \text{для остальных } \omega. \end{cases}$$

Утверждается, что при $t \to \infty$ функция $f(\omega,\, x - \omega t)$ стремится в *слабом* смысле к $\overline{f}$. Предельная плотность $\overline{f}$ — интегрируемая неотрицательная функция на $\mathbb{R}^n$, причем $\langle \overline{f} \rangle = 1$.

Действительно, по теореме 2, при $t \to \infty$

$$\int\limits_{\Gamma} f(\omega,\, x - \omega t) g(\omega,\, x)\, d^n x\, d^n \omega \to (2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{f}\overline{g}\, d^n \omega =$$

$$= \prod_{s=1}^{n} (x''_s - x'_s) \int\limits_{\omega'_1}^{\omega''_1} \ldots \int\limits_{\omega'_n}^{\omega''_n} \overline{f}\, d\omega_1 \ldots d\omega_n.$$

Но точно такой же результат получается при непосредственном вычислении среднего значения предельной плотности $\overline{f}$ по области G.

В качестве примера рассмотрим *невырожденную* гамильтонову систему с одной степенью свободы и покажем, что любая функция распределения из L_2 слабо сходится к функции, зависящей лишь от полной энергии. Напомним определение невырожденности. Будем предполагать, что все фазовое пространство состоит из конечного числа кусков, инвариантных относительно фазового потока, в каждом из которых можно в целом ввести переменные действие-угол y, $x \bmod 2\pi$. Переход от обычных канонических переменных p, q к переменным x, y является симплектическим преобразованием: его якобиан равен единице. В новых переменных гамильтониан $H(p,\, q)$ зависит лишь от y. Система называется невырожденной, если

$$\frac{d^2 H}{dy^2} \neq 0 \tag{5.6}$$

в каждом из инвариантных кусков. Можно проверить, что этим условиям удовлетворяет, например, обычный маятник в поле силы тяжести.

В переменных действие-угол уравнения Гамильтона

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

принимают вид

$$\dot{x} = \omega(y), \quad \dot{y} = 0, \tag{5.7}$$

где $\omega = dH/dy$ — частота периодического движения.

Согласно (5.6), $d\omega/dy \neq 0$. Следовательно, ω — монотонная функция от y и поэтому в каждом инвариантном куске можно перейти от переменной y к частоте ω. Тогда уравнение (5.7) примет универсальный вид

$$\dot{x} = \omega, \quad \dot{\omega} = 0$$

и мы можем воспользоваться теоремой 2: начальная плотность f слабо сходится к «равновесному» пределу $\overline{f}$, зависящему только от ω. В частности, предельная плотность есть функция от y и, следовательно, от H.

Еще Гиббс предпринимал попытки доказать, что при $t \to \infty$ распределение вероятностей стремится (*в каком-то смысле*) к стационарному состоянию, которое отвечает тепловому равновесию [22] (гл. XII). По мнению М. Каца [30] (гл. III), идея о том, что вероятность следует вводить в механику *только* посредством начальной плотности, кажется, конечно, очень привлекательной. Но, вообще говоря, эта точка зрения, по-видимому, несостоятельна и вероятность в механике должна появляться и разными другими путями.

На наш взгляд теоремы 1 и 2 о диффузии в интегрируемых системах демонстрируют плодотворность подхода Гиббса и указывают на то, что его идеи еще до конца не реализованы.

§ 6. Давление, внутренняя энергия и уравнение состояния

Теорема 1 устанавливает закон выравнивания плотности идеального газа в прямоугольном параллелепипеде. Теорема 2 позволяет доказать выравнивание давления и плотности энергии идеального газа, указать формулы для предельных значений этих величин и тем самым получить уравнение состояния газа в тепловом равновесии.

Выведем сначала формулу для давления газа на одну из стенок, порождаемую столкновениями частиц газа с этой стенкой. Вывод формулы для давления следует классическому рассуждению в элементарной кинетической теории газа (см., например, [51]; правда обычно предполагается, что газ уже находится в тепловом равновесии и распределение по скоростям имеет вид распределения Максвелла).

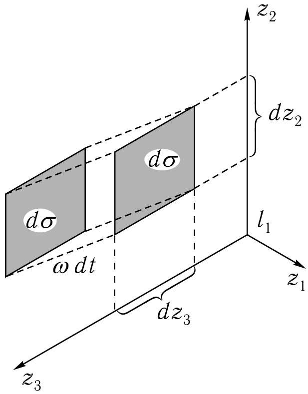

Рис. 8. К выводу формулы для давления

Для определенности рассмотрим стенку, заданную уравнением $z_1 = l_1$. Выделим бесконечно малую прямоугольную площадку σ с центром в точке с координатами $l_1,\, z_2,\, z_3$; ее площадь равна $d\sigma = dz_2\, dz_3$. Частицы газа, которые могут ударяться о площадку σ со скоростью $\omega = (\omega_1,\, \omega_2,\, \omega_3)$ в момент времени t, находятся в момент времени $t - dt$ на параллельной площадке σ той же площади $d\sigma$ (рис. 8). За время t они заметают объем

$$dv = \omega_1\, dt\, dz_2\, dz_3.$$

Их число равно

$$dn = Nf(\omega,\, l_1,\, z_2,\, z_3)\, dv,$$

где постоянный множитель N имеет смысл «числа частиц газа в сосуде». Пусть m — масса «одной» частицы, тогда mN — общая масса газа. Числа m и N имеют условный характер; они введены с целью сопоставления полученных ниже формул с известными формулами статистической механики. Поскольку $\langle f \rangle = 1$, то mNf — плотность распределения массы газа.

За время dt частицы передают стенке импульс

$$dP = 2m\omega_1\, dn = 2mN\omega_1^2 f\, dt\, d\sigma.$$

Ясно, что dP/dt есть сила давления. Если мы разделим ее на площадь $d\sigma$, то получим элементарное давление на стенку в точке с координатами $l_1,\, z_2,\, z_3$. Интегрируя по всем скоростям, получим полное давление

$$p = 2mN \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \omega_1^2 f(\omega,\, l_1,\, z_2,\, z_3)\, d\omega_1\, d\omega_2\, d\omega_3. \tag{6.1}$$

Пусть f — четная функция скоростей: $f(-\omega, z) = f(\omega, z)$. Тогда формула (6.1) принимает более симметричный вид:

$$p = mN \int\limits_{\mathbb{R}^3} \omega_1^2 f(\omega, l_1, z_2, z_3)\, d^3\omega. \tag{6.2}$$

Подчеркнем, что в начальный момент давление p зависит от точки на стенке $z_1 = l_1$. Формула для давления на другие стенки имеет вид (6.2), только ω_1^2 надо заменить на ω_2^2 и ω_3^2 соответственно.

Замечание 1. Как определить давление газа в произвольной внутренней точке $z \in \Pi$ на площадке с нормалью n? Если частицы газа будут ударяться в площадку с противоположных сторон, то (с учетом предположения о четности функции распределения) получим, очевидно, нулевое давление. Если же в сосуд Π поместить тело небольшого объема, то частицы газа будут ударяться в площадку, двигаясь с одной стороны. Следовательно, в этот момент времени давление будет определяться слегка подправленной формулой (6.2):

$$p = mN \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\omega, n)^2 f(\omega, z)\, d^3\omega.$$

Устремим теперь t к бесконечности. Тогда, согласно разделу 5, плотность f стремится к «равновесному» состоянию $\overline{f}$, зависящему лишь от ω. В итоге давление уже не будет зависеть от точки стенки:

$$p = mN \int\limits_{\mathbb{R}^3} \omega_1^2 \overline{f}\, d^3\omega. \tag{6.3}$$

Замечание 2. На самом деле формула (6.3) нуждается в дополнительном обосновании, поскольку в (6.2) нет усреднения по конфигурационному пространству и функция $\omega \mapsto \omega_1^2$, конечно, не из класса L_2. Формулу (6.3) следует понимать по другому.

Пусть $f(\omega, x)$ — плотность распределения, «поднятая» в прямое произведение $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^3$. Положим

$$p(t) = mN \int\limits_{\mathbb{R}^3} \omega_1^2 f(\omega, x - \omega t)\, d^3\omega.$$

Далее, пусть

$$\sum_k f_k(\omega) e^{i(k,x)}$$

— ряд Фурье функции f, определенный для почти всех $\omega \in \mathbb{R}^3$. Тогда

$$p = mN \int\limits_{\mathbb{R}^3} \omega_1^2 \overline{f}\, d^3\omega + mN \sum_{k \neq 0} e^{i(k,x)} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \omega_1^2 f_k(\omega) e^{-i(k,\omega)t} d^3\omega.$$

Если функции $\omega_1^2 f_k$ суммируемы для всех $k \in \mathbb{Z}^3$, то $p(t)$ стремится к (6.3) при $t \to \infty$.

Заметим, что если $\overline{f}$ зависит от $\omega^2 = \sum \omega_s^2$, то справедлив *закон Паскаля*: давление по всем направлениям одинаково. В противном случае это не так: доля частиц газа, двигающихся в разных направлениях, разная.

Для средней кинетической энергии одной частицы имеем формулу

$$e = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \int\limits_{\Pi} \frac{m\omega^2}{2} f(\omega,\, z)\, d^3z\, d^3\omega.$$

Переходя к 8-листному накрытию $\mathbb{T}^3 \to \Pi$, эту формулу можно представить в следующем виде:

$$e = \frac{l_1 l_2 l_3}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{m\omega^2}{2} f(\omega,\, x)\, d^3x\, d^3\omega.$$

Средняя (внутренняя) энергия всего газа равна, очевидно,

$$E = \frac{mNv}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \omega^2 \overline{f}\, d^3\omega, \tag{6.4}$$

где v — объем сосуда. Интеграл справа сходится, если давления газа на каждую стенку сосуда принимают конечные значения.

Если $\overline{f}$ зависит от ω^2, то из (6.3) и (6.4) вытекает простое соотношение

$$E = \frac{3}{2} pv. \tag{6.5}$$

Эта формула хорошо известна в теории идеального газа. Пусть

$$\Omega = dE + p\, dv \tag{6.6}$$

— 1-форма притока тепла; она не является полным дифференциалом. Согласно *второму началу* термодинамики, Ω имеет интегрирующий множитель: $\beta\Omega = dS$, где S — энтропия, $\beta = 1/(k\tau)$, τ — абсолютная температура,

k — постоянная Больцмана. С учетом (6.5) форма (6.6) имеет интегрирующий множитель $(pv)^{-1}$. Следовательно, pv пропорционально абсолютной температуре τ, и мы приходим к уравнению состояния идеального газа — уравнению Клапейрона.

К этому же выводу можно прийти по другому, положив

$$\overline{f} = c\rho\Big(\beta\frac{m\omega^2}{2}\Big), \tag{6.7}$$

где $\beta = 1/(k\tau)$, k — постоянная Больцмана, c — нормировочный множитель:

$$c^{-1} = v\int\limits_{\mathbb{R}^3} \rho\Big(\beta\frac{m\omega^2}{2}\Big)\, d^3\omega. \tag{6.8}$$

Распределения вида (6.7) изучались в работе [81]; к ним относится и классическое распределение Максвелла.

После замены $\omega_s = \widetilde{\omega}_s/\sqrt{m\beta}$ получим

$$c^{-1} = \frac{v}{(\sqrt{m\beta})^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \rho\Big(\frac{\widetilde{\omega}^2}{2}\Big)\, d^3\widetilde{\omega},$$

$$E = \varkappa\frac{Nk\tau}{2}, \qquad \varkappa = \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^3} \widetilde{\omega}^2\rho\Big(\frac{\widetilde{\omega}^2}{2}\Big)\, d^3\widetilde{\omega}}{\int\limits_{\mathbb{R}^3} \rho\Big(\frac{\widetilde{\omega}^2}{2}\Big)\, d^3\widetilde{\omega}}.$$

Для распределения Максвелла $\varkappa = 1$. В работе [81] описан класс немаксвелловских распределений, для которых также $\varkappa = 1$ (см. § 5 гл. III).

§ 7. Энтропия

Как известно, энтропия определяется равенством

$$S = -\int\limits_{\mathbb{P}} f(\omega,\, x)\ln f(\omega,\, x)\, d^n x\, d^n\omega, \tag{7.1}$$

где f — функция распределения вероятностей. Для распределения Максвелла она совпадает с энтропией, принимаемой в равновесной термодинамике.

Спрашивается, как ведет себя энтропия со временем в рассматриваемом нами случае, когда газ представляется бесстолкновительной сплошной средой. Важно подчеркнуть, что эволюция состояния газа является *адиабатическим процессом*: передачи энергии не происходит.

Чтобы получить S как функцию времени, надо в подынтегральном выражении (7.1) заменить x на $x - \omega t$. Однако, при такой подстановке интеграл (7.1) не изменится и S как функция времени будет константой.

Это простое наблюдение соответствует результату Пуанкаре [55] о том, что *тонкая* энтропия математиков, в отличие от *грубой* энтропии физиков, всегда постоянна (см. Введение, п. 7). Кстати сказать, разделение энтропии на тонкую и грубую по сути дела отвечает мелко- и крупнозернистой структуре фазового пространства, введенным позже Т. и П. Эренфестами в их известной работе [79].

К вопросу о поведении энтропии можно подойти с несколько иной стороны. Мы уже видели в разд. 5, что функция распределения $f(\omega, x - \omega t)$ при $t \to \infty$ стремится в слабом смысле к своему среднему значению $\overline{f}$, зависящему лишь от ω. Положим

$$S_\infty = -(2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{f} \ln \overline{f} \, d^n\omega. \tag{7.2}$$

Это выражение можно интерпретировать как энтропию в установившемся равновесном состоянии. Кстати сказать, формулу (7.2) можно получить по теореме 2, полагая $g = \ln f$.

Имеет место равенство

$$S \leqslant S_\infty, \tag{7.3}$$

выражающее *второе начало* термодинамики для необратимых процессов.

Для доказательства (7.3) зафиксируем значение ω и обозначим $f(\omega, x)$ через $\rho(x)$. Нам достаточно установить неравенство

$$\overline{\rho \ln \rho} \geqslant \overline{\rho} \ln \overline{\rho}.$$

Оно в свою очередь эквивалентно дискретному неравенству

$$\sum \rho_i \ln \rho_i \geqslant \Big(\sum \rho_i\Big) \ln \sum \rho_i$$

для положительных ρ_i, которое является частным случаем *неравенства Иенсена* для выпуклой функции $\rho \mapsto \rho \ln \rho$. Что и требовалось доказать.

Как заметил Пуанкаре [55], значения энтропии можно сравнивать лишь в состояниях установившегося равновесия.

Рассмотрим простой, но поучительный пример. Пусть сосуд П разделен перегородкой на две части и первоначально газ сосредоточен в одной из частей П, находясь в тепловом равновесии. Его энтропию обозначим S_-. Уберем теперь перегородку. Тогда газ начнет адиабатически расширяться, стремясь (по теореме 1) равномерно заполнить весь объем П. Пусть S_+ — энтропия газа после установления теплового равновесия, которое произойдет за бесконечное время. Согласно (7.3), $S_- \leqslant S_+$. Более того, можно показать, что в этом случае имеет место простое соотношение

$$S_+ = S_- + \ln\frac{v_+}{v_-}, \tag{7.4}$$

где $v_-(v_+)$ — объем Π_- (П).

Действительно, пусть f_- — плотность распределения газа, находящегося в тепловом равновесии в сосуде Π_-; эта функция зависит лишь от скорости ω. Тогда, очевидно, $S_- = -v_- J$, где

$$J = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_- \ln f_-\, d^n\omega.$$

После снятия перегородки равновесие нарушается и плотность $f(\omega, z)$ уже зависит от точки $z \in \Pi$: в начальный момент $f = f_-$, если $z \in \Pi_-$ и $f = 0$, если $z \in \Pi \setminus \Pi_-$. По теореме 2 при $t \to \infty$ плотность f стремится в обобщенном смысле к своему среднему значению

$$\overline{f} = \frac{1}{v_+}\int\limits_{\Pi} f\, d^n z = \frac{v_-}{v_+} f_-.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} S_+ &= -v_+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{v_-}{v_+} f_- \ln\Big(\frac{v_-}{v_+} f_-\Big) d^n\omega = \\ &= -v_- J - v_- \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_- d^n\omega\, \ln\frac{v_-}{v_+} = \\ &= S_- + \ln\frac{v_+}{v_-}. \end{aligned}$$

Формула (7.4) совпадает с известной формулой приращения энтропии при свободном расширении газа в пустоту. Однако, мы получили эту формулу, не опираясь на законы термодинамики, а использовали лишь закон движения идеального газа как бесстолкновительной среды.

§ 8. Изменение формы сосуда

Изменятся ли наши выводы, если заменить прямоугольный параллелепипед замкнутой поверхностью произвольной формы? Этот вопрос имеет принципиальное значение не только с точки зрения термодинамики.

Дело в том, что траектории частиц газа по сути дела являются световыми лучами. Поэтому задачу можно переформулировать в терминах геометрической оптики. Поместим источник света (возможно распределенный) внутрь замкнутой зеркальной поверхности. Спрашивается, будет ли освещенность внутри этой поверхности постоянной или же она будет зависеть от места? На самом деле родственная задача возникает и при рассмотрении излучения в замкнутом объеме, когда принимается лучевое приближение (см., например, [27]). На поставленный вопрос традиционно отвечают положительно. Правда, при этом кроме соображений динамического характера обычно используют условия теплового равновесия. Кстати говоря, на этот счет у самого Пуанкаре имеются противоречивые высказывания (см. [57]).

На самом деле ответ, конечно, отрицательный и это легко понять, имея в виду наличие фокальных точек и каустик. В качестве простого примера можно рассмотреть сосуд в форме эллипса и поместить источник света в один из фокусов. Легко понять, что в итоге свечение сконцентрируется на большой оси эллипса (кстати сказать, неустойчивой). Если же источник света поместить не в фокусе, то освещенность внутри эллипса будет переменной. Существование предельного распределения в этом случае (как и в любой другой интегрируемой задаче) вытекает из теоремы 2. Если же биллиард не относится к числу интегрируемых, то существование предельной плотности распределения представляется содержательной задачей; она рассмотрена в следующей главе.

В некотором смысле любой биллиард можно сколь угодно точно приблизить интегрируемым биллиардом. На плоскости это многоугольник, углы которого соизмеримы с π (см., например, [45]). Кроме интеграла энергии они допускают интеграл в виде полинома по скоростям. Например, для прямоугольника дополнительный интеграл имеет степень 2 (сохраняется квадрат проекции скорости на любую из сторон). Легко понять, что этим же свойством обладают и биллиарды, изображенные на рис. 9. Используя интегрируемость этих систем, с помощью теорем 1 и 2 можно изучать диффузию идеального газа как бесстолкновительной среды в сосудах указанной формы и, в частности, изучать диффузию и смешение газов в сосудах с перегородками.

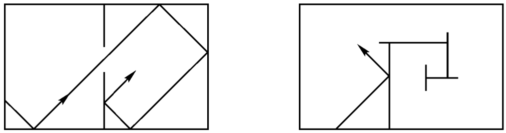

Рис. 9. Интегрируемые биллиарды

Итак, указанный механизм необратимой диффузии бесстолкновительной среды не является универсальным. Однако, для разреженных газов его следует учитывать наряду с механизмом хаотизации, основанным на учете соударений молекул. Согласно Пуанкаре, через какое-то время, достаточное долгое, чтобы каждая частица прошла по несколько раз сосуд по всей длине, но достаточно короткое, чтобы столкновения не были многочисленными, в газе установится режим, который соответствует равновесному состоянию бесстолкновительной сплошной среды. Но это равновесие не будет окончательным, столкновения будут стремиться его нарушить и только через еще более длительное время газ достигнет, наконец, окончательного теплового равновесия.

Кстати сказать, «странная кинетика» с участием динамического демона Максвелла, открытая в работах [99, 100], также основана на рассмотрении бесстолкновительной среды. Численные расчеты показывают, что в сосудах, составленных из рассеивающих биллиардов, плотность газа не выравнивается. Как мы только что показали, схожий эффект имеет место и для интегрируемых биллиардов. Странности кинетики исчезают как только мы начнем учитывать взаимодействие частиц газа.

В заключение сделаем два замечания.

Рассмотрим невырожденную вполне интегрируемую гамильтонову систему, которая описывает уравнениями (2.2) в каждой инвариантной области $D \times \mathbb{T}^n$ фазового пространства, где D — область в $\mathbb{R}^n = \{\omega\}$. Возмутим теперь слегка функцию Гамильтона. Хотя возмущенная система уже не будет интегрируемой, однако большинство (в смысле меры Лебега) инвариантных торов не исчезнут, а лишь слегка деформируются (*теорема Колмогорова* о сохранении условно-периодических движений). При достаточной гладкости функции Гамильтона динамика на инвариантном множестве большой меры снова будет описываться уравнениями (2.2), но только теперь $\omega \in D \setminus M$, где $\operatorname{mes} M \to 0$, когда возмущение исчезает [5]. В этой ситуации теоремы 1 и 2 останутся справедливыми, но только плотность распределения вероятностей f надо положить равной нулю в прямом произведении $M \times \mathbb{T}^n$ (в щели между *колмогоровскими торами*). Таким образом, можно говорить о диффузии возмущенной гамильтоновой системы на инвариантном колмогоровском множестве. Отметим, что $D \setminus M$ имеет структуру канторова множества; в частности, оно нигде не плотно в D.

Заметим еще, что предельную плотность распределения $\overline{f}$ можно также получить усреднением функции f по траекториям системы (2.2). Положим

$$\widetilde{f}(\omega,\, x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(\omega,\, x - \omega t)\, dt. \tag{8.1}$$

По теореме Вейля, этот предел существует для всех фаз x и $\widetilde{f}(\omega,\, x) = \overline{f}(\omega)$ для всех *нерезонансных* наборов частот $\omega = (\omega_1,\, \ldots,\, \omega_n)$. Напомним, что частоты $\omega_1,\, \ldots,\, \omega_n$ находятся *в резонансе*, если $k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n = 0$ для некоторых целых k_s, не равных одновременно нулю. Поскольку резонансные $\omega \in \mathbb{R}^n$ составляют множество нулевой меры Лебега, то с точки зрения теории меры функции $\widetilde{f}$ и $\overline{f}$ эквивалентны. Функция $\widetilde{f}$ непрерывна при нерезонансных значениях ω и вообще говоря разрывна на множестве резонансных торов [36] (как классический пример функции Римана, непрерывной в иррациональных и разрывной в рациональных точках вещественной оси).

§ 9. Трение

Одним из существенных достижений кинетической теории было найденное Максвеллом объяснение (с количественными оценками) явления *внутреннего трения* (вязкости) газов. Существенную роль при этом играет *длина свободного пробега* и *интенсивность соударений* частиц газа. Кратко суть дела заключается в следующем. Пусть одна из двух ограничивающих газ плоскостей имеет некоторую скорость, а другая покоится. Частицы, находящиеся вблизи движущейся плоскости, получают при столкновении с нею бо́льший импульс, чем частицы вблизи покоящейся стенки. Разницу в импульсах частицы газа стремятся выровнять путем столкновений. В результате через каждую площадку, параллельную ограничивающим стенкам, *переносится* определенная величина импульса.

Такова общепринятая точка зрения на механизм переноса импульса, приводящий к появлению внутреннего трения (см. [51,76]). Однако возникает законный вопрос: почему частицы газа увлекаются движущейся стенкой и при столкновении с ней получают бо́льший импульс? Ведь если стенка абсолютно гладкая, то ее движение вдоль самой себя никак не скажется на законе отражения частиц газа. Дело, конечно, в шероховатости (негладкости) пластины. Эта шероховатость приводит к появлению *внешнего трения*, без которого указанная выше картина будет неполной.

Оказывается, геометрическая неровность стенок сосуда приводит к *торможению* находящейся в нем бесстолкновительной сплошной среды. Таким образом мы приходим к механизму трения, который не сопровождается рассеянием кинетической энергии.

Для простоты изложения будем рассматривать газ в *двумерном* сосуде. Шероховатость стенок можно моделировать различными способами. Поскольку в действительности материал стенок имеет кристаллическую структуру, то границу сосуда можно представить в виде периодических структур, наподобие изображенных на рис. 10. С другой стороны, в современном материаловедении шероховатость границы связывают с объектами *фрактальной* природы (см., например, [20]). Поэтому границу можно моделировать также и фрактальными кривыми, например, *кривой Коха* (рис. 11).

Рис. 10. Шероховатая граница сосуда.

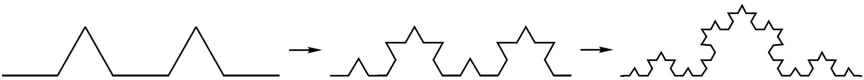

Рис. 11. Построение кривой Коха (удаление одной средней части и добавление двух таких же).

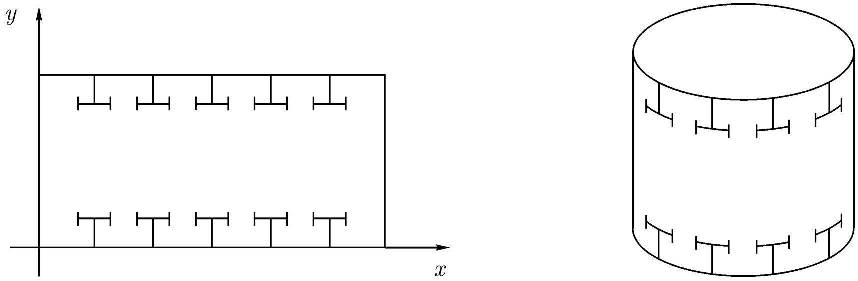

Рис. 12. Газ между шероховатыми стенками.

Рассмотрим движение газа между двумя границами, которые в среднем параллельны оси x (рис. 12). Будем считать, что сосуд *периодичен* вдоль оси x с некоторым периодом l. Иначе говоря, сосуд можно представить себе в виде кольца (после отождествления точек в полосе, x-координаты которых отличаются на l). В таком сосуде газ может циркулировать вдоль оси $x \bmod l$, отражаясь от шероховатых стенок сосуда.

Пусть мы имеем в начальный момент времени некоторое распределение с плотностью $f(\dot{x},\, \dot{y},\, x,\, y)$, где x, y — координаты частиц газа. Функция f, конечно, l-периодична по x. В начальный момент времени суммарный импульс газа вдоль оси x в общем случае отличен от нуля:

$$\iint \dot{x} f(\dot{x},\, \dot{y},\, x,\, y)\, d\dot{x}\, d\dot{y}\, dx\, dy \neq 0. \tag{9.1}$$

Спрашивается, как будет вести себя средний импульс как функция времени?

Ответ на этот вопрос можно получить с помощью теорем 1 и 2 при условии, что биллиард в рассматриваемой области будет *интегрируемой* динамической системой. Условия интегрируемости заведомо выполнены в том случае, когда все *углы* граничных многоугольников соизмеримы с π (см. по этому поводу, например, книгу [45], где даны ссылки на другие работы). Например, граница, изображенная на рис. 1(а), удовлетворяет этому условию, а граница 1(б) при дополнительном предположении, что угол при вершине треугольника соизмерим с π. Кривая Коха также порождает интегрируемый биллиард, поскольку соответствующие углы равны $\pi/3$ или $2\pi/3$. В дальнейшем рассматриваются только интегрируемые биллиарды.

Сначала заметим, что в таких сосудах *независимо от начального распределения* при $t \to \pm\infty$ устанавливается режим равномерного заполнения. Действительно, согласно теореме 1 надо проверить, что биркгофовское среднее значение плотности f не зависит от координат x и y. Но (в виду свойства невырожденности) $\overline{f}$ (по той же теореме 1) зависит от двух первых интегралов. В качестве одного можно принять полную энергию $H = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$, а второй интеграл (как это известно из [45]) является однородным полиномом по скоростям $\dot{x}$ и $\dot{y}$ с постоянными коэффициентами. Следовательно, действительно, среднее $\overline{f}$ не зависит от точки внутри биллиарда.

Вернемся к вопросу о трении. Во время движения плотность распределения вероятностей будет функцией времени f_t, которая при $t = 0$ совпадает с плотностью f из (9.1). Нас интересует плотность газа вдоль оси x. С точностью до постоянного множителя (равного массе газа) он равен

$$p(t) = \iint \dot{x} f_t \, dx \, dy \, d\dot{x} \, d\dot{y}.$$

Будем говорить, что в рассматриваемой системе имеется *внешнее трение*, если независимо от начального распределения f импульс $p(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Оказывается, наличие трения существенно зависит от геометрии границы.

Сначала рассмотрим границу с *нормальной шероховатостью*: граница состоит из отрезков, которые либо ортогональны оси x, либо ей параллельны. Примером может служить кривая на рис. 10(а). Еще два примера указаны на рис. 13.

Рис. 13. Нормальная шероховатость.

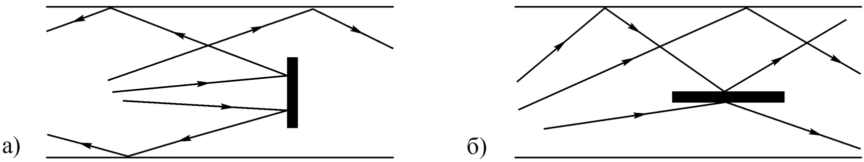

Рис. 14. Тело в потоке газа.

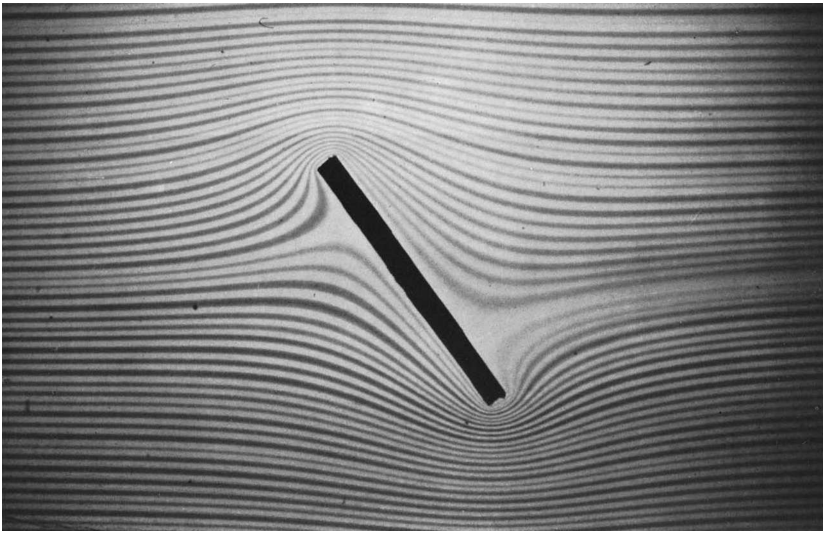

Рис. 15. Обтекание наклонной пластинки в лотке Хил-Шоу.

Покажем, что граница с нормальной шероховатостью порождает внешнее трение в газе. Действительно, по теореме 2, f_t в слабом смысле сходится к $\overline{f}$ при $t \to \pm\infty$. Следовательно,

$$\lim_{t\to\pm\infty} p(t) = \iint \dot{x}\overline{f}\,dx\,dy\,d\dot{x}\,d\dot{y}. \tag{9.2}$$

Так как $\overline{f}$ — интеграл и рассматриваемая система невырождена, то $\overline{f}$ есть функция от $\dot{x}^2$ и $\dot{y}^2$. Поэтому интеграл в правой части (9.2) равен

$$\sigma \int\limits_{\mathbb{R}^2} \dot{x}\overline{f}\,d\dot{x}\,d\dot{y}, \tag{9.3}$$

где σ — площадь сосуда. Поскольку $\overline{f}$ — четная функция относительно $\dot{x}$, то этот интеграл равен нулю.

Тот же результат будет иметь место в случае, когда стенки сосуда гладкие (прямые), а поперек потока газа мы поставим отрезок (рис. 14(а)). Тогда это тело полностью затормозит поток. Если же этот отрезок будет параллелен оси x (рис. 14(б)), то хотя это тело возмутит движение газа, однако суммарный импульс $p(t)$ вообще не изменится. Кстати сказать, здесь интегралами являются функции $\dot{x}$ и $\dot{y}^2$ и поэтому среднее $\overline{f}$ уже не будет четной функцией относительно x.

Хотя бесстолкновительный газ не обладает вязкостью, тем не менее помещенное в него тело испытывает сопротивление (в отличие от *парадокса Даламбера–Эйлера* для несжимаемой жидкости). На рис. 15, заимствованном из альбома [16], показано потенциальное безотрывное обтекание пластинки в потоке жидкости.

Результат о полном торможении газа справедлив и в том случае, когда шероховатость стенок моделируется кривой Коха. Кроме интеграла энергии здесь имеется дополнительный интеграл третьей степени

$$(\dot{x}^2 - 3\dot{y}^2)\dot{x}.$$

Глава II

Слабая сходимость решений уравнения Лиувилля для нелинейных гамильтоновых систем

§ 1. Введение

Пусть $\Gamma = T^*M$ — фазовое пространство автономной гамильтоновой системы, $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — конфигурационное пространство, $H(x, y)$ — функция Гамильтона, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — канонические импульсы.

Согласно Гиббсу, в начальный момент времени $t = 0$ в фазовом пространстве Γ вводится вероятностная мера μ ($\mu(\Gamma) = 1$). Предположим, что мера μ имеет плотность $\rho(x, y)$ и что ρ — функция из класса $L_1(\Gamma)$. Эта мера переносится фазовым потоком g^t гамильтоновой системы. Поэтому ее плотность ρ_t зависит от времени и удовлетворяет *уравнению Лиувилля*: если $\rho_t \in C^1(\Gamma)$, то

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_t \frac{\partial H}{\partial y_i} \right) - \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\rho_t \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) \right] = 0.$$

Функция $\rho_0 = \rho$ будет данным Коши.

Уравнение Лиувилля играет ключевую роль во всей статистической механике. Достаточно упомянуть цепочку уравнений Боголюбова [9] (обзор развития идей Боголюбова см., например, в [69]). Однако при этом возникает ряд затруднений принципиального характера. Во-первых, каким образом следует выбирать начальную плотность распределения вероятностей ρ_0? Во-вторых, имеет ли функция ρ_t предел при $t \to \pm\infty$?

Вопрос о выборе ρ_0 для системы взаимодействующих частиц подробно обсуждается в [9, 69]. Что касается второго вопроса, то еще Гиббс пытался показать, что при $t \to \infty$ плотность ρ_t стремится (*в каком-то смысле*) к плотности стационарного распределения, которое отвечает состоянию теплового равновесия. С этой целью он ввел микроканоническое распределение вероятностей, когда плотность зависит лишь от полной энергии H.

Однако, согласно теореме Пуанкаре о возвращении, ρ_t, как правило, вообще не имеет предела при $t \to \pm\infty$ в обычном смысле.

Мы будем изучать вопрос о *слабой сходимости* решений уравнения Лиувилля. Такой подход естественен с точки зрения обоснования термодинамики — перехода к макроскопическому описанию эволюции динамической системы, поскольку плотность вероятностной меры «существует» не сама по себе, а проявляется при вычислении средних значений (математических ожиданий) динамических величин. Такая точка зрения в неявной форме использовалась еще Пуанкаре в работе [55] (подробнее об этом в § 7).

Ограничимся более узким классом начальных распределений и будем считать ρ функцией, интегрируемой со своим квадратом (из $L_2(\Gamma)$). Это предположение естественно с точки зрения возможности вычисления средних значений функций, заданных на фазовом пространстве. Пусть z — точка фазового пространства Γ (она задается набором канонических переменных x, y), $\{g^t\}$ — фазовый поток гамильтоновой системы с гамильтонианом H. Будем считать, что все решения этой гамильтоновой системы продолжимы на всю ось времени $\mathbb{R} = \{t\}$. В частности, можно предполагать, что все энергетические многообразия $\{H = \mathrm{const}\} \subset \Gamma$ компактны. В этом случае преобразования g^t определены для всех $t \in \mathbb{R}$.

Так как преобразования g^t сохраняют фазовый объем в Γ (теорема Лиувилля), то ρ_t — первый интеграл уравнений Гамильтона с гамильтонианом H. Это простое обстоятельство позволяет указать общий вид решений уравнения Лиувилля. Пусть z_0 — начальное состояние системы. Тогда $t \mapsto g^t(z_0)$ — решение уравнений Гамильтона. Любой первый интеграл — функция от начальных данных: $\rho(z_0)$. Поскольку $z_0 = g^{-t}(z)$, то

$$\rho_t(z) = \rho(g^{-t}(z)).$$

Хорошо известно, что перенос функций из L_2 фазовым потоком динамической системы с инвариантной мерой эквивалентен действию однопараметрической группы унитарных операторов U^t (см., например [72, 86]): $U^t\rho(z) = \rho(g^t(z))$. Так что

$$\rho_t = U^{-t}\rho.$$

Оператор U часто называется *оператором Купмана.*

Пусть φ — еще одна функция из $L_2(\Gamma)$. Тогда корректно определена функция времени

$$K(t) = (U^{-t}\rho, \varphi) = \int\limits_{\Gamma} \varphi \cdot U^{-t}\rho \, d^{2n}z.$$

Она имеет простой смысл: если φ — характеристическая функция некоторой измеримой области Φ в Γ, то $K(t)$ — это доля гамильтоновых систем из ансамбля Гиббса, находящихся в области Φ в момент времени t. Если

$$\lim_{t\to\infty} K(t) = (\overline{\rho},\, \varphi)$$

для любой $\varphi \in L_2$, то ρ_t *слабо сходится* к функции $\overline{\rho}$.

Следуя п. 5 Введения, *статистической гамильтоновой системой* назовем тройку $(\Gamma,\, H,\, \{P\})$, где Γ — фазовое пространство с фиксированной симплектической структурой, H — функция Гамильтона, $\{P\}$ — вероятностные меры на Γ, которые переносятся фазовым потоком $\{g^t\}$ гамильтоновой системы с функцией Гамильтона H. *Состояния* такой системы — это вероятностные меры на Γ. Если мера P имеет гладкую плотность, то ее эволюция во времени описывается уравнением Лиувилля. Инвариантные относительно потока $\{g^t\}$ вероятностные меры на Γ мы называем *состояниями теплового равновесия*. *Слабую сходимость* меры при $t \to +\infty$ (или $t \to -\infty$) мы называем *стремлением* системы к тепловому равновесию. Таким образом, обоснование *нулевого начала термодинамики* упирается в непростую задачу о слабой сходимости вероятностных мер. Наша ближайшая цель — указать условия слабой сходимости и способ вычисления слабых пределов решений уравнения Лиувилля.

Укажем план дальнейшего изложения. В § 2 указана формула для слабого предела $\overline{\rho}$ плотности распределения вероятностей ρ_t при условии, что слабый предел существует. В § 3 выделен класс систем (вида (3.1)), которые являются основным объектом изучения. Приведены необходимые мотивировки и примеры, а также обсуждается основной технический аппарат для дальнейшего анализа — теорема Стоуна. Возможности такого подхода демонстрируются в § 4 на простейшем модельном примере — задаче о движении бесстолкновительной сплошной среды в прямоугольном параллелепипеде. Оказывается, несмотря на свойство интегрируемости биллиарда в параллелепипеде, в этом случае слабый предел плотности заведомо существует. В § 5 указан класс систем (с так называемыми слоистыми потоками), для которых удается доказать слабую сходимость решений уравнения Лиувилля при неограниченном возрастании времени. Типичными представителями этого класса динамических систем являются геодезические потоки и другие гамильтоновы квазиоднородные системы. Доказательства основных результатов приведены в § 6. В § 7 доказывается, что энтропия предельной меры $\overline{\rho}\, d^{2n} z$ не меньше, чем энтропия исходной меры $\rho\, d^{2n} z$, а также обсуждается связь этого результата со вторым началом термодинамики. В § 8 рассматриваются общие дифференциальные уравнения с инвариантной мерой. Искусственное введение параметра позволяет придать им вид уравнений (3.1) и после этого применить общие результаты § 5 и § 6. В итоге получаются новые формы эргодической теоремы, которые можно вывести независимо из классических результатов эргодической теории. В свою очередь, основной результат § 5 (теорема 3) оказывается следствием найденной новой формы эргодической теоремы. В заключительном § 9 изучается распределение систем из ансамбля Гиббса в конфигурационном пространстве.

§ 2. Слабый предел

Теорема 1. *Пусть для некоторой функции $\varphi \in L_2(\Gamma)$ существует предел*

$$\lim_{t\to\infty} K(t) = K_\infty.$$

Тогда $K_\infty = (\overline{\rho},\, \varphi)$, где

$$\overline{\rho}(z) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \rho(g^t(z))\, dt. \tag{2.1}$$

Равенство (2.1) имеет место с точностью до множества точек $z \in \Gamma$ меры нуль (как это вообще принято в теории меры). Так как $\rho \in L_1$, то (по теореме Биркгофа–Хинчина) $\overline{\rho}$ определена почти всюду, неотрицательна, является интегралом уравнений Гамильтона (инвариантна относительно g^t) и (если энергетические поверхности $H = \mathrm{const}$ компактны)

$$\int\limits_\Gamma \overline{\rho}\, d^{2n}z = 1.$$

Следовательно, $\overline{\rho}$ является плотностью стационарной вероятностной меры.

Если предел $\lim K(t)$ существует для любой функции $\varphi \in L_2$, то функция $\overline{\rho}$, удовлетворяющая равенству $K_\infty = (\overline{\rho},\, \varphi)$, единственна. Отсюда вытекает

Следствие. *Если ρ_t слабо сходится к $\overline{\rho}$, то $\overline{\rho}$ определяется равенством* (2.1).

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$(\rho_t,\, \varphi) \to (\overline{\rho},\, \varphi)$$

при $t \to \infty$. Тогда (по теореме Коши)

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T (\rho_t,\, \varphi)\, dt \to (\overline{\rho},\, \varphi)$$

при $T \to \infty$. Стоит отметить, что интеграл слева в этом соотношении существует при всех T, если ρ и φ — функции из L_2 (см., например, [8]). По теореме Фубини,

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T (\rho_t,\, \varphi)\, dt = \int\limits_\Gamma \widetilde{\rho}_T(z)\varphi(z)\, d^{2n}z,$$

где

$$\widetilde{\rho}_T = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \rho(g^t(z))\, dt.$$

Далее, по теореме фон Неймана,

$$\int\limits_\Gamma (\widetilde{\rho} - \overline{\rho})^2\, d^{2n}z \to 0$$

при $T \to \infty$. Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T (\rho_t,\, \varphi)\, dt \to (\overline{\rho},\, \varphi).$$

Действительно, с учетом теоремы фон Неймана,

$$\left[\int\limits_\Gamma (\widetilde{\rho}_T - \overline{\rho})\varphi\, d^{2n}z\right]^2 \leqslant \int\limits_\Gamma (\widetilde{\rho}_T - \overline{\rho})^2\, d^{2n}z \int\limits_\Gamma \varphi^2\, d^{2n}z \to 0,$$

когда $T \to \infty$. Что и требовалось.

Теорема 1 носит априорный характер: если слабый предел плотности вероятностей существует, то он представляется хорошо известным объектом эргодической теории.

Вопрос теперь сводится к отысканию условий, при которых плотность ρ_t *имеет* слабый предел при $t \to \pm\infty$. Отметим, что слабая сходимость имеет место не всегда. Исключение составляют, например, *линейные* гамильтоновы системы.

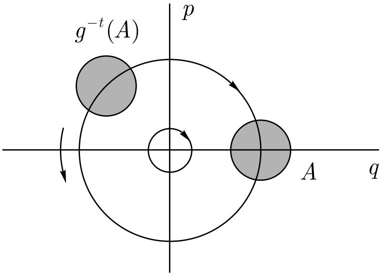

Рис. 16. Отсутствие слабого предела.

Пример. Рассмотрим линейную гамильтонову систему с гамильтонианом $H = (p^2 + q^2)/2$. Пусть ρ и φ — характеристические функции области A, которая является, например, кругом небольшого радиуса с центром в точке с координатами $q = 1$, $p = 0$. Ясно, что ρ_t — характеристическая функция области $g^{-t}(A)$, которая вращается с единичной угловой скоростью как твердое тело вокруг начала координат (рис. 16). Легко понять, что функция

$$K(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \rho_t \varphi \, dp \, dq$$

периодична по времени и не сводится к константе (она принимает значения из отрезка $[0, a]$, $a = \operatorname{mes} A$). Следовательно, $\lim K(t)$ при $t \to \pm\infty$ не существует.

Замечание. Чезаровское среднее (2.1) можно заменить средними более общего вида. Например, можно положить

$$\overline{\rho}(z) = \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \alpha(t) \rho(g^t(z)) \, dt \Big/ \int\limits_0^T \alpha(t) \, dt, \tag{2.2}$$

где $\alpha(t) > 0$ и интеграл

$$\int\limits_0^\infty \alpha(t) \, dt$$

расходится. Если предел (2.2) существует, то он совпадает с (2.1) [73].

§ 3. Условия слабой сходимости

Вопрос о существовании слабого предела плотности ρ_t рассмотрим для динамических систем, которые задаются дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\dot{z} = v(z, \omega), \quad \dot{\omega} = 0. \tag{3.1}$$

Фазовым пространством Γ является прямое произведение $\Lambda \times D$, где $\Lambda = \{z_1, \ldots, z_n\}$ — гладкое n-мерное многообразие, а D — область в $\mathbb{R}^m = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$. Координаты ω будут первыми интегралами. Будем предполагать, что при фиксированных ω система на Λ имеет инвариантную меру $d\nu = \lambda(z, \omega)\, d^n z$:

$$\sum \frac{\partial(v_i \lambda)}{\partial z_i} = 0.$$

Такой вид имеют, в частности, гамильтоновы системы. Здесь $m = 1$, а Λ — энергетическая поверхность. Роль координаты ω играет полная энергия. Фазовое пространство Γ гамильтоновой системы разбивается на клетки $h_1 \leqslant H \leqslant h_2$, причем в интервале (h_1, h_2) нет критических значений функции Гамильтона H.

Сначала зафиксируем значение ω и применим к системе $\dot{z} = v(z, \omega)$ на Λ *теорему Стоуна*:

$$(U^{-t} f, g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d(E_\lambda f, g), \tag{3.2}$$

где E_λ — разбиение единицы соответствующего линейного оператора (см., например, [59]). Этот интеграл рассматривается как интеграл Лебега–Стилтьеса. При фиксированном ω функции f и g принадлежат $L_2(\Lambda)$. Можно считать, что f — плотность вероятностной меры при $t = 0$.

Функция $\sigma_\lambda = (E_\lambda f, g)$ является функцией λ с ограниченной вариацией. В частности, она имеет не более чем счетное множество скачков $\{\Delta_k\}_{-\infty}^{+\infty}$. Функцию σ_λ можно представить в виде суммы $\sigma'_\lambda + \sigma''_\lambda$, где σ'_λ непрерывна, а σ''_λ постоянна между скачками.

Если σ'_λ имеет суммируемую производную (по теореме Лебега σ'_λ имеет конечную производную почти всюду), то «регулярная» часть интеграла (3.2) заведомо стремится к нулю при $t \to \pm\infty$.

Пусть в точке $\lambda = \lambda_k$ функция σ''_λ имеет скачок Δ_k (тогда $\exp(i\lambda_k)$ — собственное значение оператора U). «Нерегулярная» часть интеграла (3.2) представляется абсолютно сходящимся рядом

$$\sum \Delta_k e^{i\lambda_k t}, \quad \lambda_0 = 0. \tag{3.3}$$

Числа λ_k и Δ_k зависят от ω как параметра. Следовательно, чтобы получить полную формулу для $(U^{-1}f,\, g)$, где f и g будут функциями из $L_2(\Lambda \times D)$, надо (3.3) проинтегрировать еще по области D.

Здесь следует различать два случая: (а) λ_k — непостоянная функция ω, (б) λ_k вообще от ω не зависит. Второй случай как раз имеет место для линейных гамильтоновых систем. В этом случае выражение для $K(t) = (U^{-t}f,\, g)$ содержит, как правило, осциллирующие слагаемые и поэтому предел $K(t)$ при $t \to \pm\infty$ не существует.

Рассмотрим теперь случай (а) и пусть $k \neq 0$. Вопрос об условиях и характере стремления к нулю осциллирующего интеграла

$$\int\limits_D \Delta_k(\omega) e^{i\lambda_k(\omega)t}\, d^m\omega$$

достаточно хорошо изучен (см., например, [78, 3]). Это заведомо так, если функция $\omega \mapsto \Delta(\omega)$ суммируемая, а гладкая функция $\omega \mapsto \lambda(\omega)$ имеет лишь конечнократные критические точки в области D. Тогда в случае (а) интеграл по ω от каждого слагаемого ряда (3.3) с номером $k \neq 0$ в общей ситуации стремится к нулю при $t \to \pm\infty$. Интеграл от Δ_0 вообще не содержит времени t. Таким образом, если спектр динамической системы на Λ существенно зависит от ω, то (при некоторых дополнительных предположениях технического характера) функция $K(t)$ имеет конечный предел, когда $t \to \pm\infty$. В этом случае можно говорить о стремлении системы к тепловому равновесию (по Гиббсу).

Замечание. Исходным пунктом доказательства фон Неймана статистической эргодической теоремы также является формула Стоуна (см. [71]). Для того, чтобы подавить осциллирующие слагаемые в выражении (3.3) (с номерами $k \neq 0$) применяется дополнительное усреднение по времени: эти слагаемые стремятся к нулю по Чезаро при $t \to \infty$. Современные доказательства теоремы фон Неймана используют другую технику (см., например, [53, 72]).

Рассмотрим частный случай, когда для почти всех ω динамическая система на Λ будет эргодической. Именно этот случай Гиббс считал наиболее важным с точки зрения обоснования термодинамики. Тогда единица будет однократным собственным значением соответствующего унитарного оператора и разность $E_{+0} - E_{-0}$ будет проектором на одномерное пространство собственных функций — констант. Если остальная часть спектра существенно зависит от ω, то

$$\lim_{t\to\pm\infty} K(t) = \int\limits_D \overline{f}\overline{g} \operatorname{mes}\Lambda \, d^m\omega, \tag{3.4}$$

где

$$\overline{(\,\cdot\,)} = \frac{1}{\operatorname{mes}\Lambda} \int\limits_\Lambda (\,\cdot\,)\, d\nu, \quad \operatorname{mes}\Lambda = \int\limits_\Lambda d\nu.$$

Формула (3.4) приводит к несколько иному виду эргодической теоремы: здесь усреднение по времени t заменяется усреднением по параметру ω. Она показывает, что при указанных предположениях система на Λ обладает свойством перемешивания *в среднем*.

Согласно точке зрения, высказанной в [49], для обоснования термодинамики (по Гиббсу) недостаточно эргодической гипотезы: нужно потребовать, чтобы гамильтонова система обладала свойством перемешивания на энергетических многообразиях. Однако, как показывает формула (3.4), в задаче о слабой сходимости вероятностных мер во сем фазовом пространстве нелинейной системы эти свойства в среднем неразличимы. Более того, стремление к тепловому равновесию демонстрируют также невырожденные вполне интегрируемые системы — динамические системы противоположного типа.

§ 4. Идеальный газ как бесстолкновительная среда

Применим метод предыдущего раздела к следующей системе:

$$\dot{x} = \omega, \quad \dot{\omega} = 0. \tag{4.1}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n) \bmod 2\pi$ — угловые переменные, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$. В этой задаче Λ есть n-мерный тор $\mathbb{T}^n$, а D совпадает с $\mathbb{R}^n$. Для почти всех $\omega \in \mathbb{R}^n$ система на $\mathbb{T}^n$ будет эргодической (теорема Кронекера).

Как показал Пуанкаре [55], к системе (4.1) сводится задача о движении идеального газа в n-мерном параллелепипеде, рассматриваемого как бесстолкновительная сплошная среда (см. § 2 гл. I). Кроме того, невырожденные вполне интегрируемые гамильтоновы системы также приводятся к виду (4.1).

Пуанкаре заметил, что независимо от начальной плотности распределения газа в фазовом пространстве $\Gamma = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, при $t \to \pm\infty$ газ будет равномерно распределен по всему объему параллелепипеда. Этот замечательный результат Пуанкаре мы дополнили следующим утверждением (теорема 2 гл. I).

Теорема 2. *Пусть $f,\, g : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функции, интегрируемые со своим квадратом. Тогда*

$$\lim_{t\to\pm\infty} \int\limits_{\Gamma} f(\omega,\, x - \omega t) g(\omega,\, x)\, d^n x\, d^n\omega = (2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{f}\overline{g}\, d^n\omega, \tag{4.2}$$

где

$$\overline{(\,\cdot\,)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} (\,\cdot\,)\, d^n x.$$

Формула (4.2) является, конечно, частным случаем формулы (3.4). Прокомментируем теорему 2 с точки зрения подхода п. 2, основанного на формуле Стоуна, хотя проще дать непосредственное формальное доказательство этого утверждения (см. § 3 гл. I).

При фиксированном $\omega \in \mathbb{R}^n$ мы имеем простую динамическую систему на $\mathbb{T}^n$, задающую условно-периодическое движение. Изометрический оператор действует следующим образом:

$$U^t f(\omega,\, x) = f(\omega,\, x + \omega t).$$

Легко проверить, что его собственные числа равны

$$\mu_m = e^{i(m,\,\omega)t}, \quad m \in \mathbb{Z}^n. \tag{4.3}$$

Им отвечают собственные значения (функции)

$$\varkappa_m(\omega) e^{i(m,\,x)}, \quad m \in \mathbb{Z}^n,$$

где $\varkappa_m$ — функция из $L_2(\mathbb{R}^n)$. При фиксированном ω эти собственные функции образуют полную систему на $\mathbb{T}^n$. Следовательно $\sigma'_\lambda = 0$ и σ_λ сводится к функции скачков. Как видно из (4.3), собственные значения μ_m, $m \neq 0$ существенно зависят от параметра ω ($\lambda_m = (m,\, \omega)$ вообще не имеют критических точек). Таким образом, мы имеем здесь случай (а) и формула (4.2) вытекает из формулы (3.4).

Если $\rho(\omega, x)$ — плотность начального распределения вероятностей в Γ, то при $t \to \pm\infty$ эта плотность в слабом смысле сходится к $\overline{\rho}$, зависящей лишь от ω (теорема 2). С другой стороны (по теореме Вейля), для нерезонансных торов (когда частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ рациональны несоизмеримы) временное среднее ρ также равно $\overline{\rho}$. Поскольку резонансные торы составляют множество лебеговой меры нуль, то этот вывод вполне согласуется с заключением теоремы 1.

§ 5. Предельные меры слоистых потоков

В этом разделе метод § 3 применяется к динамическим системам со *слоистыми* фазовыми потоками. Эти системы являются частным случаем систем (3.1), когда имеется всего одна переменная ω ($m = 1$). Их выделяет следующее характерное свойство: фазовые потоки на Λ при различных значениях ω оказываются сопряженными (после подходящей замены времени). Важным примером слоистых потоков служат *геодезические потоки* на гладких многообразиях. Перейдем к точным определениям.

Пусть I — интервал числовой прямой $\mathbb{R}$ (возможно, бесконечный), Λ — гладкое многообразие. Пусть в фазовом пространстве $\Gamma = \Lambda \times I$ задана динамическая система (3.1), где $z \in \Lambda$, $\omega \in I$.

Положим

$$P_\gamma = \{(z, \omega) \in \Gamma : \omega = \gamma\}.$$

Это n-мерные интегральные многообразия системы (3.1). Отображение $\psi_\omega : (z, \omega) \to z$ задает естественный диффеоморфизм P_ω и Λ. Ясно, что векторное поле v рассматриваемой динамической системы касается P_ω в точках $(z, \omega) \in \Gamma$. Обозначим v_ω ограничение поля v на P_ω.

Далее, пусть $\{g^t\}$ — фазовый поток на Γ, порождаемый системой (3.1), а $\{g^t_\omega\}$ — его ограничение на P_ω. Поскольку все многообразия P_ω диффеоморфны Λ, то можно считать, что $\{g^t_\omega\}$ — однопараметрическое семейство групп преобразований Λ (ω — параметр семейства).

Определение. Поток g^t назовем *слоистым*, если существует гладкая функция $\alpha : I \to (0, \infty)$ и поток $g^s_* : \Lambda \to \Lambda$, такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} P_\omega \arrow[r, "g^t_\omega"] \arrow[d, "\psi_\omega"'] & P_\omega \arrow[d, "\psi_\omega"] \\ \Lambda \arrow[r, "g_*^{\alpha(\omega)t}"] & \Lambda \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

коммутативна для всех $\omega \in I$ и всех $t \in \mathbb{R}$. Слоистый поток назовем *невырожденным*, если функция $\omega \mapsto \alpha(\omega)$ имеет лишь изолированные критические точки.

Отождествляя P_ω и Λ с помощью диффеоморфизма ψ_ω, свойство коммутативности диаграммы (5.1) можно представить в виде следующего равенства:

$$g_\omega^t = g_*^{\alpha(\omega)t}. \tag{5.2}$$

Имеет место очевидное

Предложение 1. *Пусть поток g_*^t сохраняет меру ν_* на многообразии Λ и σ — любая мера на интервале I. Тогда поток g^t на $\Lambda \times I$ сохраняет меру $\mu = \nu_* \times \sigma$.*

Прокомментируем это утверждение в случае, когда меры ν_* и σ имеют гладкие плотности:

$$d\nu_* = \lambda(z)\, d^n z, \quad d\sigma = \varphi(\omega)\, d\omega.$$

Пусть поток g_*^t порождает векторное поле на Λ

$$v_*(z) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (g_*^t(z)).$$

Так что поток g_*^t будет фазовым потоком системы дифференциальных уравнений на Λ

$$\dot z = v_*(z).$$

Условие (4.2) означает, что для слоистого потока система (3.1) имеет следующий вид:

$$\dot z = \alpha(\omega) v_*(z), \quad \dot\omega = 0. \tag{5.3}$$

Предложение об инвариантности меры v_* относительно действия потока g_*^t означает, что ее плотность λ удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda (v_*)_i}{\partial z_i} = 0.$$

Следовательно, плотность $\rho = \lambda(z)\varphi(\omega)$ меры μ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho v_i}{\partial z_i} = 0,$$

где $v = \lambda v_*$. С учетом равенства $\dot{\omega} = 0$ это соотношение — критерий инвариантности меры μ относительно фазового потока системы (5.3).

Пусть U^t — семейство унитарных операторов Купмана на $L_2(\Gamma, \mu)$, порождаемых потоком g^t.

Теорема 3. *Пусть g^t — невырожденный слоистый поток на $\Gamma = \Lambda \times I$, мера ν_* абсолютно непрерывна относительно меры, задаваемой какой-нибудь римановой метрикой на Λ, мера σ абсолютно непрерывна относительно обычной меры Лебега на $\mathbb{R}$, причем $\nu_*(\Lambda) = \sigma(I) = 1$. Тогда для любых f', $f'' \in L_2(\Gamma, \mu)$ существует предел*

$$\lim_{t\to\infty} (U^t f', f'').$$

Из теорем 1 и 3 вытекает

Следствие. *Для динамических систем вида* (3.1) *с невырожденным слоистым фазовым потоком плотность распределения вероятностей ρ_t имеет слабые пределы при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$, причем эти пределы совпадают и вычисляются по формуле* (2.1).

Теорема 3 доказывается в следующем разделе. Прежде чем приступить к ее доказательству, приведем некоторые примеры динамических систем со слоистыми фазовыми потоками.

Пусть P_ω, $\omega > 0$ — однопараметрическое семейство гладких многообразий и $\varphi_\omega : P_1 \to P_\omega$ — семейство диффеоморфизмов. Объединение

$$\Gamma = \bigcup_{\omega>0} P_\omega$$

имеет структуру прямого произведения $\Lambda \times I$, где $\Lambda = P_1$, а I — бесконечный интервал $(0, +\infty)$. Снабдим Γ гладкой структурой прямого произведения $\Lambda \times I$.

Определение. Векторное поле v на Γ назовем *φ_ω-однородным степени k*, если для некоторого векторного поля φ_1 на P_1

$$v \circ \varphi_\omega = \omega^k (D\varphi_\omega) v_1 \tag{5.4}$$

для всех $\omega > 0$. Здесь D — дифференциал отображения.

Поскольку v_1 касается P_1 и $\varphi_\omega(P_1) = P_\omega$, то поле v касательно к слоям P_ω, $\omega > 0$.

Пример 1. Пусть $(\Lambda, <\,,>)$ — гладкое риманово многообразие, $<\,,>^*$ — метрика, сопряженная метрике $<\,,>$. Пусть p — элемент сопряженного пространства $T_q^*\Lambda$ (импульс механической системы). Положим $||p||^2 = \,=< p,\, p >^*$ и

$$P_s = \{p \in T_q^*\Lambda : q \in \Lambda, \quad ||p|| = s\}.$$

Ясно, что $\Gamma = T^*\Lambda \setminus P_0$.

Пусть v — гамильтоново векторное поле на Γ, заданное стандартной симплектической структурой $\Sigma\, dp_i \wedge dq_i$ и гамильтонианом $H = ||p||^2/2$. Это поле порождает динамическую систему на Γ, которая называется *геодезическим потоком*. Соответствующий фазовый поток g^t определен при всех $t \in \mathbb{R}$, если $(\Lambda, <\,,>)$ — *полное* риманово многообразие (все геодезические имеют бесконечную длину).

Пусть $(q,\, p)$ — точка из Γ. Положим

$$\varphi_\omega(q,\, p) = (q,\, \omega p), \quad \omega > 0.$$

Тогда гамильтоново векторное поле v, задаваемое уравнениями Гамильтона

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{5.5}$$

будет φ_ω-однородным степени $k = 1$. Действительно, структура уравнений геодезических (5.5) такова, что $\dot p$ квадратично по p, а $\dot q$ линейно по p.

Пример 2. Рассмотрим снова гамильтонову систему (5.5) в $\mathbb{R}^{2n} = \,= \{q_1,\, \ldots,\, q_n,\, p_1,\, \ldots,\, p_n\}$ с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(p_i^2 + \alpha_i^2 q_i^2), \quad \alpha_i > 0 \tag{5.6}$$

(полигармонический осциллятор с частотами $\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_n$). Положим снова

$$P_\omega = \{(p,\, q) \in \mathbb{R}^{2n} : H(p,\, q) = \omega\}, \quad \omega > 0,$$

и $\varphi_\omega : (q,\, p) \to (\omega q,\, \omega p)$. Легко понять, что гамильтоново векторное поле v на

$$\Gamma = \bigcup_{\omega > 0} P_\omega,$$

порождаемое квадратичным гамильтонианом (5.6), будет φ_ω-однородным нулевой степени $(k = 0)$.

Предложение 2. *Пусть v является φ_ω-однородным векторным полем на Γ степени k. Тогда v порождает на Γ слоистый поток g^t, причем $\alpha(\omega) = \omega^k$.*

Следствие. *При $k \neq 0$ поток g^t невырожден.*

Таким образом, геодезический поток невырожден, а потоки, порождаемые линейными гамильтоновыми системами (пример 2), нет.

Доказательство предложения 2. Положим $\Lambda = P_1$ и заметим, что любую точку $z \in \Gamma$ можно однозначно представить в виде

$$z = \varphi_\omega(z_1), \quad \omega > 0, \quad z_1 \in P_1. \tag{5.7}$$

Так как отображение $\Lambda \times (0, +\infty) \to \Gamma$, задаваемое равенством (5.7), является диффеоморфизмом, то достаточно проверить, что

$$g^t \circ \varphi_\omega = \varphi_\omega \circ g_1^{\omega^k t}, \tag{5.8}$$

где g_1^t — это ограничение потока g^t на P_1.

Это равенство, очевидно, справедливо при $t = 0$. Проверим равенство производных по t. Дифференцируя по t при $t = 0$, получаем:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g^t \circ \varphi_\omega = v \circ \varphi_\omega,$$
$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_\omega \circ g_1^{\omega^k t} = \omega^k (D\varphi_v) v_1,$$

где v_1 — ограничение поля v на P_1. Равенство этих производных вытекает из (5.4) — определения φ_ω-однородного поля степени k. Равенство производных при всех значениях t вытекает из группового свойства фазовых потоков. Предложение доказано.

§ 6. Оператор Купмана для слоистых потоков

В этом параграфе мы докажем теорему 3. Пусть U^t, U^t_ω, U^t_* — унитарные операторы Купмана, отвечающие потокам g^t, g^t_ω, g^t_* соответственно.

Предложение 3. $U^t_\omega = U_*^{\alpha(\omega)t}$.

Действительно, для произвольной функции f из $L_2(\Lambda, \nu_*)$ имеем

$$U^t_\omega f = f \circ g^t_\omega = f \circ g_*^{\alpha(\omega)t} = U_*^{\alpha(\omega)t} f.$$

При выводе второго равенства в этой цепочке мы отождествили многообразия Λ и P_ω с помощью диффеоморфизма ψ_ω и затем воспользовались равенством (5.2). Предложение доказано.

Пусть g' и g'' — функции из $L_2(\Lambda, \nu_*)$. Тогда (по теореме Стоуна)

$$(U_*^t g', g'') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d(E_\lambda g', g'').$$

Согласно предложению 3,

$$(U_\omega^t g', g'') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\alpha(\omega)t}\, d(E_\lambda g', g''). \tag{6.1}$$

Пусть теперь f' и f'' — функции из $L_2(\Gamma, \mu)$, $\Gamma = \Lambda \times I$. Положим

$$f'_\omega(\,\cdot\,) = f'(\,\cdot\,, \omega), \quad f''_\omega(\,\cdot\,) = f''(\,\cdot\,, \omega).$$

Применяя теорему Фубини и формулу (6.1), получим

$$(U^t f', f'') = \int\limits_I (U_\omega^t f'_\omega, f''_\omega)\, d\sigma = \int\limits_I d\sigma \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\alpha(\omega)t}\, d(E_\lambda f'_\omega, f''_\omega). \tag{6.2}$$

Пусть A', A'' — измеримые подмножества Λ , а I', I'' — интервалы в I. Пусть χ', $\chi'' : \Gamma \to \mathbb{R}$ — характеристические функции (индикаторы) множеств $A' \times I'$, $A'' \times I''$ соответственно. Положим

$$J(t) = (U^t \chi', \chi'').$$

Основная лемма. *Пределы* $\lim\limits_{t\to+\infty} J(t)$ *и* $\lim\limits_{t\to-\infty} J(t)$ *существуют.*

Теорема 3 вытекает из основной леммы. Действительно, в $L_2(\Gamma, \mu)$ всюду плотно пространство непрерывных на Γ функций с компактным носителем. В свою очередь в этом пространстве всюду плотно (даже в C^0-норме) линейное пространство функций, которые являются линейными комбинациями индикаторов μ-измеримых подмножеств из Γ.

Пусть теперь f' и f'' — любые две функции из $L_2(\Gamma, \mu)$. Для доказательства существования предела

$$\lim_{t\to+\infty} (U^t f', f'')$$

воспользуемся критерием Коши: надо показать, что разность

$$(U^{t_1}f',\, f'') - (U^{t_2}f',\, f'') \tag{6.3}$$

будет меньше любого заданного $\varepsilon > 0$ для всех $t_1,\, t_2 > T(\varepsilon)$. Для этого аппроксимируем f' и f'' функциями g' и g'', которые являются конечными линейными комбинациями индикаторов χ' и χ'': для любого $\varepsilon > 0$ найдутся функции g' и g'', такие, что

$$||f' - g'|| < \varepsilon \quad \text{и} \quad ||f'' - g''|| < \varepsilon. \tag{6.4}$$

Здесь $||\cdot||$ — норма в L_2. После этого замечания разность (6.3) следует представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}(U^{t_1}g',\, g'') - (U^{t_2}g',\, g'')+&\\ +(U^{t_1}(f'-g'),\, f''-g'') + (U^{t_1}(f'-g'),\, g'')+&\\ +(U^{t_1}f',\, f''-g'') - (U^{t_2}(f'-g'),\, f''-g'')-&\\ -(U^{t_2}(f'-g'),\, g'') - (U^{t_2}f',\, f''-g'').&\end{aligned} \tag{6.5}$$

Согласно основной лемме, разность в первой строке можно сделать сколь угодно малой при достаточно больших значениях t_1 и t_2. Ввиду неравенства Коши–Шварца, унитарности оператора Купмана U и неравенств (6.4), остальные слагаемые в (6.5) стремятся к нулю равномерно по t_1 и t_2, когда $\varepsilon \to 0$.

Остальная часть этого параграфа посвящена доказательству основной леммы.

Положим $A_0 = A' \cap A''$, $I_0 = I' \cap I''$. Пусть $\chi_0 : \Lambda \times I \to \mathbb{R}$ — характеристическая функция (индикатор) измеримого множества $A_0 \times I_0$, а $\widetilde{\chi}_0 : \Lambda \to \mathbb{R}$ — характеристическая функция множества A_0 . Положим

$$\xi(\lambda) = (\chi_0,\, E_\lambda \chi_0).$$

Ясно, что $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации и (согласно (6.2))

$$J(t) = \int\limits_{I_0} d\sigma(\omega) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\alpha(\omega)t}\, d\xi(\lambda). \tag{6.6}$$

Положим $\xi(\lambda) = \xi^d(\lambda) + \xi^c(\lambda)$, где ξ^d — функция скачков, а ξ^c непрерывна. Тогда $J(t) = J^d(t) + J^c(t)$, где

$$J^d(t) = \int\limits_{I_0} d\sigma(\omega) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\alpha(\omega)t}\, d\xi^d(\lambda),$$

$$J^c(t) = \int\limits_{I_0} d\sigma(\omega) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\alpha(\omega)t}\, d\xi^c(\lambda).$$

Сначала изучим поведение J^d:

$$J^d(t) = \int\limits_{I_0} \sum_{j=1}^{\infty} a(\lambda_j) e^{i\lambda_j\alpha(\omega)t}\, d\sigma(\omega),$$

где ряд $\sum a(\lambda_j)$ абсолютно сходится. Пусть $D_\gamma = \{\omega \in I_0 : |\alpha'(\omega)| > \gamma\}$, $\alpha' = d\alpha/d\omega$. Согласно предположению, критические точки функции $\omega \mapsto \alpha(\omega)$ изолированы. Следовательно, σ-мера множества $I \setminus D_\gamma$ стремится к нулю при $\gamma \to 0$. Более того, можно считать, что D_γ — объединение конечного числа интервалов.

Зафиксировав малые $\delta, \gamma > 0$, положим $J^d = J_0^d + J_1^d + J_2^d + J_3^d$, где

$$J_0^d = a(0)\sigma(I_0), \qquad J_1^d = \sum_{0<|\lambda_j|<\delta} a(\lambda_j) \int\limits_{I_0} e^{i\lambda_j\alpha(\omega)t}\, d\sigma(\omega),$$

$$J_2^d = \sum_{|\lambda_j|\geqslant\delta} a(\lambda_j) \int\limits_{I_0\setminus D_\gamma} e^{i\lambda_j\alpha(\omega)t}\, d\sigma(\omega),$$

$$J_3^d = \sum_{|\lambda_j|\geqslant\delta} a(\lambda_j) \int\limits_{D_\gamma} e^{i\lambda_j\alpha(\omega)t}\, d\sigma(\omega).$$

Так как

$$|J_1^d| \leqslant \sum_{0<|\lambda_j|<\delta} |a(\lambda_j)|\sigma(I_0), \qquad |J_2^d| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |a(\lambda_j)|\sigma(I_0 \setminus D_\gamma),$$

то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся положительные δ и γ такие, что $|J_1^d| < \varepsilon$ и $|J_2^d| < \varepsilon$.

Докажем, что $J_3^d(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Действительно, пусть (ω_1, ω_2) — один из интервалов, составляющих D_γ (напомним, что число таких интервалов конечно). Положим $d\sigma(\omega) = h(\omega)\, d\omega$. Согласно условию теоремы 3, функция $\omega \mapsto h(\omega)$ абсолютно непрерывна. Интегрируя по частям, получим:

$$J_3^d(t) = \sum_{|\lambda_j| \geqslant \delta} a(\lambda_j) \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} h(\omega) e^{i\lambda_j \alpha(\omega) t}\, d\omega =$$
$$= \sum_{|\lambda_j| \geqslant \delta} \frac{a(\lambda_j)}{i\lambda_j t} \left[\frac{h(\omega)}{\alpha'(\omega)}\, e^{i\lambda_j \alpha(\omega)} \Bigg|_{\omega_1}^{\omega_2} - \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} \left(\frac{h(\omega)}{\alpha'(\omega)} \right)' e^{i\lambda_j \alpha(\omega) t}\, d\omega \right]. \quad (6.7)$$

Положим

$$c = \max_{\omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2} \left| \frac{h(\omega)}{2\alpha'(\omega)} \right|, \quad c' = \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} \left| \left(\frac{h'(\omega)}{\alpha'(\omega)} \right)' \right| d\omega.$$

Тогда выражение (6.7) по абсолютной величине не превосходит

$$\sum_j \frac{|a(\lambda_j)|}{\delta |t|}\, (c + c'),$$

что, очевидно, стремится к нулю, когда $t \to \pm\infty$.

Итак, доказано, что

$$\lim_{t \to \pm\infty} J^d(t) = a(0)\sigma(I_0).$$

Теперь изучим поведение $J^c(t)$. Положим $\widetilde{\xi}(\lambda) = \xi^c(\lambda) - \xi^c(-\lambda)$. Тогда $J^c = J_1^c + J_2^c + J_3^c$, где

$$J_1^c(t) = \int\limits_{I_0} d\sigma(\omega) \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{i\lambda\alpha(\omega) t}\, d\xi^c(\lambda), \quad J_2^c(t) = \int\limits_{I_0 \setminus D_\gamma} d\sigma(\omega) \int\limits_{\delta}^{+\infty} e^{i\lambda\alpha(\omega) t}\, d\widetilde{\xi}(\lambda),$$

$$J_3^c(t) = \int\limits_{D_\gamma} d\sigma(\omega) \int\limits_{\delta}^{+\infty} e^{i\lambda\alpha(\omega) t}\, d\widetilde{\xi}(\lambda).$$

Оценим сначала J_1^c:

$$|J_1^c(t)| \leqslant \int\limits_{I_0} \mathrm{Var}_{-\delta}^{\ \delta}(\xi^c)\, d\sigma(\omega) = \sigma(I_0)\, \mathrm{Var}_{-\delta}^{\ \delta}(\xi^c).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что $|J_1^c(t)| < \varepsilon$ при всех t.

Для J_2^c имеем очевидную оценку:

$$|J_2^c(t)| \leqslant \sigma(I_0 \setminus D_\gamma) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi^c(\lambda).$$

Следовательно, при малых γ имеем неравенство $|J_2^c(t)| < \varepsilon$, справедливое при всех t.

Снова пусть $h(\omega)$ — плотность абсолютно непрерывной меры σ, и (ω_1, ω_2) — один из интервалов, составляющих D_γ. Тогда J_3^c представляется в виде суммы конечного числа слагаемых вида

$$\int\limits_{\delta}^{+\infty} R(\lambda)\, d\widetilde{\xi}(\lambda), \quad R(\lambda) = \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} h(\omega) e^{i\lambda\alpha(\omega)t}\, d\omega.$$

Интегрируя опять по частям, получаем оценку

$$|R(\lambda)| \leqslant \frac{c + c'}{\delta|t|}.$$

Следовательно,

$$\left| \int\limits_{\delta}^{+\infty} R(\lambda)\, d\widetilde{\xi}(\lambda) \right| \leqslant \frac{1}{\delta|t|}\ \mathrm{Var}_{-\infty}^{\ \infty}\, \xi^c,$$

что стремится к нулю при $t \to \pm\infty$.

Лемма полностью доказана.

§ 7. Возрастание энтропии

Как известно, в статистической механике энтропия определяется как интеграл

$$S_t = -\int\limits_{\Gamma} \rho_t \ln \rho_t\, d\mu, \quad d\mu = d^{2n} z.$$

Так как $\rho_t(z) = \rho(g^{-t}(z))$ и поток g^t сохраняет меру μ, то очевидно, $S_t = \mathrm{const}$. Это замечание является частным случаем общего результата Пуанкаре о постоянстве *тонкой* энтропии динамических систем (Введение, п. 7).

С другой стороны, ρ_t слабо сходится к $\overline{\rho}$ при $t \to \pm\infty$. Обобщая аргументацию Гиббса и Пуанкаре, можно считать, что стационарная плотность распределения вероятностей $\overline{\rho}$ отвечает *тепловому равновесию* рассматриваемой динамической системы. Поэтому естественно ввести энтропию равновесного состояния

$$S_\infty = -\int\limits_\Gamma \overline{\rho} \ln \overline{\rho}\, d\mu.$$

Теорема 4.

$$S_t \leqslant S_\infty. \tag{7.1}$$

Доказательство использует свойство вогнутости функции $h(x) = -x \ln x$ при положительных значениях x. Так как $S_t = \mathrm{const}$, то по теореме Фубини

$$S_t = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \int\limits_\Gamma h(\rho_t)\, d\mu\, dt = \int\limits_\Gamma \left[\frac{1}{T} \int\limits_0^T h(\rho_t)\, dt \right] d\mu.$$

Ввиду неравенства Иенсена (см. [74]),

$$\frac{1}{T} \int\limits_0^T h(\rho_t)\, dt \leqslant h\left(\frac{1}{T} \int\limits_0^T \rho_t\, dt \right), \quad T > 0.$$

Следовательно,

$$S_t \leqslant \int\limits_\Gamma h\left(\frac{1}{T} \int\limits_0^T \rho_t\, dt \right) d\mu.$$

Переходя к пределу при $T \to \infty$ и используя теорему 1, получаем требуемое.

Замечание. Для бесстолкновительной среды в прямоугольном параллелепипеде (см. § 4) неравенство (7.1) установлено ранее в работе [83]. В некоторых частных случаях оно отмечено еще Пуанкаре [55] (п. 6).

Поскольку ρ_t слабо сходится к одной и той же функции $\overline{\rho}$ как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$, то заключение теоремы 4 о возрастании энтропии инвариантно при обращении времени t. Напомним, что из кинетического уравнения Больцмана вытекает *монотонное* возрастание энтропии при увеличении времени и с этим связан знаменитый парадокс Лошмидта. Обсуждение этого парадокса с разных точек зрения можно найти, например, в [30, 54].

В заключение сделаем замечание о критике Н. С. Крыловым [49] (с. 51–52) результатов Пуанкаре о возрастании энтропии бесстолкновительной среды при возмущениях [55] (п. 5). Пуанкаре рассматривает равновесное состояние одномерного идеального газа, равномерно заполняющего некоторый отрезок. Затем из бесконечности к отрезку приближается гравитирующее тело, газу дается возможность принять новое равновесное состояние, а затем тело снова удаляют на бесконечное расстояние. В [55] вычислено приращение энтропии, которое оказалось положительным.

Н. С. Крылов замечает, что этот вывод противоречит результату п. 1 работы Пуанкаре о постоянстве тонкой энтропии (неавтономность уравнений движения не играет никакой роли). На самом же деле никакого противоречия здесь нет. Для состояний теплового равновесия Пуанкаре фактически заменял (*не оговаривая этого явно*) начальную плотность вероятности ее слабым пределом. Когда тело приближается к отрезку с газом, то соответствующая динамическая система с одной степенью свободы изменяется: к гамильтониану добавляется потенциальная энергия гравитационного взаимодействия. Слабый предел ρ_- этой новой нелинейной системы оказывается функцией от полной энергии. Далее тело удаляется, функция ρ_- становится начальной плотностью распределения, а гамильтониан снова будет совпадать с кинетической энергией. Поэтому слабый предел ρ_+ решения уравнения Лиувилля новой системы с начальным условием ρ_- становится функцией, зависящей лишь от кинетической энергии. По теореме 4, $S_+ \geqslant S_-$. На самом деле, как показывают вычисления Пуанкаре, $S_+ > S_-$.

§ 8. Новые формы эргодической теоремы

Пусть дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in M \tag{8.1}$$

на гладком многообразии M задает динамическую систему с инвариантной мерой μ. Будем предполагать, что мера μ абсолютно непрерывна относительно меры, порождаемой на M какой-нибудь римановой метрикой и $\mu(M) < \infty$. Пусть g^t — фазовый поток системы (1.1).

Каждой функции f из $L_1(M,\,\mu)$ можно сопоставить ее биркгофовское среднее

$$\overline{f}(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(g^t(x))\,dt.$$

Известно, что $\overline{f} \in L_1(M,\,\mu)$ и интегралы от f и $\overline{f}$ по M совпадают.

Пусть $\omega \mapsto h(\omega)$ — плотность некоторой вероятностной меры на $\mathbb{R} = \{\omega\}$: это неотрицательная функция из $L_1(\mathbb{R},\,d\omega)$, причем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\omega)\,d\omega = 1.$$

Теорема 5. *Если f — измеримая ограниченная функция, то для почти всех x*

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\omega) f(g^{\omega t})\,d\omega = \overline{f}(x). \tag{8.2}$$

Теорема 6. *Если f — произвольная функция из $L_1(M,\,\mu)$, то сходимость* (8.2) *имеет место лишь в среднем (т. е. в норме $L_1(M,\,\mu)$):*

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_M \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\omega)[f(g^{\omega t}(x)) - \overline{f}(x)]\,d\omega \right| d\mu = 0.$$

Теорема 7. *Если $f_1,\, f_2 \in L_2(M,\,\mu)$, то*

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\omega) \int\limits_M f_1(g^{\omega t}(x)) f_2(x)\,d\mu\,d\omega = \int\limits_M \overline{f}_1 f_2\,d\mu. \tag{8.3}$$

Замечание 1. Теоремы 1–3 включают как частные классические теоремы эргодической теории. Действительно, пусть h — плотность равномерного распределения на единичном отрезке $0 \leqslant \omega \leqslant 1$ и $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная интегрируемая функция. Тогда очевидно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\omega)\varphi(\omega t)\,dt = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(s)\,ds.$$

Наибольший интерес представляет случай, когда поток динамической системы (8.1) эргодический. Тогда равенство (8.3) переходит в соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\omega)\left[\int_M f_1(g^{\omega t}(x))f_2(x)\,d\mu\right]d\omega \to \\ \to \int_M f_1\,d\mu \int_M f_2\,d\mu \Big/ \mu(M). \tag{8.4}$$

В частности, пусть h — плотность нормального распределения с дисперсией σ. Тогда при $\sigma \to \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \int_M f_1(g^t(x))f_2(x)\,d\mu\,dt \to \\ \to \int_M f_1\,d\mu \int_M f_2\,d\mu \Big/ \mu(M). \tag{8.5}$$

Это соотношение показывает, что при неограниченном росте дисперсии σ^2 функции $f_1(g^t(x))$, $f_2(x)$ становятся в среднем статистически независимыми: интеграл от произведения равен произведению интегралов.

Теоремы 5–7 отличаются от классических эргодических теорем тем, что усреднение по времени заменяется усреднением по параметру ω с некоторой плотностью. При этом результат усреднения в пределе не зависти от плотности распределения.

С теоремами 5–7 тесно связан *метод суммирования* S_h: будем говорить, что

$$f(t) \to \overline{f} \quad (S_h)$$

при $t \to \infty$, если

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\omega) f(\omega t)\, d\omega = \overline{f}.$$

Так как интеграл слева равен

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t}\, h\Big(\frac{\alpha}{t}\Big) f(\alpha)\, d\alpha,$$

то S_h является частным видом линейных методов суммирования с ядром $h(\alpha/t)/t$, где t является параметром. Относительно теории таких методов см., например, [73]. В частности, все такие методы регулярны: если $f(t) \to \overline{f}$ в обычном смысле, то $f(t) \to f\ (S_h)$. Если же h является пределом равномерно сходящейся последовательности кусочно-постоянных функций, то метод S_h включает метод Чезаро.

Назовем функцию $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ кусочно-постоянной, если для некоторой конечной системы интервалов

$$(\omega_j,\, \omega_{j+1}), \quad j = 1,\, \ldots,\, N, \quad \omega_1 = -\infty, \quad \omega_{N+1} = +\infty$$

имеем $\varphi|_{(\omega_j,\, \omega_{j+1})} = c_j = \mathrm{const}$. Значения φ в точках $\omega_2, \ldots, \omega_N$ произвольные.

Согласно сделанному выше замечанию, теоремы 1–3 верны, если $h(\omega)$ — кусочно-постоянная функция. Поэтому для их доказательства достаточно приблизить h такими функциями. Точнее, рассмотрим кусочно-постоянную функцию h_ε такую, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(\omega) - h_\varepsilon(\omega)|\, d\omega < \varepsilon. \tag{8.6}$$

Функция h_ε, очевидно, финитна.

1. Теорема 5 следует из оценки

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\omega) f(g^{\omega t}(x))\, d\omega - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(\omega) f(g^{\omega t}(x))\, d\omega \right| < \varepsilon \sup |f|.$$

2. Рассмотрим случай произвольной $f \in L_1(M,\, \mu)$. Как уже было отмечено, интеграл

$$a(x,\, t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(\omega) f(g^{\omega t}(x))\, d\omega$$

сходится при $t \to \infty$ почти всюду к

$$a(x,\, \infty) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(\omega)\, d\omega \overline{f}(x).$$

Покажем, что указанная сходимость имеет место и в среднем. Действительно, из сходимости

$$a(x,\, t) \to a(x,\, \infty) \tag{8.7}$$

почти всюду следует сходимость по мере. Так что для любых $\varepsilon_1,\, \varepsilon_2 > 0$ найдется $T > 0$ такое, что при $t > T$ мера множества

$$M_{\varepsilon_1} = \{x \in M : |a(x,\, t) - a(x,\, \infty)| > \varepsilon_1\}$$

не превосходит ε_2:

$$\mu(M_{\varepsilon_1}) \leqslant \varepsilon_2.$$

Предположим, что сходимости (8.7) в среднем нет. Тогда

$$\int\limits_M |a(x,\, t) - a(x,\, \omega)|\, d\mu(x) = \left(\int\limits_{M \setminus M_{\varepsilon_1}} + \int\limits_{M_{\varepsilon_1}} |a(x,\, t) - a(x,\, \omega)|\, d\mu(x)\right)$$

не сходится. Так как первый интеграл в правой части не превосходит $\varepsilon_2 \mu(M)$, то нет сходимости интеграла

$$\int\limits_{M_{\varepsilon_1}} |a(x,\, t) - a(x,\, \omega)|\, d\mu(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon_1 \to 0, \quad t \to \infty,$$

а следовательно (т. к. $a(x,\, \infty) \in L_1(M,\, \mu)$), нет и сходимости

$$B = \int\limits_{M_{\varepsilon_1}} a(x,\, t)\, d\mu(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon_1 \to 0, \quad t \to \infty. \tag{8.8}$$

Далее имеем:

$$0=\int\limits_M a(x,\,t)\,d\mu(x)-\int\limits_M a(x,\,\infty)\,d\mu(x)=B+B_1+B_2,$$

$$B_1=-\int\limits_{M_{\varepsilon_1}} a(x,\,\infty)\,d\mu(x),$$

$$B_2=-\int\limits_{M\setminus M_{\varepsilon_1}} (a(x,\,t)-a(x,\,\infty))\,d\mu(x).$$

Получаем противоречие, так как B_1 и B_2 сходятся к нулю при $\varepsilon_1\to 0$, $t\to\infty$. Теорема 6 доказана.

3. Теорема 7 является частным случаем теоремы 3 настоящей главы. Для того, чтобы это показать, заменим исходное уравнение (8.1) следующей системой вида (3.1):

$$\dot x=\omega v(x),\quad \dot\omega=0. \tag{8.9}$$

Система (8.9) будет φ_ω-однородной степени $k=1$ и $g^t_\omega=g^{\omega t}$. После этого остается положить в теореме 3 $f'=\sqrt{h}\,f_1$, $f''=\sqrt{h}\,f_2$.

Мы дадим сейчас *непосредственное* доказательство теоремы 7, не использующее формулу Стоуна.

Пусть $(\,,)$ — скалярное произведение в $L_2(M,\,\mu)$ и $||\cdot||$ — соответствующая норма. С учетом изометричности семейства операторов U^s : $L_2(M,\,\mu)\to L_2(M,\,\mu)$, $U^s f=f\circ g^s$ имеем

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\omega)(U^{\omega t}f_1,\,f_2)\,d\omega-\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(\omega)(U^{\omega t}f_1,\,f_2)\,d\omega\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|h-h_\varepsilon|\,d\omega\,||f_1||\,||f_2||\leqslant\varepsilon||f_1||\,||f_2||.$$

Таким образом достаточно установить сходимость интегралов

$$J_k(t)=\int\limits_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} h_\varepsilon(\omega)(U^{\omega t}f_1,\,f_2)\,d\omega,$$

где $(\omega_k,\,\omega_{k+1})$ — интервал постоянства функции h_ε.

По эргодической теореме фон Неймана [53]

$$J_k(t) = \frac{c_k}{t} \int\limits_{\omega_k t}^{\omega_{k+1} t} (U^s f_1,\, f_2)\, ds \to c_k(\omega_{k+1} - \omega_k)(\overline{f}_1,\, f_2)$$

при $t \to \infty$. Остается заметить, что

$$\sum_1^N c_k(\omega_{k+1} - \omega_k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(\omega)\, d\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\omega)\, d\omega + \delta,$$

причем $|\delta| \leqslant \varepsilon$. Что и требовалось.

Выведем теперь из теоремы 7 основную лемму из § 6. Тем самым мы дадим другое доказательство теоремы 3 — основного результата настоящей главы.

Положим $A_0 = A' \cap A''$, $I_0 = I' \cap I''$. Пусть $\chi_o : \Lambda \times I \to \mathbb{R}$ — характеристическая функция (индикатор) измеримого множества $A_0 \times I_0$, а $\widetilde{\chi}_0 : \Lambda \to \mathbb{R}$ — характеристическая функция множества A_0. Ясно, что

$$J(t) = \int\limits_{I_0} (U_*^{\alpha(\omega)t} \widetilde{\chi}_0,\, \widetilde{\chi}_0)\, d\sigma.$$

Пусть $D_\gamma = \{\omega \in I_0 : |\alpha'(\omega)| > \gamma\}$, $\alpha' = d\alpha/d\omega$. Согласно предположению, критические точки функции $\omega \mapsto \alpha(\omega)$ изолированы. Следовательно, σ-мера множества $I \setminus D_\gamma$ стремится к нулю при $\gamma \to 0$. Более того, можно считать, что D_γ — объединение конечного числа интервалов. Пусть $(\omega_1,\, \omega_2)$ — один из интервалов, составляющих D_γ. Тогда α можно считать координатой на $(\omega_1,\, \omega_2)$. Действительно, функция $\omega(\alpha)$, обратная к $\alpha : (\omega_1,\, \omega_2) \to \mathbb{R}$, существует и является гладкой. Согласно условиям теоремы 3 функция $\omega \mapsto h(\omega)$ интегрируема: $h \in L_1(I,\, d\omega)$. Таким образом

$$\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} (U_*^{\alpha(\omega)t} \widetilde{\chi}_0,\, \widetilde{\chi}_0) h(\omega)\, d\omega = \int\limits_{\alpha(\omega_1)}^{\alpha(\omega_2)} (U_*^{\alpha t} \widetilde{\chi}_0,\, \widetilde{\chi}_0) h(\omega(\alpha)) \omega'(\alpha)\, d\alpha. \tag{8.10}$$

Так как $h(\omega(\alpha))\omega'(\alpha) \in L_1((\alpha(\omega_1),\, \alpha(\omega_2)),\, d\alpha)$, то согласно теореме 7 интеграл (8.10) имеет предел при $t \to \infty$.

Лемма полностью доказана.

§ 9. Плотность распределения в конфигурационном пространстве

Пусть $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — компактное конфигурационное пространство (возможно с краем) механической системы с n степенями свободы. Фазовое пространство Γ —- кокасательное расслоение M ($\Gamma = T^*M$). Будем рассматривать движение по инерции; так что функция Гамильтона сводится к кинетической энергии:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}(x) y_i y_j.$$

Если траектория выходит на границу пространства M, то происходит упругое отражение от границы. Примером служит не только динамика частицы газа в сосуде как бесстолкновительной среды, но и газ Больцмана – Гиббса. Пусть μ — мера Лиувилля на Γ: $d\mu = d^n x\, d^n y$.

Пусть $\rho : \Gamma \to \mathbb{R}$ — суммируемая по Лебегу функция (из $L_1(\Gamma, \mu)$), а функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$ ограничена и измерима. Функцию φ можно продолжить до измеримой функции $\widetilde{\varphi} : \Gamma \to \mathbb{R}$ по правилу: $\widetilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x)$ для всех y.

Обозначим для краткости письма $z = (x, y)$. Пусть, как обычно, $\{g^t\}$ — фазовый поток системы (поскольку мы рассматриваем движение по инерции, то $\{g^t\}$ будет геодезическим потоком на M). Положим

$$k(t) = \int\limits_{\Gamma} \rho(g^{-t}(z)) \widetilde{\varphi}(z)\, d\mu. \tag{9.1}$$

Так как функция $z \mapsto \rho(g^{-t}(z))$ интегрируема при всех t, а $\widetilde{\varphi}$ ограничена и измерима, то интеграл (9.1) корректно определен. Если φ — характеристическая функция некоторой измеримой области $\Phi \subset M$, то $k(t)$ — доля гамильтоновых систем из ансамбля Гиббса, находящихся в момент времени t в области Φ.

Положим

$$\Gamma_c = \{z \in \Gamma : H(z) \leqslant c\}, \quad c = \mathrm{const} > 0.$$

Поскольку M компактно, а функция Гамильтона положительно определена по импульсам, то Γ_c компактно вложено в Γ при всех $c > 0$.

Теорема 8. *Пусть ограничение плотности ρ на Γ_c при всех $c > 0$ интегрируемо со своим квадратом (из $L_2(\Gamma_c,\, \mu)$). Тогда*

$$\lim_{t\to\pm\infty} k(t) = \int\limits_{\Gamma} \overline{\rho}\varphi\, d\mu,$$

где $\overline{\rho}$ — биркгофовское среднее функции ρ.

Доказательство. Оценим сначала разность

$$\left|k(t) - \int\limits_{\Gamma} \overline{\rho}\varphi\, d\mu\right| \leqslant \left|\int\limits_{\Gamma} \rho_t\varphi\, d\mu - \int\limits_{\Gamma_c} \rho_t\varphi\, d\mu\right| + \\ + \left|\int\limits_{\Gamma_c} \rho_t\varphi\, d\mu - \int\limits_{\Gamma_c} \overline{\rho}\varphi\, d\mu\right| + \left|\int\limits_{\Gamma_c} \overline{\rho}\varphi\, d\mu - \int\limits_{\Gamma} \rho\varphi\, d\mu\right|. \quad (9.2)$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю при $c\to\infty$ равномерно по t. Действительно,

$$\left|\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_c} \rho_t\varphi\, d\mu\right| \leqslant C \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_c} \rho_t\, d\mu = C \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_c} \rho\, d\mu \to 0$$

при $c\to\infty$ ввиду интегрируемости ρ; здесь $C = \sup_M |\varphi|$. Аналогично доказывается, что третье слагаемое в (9.2) стремится к нулю при неограниченном возрастании c. По теореме 3 при каждом фиксированном значении $c > 0$ второе слагаемое стремится к нулю при $t\to\pm\infty$ (поскольку ρ и $\widetilde{\varphi}$ из $L_2(\Gamma_c,\, \mu)$; вторая ввиду ограниченности).

Итак, сначала выберем достаточно большое c, чтобы первое и третье слагаемые были меньше $\varepsilon/3$. Затем для этого значения c при $t > T(\varepsilon)$ второе слагаемое будет также меньше $\varepsilon/3$. Что и требовалось.

Из теоремы выводится ряд важных следствий.

Следствие 1. *Предположим, что поток $\{g^t\}$ эргодический. Тогда гамильтоновы системы распределены на конфигурационном пространстве $M^n = \{x\}$ с плотностью*

$$(\det A)^{-\frac{1}{2}}\, d^n x \Bigg/ \int\limits_{M} (\det A)^{-\frac{1}{2}}\, d^n x, \quad A = ||a_{ij}(x)||. \quad (9.3)$$

Эта плотность является элементом объема на n-мерном римановом многообразии M, метрика которого порождается кинетической энергией системы.

Действительно, пусть φ — характеристическая функция измеримой области Φ на M. Виду эргодичности, $\overline{\rho}$ — функция от энергии

$$H = (Ay,\, y)/2.$$

С помощью линейного преобразования $y = C(x)p$ приведем эту положительно определенную квадратичную форму к сумме квадратов:

$$H = (C^T ACp,\, p)/2 = (p,\, p)/2; \quad C^T AC = E,$$

где E — единичная $n \times n$-матрица. Тогда (по правилу замены переменных в кратных интегралах)

$$\int\limits_\Gamma \overline{\rho}(H)\varphi\, d^n x\, d^n y = \int\limits_\Gamma \overline{\rho}(p^2/2)\varphi(\det A)^{-\frac{1}{2}}\, d^n p\, d^n x = \\ = \alpha \int\limits_\Phi (\det A)^{-\frac{1}{2}}\, d^n x, \quad \alpha = \mathrm{const}.$$

Что и требовалось.

Рассмотрим теперь случай, наиболее интересный с точки зрения приложений: M — подобласть в $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой, а H — квадратичная форма по импульсам с постоянными коэффициентами. В частности, плотность распределения (9.3) постоянна.

Следствие 2. *Гамильтоновы системы равномерно распределены в M при $t \to \pm\infty$ тогда и только тогда, когда биркгофовское среднее $\overline{\rho}$ не зависити от точки $x \in M$.*

Более точно, последнее условие надо понимать так, что найдется функция $\overline{\rho}'$, не зависящая от x и почти всюду совпадающая с $\overline{\rho}$. Это замечание существенно уже для вполне интегрируемых систем. Например, если M — это прямоугольный параллелепипед, то биркгофовское среднее $\overline{\rho}$, как правило, непостоянно на резонансных торах. Однако, множество таких торов имеет нулевую меру Лебега (см. § 8 гл. I).

Указанному критерию равномерной распределенности удовлетворяют не только эргодические системы, но и некоторые интегрируемые. Примеры последних указаны в §§ 8–9 главы I.

В заключение сделаем одно замечание о внешнем трении. Вернемся к задаче о сопротивлении обтеканию тел, которая была рассмотрена нами в § 9 гл. I. Поместим в полосу $x \bmod l$, $|y| \leqslant d$ (l, $d = \mathrm{const} > 0$) плоское тело со *строго* выпуклой кусочно-гладкой границей (рис. 17). Оказывается, в этом случае суммарный импульс газа $p(t)$ вдоль оси x стремится к нулю при неограниченном возрастании времени. Таким образом, такое тело *полностью* тормозит поток газа. Действительно, соответствующий биллиард будет рассеивающим. Поэтому предельная плотность $\overline{\rho}$ есть функция лишь полной энергии $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$. Поэтому двойной интеграл (9.3) из главы I обращается в нуль ввиду нечетности подынтегральной функции относительно $\dot{x}$.

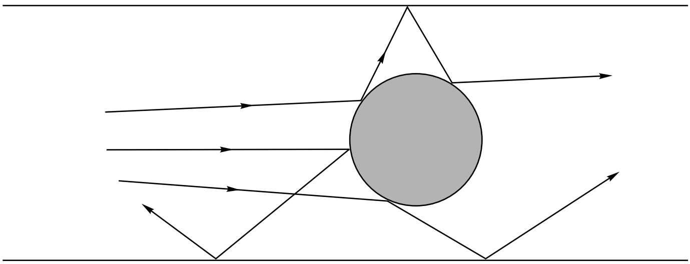

Рис. 17. Обтекание выпуклого тела

Сохранится ли результат о полном торможении газа, если опустить условие выпуклости тела-препятствия?

Глава III

Неканонические распределения вероятностей

§ 1. Распределения, зависящие от энергии

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — обобщенные координаты, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — сопряженные канонические импульсы гамильтоновой системы с n степенями свободы и стационарным гамильтонианом $H(x, y, \lambda)$, где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — некоторые параметры. Согласно Гиббсу, при статистическом рассмотрении гамильтоновых систем ключевую роль играет распределение вероятностей с плотностью

$$\rho = c \exp(-\beta H), \tag{1.1}$$

где $c = \mathrm{const} > 0$, $\beta = 1/k\tau$ (τ — абсолютная температура, k — постоянная Больцмана). Постоянная c выбирается из условия нормировки плотности ρ.

Имея инвариантную меру с плотностью (1.1), можно ввести среднюю энергию

$$E(\beta, \lambda) = \int H\rho \, d^n x \, d^n y, \tag{1.2}$$

а также усреднить обобщенные силы (реакции связей $\lambda = \mathrm{const}$), отвечающие параметрам λ:

$$\Lambda_i = -\int \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \rho \, d^n x \, d^n y, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{1.3}$$

Соотношения $\Lambda_i = f_i(\beta, \lambda)$ рассматриваются как уравнения состояния.

Как показал Гиббс, 1-форма притока тепла

$$\omega = dE + \sum_1^m \Lambda_i \, d\lambda_i \tag{1.4}$$

удовлетворяет аксиомам термодинамики: ω замкнута при фиксированном значении β (I-ое начало) и 1-форма $\beta\omega$ также замкнута (II-ое начало). Таким образом, по Гиббсу, каждой гамильтоновой системе (конечно, при условии, что интегралы (2) и (3) существуют и гладко зависят от λ и β) можно сопоставить термодинамическую систему с внутренней энергией (1.2) и уравнениями состояния (1.3).

Эта идея Гиббса оказалась очень плодотворной и была развита во многих направлениях. Сам Гиббс специально не занимался обоснованием канонического распределения (1.1), отметив лишь его естественность и полезность для целей термодинамики. Однако впоследствии этот вопрос стал одной из центральных проблем статистической механики. Считается, что распределение Гиббса асимптотически (при $n \to \infty$) может быть выведено из общих принципов механики в предположении эргодичности системы (см. [75]). Однако строгого вывода, кроме случая исчезающего взаимодействия, до сих пор нет. Кроме того, доказательство эргодичности конкретных динамических систем, интересных с точки зрения статистической механики, — задача очень трудная и почти безнадежная (пока ее не удалось решить в полном объеме даже для простых систем, например, для газа Больцмана–Гиббса в кубе [93]). Более того, для многих важных систем свойство эргодичности отсутствует ввиду результатов КАМ-теории. В [82] распределение (1.1) было получено без привлечения эргодической гипотезы и при фиксированном $n \geqslant 2$; вместо этого использовалась гипотеза Гиббса о тепловом равновесии системы при исчезающем взаимодействии (см. главу IV).

В силу сказанного многие авторы предпочитают попросту постулировать каноническое распределение Гиббса. Наша ближайшая цель — предложить рациональный подход к выводу канонического распределения для систем общего вида в русле идей самого Гиббса.

Как известно, плотность распределения вероятностей $\rho(x, y)$ — первый интеграл системы с гамильтонианом H. В физической литературе (см., например, [32]) распространена точка зрения, что этого свойства явно недостаточно для изучения распределения вероятностей ввиду массивности пространства первых интегралов: плотность ρ — произвольная функция от $2n - 1$ независимых интегралов гамильтоновой системы с n степенями свободы. Однако этот результат носит сугубо *локальный* характер ($2n - 1$ независимых интегралов существуют лишь в малой окрестности неособой точки) и не имеет прямого отношения к рассматриваемой задаче. Дело в том, что как отметил еще Гиббс, плотность $\rho \geqslant 0$ является *однозначной* функцией, определенной во всем фазовом пространстве ([22], с. 375). Оказывается, это обстоятельство сильно сужает класс первых интегралов. Согласно современной точке зрения, идущей от Пуанкаре [56], типичная гамильтонова система вообще не допускает глобальных интегралов, независимых от интеграла энергии H. Обзор строгих результатов в этом направлении содержится в книге [40]. Наиболее полно изучены условия существования дополнительных аналитических интегралов (особенно при $n = 2$).

Согласно КАМ-теории, гамильтоновы системы с двумя степенями свободы, мало отличающиеся от вполне интегрируемых, имеют дополнительный непостоянный непрерывный интеграл, хотя в общем случае не допускают новых аналитических интегралов. Считается, что, напротив, в многомерных системах (когда $n \geqslant 3$), наиболее интересных с точки зрения статистической механики, нет даже дополнительных непрерывных интегралов [5]. Это — одна из точных формулировок гипотезы о диффузии в многомерных гамильтоновых системах.

Задача о несуществовании дополнительного интеграла системы уравнений Гамильтона, конечно, много проще задачи об ее эргодичности на многообразиях уровня интеграла энергии.

Предположим, что гамильтонова система с гамильтонианом H не допускает дополнительных интегралов. Тогда плотность распределения вероятностей ρ — функция от H. Спрашивается, каким образом распределение Гиббса (1.1) выделяется из всех распределений этого вида?

Пусть $z \mapsto f(z)$ — неотрицательная вещественная функция одной переменной, f' — ее производная. Следуя Гиббсу, рассмотрим плотность вероятности

$$\rho = \frac{f(\beta H)}{\int f(\beta H)\, dx\, dy} \tag{1.5}$$

в предположении сходимости интеграла по всему фазовому пространству. Здесь снова $\beta^{-1} = k\tau$. При $f = e^{-z}$ получаем распределение Гиббса.

Вычисляем среднюю энергию E и обобщенные силы Λ_i по формулам (1.2) и (1.3), где плотность ρ определяется (1.5). После этого можно составить 1-форму притока тепла ω согласно (1.4).

Теорема 1. *Форма ω удовлетворяет I-му началу термодинамики тогда и только тогда, когда*

$$\int \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}\, f\, dx\, dy \int \frac{\partial H}{\partial \lambda_j}\, f'\, dx\, dy = \int \frac{\partial H}{\partial \lambda_j}\, f\, dx\, dy \int \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} f'\, dx\, dy \tag{1.6}$$

для всех $1 \leqslant i,\ j \leqslant m$, а II-му началу, когда дополнительно

$$\int H f\, dx\, dy \int \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}\, f'\, dx\, dy = \int \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}\, f\, dx\, dy \int H f'\, dx\, dy \tag{1.7}$$

для всех $1 \leqslant i \leqslant m$.

Доказательство основано на прямых вычислениях. Если термодинамическая система имеет одну степень свободы ($m = 1$), то надо проверять только одно условие (1.7). Для функции $f(z) = e^{-z}$ условия (1.6) и (1.7), очевидно, выполнены. Последнее замечание допускает обращение. Справедлива

Теорема 2. *Пусть функция f фиксирована, а равенства* (1.6) *и* (1.7) *справедливы для всех гладких гамильтонианов $H(x, y, \lambda)$* (*в предположении сходимости интегралов из* (1.6) *и* (1.7)). *Тогда $f(z) = e^{-cz}$, $c = \text{const}$.*

Таким образом, каноническое распределение Гиббса является единственным «универсальным» распределением, плотность которого зависит от энергии и которое совместимо с аксиомами термодинамики. Постоянную c можно положить равной единице, заменив постоянную Больцмана k на k/c. Теорема 2 доказывается с использованием *основной леммы* вариационного исчисления.

Имеется важный класс гамильтонианов, для которых равенства (1.6) и (1.7) заведомо выполнены: $H = \Phi(x, y)\Psi(\lambda)$. В этом случае усреднение по мере (1.5) с любой функцией f приводит к 1-форме притока тепла, удовлетворяющей аксиомам термодинамики. Правда, уравнения состояния будут зависеть от выбора функции f.

Пример. Рассмотрим движение по инерции точки единичной массы, подвешенной на нити длины λ. Ее динамика определяется гамильтонианом $H = y^2/2\lambda^2$. Средняя энергия и среднее значение натяжения нити (назовем это давлением и обозначим p) задаются формулами

$$E = \frac{b}{2a\beta}, \quad p = \frac{b}{a\lambda\beta}, \tag{1.8}$$

где

$$a = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{z^2}{2}\Big)\,dz, \quad b = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z^2 f\Big(\frac{z^2}{2}\Big)\,dz.$$

Уравнения состояния (1.8) по форме совпадает с уравнением состояния идеального газа: $p\lambda = \varkappa\tau$ ($\varkappa = b/ka = \text{const}$). Для распределения Гиббса ($f = e^{-z}$) $a = b$. Справедливость этого интегрального тождества легко проверяется интегрированием по частям.

Не следует думать, что уравнение Клапейрона $p\lambda = k\tau$ справедливо лишь для распределения Гиббса. Это не так и вот простой пример:

$f(x) = xe^{-3x}$. Здесь снова $a = b$. Стоит отметить, что $f(\beta H) \geqslant 0$, если, конечно, $\beta > 0$.

Напомним в заключение, что для распределения Гиббса (1.1) формулы (1.2) и (1.3) можно представить в следующем виде

$$E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad \Lambda_i = \frac{1}{\beta}\,\frac{\partial \ln Z}{\partial \lambda_i}, \tag{1.9}$$

где

$$Z(\beta,\, \lambda) = \int\limits_{\Gamma} e^{-\beta H}\, d^n x\, d^n y \tag{1.10}$$

— *статистический интеграл*. Ясно, что $\beta\omega = dS$, где энтропия вычисляется по формуле

$$S = \ln Z - \beta\,\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \tag{1.11}$$

имеющий прямое отношение к *преобразованию Лежандра*.

§ 2. Термодинамика биллиардов

Биллиард — это материальная частица, совершающая движение по инерции в области D трехмерного евклидова пространства и упруго отражающаяся от ее границы ∂D. Можно рассматривать более общий случай, когда имеется n идентичных частиц в области D, которые не взаимодействуют между собой (в частности, они не сталкиваются друг с другом). Такая система является признанной моделью разреженного идеального газа.

Пусть $q_i = (x_i,\, y_i,\, z_i)$ — набор декартовых координат i-ой частицы единичной массы с импульсом $p_i = (\dot{x}_i,\, \dot{y}_i,\, \dot{z}_i)$. Динамика системы частиц в области D определяется гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

Так как эта функция не содержит какой-либо информации о геометрии области D, соотношения (1.2) и (1.3) неприменимы непосредственно. В этом случае можно воспользоваться следующим приемом: вначале вычисляем статистический интеграл (1.10), а затем используем соотношения (1.9).

Ясно, что

$$Z = \int\limits_{\mathbb{R}^{3n}} \int\limits_{D^n} e^{-\beta H}\, d^3p_1 \ldots d^3p_n\, d^3q_1 \ldots d^3q_n = \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{\frac{3n}{2}} v^n, \qquad (2.1)$$

где v — объем области D. Таким образом, единственным внешним параметром λ служит объем v, а сопряженная переменная Λ — давление p газа внутри области D. Учитывая (2.1), из (1.9) получаем хорошо известные уравнения идеального газа

$$E = \frac{3}{2}\, k\tau, \quad p = \frac{nk\tau}{v}. \qquad (2.2)$$

Биллиарды, будучи системами с односторонними связями, являются идеализацией обычных механических систем с гладкими гамильтонианами. Когда частица ударяется в стенку сосуда, стенка деформируется и при этом возникает большая упругая сила, которая толкает частицу обратно внутрь области D. Эта упругая сила моделируется потенциалом $V_\nu(q)$: он равен нулю в D и $\nu f^2(q)/2$ вне D. Здесь f — гладкая функция, которая задает уравнение границы ∂D: $f(q) = 0$. Большой постоянный множитель ν играет роль коэффициента упругости. Предполагается, что граница не содержит критических точек функции f; в частности, граница ∂D есть гладкая регулярная поверхность. Как показано в [45], при $\nu \to \infty$ решения канонических уравнений Гамильтона с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2} + V_\nu(q) \qquad (2.3)$$

стремятся к движениям системы с упругими отражениями в области D.

Применение гамильтониана (2.3) дает поправки в выражение для статистического интеграла, которые зависят от площади σ границы области D. Таким образом, площадь σ следует также рассматривать в качестве внешнего параметра идеального газа как термодинамической системы; давление будет функцией не только объема и температуры, но также и площади поверхности сосуда.

Суть поправки заключается в том, что объем v в (2.1) заменяется на

$$v + \sqrt{\frac{\pi}{2\nu\beta}}\,\sigma + O\left(\nu^{-\frac{3}{2}}\right) \qquad (2.4)$$

при условии, что функция f не имеет критических точек вне области D. С учетом этого факта выражение для внутренней энергии E остается тем же самым, а уравнение состояния (2.2) заменяется уравнением

$$p = \frac{nk\tau}{v + \sqrt{\varkappa\tau}\,\sigma}, \quad \varkappa = \frac{\pi k}{2\nu}. \tag{2.5}$$

Поскольку σ — новый термодинамический параметр, мы должны ввести сопряженную переменную

$$\eta = \frac{1}{\beta}\,\frac{\partial \ln Z}{\partial \sigma} = \frac{nk\tau\sqrt{\varkappa\tau}}{v + \sqrt{\varkappa\tau}\,\sigma}. \tag{2.6}$$

Соотношения (2.5) и (2.6) составляют полную систему уравнений состояния.

Укажем вывод формулы (2.4). Для этого используем очевидное соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-\beta V_\nu}\,d^3q = v + \int\limits_{f\geqslant 0} e^{-\frac{\beta\nu f^2}{2}}\,d^3q.$$

В соответствие с методом седловой точки, основной вклад в асимптотику второго интеграла при $\nu \to \infty$ дают критические точки потенциала V_ν. Согласно предположению, $df \neq 0$ при $f > 0$. Следовательно, множество критических точек совпадает с границей $\partial D = \{f = 0\}$. Неизолированность критических точек приводит к некоторым затруднениям при использовании метода седловой точки. Введем (локально) в окрестности границы *полугеодезические координаты* u_1, u_2, u_3, где $u_1 \equiv f$ [58]. В этих переменных евклидова метрика имеет вид

$$du_1^2 + a\,du_2^2 + 2b\,du_2\,du_3 + c\,du_3^2,$$

где a, b, c — гладкие функции от u_s. Рассматриваемый интеграл имеет ту же асимптотику, что и интеграл

$$\int\limits_{u_1\geqslant 0} g(u_1)e^{-\frac{\beta\nu u_1^2}{2}}\,du_1, \tag{2.7}$$

где

$$g = \iint\limits_{\partial D} \sqrt{G}\,du_2\,du_3, \quad G = ac - b^2 > 0.$$

После этого с использованием стандартного метода [15], мы получаем асимптотику интеграла (2.7)

$$g(0)\sqrt{\frac{\pi}{2\nu\beta}} + O\left(\nu^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Остается заметить, что $g(0) = \sigma$.

§ 3. Классы распределения вероятностей

Общепринятый строгий вывод канонического распределения Гиббса развит только для случая исчезающего взаимодействия индивидуальных подсистем. Классический метод Дарвина–Фаулера дает асимптотический (при $n \to \infty$) вывод распределения Гиббса из общих принципов динамики в предположении о справедливости эргодической гипотезы. Как заметил Хинчин [75], этот подход фактически повторяет более ранние математические результаты, связанные с предельными теоремами теории вероятностей.

Мы предлагаем другой подход к выводу распределения (1.1). Он основан на том обстоятельстве, что плотность распределения вероятностей гамильтоновых систем является *однозначным* первым интегралом. С помощью метода Пуанкаре выводятся условия, при которых уравнения движения взаимодействующих подсистем не допускают интегралов из классов гладкости C^2, независящих от интеграла энергии. Эти условия конструктивные и, очевидно, менее обременительные, чем предположение об эргодичности. Кроме этого используется естественный постулат Гиббса о сохранении теплового равновесия подсистем при исчезающем взаимодействии. Подробнее об этом в главе IV.

Статистическим аналогом нашего подхода служит вывод нормального распределения, предложенный Гауссом. Он не использует центральную предельную теорему, а постулат о том, что выборочное среднее является оценкой максимума правдоподобия для конечного числа испытаний $n \geqslant 3$ (см. [29, 68]). Другими словами, если дано некоторые число одинаково хороших прямых наблюдений неизвестной величины, то наиболее вероятным ее значением является их среднее арифметическое.

В связи со сказанным выше, полезно ввести иерархию гамильтоновых динамических систем в соответствии со степенью их *неинтегрируемого* (хаотического) поведения. Зафиксируем фазовое пространство Γ размерности $2n \geqslant 4$ со структурой аналитического многообразия и введем в рассмотрение множество $\mathscr{H}$ гамильтоновых систем на Γ с аналитическими гамильтонианами. Конечно, предполагается, что свойство гамильтониана быть аналитической функцией на Γ согласовано с аналитической структурой самого Γ.

Мы вводим последовательность вложенных друг в друга подмножеств $\mathscr{H}$:

$$\mathscr{M} \subset \mathscr{E} \subset \mathscr{T} \subset \mathscr{K}^{\circ} \subset \mathscr{K}^{1} \subset \ldots \subset \mathscr{K}^{\infty} \subset \mathscr{A}. \tag{3.1}$$

Здесь $\mathscr{M}$, $\mathscr{E}$ и $\mathscr{T}$ обозначают множества систем, которые соответственно обладают свойствами *перемешивания*, *эргодичности* и *транзитивности* на $(2n-1)$-мерных энергетических многообразиях. Далее, $\mathscr{K}^{s}$ — это множество систем, которые не допускают первых интегралов из класса гладкости $C^{s}(\Gamma)$, независящих от интеграла энергии. При этом случай $s = 0$ отвечает непрерывным интегралам: они локально непостоянны на поверхностях уровня интеграла энергии и принимают постоянные значения на траекториях гамильтоновых систем. Символ $\mathscr{A}$ обозначает гамильтоновы системы, которые не допускают дополнительных аналитических интегралов.

Аналогично вводится цепочка вложенных друг в друга множеств для систем с упругими отражениями.

Прежде всего следует убедиться в том, что соседние множества в цепочке (3.1) не совпадают друг с другом. Неравенства $\mathscr{M} \neq \mathscr{E}$, $\mathscr{E} \neq \mathscr{T}$, $\mathscr{T} \neq \mathscr{K}^{\circ}$ проще всего продемонстрировать на примере сохраняющего площадь автоморфизме T двумерного тора $\mathbb{T}^2 = \{x, y \bmod 2\pi\}$. Такой автоморфизм можно трактовать как отображение Пуанкаре сечения уровня энергии гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Классический пример перемешивающего преобразования — линейный автоморфизм тора, задаваемый унимодулярной матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг $x \mapsto x + a$, $y \mapsto y + b$, где числа a, b и 2π рационально несоизмеримы, дает нам известный пример эргодического, но не перемешивающего преобразования. Таким образом, $\mathscr{M} \neq \mathscr{E}$. Значительно сложнее привести пример транзитивного, но не эргодического преобразования с инвариантной мерой. Напомним, что свойство транзитивности предполагает наличие хотя бы одной всюду плотной траектории. С другой стороны, у эргодического преобразования *почти все* траектории всюду плотны. Первые примеры таких преобразований указаны в работах Л. Г. Шнирельмана (1930) и А. Безиковича (1937). Они рассматривали непрерывные автоморфизмы круга. Гладкие модификации таких преобразований указаны в [62].

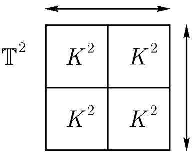

Рис. 18. К доказательству неравенства $\mathscr{T} \neq \mathscr{K}^\circ$.

Чтобы доказать неравенство $\mathscr{T} \neq \mathscr{K}^\circ$, мы воспользуемся примером транзитивного сохраняющего площадь преобразования T квадрата K^2, которое оставляет точки границы квадрата неподвижными. Такие примеры построены Окстоби [91] с помощью теории категорий множеств. Возьмем теперь четыре таких квадрата и составим из них один квадрат учетверенной площади (рис. 18). Отождествляя противоположные стороны, мы получим двумерный тор, причем отображение $T : K^2 \to K^2$ естественным образом продолжается до сохраняющего площадь *непрерывного* отображения $T : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. Ясно, что это преобразование тора уже не будет транзитивным: при итерациях отображения T точки тора все время остаются в одном из четырех квадратов. С другой стороны, отображение T не допускает непостоянных непрерывных интегралов (ввиду транзитивности $T : K^2 \to K^2$, непрерывный интеграл будет постоянным на каждом из квадратов; по непрерывности он сводится к константе на всем торе). Было бы интересным привести пример *аналитического* преобразования из класса $\mathscr{K}^\circ \setminus \mathscr{T}$.

Неравенства $\mathscr{K}^s \neq \mathscr{K}^{s+1}$ $(s = 0, 1, \ldots, \infty)$ и $\mathscr{K} \neq \mathscr{A}$ выводятся из результатов [85] (см. также добавление 3), где указаны примеры аналитических гамильтоновых систем, которые имеют дополнительный интеграл класса гладкости $C^s(C^\infty)$, но в то же самое время не допускают интегралов из класса $C^{s+1}(C^\omega)$.

Рассмотрим одно из звеньев цепочки включений (3.1), например, $\mathscr{T} \subset \mathscr{K}^\circ$. Вопрос заключается в следующем: какое из двух множеств $\mathscr{T}$ или $\mathscr{K}^\circ \setminus \mathscr{T}$ является более массивным? По-видимому, второе. Однако ответ на этот вопрос (как и его точная формулировка) зависит от введения топологии в пространстве $\mathscr{K}^\circ$. Аналогичные предположения, вероятно, справедливы для любой пары соседних множеств в (3.1).

Классы гамильтоновых систем из (3.1) можно погрузить в более широкий класс систем, которые не допускают дополнительного *однозначного* *комплексно-аналитического* первого интеграла. Препятствием к существованию однозначных голоморфных первых интегралов является *ветвление* решений гамильтоновых систем в плоскости комплексного времени. Обсуждение этого круга вопросов можно найти в книге [40] (а также в добавлении 4).

Если мы остаемся в рамках вещественного анализа, то класс $\mathscr{A}$ допускает естественное расширение для динамики натуральных механических систем. Последние описываются гамильтонианами вида $H = T+V$, где T — кинетическая энергия (положительно определенная квадратичная форма относительно импульсов), а V — потенциальная энергия (функция на конфигурационном пространстве). Все известные интегралы таких систем — полиномы по импульсам с однозначными коэффициентами на конфигурационном пространстве (либо функции от таких полиномов). В аналитическом случае эти коэффициенты являются аналитическими функциями. Можно показать, что существование дополнительного полиномиального интеграла системы с гамильтонианом $H = T + V$ эквивалентно существованию интеграла системы с гамильтонианом $H = T + \varepsilon V$ (ε — малый параметр) в виде ряда по степеням ε.

Эта проблема более простая и со времен Пуанкаре развиты эффективные методы ее решения (см. [40]). Условия существования дополнительного полиномиального интеграла плоского биллиарда получены с помощью комплексного анализа в работе [11]. Имеется удивительная связь между степенью *неприводимого* дополнительного полиномиального интеграла и топологией конфигурационного пространства (см. добавление 5).

Вопрос о том, принадлежит ли данная гамильтонова система классу $\mathscr{A}$, является более сложным. Однако и в этом вопросе имеются определенные успехи, особенно в случае малого числа степеней свободы (см. [40]). Трудности нарастают по мере продвижения к началу цепочки (3.1). Так, согласно М. Кацу [30], вопрос о том, какие гамильтонианы порождают эргодические системы, — почти неразрешимая задач. Исключение составляют так называемые *У-системы* (или системы Аносова) с экспоненциально быстрым разбеганием траекторий; они являются системами с перемешиванием (из класса $\mathscr{M}$). Для геодезических потоков на компактных многообразиях соответствующие условия выражаются геометрически в виде условия отрицательности кривизн (см. [1]).

Следует иметь в виду, что во многих случаях, важных с точки зрения приложений, эргодическая гипотеза опровергается результатами КАМ-теории. Например, как установлено Лазуткиным [50], биллиард на плоскости с выпуклой границей C^2-гладкости не эргодичен. Более того, такой биллиард не обладает даже свойством транзитивности. Отсутствие эргодичности в пространственном выпуклом биллиарде доказано в [61] при некоторых дополнительных предположениях. Эти примеры имеют самое прямое отношение к проблеме обоснования распределения Гиббса для идеального газа.

Для малых возмущений интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, колмогоровские торы *делят* трехмерные энергетические поверхности. Следовательно, возмущенные системы не могут быть транзитивными. С другой стороны, как заметил В. И. Арнольд, такие системы допускают непостоянный непрерывный интеграл, который принимает постоянные значения в щелях между колмогоровскими торами. Не совсем ясно, существует ли у таких систем локально непостоянные первые интегралы, которые не тождественно постоянны в каждой окрестности каждой точки трехмерной энергетической поверхности. Более простая задача: допускают ли возмущенные системы общего вида с двумя степеням свободы непостоянные интегралы из класса C^1?

Для систем с $n \geqslant 3$ степенями свободы щель между колмогоровскими торами образует *связное* множество, всюду плотно заполняющее $(2n-1)$-мерное энергетическое многообразие $\{H = \mathrm{const}\}$. В этом случае имеется принципиальная возможность появления свойства транзитивности. Это — одна из точных формулировок известной гипотезы *о диффузии* в возмущенных многомерных гамильтоновых системах (обсуждение см. в [5]). Для целей статистической механики эту гипотезу о диффузии можно сформулировать в более слабой форме: при больших n возмущенная гамильтонова система общего вида не допускает непостоянных непрерывных (или, что даже более слабо, класса C^1) первых интегралов на $(2n-1)$-мерных энергетических поверхностях. Фактически достаточно потребовать, чтобы это свойство появлялось при достаточно малых значениях возмущающего параметра ε и больших значениях n числа слабовзаимодействующих подсистем.

§ 4. Обобщенная энтропия

Обзор описанных в предыдущем параграфе результатов показывает естественность изучения случая, когда плотность распределения вероятностей ρ есть функция от энергии H. Итак, пусть $z \mapsto f(z)$ — неотрицательная вещественная функция одного переменного, f' – ее производная. Следуя § 1, рассмотрим распределение вероятностей в Γ с плотностью

$$\rho = \frac{f(\beta H)}{\int f(\beta H)\, d^n x\, d^n y}. \tag{4.1}$$

Пусть функция f удовлетворяет условиям (1.6) и (1.7) теоремы 1. Тогда усреднение динамических величин по мере с плотностью (4.1) согласовано с аксиомами термодинамики.

Соотношения (1.6) и (1.7) можно представить в следующем виде:

$$\Lambda_i \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = \Lambda_j \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}, \quad (1 \leqslant j,\, j \leqslant m), \tag{4.2}$$

$$\frac{E}{\beta} \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = -\Lambda_i \frac{\partial F}{\partial \beta}, \quad (1 \leqslant i \leqslant m), \tag{4.3}$$

где

$$F = \int\limits_{\Gamma} f(\beta H)\, d^n x\, d^n y.$$

По аналогии с распределением Гиббса, функцию $F(\beta, \lambda)$ можно назвать *обобщенным статистическим интегралом*.

Из (4.2) и (4.3) вытекает существование функции $\varkappa(\beta, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ такой, что

$$\Lambda_i = -\frac{\varkappa}{\beta} \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}, \quad E = \varkappa \frac{\partial F}{\partial \beta}. \tag{4.4}$$

Следовательно, форма притока тепла принимает вид

$$\omega = d\Big(\varkappa \frac{\partial F}{\partial \beta}\Big) - \sum \frac{\varkappa}{\beta} \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}\, d\lambda_i.$$

Аксиомы термодинамики накладывают ограничения на вид функции $\varkappa$:

$$d(\beta\omega) = -d\varkappa \wedge dF = 0.$$

Следовательно, функции $\varkappa$ и F зависимы. Поэтому мы можем записать, что $\varkappa = \varkappa(F)$ (по крайней мере локально).

Пусть Φ — первообразная функции $\varkappa(\cdot)$. Тогда соотношения (4.4) принимают более простой вид

$$\Lambda_i = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i}, \quad E = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}. \tag{4.5}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \beta\omega &= \beta d\Big(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\Big) - \sum \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i}\, d\lambda_i = \\ &= d\Big(\beta\,\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\Big) - \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\, d\beta - \sum \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i}\, d\lambda_i = \\ &= d\Big(\beta\,\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - \Phi\Big). \end{aligned}$$

Функцию

$$S = \beta\,\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - \Phi \tag{4.6}$$

можно назвать *обобщенной энтропией.*

Вид этой функции наводит на мысль применить преобразование Лежандра по переменной β. Мы будем считать E, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ независимыми переменными. Тогда $S = S(E, \lambda)$ и из (4.6) получаем потенциальную форму основных термодинамических соотношений (4.5):

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial E}, \quad \beta\Lambda_i = -\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \quad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

§ 5. Идеальный газ и проблема моментов

Применим соотношения предыдущего параграфа к идеальному газу внутри области D трехмерного евклидова пространства; пусть v — объем области D. Вспомним, что идеальный газ — набор n идентичных и невзаимодействующих частиц, движущихся по инерции внутри области D и упруго отражающихся от ее границы ∂D. Если ввести сколь угодно малое взаимодействие между частицами, то в общем случае мы получим систему без дополнительных интегралов и поэтому можно считать, что плотность распределения вероятностей в слабо возмущенной системе есть функция ее полной энергии. Пусть теперь взаимодействие между частицами стремится к нулю. Тогда после усреднения мы получим простое соотношение для внутренней энергии и уравнение состояния; эти уравнения определяют термодинамику упрощенной системы без взаимодействия — идеального газа.

Примем массу частиц равной единице. Тогда гамильтониан идеального газа будет равен

$$H = \frac{1}{2}\sum p_i^2,$$

где $p_i = (\dot{x}_i,\, \dot{y}_i,\, \dot{z}_i)$ — импульс i-ой частицы; пусть $q_i = (x_i,\, y_i,\, z_i)$ — ее декартовы координаты.

Формула для внутренней энергии имеет вид

$$E = \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^{3n}} \int\limits_{D^n} \frac{1}{2}\sum p_i^2 f\Big(\frac{\beta}{2}\sum p_i^2\Big) d^{3n}p\, d^{3n}q}{\int\limits_{\mathbb{R}^{3n}} \int\limits_{D^n} f\Big(\frac{\beta}{2}\sum p_i^2\Big) d^{3n}p\, d^{3n}q}.$$

Она не зависит от объема v:

$$E(\beta) = \frac{a}{b\beta}, \tag{5.1}$$

где

$$a = \int\limits_{\mathbb{R}^{3n}} \frac{1}{2}\sum u_i^2 f\Big(\frac{1}{2}\sum u_i^2\Big)\, d^{3n}u,$$

$$b = \int\limits_{\mathbb{R}^{3n}} f\Big(\frac{1}{2}\sum u_i^2\Big)\, d^{3n}u.$$

Координаты p и u связаны простым соотношением: $u_i = \sqrt{\beta}\, p_i$.

Полагая для простоты записи $3n = m + 2$, перейдем от переменных $u_1,\, \ldots,\, u_{m+2}$ к сферическим координатам $r,\, u_1,\, \ldots,\, u_m,\, \varphi$ по формулам

$$\begin{aligned}
u_1 &= r\cos\theta_1,\\
u_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
u_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_m &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{m-1}\cos\theta_m,\\
u_{m+1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_m\cos\varphi,\\
u_{m+2} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_m\sin\varphi.
\end{aligned}$$

Здесь $r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta_j \leqslant \pi\ (1 \leqslant j \leqslant m)$ и $\varphi \bmod 2\pi$ — угловая координата. В новых переменных

$$b = \int\limits_0^\infty r^{m+1} f\left(\frac{r^2}{2}\right) dr \times$$
$$\times \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} (\sin\theta_1)^m (\sin\theta_2)^{m-1} \ldots (\sin\theta_m)\, d\theta_1 \ldots d\theta_m\, d\varphi =$$
$$= \frac{2\pi^{1+\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)} \int\limits_0^\infty r^{m+1} f\left(\frac{r^2}{2}\right) dr, \tag{5.2}$$

где Γ — гамма-функция Эйлера. Аналогично,

$$a = \frac{2\pi^{1+\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)} \int\limits_0^\infty \frac{r^{m+3}}{2} f\left(\frac{r^2}{2}\right) dr. \tag{5.3}$$

Вычислим теперь обобщенный статистический интеграл:

$$F = \int\limits_{\mathbb{R}^{3n}} \int\limits_{D^n} f\left(\frac{\beta}{2}\sum p_i^2\right) d^{3n}p\, d^{3n}q = \frac{bv^n}{\left(\sqrt{\beta}\right)^{3n}}. \tag{5.4}$$

В соответствии с (4.4)

$$E = \varkappa \frac{\partial F}{\partial \beta}.$$

Принимая во внимание (5.1) и (5.4), получаем

$$\varkappa = -\frac{2a\left(\sqrt{\beta}\right)^{3n}}{3nb^2v^n}.$$

Используя первое уравнение (4.4), приходим к уравнению состояния

$$\Lambda = -\frac{\varkappa}{\beta}\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{2a}{3bv\beta}.$$

Обозначая давление Λ через p (как это принято в термодинамике), получаем более привычную запись уравнения состояния:

$$pv = \frac{2a}{3b}\,k\tau. \tag{5.5}$$

Теперь положим $f(z) = e^{-z}$. Тогда

$$b = \frac{1}{m+2}\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr^{m+2} = \frac{2a}{m+2}.$$

Следовательно,

$$\frac{a}{b} = \frac{m+2}{2} = \frac{3n}{2}$$

и уравнение состояния (5.5) переходит в классическое уравнение Клапейрона:

$$pv = nk\tau. \tag{5.6}$$

Зададимся следующим вопросом: если уравнения (5.5) и (5.6) совпадают при любом числе частиц n, то порождает ли функция f распределение Гиббса, т. е. $f(z) = ce^{-z}$, $c = \mathrm{const}$? Ответ оказывается отрицательным. Действительно, (5.5) и (5.6) идентичны, если

$$\frac{a}{b} = \frac{3n}{2} = \frac{m+2}{2}, \quad m = 3n - 2 = 1,\, 4,\, 7\,\ldots\,.$$

С учетом (5.2) и (5.3) эти уравнения принимают следующий вид

$$\int_0^\infty r^{m+3} f\left(\frac{r^2}{2}\right)dr = (m+2)\int_0^\infty r^{m+1} f\left(\frac{r^2}{2}\right)dr. \tag{5.7}$$

Пусть f убывает на бесконечности быстрее любой степенной функции. Тогда после интегрирования по частям уравнения (5.7) можно представить в эквивалентной форме:

$$\int_0^\infty \left[f'\left(\frac{r^2}{2}\right) + f\left(\frac{r^2}{2}\right)\right] r^{m+3}\,dr = 0 \tag{5.8}$$

для всех $m + 3 = 3n + 1 = 4, 7, 10 \dots$. Если это соотношение было бы справедливым при всех неотрицательных $m+3$, то (согласно классической *теории моментов* [6]) выражение в квадратных скобках в (5.8) должно тождественно обращаться в нуль. Тогда $f' + f = 0$ и, следовательно, $f = ce^{-z}$, $c = \mathrm{const}$. Однако, (5.8) не обращается в нуль для «большинства» целых значений $m+3$. Отсюда вытекает, что имеется бесконечномерное пространство плотностей распределения вероятностей, зависящих лишь от полной энергии, которые приводят к классическим термодинамическим соотношениям для идеального газа.

§ 6. Неэкспоненциальная атмосфера

Хорошо известно, что плотность столба идеального газа в поле силы тяжести, находящегося в тепловом равновесии, убывает с высотой по экспоненциальному закону:

$$\rho(z) = \rho_0 \exp\Big(-\frac{mgz}{k\tau}\Big). \tag{6.1}$$

Здесь m — масса частиц газа, g — ускорение силы тяжести, k — постоянная Больцмана, τ — абсолютная температура. Предполагается, что при тепловом равновесии температура не зависит от высоты атмосферы. Как замечает по этому поводу Зоммерфельд [27], «метеорологи раньше иногда протестовали против этого утверждения».

Формула (6.1) сразу выводится из условия равновесия идеальной жидкости

$$\operatorname{grad} p = \rho F \tag{6.2}$$

(p — давление, F — плотность внешних сил) с учетом уравнения состояния идеального газа

$$p = \frac{k}{m}\,\rho\tau. \tag{6.3}$$

С другой стороны, соотношение (6.1) можно получить из формулы Гиббса для плотности канонического распределения вероятностей $c\exp(-H/k\tau)$ (c — нормировочный множитель, H — гамильтониан частицы в поле силы тяжести), усредняя ее по импульсам. После усреднения получается плотность распределения частиц газа по высоте, которая оказывается пропорциональной экспоненте из (6.1). Этот вывод формулы (6.1), полученный впервые Максвеллом, считается одним их первых достижений равновесной статистической механики.

Впрочем, еще Лошмидт (см. в кн. [13]) высказывал критические замечания в связи с рассуждениями Максвелла (в том числе и с точки зрения кинетической теории). Кроме того, в известных стационарных моделях атмосферы Земли (например, международная стандартная модель) плотность убывает с высотой отнюдь не экспоненциально и температура существенно зависит от высоты места.

Однако, еще более существенные проблемы возникают при естественном предположении, что Земля имеет форму шара со сферически симметричным распределением масс. Оказывается, Земля вообще не может иметь атмосферы конечной массы с постоянной температурой. Пусть M — масса Земли, R — ее радиус, γ — гравитационная постоянная, r — расстояния частиц газа до центра Земли. Решая систему уравнений (6.2)–(6.3) в случае гравитационного притяжения, приходим к формуле

$$\rho(r) = c \exp \frac{mG}{k\tau r}, \quad c = \mathrm{const} > 0, \quad G = \gamma M. \tag{6.4}$$

Так как $\rho(r) \to c > 0$ при $r \to \infty$, то масса атмосферы

$$4\pi \int\limits_R^\infty r^2 \rho(r)\, dr \tag{6.5}$$

бесконечна. Можно усложнить задачу, учитывая взаимное притяжение частиц атмосферы. В этом случае плотность при постоянной температуре находится как решение интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{k\tau}{m}\rho' r^2 = -\gamma\biggl(M + 4\pi \int\limits_R^\infty x^2 \rho(x)\, dx\biggr)\rho.$$

Оно легко сводится к неавтономному дифференциальному уравнению второго порядка. Интересующее нас решение имеет следующую асимптотику

$$\rho(r) = \frac{\alpha}{r^2} + o\Bigl(\frac{1}{r^2}\Bigr), \quad \alpha = \frac{k\tau}{2\pi m\gamma}.$$

Однако и в этом случае интеграл (6.5) расходится.

Отметим, что соотношение (6.4) формально получается из канонического распределения для ньютоновского притяжения усреднением по импульсам. Однако, ввиду расходимости, с этой плотностью в фазовом пространстве нельзя связать никакой вероятностной меры.

Если считать τ известной функцией z, то согласно уравнениям (6.2)–(6.3) формулу (6.1) надо заменить формулой

$$\rho(z) = \frac{c}{\tau(z)} \exp\left[-\frac{mg}{k}\int\limits_0^z \frac{dx}{\tau(x)}\right], \quad c = \rho(0)\tau(0). \tag{6.6}$$

В частности, если температура линейно убывает с ростом z, то атмосфера находится в стационарном состоянии (если, конечно, считать температуру поверхности Земли постоянной). Действительно, функция $\tau(z)$ гармоническая и поэтому (согласно закону Фурье) поле температур не меняется со временем.

Если $\tau = \tau_0(1-\varepsilon z), 0 \leqslant z \leqslant 1/\varepsilon, \tau_0 = \tau(0)$, то формула (6.6) принимает вид

$$\rho(z) = \rho_0(1-\varepsilon z)^{\frac{mg}{k\tau_0\varepsilon}-1}. \tag{6.7}$$

В задаче о равновесии атмосферы в ньютоновском гравитационном поле гармонические функции имеют вид $a/r + b$. Если положить, например, $\tau = a/r \ \ (a = k\tau(R))$, то

$$\rho(r) = cr\left(\frac{r}{R}\right)^{-\frac{mG}{ka}}, \quad c = \text{const} > 0. \tag{6.8}$$

Интеграл (6.5) будет сходиться при выполнении условия $mG/ka > 4$. Это заведомо так, если температура поверхности Земли принимает небольшие значения.

Наша цель — применить методы статистической механики для вывода формул плотности типа (6.6)–(6.8). Только здесь каноническое распределение вероятностей в фазовом пространстве приходится заменить другими распределениями, плотности которых зависят лишь от полной энергии.

Пусть $M = \{x\}$ — конфигурационное пространство механической системы с n степенями свободы, $\Gamma = T^*M$ — ее фазовое пространство,

$$H = \frac{1}{2}\sum a_{ij}p_ip_j + V(x)$$

— функция Гамильтона. Здесь $p_1, \ldots, p_n$ — канонические импульсы, сопряженные координатам $x_1, \ldots, x_n$, V — потенциал силового поля.

Пусть $g\colon M \to \mathbb{R}$ — неотрицательная функция, задающая вероятностную меру на M:

$$\int\limits_M g(x)\, d^n x = 1.$$

Следуя Гиббсу, зададим плотность распределения вероятностей на Γ в виде $f(\beta H)$, где $f(\cdot)$ — неотрицательная функция одного переменного, β — параметр, размерность которого обратна размерности энергии.

Усредняя плотность f по импульсам, приходим к интегральному уравнению

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\beta H)\, d^n p = g(x). \tag{6.9}$$

Функция g считается заданной, а f подлежит определению.

В каждой точке $x \in M$ линеной заменой $p = Cy$ кинетическую энергию можно привести к сумме квадратов:

$$(Ap,\, p) = (y,\, y), \quad A = \|a_{ij}\|.$$

Переходя еще к сферическим координатам в $\mathbb{R}^n = \{y\}$, уравнение (6.9) преобразуем к виду

$$\int\limits_0^\infty r^{n-1} f\Big[\beta\Big(\frac{r^2}{2} + V\Big)\Big]\, dr = c\sqrt{|A|}g, \tag{6.10}$$

где $c = \Gamma(n/2)/2\pi^{n/2}$. Отсюда вытекает, в частности, что $\sqrt{|A|}g$ является функцией от потенциала V. Положим для краткости

$$\rho(\beta V) = c\beta\Big(\frac{\beta}{2}\Big)^{\frac{n-2}{2}}\sqrt{|A|}g.$$

Тогда из уравнения (6.10) для функции f получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int\limits_\xi^\infty (\zeta - \xi)^{\frac{n-2}{2}} f(\zeta)\, d\zeta = \rho(\xi). \tag{6.11}$$

Несущественное отличие от классического случая состоит в том, что интеграл в уравнении (6.11) несобственный.

Вид решения (6.11) зависит от четности размерности n. Пусть n четно и равно $2s+2$ ($s \geqslant 0$). Тогда

$$f(\xi) = \frac{(-1)^{s+1}}{(s+1)!} \frac{d^{s+1}}{d\xi^{s+1}} \rho(\xi). \tag{6.12}$$

При этом, конечно, $(s+1)$-ая производная функции $\rho(\xi)$ должна достаточно быстро убывать при $\xi \to \infty$, чтобы обеспечить сходимость несобственного интеграла в левой части (6.11).

Для нечетных n после нескольких дифференцирований по ξ уравнение (6.11) сводится к интегральному уравнению Абеля и для его решения можно воспользоваться классической формулой Абеля (см. [66]). Например, при $n = 1$

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{\rho(u)\, du}{\sqrt{u-\xi}}.$$

Чтобы эта формула была корректной, надо потребовать сходимость несобственного интеграла и его непрерывную дифференцируемость по параметру ξ.

Особенно просто решение уравнения (6.11) выглядит при $n = 2$: $f = -\rho'$ (формула (6.12) при $s = 0$). Используя формулу (6.7) для плотности атмосферного столба, получаем

$$f(\beta H) = c\Big(1 - \frac{\varepsilon H}{mg}\Big)^{\frac{mg}{k\tau_0\varepsilon}-2}. \tag{6.13}$$

Здесь τ_0 — температура вблизи поверхности Земли, c — нормировочный множитель, $H = (y_1^2 + y_2^2)/2m + mgz$ — гамильтониан. Ясно, что $0 \leqslant H \leqslant mg/\varepsilon$. Роль параметра β играет множитель ε/mg.

Так как $\tau = \tau_0(1-\varepsilon z)$, то при $\varepsilon \to 0$ температура не зависит от высоты и формула (6.13) переходит в классическое распределение Гиббса:

$$f = c\exp\Big(-\frac{H}{k\tau}\Big).$$

Таким образом, формула (6.13) дает пример распределения вероятностей, которое при малых значениях параметра ε мало отличается от канонического распределения.

Обсудим теперь вид уравнений состояния и зависимости энергии от термодинамических параметров разреженного газа, подчиненного распределению (6.13). Для этого рассмотрим небольшой замкнутый плоский сосуд в вертикальной плоскости $\mathbb{R}^2 = \{x,\, z\}$, размеры которого малы по сравнению с высотой z. Пусть v — его объем (точнее, его площадь). Нормировочный множитель c в формуле (6.13) находится из равенства

$$\iint f(\beta H)\, d^2y\, d\sigma = 1,$$

где $d\sigma$ — элемент площади в вертикальной плоскости. Из этой формулы получаем, что

$$c = \frac{2\pi v m^2 g(1-\varepsilon z)^{\alpha-1}}{\varepsilon(\alpha-1)}, \quad \alpha = \frac{mg}{k\tau_0\varepsilon}. \tag{6.14}$$

Далее, энергия E газа в сосуде определяется как среднее значение гамильтониана

$$N \iint Hf\, d^2y\, d\sigma,$$

где N — число частиц в сосуде.

Из (6.13) и (6.14) получаем формулу

$$E = Nk\tau_0(1-\varepsilon z) + Mgz. \tag{6.15}$$

Здесь $M = Nm$ — масса газа в сосуде. Первое слагаемое в (6.15) имеет вид $Nk\tau$, где τ — температура газа в сосуде. Это — внутренняя энергия идеального газа, обусловленная движением его молекул.

Чтобы получить уравнение состояния, следует воспользоваться известным соотношением

$$\Lambda = -M \iint \frac{\partial H}{\partial \lambda} f\, d^2y\, d\sigma.$$

Здесь λ — термодинамический параметр, Λ — отвечающая ему обобщенная сила. В нашем случае λ — это объем v газа, а Λ — давление p. Поскольку зависимость гамильтониана от объема явно не задана, то для вычисления давления надо преобразовать правую часть (6.16), сведя ее к вычислению производной по v от некоторого кратного интеграла. Используя (6.14), получаем уравнение состояния

$$pv = Nk\tau_0(1-\varepsilon z). \tag{6.16}$$

С учетом принятой зависимости температуры от высоты это уравнение очевидно, эквивалентно уравнению состояния идеального газа (6.3).

Выражение для внутренней энергии и уравнение состояния можно попытаться получить с помощью метода, развитого в § 4 (формулы (4.4) и (4.5)). Однако таким способом получаются соотношения, которые не совпадают с (6.15) и (6.16). На самом деле здесь нет никакого противоречия, поскольку в нашем случае параметр $\beta = \varepsilon/mg$ имеет другой физический смысл (в частности, β не зависит явно от температуры).

§ 7. Статистическая динамика системы связанных маятников

Рассмотрим n маятников, соединенных упругими пружинами. Для простоты будем считать, что их точки подвеса совпадают (рис. 19). Колебания отдельно взятого маятника описываются гамильтонианом

$$h_s = \frac{y_s^2}{2J_s} - m_s g l_s \cos x_s,$$

где x — угол отклонения маятника от вертикали, y — сопряженный импульс, m — масса маятника, J — момент инерции относительно точки подвеса, l — расстояние от точки подвеса до центра масс, g — ускорение свободного падения.

Пусть маятники с номерами i и j соединены упругой пружиной. Тогда потенциальная энергия взаимодействия равна

$$h_{ij} = -\varkappa_{ij}\delta^2 \cos(x_i - x_j) + \mathrm{const}.$$

Здесь $\varkappa_{ij} = \varkappa_{ji}$ — коэффициент упругости, δ — расстояние до точек крепления пружины.

Пусть γ — набор номеров (ij), для которых $h_{ij} \neq \mathrm{const}$; если $(ij) \in \gamma$, то $(ji) \in \gamma$. Множеству γ естественно сопоставляется граф Δ, вершины которого $\{1, 2, \ldots, n\}$ нумеруют маятники. Вершины i и j соединены ребром, если $(ij) \in \gamma$. Если граф Δ связный, то систему маятников назовем *связанной*. Динамика системы связанных маятников описывается каноническими дифференциальными уравнениями с гамильтонианом

$$H = \sum_{s=1}^{n} h_s + \sum_{\gamma} h_{ij}.$$

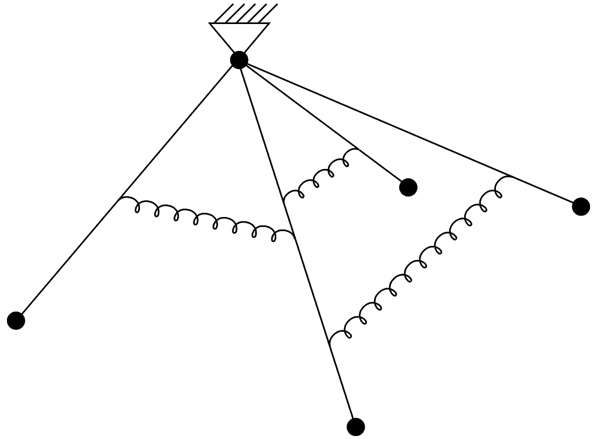

Рис. 19. Система связанных маятников.

Если граф Δ не связен, то рассматриваемая система маятников распадается на несколько связанных подсистем, которые колеблются независимо друг от друга.

Мы будем рассматривать гамильтоновы системы несколько более общего вида. Пусть $\mathbb{T}^n = \{x_1, \ldots, x_n \bmod 2\pi\}$ — конфигурационное пространство,

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ij} y_i y_j, \quad a_{ij} = \mathrm{const}$$

— кинетическая энергия, $V : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ — потенциальная энергия, которую будем считать тригонометрическим многочленом. Функция Гамильтона H — это полная энергия $T + V$.

Согласно предположению, ряд Фурье потенциала V

$$\sum v_m e^{i(m,\, x)}, \quad m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$$

содержит конечное число гармоник. Конечное множество целочисленных векторов

$$S = \{m \in \mathbb{Z}^n : v_m \neq 0\}$$

назовем *спектром* потенциала V. Ясно, что S инвариантно при отражении $m \mapsto -m$.

Кинетическая энергия T задает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$: если $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, то

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum a_{ij} \xi_i \eta_j.$$

Если $\mathbb{R}^n$ можно разложить в прямую сумму подпространств W_1, W_2, ортогональных относительно скалярного произведения $\langle \, , \rangle$, и спектр S лежит в объединении W_1, W_2, то система с гамильтонианом H распадается на две независимые подсистемы с числом степеней свободы $\dim W_1$ и $\dim W_2$. В этом случае исходная система будет иметь два дополнительных квадратичных первых интеграла, которые являются гамильтонианами отдельных подсистем. Если такое разложение невозможно, то систему будем называть *связанной*.

Согласно Гиббсу, пребывание системы в определенном состоянии считается случайным событием. Таким образом, в фазовом пространстве $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ возникает плотность распределения вероятностей $\rho(x, y)$, которая неотрицательна и однозначная всюду в $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$. Гиббс заметил, что ρ удовлетворяет уравнению Лиувилля и поэтому в случае гамильтоновых систем является первым интегралом.

Рассмотрим задачу о дополнительных интегралах системы с торическим конфигурационным пространством и гамильтонианом $H = T + V$. Более точно, изучаются условия существования новых интегралов в виде полиномов по импульсам с однозначными на $\mathbb{T}^n = \{x \bmod 2\pi\}$ коэффициентами. Отметим, что все известные интегралы обратимых механических систем – полиномы по импульсам, либо функции от этих полиномов. Этот факт используется в п. 4, хотя в полном объеме он не доказан (частичные результаты в этом направлении указаны в [40, гл. II]).

Пусть Σ — выпуклая оболочка спектра S потенциала V. Ясно, что Σ — выпуклый многогранник. Пусть α и β — вершины Σ, соединенные ребром σ. Назовем это ребро *положительным*, если $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$. Положительные ребра видны из начала координат под острым углом.

Теорема 3. *Пусть W — гиперплоскость, содержащая начало координат и $n - 1$ линейно независимых вершин Σ. Если к каждой из этих вершин примыкает положительное ребро, не лежащее целиком в W, то гамильтонова система не допускает полиномиального интеграла, независимого от энергии H.*

Это утверждение доказано в добавлении 6. Достаточные условия отсутствия новых полиномиальных интегралов можно ослабить. По-видимому, теорема 3 справедлива для *связанных* гамильтоновых систем, о которых шла речь выше. При $n = 2$ этот результат установлен в [46]. Не исключено, что при $n \geqslant 3$ связанные системы транзитивны на энергетических многообразиях

$$H = h > \max V. \tag{7.1}$$

Это — одна из точных формулировок гипотезы о диффузии в гамильтоновых системах. Более простая задача: доказать отсутствие непостоянных непрерывных интегралов на энергетических поверхностях (7.1).

Из теоремы 3 просто выводится

Теорема 4. *Связанная система маятников не допускает однозначного полиномиального интеграла, независимого от полной энергии.*

На рис. 20 изображен многоугольник Σ и прямая W для системы из двух связанных маятников.

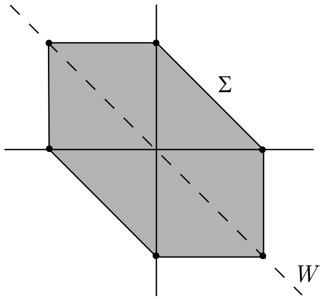

Рис. 20. Спектр системы двух связанных маятников.

Применим теорему 4 для вывода канонического распределения Гиббса для системы маятников, соединенных упругими пружинами. С этой целью рассмотрим две связанные системы маятников с гамильтонианами H_1 и H_2. Предположим, что некоторые маятники из систем 1 и 2 связаны между собой одной (или несколькими) упругими пружинами с очень малым коэффициентом упругости ε. Тогда гамильтониан системы $1 + 2$ будет иметь вид

$$\mathscr{H}_\varepsilon = H_1 + H_2 + \varepsilon H_{12},$$

где εH_{12} — малая потенциальная энергия взаимодействия систем 1 и 2.

При каждом сколь угодно малом $\varepsilon \neq 0$ система маятников $1 + 2$ будет связанной. Следовательно, по теореме 4, плотность распределения вероятностей в фазовом пространстве этой системы будет зависеть лишь от $\mathscr{H}_\varepsilon : \rho(\mathscr{H}_\varepsilon)$. Отметим, что эта функция может еще явно зависеть от параметра ε; но для дальнейшего это не существенно.

Устремим теперь ε к нулю. В пределе получим две независимые системы с гамильтонианами H_1 и H_2. Согласно общей идее Гиббса, следует ввести плотности распределения вероятностей ρ_1 и ρ_2. По теореме 4 снова получаем, что ρ_1 и ρ_2 зависят только от H_1 и H_2 соответственно.

Применяя правило умножения для вероятностей независимых событий, получаем при $\varepsilon = 0$ равенство

$$\rho(H_1 + H_2) = \rho_1(H_1)\rho_2(H_2). \tag{7.2}$$

Это равенство называется еще *гипотезой Гиббса о термодинамическом равновесии при исчезающем взаимодействии* [22]. Хорошо известно, что решения функционального уравнения (7.2) — гладкие функции, нигде не обращающиеся в нуль. Последнее вытекает из условия нормировки. Из (7.2) получаем равенство

$$\frac{\rho_1'}{\rho_1} = \frac{\rho_2'}{\rho_2} = -\beta, \quad \beta = \mathrm{const} > 0. \tag{7.3}$$

Отсюда вытекает формула Гиббса $\rho = c\exp(-\beta H)$ для системы с гамильтонианом $\mathscr{H}_0$. Поскольку β зависит лишь от температуры, то (7.3) проясняет физический смысл гипотезы Гиббса: температуры подсистем 1 и 2 остаются одинаковыми и при $\varepsilon \to 0$.

Если имеется только одна связанная система маятников, то мы можем лишь утверждать, что ее плотность распределения вероятностей зависит от полной энергии этой системы. Как показано в § 1, усреднение по такой инвариантной мере в общем случае не совместимо с аксиомами равновесной термодинамики. Причина понятна: у нас нет возможности определить температуру этой системы, сравнивая ее с температурами других систем.

Напротив, если имеется две связанные системы 1 и 2, соединенные между собой, то по истечении большого промежутка времени между ними установится термодинамическое равновесие. Это равновесие не нарушится, если мы бесконечно медленно и долго будем уменьшать взаимодействие между системами 1 и 2. В пределе системы 1 и 2 окажутся независимыми, но будут иметь равные температуры. Каждую из них можно бесконечно медленно присоединить к третьей связанной системе с гамильтонианом H_3 и плотностью распределения вероятностей $\rho_3(H_3)$. Условие сохранения термодинамического равновесия при таком соединении состоит в том, что ρ_3'/ρ_3 равно аналогичным отношениям из равенства (7.3).

Глава IV

Каноническое распределение Гиббса и термодинамика механических систем с конечным числом степеней свободы

§ 1. Введение

Классический подход к обоснованию термодинамики, как известно, основан на использовании *канонического распределения Гиббса*

$$\rho(x,\,y) = e^{-\beta H} \bigg/ \int e^{-\beta H}\,dx\,dy. \tag{1.1}$$

Здесь x и y — канонические координаты и импульсы соответственно, $H(x,\,y)$ — функция Гамильтона механической системы, $\beta = \mathrm{const}$. Функция ρ трактуется как стационарная плотность распределения вероятности. Более точно, предполагается, что пребывание системы в заданном состоянии — случайное событие, причем вероятность обнаружения системы в области D фазового пространства равна

$$\int\limits_D \rho(x,\,y)\,dx\,dy.$$

Параметр β определяется из равенства

$$E = \int H\rho\,dx\,dy, \tag{1.2}$$

где E — средняя энергия системы. Обычно полагают $\beta = 1/k\tau$, где τ — абсолютная температура, k — постоянная Больцмана. Интегралы (1.1) и (1.2), распространенные на все фазовое пространство, предполагаются сходящимися.

Обоснование распределения Гиббса — одна из ключевых задач статистической механики. Для этой цели обычно рассматривают N *неразличимых* систем с гамильтонианами

$$H(x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}), \quad \alpha = 1, \ldots, N, \tag{1.3}$$

где $x^{(\alpha)}$, $y^{(\alpha)}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — канонические координаты системы с номером α. Подчеркнем, что n и H не зависят от α.

Введем объединенное фазовое пространство размерности $2nN$ с каноническими переменными

$$(X, Y) = (x^{(1)}, y^{(1)}, \ldots, x^{(N)}, y^{(N)})$$

и функцию Гамильтона

$$\mathscr{H}_\varepsilon(X, Y) = \sum_{\alpha=1}^{N} H(x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}) + \varepsilon H_1(X, Y, \varepsilon), \tag{1.4}$$

где ε — некоторый малый параметр, который затем будет устремлен к нулю. Система с функцией Гамильтона (1.4) описывает динамику N слабо взаимодействующих друг с другом подсистем с гамильтонианами (1.3), причем функция εH_1 имеет смысл энергии взаимодействия подсистем.

Ключевой идеей при выводе распределения Гиббса является предположение об *эргодичности* системы с гамильтонианом (1.4) при $\varepsilon \neq 0$ на поверхности уровня $\mathscr{H}_\varepsilon = NE$. Пусть f — интегрируемая функция на фазовом пространстве системы с n степенями свободы. В соответствии с *принципом неразличимости*, в статистической механике рассматривают только такие функции от X и Y, которые не меняются при перестановках групп переменных $x^{(\alpha)}$, $y^{(\alpha)}$. Положим

$$F(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{\alpha} f(x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}). \tag{1.5}$$

Такие функции часто называют *сумматорами*. Используя эргодическую гипотезу, для среднего по времени (1.5) в пределе при $\varepsilon \to 0$ получают формулу

$$\langle F \rangle = \int f(x, y) \rho_N(x, y)\, dx\, dy.$$

Явное выражение для плотности ρ_N можно найти в [8]. При некоторых дополнительных предположениях [8] можно доказать, что $\rho_N \to \rho$

при $N \to \infty$ и для среднего от функции f вдоль решений системы с гамильтонианом (1.3) справедлива формула

$$\langle f \rangle = \int f \rho \, dx \, dy.$$

Описанный выше предельный переход при $N \to \infty$ обычно называется *термодинамическим*, а возникающие в результате этого предельного перехода величины — *термодинамическими пределами*.

На этом пути возникает ряд затруднений принципиального характера. Основным среди них является обоснование эргодической гипотезы. Поскольку распределение Гиббса (1.1) не зависит от вида энергии взаимодействия H_1, то Ф. А. Березин [8] высказал идею ослабить эргодическую гипотезу: достаточно потребовать эргодичности системы с гамильтонианом (1.4) при $\varepsilon \neq 0$ для всюду плотного множества функций H_1. Однако, если энергия взаимодействия H_1 не имеет сингулярностей и поверхности уровня энергии $\mathscr{H}_\varepsilon = NE$ компактны, то эргодическая гипотеза (даже в ослабленном варианте) опровергается КАМ-теорией.

Пример. Рассмотрим, следуя [8], систему с гамильтонианом

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2} \sum (x_\alpha^2 + \omega^2 y_\alpha^2) + \varepsilon V_4(x), \tag{1.6}$$

где $\omega = \mathrm{const} \neq 0$, $V_4 \geqslant 0$ — полином 4-ой степени по координатам $x_1, \ldots, x_N$, $\varepsilon > 0$. Такие системы играют существенную роль в теории теплоемкостей твердых тел [27]. Коэффициенты неотрицательных полиномов 4-ой степени образуют некоторое множество A в конечномерном пространстве коэффициентов всех многочленов 4-ой степени от N переменных. Ф. А. Березин [8] поставил следующий вопрос: верно ли, что для почти всех точек A система с гамильтонианом (1.6) эргодична? Ответ на него отрицательный. Действительно, рассмотрим многочлены вида

$$V_4 = \sum_\alpha a_\alpha x_\alpha^4 + W_4(x), \quad a_\alpha > 0,$$

и коэффициенты полинома W_4 малы. Если $W_4 = 0$, то система с гамильтонианом (1.6) интегрируется разделением переменных. Если перейти к переменным действие-угол I_α, φ_α в системе с одной степенью свободы

$$h_\alpha = (x^2 + \omega^2 y^2)/2 + \varepsilon a_\alpha x^4,$$

то

$$\mu_\alpha = \partial h_\alpha/\partial I_\alpha > 0, \quad \lambda_\alpha = \partial^2 h_\alpha/\partial I_\alpha^2 > 0. \tag{1.7}$$

В последнем неравенстве существенно используется предположение, что $\varepsilon a_\alpha > 0$.

Пусть $H_0 = \sum h_\alpha(I_\alpha)$. Если

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} & \dfrac{\partial H_0}{\partial I} \\ \dfrac{\partial H_0}{\partial I} & 0 \end{Vmatrix} \neq 0, \tag{1.8}$$

то, согласно КАМ-теории [5], при малых W_4 (когда коэффициенты W_4 лежат в некоторой малой окрестности нуля) система с гамильтонианом (1.6) не эргодична на каждом положительном уровне энергии: бóльшая часть этой поверхности расслоена на N-мерные инвариантные торы с условно-периодическими траекториями. В нашем случае определитель (1.8) равен

$$-\lambda_1 \ldots \lambda_n (a_1^2/\lambda_1 + \ \ldots \ + a_n^2/\lambda_n),$$

что отлично от нуля ввиду (1.7).

Следует еще добавить, что при указанном выше подходе к выводу распределения Гиббса (восходящему к Дарвину и Фаулеру) выражение для плотности вероятности (1.1) не зависит от взаимодействия подсистем. Между тем в действительности оно всегда присутствует.

В этой главе развивается иной подход к обоснованию формулы для плотности вероятности, восходящий к классическим работам Гиббса и основывающийся на теории интегрируемости гамильтоновых систем.

§ 2. Основная теорема

Статистическое рассмотрение динамических систем предполагает отказ от рассмотрения отдельных траекторий. Вместо этого в фазовом пространстве системы

$$\dot{x} = v(x) \tag{2.1}$$

вводится плотность распределения вероятности $\rho(x,\, t) > 0$, в общем случае зависящая явно от времени. Пусть D — любая измеримая область фазового пространства, g^t — фазовый поток системы (2.1), который можно представлять себе как стационарное течение жидкости. Поскольку область $g^t(D)$ состоит из одних и тех же движущихся фазовых точек, то естественно считать, что вероятность обнаружения системы в области $g^t(D)$ не зависит от t. Следовательно, эта вероятность

$$\int\limits_{g^t(D)} \rho(x,\,t)\,dx$$

будет интегральным инвариантом системы (2.1). Но тогда плотность вероятности удовлетворяет уравнению Лиувилля:

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho v) = 0.$$

Если $\operatorname{div} v = 0$, то ρ — первый интеграл системы (2.1). Это условие, очевидно, выполнено для гамильтоновых систем дифференциальных уравнений. Для автономных систем естественно рассматривать стационарные распределения, когда ρ не зависит явно от t. Подробное обсуждение этих вопросов содержится во Введении (п. 5).

Локально, в малой окрестности неособой точки, динамическая система (2.1) имеет полный набор (в количестве $m-1$, где m — размерность фазового пространства) независимых первых интегралов. Однако в типичной ситуации они не продолжаются до однозначных интегралов, определенных во всем фазовом пространстве. Плотность вероятности по своему определению — *однозначная* функция на фазовом пространстве. В общем случае гамильтоновы системы с компактными поверхностями уровня не допускают интегралов, независимых от гамильтониана H, хотя они и не являются эргодическими (на энергетических уровнях) [40]. Это обстоятельство позволяет в ряде важных случаев сразу утверждать, что

$$\rho = f(H), \tag{2.2}$$

и свести задачу к нахождению вида функции f.

Однако в физической литературе распространена противоположная точка зрения на возможность существования дополнительных интегралов (см., например, [32], где подход к обоснованию распределения Гиббса, основанный на формуле (2.2), назван «спекулятивным»).

Чтобы продемонстрировать возможности нового подхода, рассмотрим гамильтонову систему с n степенями свободы, гамильтониан которой имеет вид (1.4):

$$
\begin{gathered}
H = H_0 + \varepsilon H_1 + o(\varepsilon), \quad H_0 = \sum h_i(x_i,\, y_i), \\
H_1 = H_1(x_1,\, \ldots,\, x_n,\, y_1,\, \ldots,\, y_n).
\end{gathered} \tag{2.3}
$$

При $\varepsilon = 0$ система распадается на n независимых подсистем с одной степенью свободы. Примером может служить система связанных маятников.

Предположим, что в каждой одномерной системе с гамильтонианом h_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) можно ввести канонические *переменные действие-угол* I_i, $\varphi_i \bmod 2\pi$ [5]. Например, для системы с гамильтонианом h_α из примера § 1 такие переменные определены во всем фазовом пространстве. В случае маятника цилиндрическое фазовое пространство разделяется сепаратрисами на три области, в каждой из которых можно ввести переменные действие-угол. В этих переменных

$$
h_i = h_i(I_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{2.4}
$$

Будем считать, что функции (2.4) непрерывны и монотонно возрастают. Естественность этого предположения вытекает из определения переменной действие как нормированной площади на фазовой плоскости, заключенной внутри фазовой кривой $h_i = \mathrm{const}$. Тогда переменная I_i будет однозначной функцией от энергии h_i.

Указанные предположения не выполняются в случае, когда потенциальная энергия системы имеет несколько локальных минимумов. Однако эти условия носят технический характер и их можно существенно ослабить.

Итак, в переменных действие-угол функция Гамильтона (2.3) имеет вид

$$
H = \sum_{i=1}^{n} h_i(I_i) + \varepsilon H_1(I_1,\, \ldots,\, I_n,\, \varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n) + o(\varepsilon). \tag{2.5}
$$

Она 2π-периодична по каждой угловой переменной $\varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n$.

Плотность распределения вероятностей ρ для системы с гамильтонианом (2.3) — однозначная положительная функция от x, y, зависящая еще от параметра ε. Будем предполагать, что ρ — функция из класса C^2 (она имеет вторые непрерывные производные по совокупности $2n+1$ переменных x, y, ε). При малых значениях ε ее можно представить в виде

$$
\rho = \rho_0(x,\, y) + \varepsilon\rho_1(x,\, y) + o(\varepsilon), \tag{2.6}
$$

где ρ_0 и ρ_1 — функции из классов C^2 и C^1 соответственно.

Устремим теперь ε к нулю. Тогда ρ_0 будет плотностью распределения вероятности для системы с гамильтонианом

$$H_0 = h_1(x_1,\, y_1) + \ldots + h_n(x_n,\, y_n).$$

Эта система с n степенями свободы распадается на n *независимых* систем с одной степенью свободы. Ключевое свойство независимости означает, что движение каждой из таких подсистем однозначно определяется любым ее начальным состоянием.

Если последовательно придерживаться идеи статистического описания динамических систем, то следует ввести стационарные плотности распределения вероятностей

$$p_1(x_1,\, y_1),\, \ldots,\, p_n(x_n,\, y_n)$$

для каждой из одномерных систем. Ввиду свойства независимости, по теореме умножения вероятностей получим формулу

$$\rho_0 = p_1 \cdots p_n. \tag{2.7}$$

Это равенство называют *гипотезой Гиббса о термодинамическом равновесии*.

Замечание. Не следует думать, что любое разделение переменных приводит к независимым системам с одной степенью свободы. Вот простой пример:

$$2H_0 = y_2^2 + x_2^2\left[(y_1^2 + x_1^2)/2\right]^2.$$

Переменные x_2, y_2 совершают гармонические колебания, частота которых равна энергии колебаний первой подсистемы (описываемой каноническими координатами x_1, y_1).

Для дальнейшего существенную роль играет *множество Пуанкаре* $\mathbb{P}$ [40]. Разложим возмущающую функцию H_1 в кратный ряд Фурье:

$$H_1 = \sum H^{(m)}(I_1,\, \ldots,\, I_n)\exp[i(m_1\varphi_1 + \ldots + m_n\varphi_n)],$$
$$m = (m_1,\, \ldots,\, m_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Пусть $\omega_i = dh_i/dI_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — частоты невозмущенной задачи; положим $\omega = (\omega_1,\, \ldots,\, \omega_n)$. По определению множество $\mathbb{P}$ состоит из тех точек $I = (I_1, \ldots, I_n) \in \mathbb{R}^n$, для которых найдутся такие $n-1$ линейно независимых целочисленных векторов $\alpha, \alpha', \ldots \in \mathbb{Z}^n$, что

1) $(\omega, \alpha) = (\omega, \alpha') = \ldots = 0$;

2) $H^{(\alpha)}(I) \neq 0,\ H^{(\alpha')}(I) \neq 0, \ldots$.

В типичной ситуации множество $\mathbb{P}$ всюду плотно заполняет область возможных значений $I \in \mathbb{R}^n$ [40].

Наш основной результат составляет

Теорема 1. *Предположим, что системы с гамильтонианами $h_1, \ldots, h_n$ невырождены ($d^2 h_i/dI_i^2 \neq 0$), множество Пуанкаре всюду плотно и выполнено условие* (2.7). *Тогда*

$$\rho = ce^{-\beta H_0}(1 + O(\varepsilon)), \tag{2.8}$$

где $c > 0$, β — некоторые постоянные.

Константа c несущественная: результат усреднения по мере (2.8)

$$\langle f \rangle = \int f \rho \, dx \, dy \bigg/ \int \rho \, dx \, dy$$

от нее не зависит. При $\varepsilon = 0$ формула (2.8) дает каноническое распределение Гиббса (1.1).

Замечание. Подчеркнем, что формула (2.8) справедлива при фиксированном числе степеней свободы $n \geqslant 2$. А. А. Власовым [19] развивался подход к выводу распределения Гиббса, вообще не использующий анализ взаимодействия подсистем и формально пригодный для случая $n = 1$. Этот подход основан на принципе «максимальной статистической независимости», который представляется искусственным предположением.

§ 3. Вывод канонического распределения Гиббса

Доказательство теоремы 1 основано на применении метода Пуанкаре [56] в форме, указанной в [40].

Полагая в формуле (2.6) $\varepsilon = 0$, получаем, что ρ_0 — первый интеграл вполне интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$H_0 = \sum_{k=1}^{n} h_k(I_k).$$

Поскольку невозмущенная система невырождена, т. е.

$$\det \|\partial^2 H_0/\partial I^2\| = \prod_{k=1}^{n} d^2 h_k/dI_k^2 \neq 0, \tag{3.1}$$

то в переменных действие-угол I, $\varphi \bmod 2\pi$ функция ρ_0 зависит только от $I_1, \ldots, I_n$. Действительно, пусть

$$\sum_m P^{(m)}(I)e^{i(m,\,\varphi)}, \quad m \in \mathbb{Z}^n$$

— ряд Фурье функции ρ_0, 2π-периодической по φ. Производная от ρ_0 в силу невозмущенной гамильтоновой системы имеет следующий вид:

$$\dot{\rho}_0 = \sum_m P^{(m)} i(m,\,\omega)e^{i(m,\,\varphi)}.$$

Приравнивая нулю это выражение и используя единственность разложения Фурье, получаем цепочку равенств

$$(m,\,\omega(I))P^{(m)}(I) \equiv 0, \quad m \in \mathbb{Z}^n. \tag{3.2}$$

Заметим, что уравнение $(m,\,\omega(I)) = 0$ $(m \neq 0)$ задает замкнутую регулярную гиперповерхность π_m в $\mathbb{R}^n = \{I\}$. Действительно, градиент функции $(m,\,\omega)$ имеет компоненты

$$m_1 \frac{d^2 h_1}{dI_1^2},\ m_2 \frac{d^2 h_2}{dI_2^2},\ \ldots,\ m_n \frac{d^2 h_n}{dI_n^2}.$$

Согласно условию (3.1), хотя бы одно из этих чисел отлично от нуля (если, конечно, $m = (m_1, \ldots, m_n) \neq 0$).

Итак, в силу (3.2) коэффициент Фурье $P^{(m)}$, $m \neq 0$ обращается в нуль вне гиперповерхности π_m. По непрерывности, $P^{(m)}(I) \equiv 0$, $m \neq 0$. Следовательно, $\rho_0 = P^{(0)}(I)$.

Это утверждение можно еще доказать по-другому. Сначала заметим, что функция ρ_0 постоянная на траекториях невозмущенной системы, которые в свою очередь расположены на n-мерных инвариантных торах. Так как ρ непрерывна, то (по теореме Кронекера) она постоянна на нерезонансных торах. Далее, ввиду предположения (3.1) о невырожденности, нерезонансные торы всюду плотны в фазовом пространстве невозмущенной системы.

Следовательно, ρ_0 принимает постоянные значения на инвариантных торах и поэтому она зависит только от переменных действие I.

Далее, поскольку ρ — первый интеграл канонической системы дифференциальных уравнений с гамильтонианом H, то их скобка Пуассона равна нулю: $\{\rho,\, H\} = 0$. Продифференцируем это равенство по ε и положим затем $\varepsilon = 0$. Поскольку ρ и H предполагаются функциями класса C^2, то дифференцирования по фазовым переменным и по параметру ε перестановочны. В результате приходим к равенству

$$\{\rho_0,\, H_1\} + \{\rho_1,\, H_0\} = 0. \tag{3.3}$$

Пусть

$$\sum_m H^{(m)}(I)e^{i(m,\varphi)}, \quad \sum_m P^{(m)}(I)e^{i(m,\varphi)},$$

— ряды Фурье функций H_1 и ρ_1. Подставляя эти разложения в (3.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем цепочку равенств

$$\Big(\sum \frac{\partial \rho_0}{\partial I_j}\, m_j\Big) H^{(m)} = \Big(\sum \frac{\partial H_0}{\partial I_j}\, m_j\Big) P^{(m)}, \tag{3.4}$$

где $(m_1,\, \ldots,\, m_n) = m \in \mathbb{Z}^n$. С учетом введенных ранее обозначений равенства (3.4) можно записать короче:

$$\Big(\frac{\partial \rho_0}{\partial I},\, m\Big) H^{(m)} = (\omega,\, m) P^{(m)}.$$

Пусть теперь $I \in \mathbb{P}$. Тогда найдутся $n-1$ линейно независимых целочисленных векторов α, α', ... таких, что

$$\Big(\frac{\partial \rho_0}{\partial I},\, \alpha\Big) = \Big(\frac{\partial \rho_0}{\partial I},\, \alpha'\Big) = \ldots = 0.$$

Следовательно, в этой точке вектор $\partial\rho_0/\partial I$, как и вектор частот $\omega = \partial H_0/\partial I$, ортогонален гиперплоскости, натянутой на векторы α, α', ... В частности, в точках множества Пуанкаре $\mathbb{P}$ векторы $\partial\rho_0/\partial I$ и $\partial H_0/\partial I$ коллинеарны. Это означает, что функции $\rho_0(I_1,\, \ldots,\, I_n)$ и $H_o = \sum h_k(I_k)$ зависимы во всех точках множества Пуанкаре $\mathbb{P}$. Согласно предположению, это множество всюду плотно в области изменения переменных действие I. Следовательно, в силу непрерывности, функции ρ_0 и H_0 зависимы всюду.

Ввиду сделанного в § 2 предположения о свойствах переменных действие-угол, переменные I_i можно представить как однозначные функции от h_i. Тогда $\rho_0 = \rho_0(h_1, \ldots, h_n)$ и $H_0 = \sum h_i$. Поскольку эти функции зависимы, то ρ_0 — гладкая функция от H_0.

Действительно, условие зависимости ρ_0 и H_0 дает соотношения

$$\partial\rho_0/\partial h_i = \partial\rho_0/\partial h_j, \tag{3.5}$$

справедливые для всех значений i, j. Подставляя $h_n = H_0 - h_1 - \ldots - h_{n-1}$ в выражение для ρ_0, получим

$$\rho_0 = f(H_0, h_1, \ldots, h_{n-1}) = \rho_0\left(h_1, \ldots, h_{n-1}, H_0 - \sum_{k=1}^{n-1} h_k\right).$$

Однако эта функция на самом деле не зависит от $h_1, \ldots, h_{n-1}$, поскольку

$$\partial f/\partial h_i = \partial\rho_0/\partial h_i - \partial\rho_0/\partial h_n = 0, \quad i < n$$

ввиду (3.5).

Плотности вероятностей $p_1, \ldots, p_n$ — интегралы одномерных систем с гамильтонианами $h_1, \ldots, h_n$. Следовательно, в переменных действие-угол, p_i — гладкие функции только от I_i. Но тогда p_i — однозначная дифференцируемая функция от энергии h_i.

Таким образом, равенство (2.7) можно представить в следующем виде:

$$\rho_0(h_1 + \ldots + h_n) = p_1(h_1) \cdots p_n(h_n).$$

Дифференцируя это соотношение последовательно по $h_1, \ldots, h_n$ и используя положительность функций $p_1, \ldots, p_n$, получаем равенства

$$p_1'/p_1 = \cdots = p_n'/p_n = -\beta,$$

где β — некоторая постоянная. Следовательно,

$$p_i = c_i e^{-\beta h_i}, c_i = \mathrm{const} > 0, \tag{3.6}$$

и поэтому

$$\rho_0 = c e^{-\beta H_0}, \quad c = c_1 \cdots c_n > 0.$$

Теорема доказана.

Замечание. Как видно из (3.6), постоянная β одна и та же для всех подсистем. Это означает, что слабо взаимодействующие подсистемы находятся в термодинамическом равновесии (и в пределе, когда $\varepsilon \to 0$), поскольку их температуры $\tau = 1/\beta k$ одинаковы. Таким образом, при $\varepsilon \to 0$ статистическая независимость подсистем эквивалентна их термодинамическому равновесию. В этом и заключается физический смысл гипотезы Гиббса.

§ 4. Аналитический случай

В приложениях гамильтониан (2.3) — аналитическая функция по фазовым переменным и параметру ε. В этом случае плотность вероятности (2.6) также естественно считать аналитической функцией относительно x, y, ε.

Условие всюду плотности множества Пуанкаре можно ослабить: достаточно потребовать, чтобы $\mathbb{P}$ было *ключевым множеством* для класса аналитических функций. Это означает следующее: если аналитическая функция $f(I)$ равна нулю в точках $\mathbb{P}$, то $f \equiv 0$. Простым примером не плотного ключевого множества служит набор гиперплоскостей $\{kI_1 = I_2\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. В частности, если аналитические функции зависимы в точках $\mathbb{P}$, то они зависимы всюду.

Теорема 2. *Предположим, что системы с гамильтонианами* $h_1, \ldots, h_n$ *невырождены, множество Пуанкаре — ключевое множество для класса аналитических функций и выполнено равенство* (2.7)*. Тогда аналитическая плотность распределения вероятностей для системы с гамильтонианом* (2.3) *имеет вид*

$$\rho = ce^{-\beta H}[1 + \varepsilon g(H, \varepsilon)], \tag{4.1}$$

где $c > 0$*,* $\beta \neq 0$ *— некоторые постоянные,* g *— аналитическая функция от энергии* H *и параметра* ε*.*

Функцию g можно представить в виде ряда по степеням ε, коэффициенты которого зависят лишь от энергии H. Слагаемое εg в формуле (4.1) вполне аналогично ряду Грама – Шарлье в теории распределения случайных величин, мало отличающихся от нормально распределенных (см., например, [68]).

Докажем теорему 2. Разложим плотность вероятности в ряд по степеням ε:

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon\rho_1 + \varepsilon^2\rho_2 + \cdots .$$

Ввиду невырожденности невозмущенной системы, ρ_0 — аналитическая функция только от переменных действие I. Так как ρ_0 и H_0 зависимы в точках $I \in \mathbb{P}$ и $\mathbb{P}$ — ключевое множество, то ρ_0 и H_0 зависимы всюду. Следовательно, с учетом гипотезы Гиббса (2.7),

$$\rho_0 = ce^{-\beta H_0}; \quad c,\, \beta = \mathrm{const},$$

(см. § 3). Поскольку $\rho_0 > 0$, то $c > 0$. Постоянная β отлична от нуля, так как в противном случае ρ_0 не будет плотностью вероятностной меры (объем всего фазового пространства бесконечен).

Далее, аналитическая функция

$$\rho/[c\exp(-\beta H)]$$

— интеграл уравнений Гамильтона с гамильтонианом (2.7). Разложим ее в ряд по степеням ε: $1 + \varepsilon G_0 + \varepsilon^2 G_1 + \cdots$. Ясно, что ряд

$$G_0 + \varepsilon G_1 + \cdots \tag{4.2}$$

будет интегралом той же системы. С помощью метода § 3 можно доказать, что G_0 — аналитическая функция от H_0: $G_0 = g_0(H_0)$. Ясно, что степенной ряд

$$[G_0 + \varepsilon G_1 + \cdots - g_0(H)]/\varepsilon = F_0 + \varepsilon F_1 + \cdots$$

снова будет первым интегралом. Следовательно, F_0 — аналитическая функция H_0: $F_0 = g_1(H_0)$. Продолжая неограниченно эту процедуру, получаем, что ряд (4.2) на самом деле имеет следующий вид:

$$g_0(H) + \varepsilon g_1(H) + \cdots .$$

Обозначая эту функцию $g(H,\, \varepsilon)$, приходим к искомой формуле (4.1).

Замечание. Введем функцию $K(H,\, \varepsilon)$, полагая

$$\rho = ce^{-\beta K}. \tag{4.3}$$

где плотность ρ определяется формулой (4.1). Функцию K можно разложить в степенной ряд $K_0 + \varepsilon K_1 + \cdots$, где

$$K_0 = H_0, \quad K_1 = H_1 - g_0(H_0)/\beta,\, \ldots .$$

Уравнения Гамильтона с гамильтонианами H и K имеют одни и те же траектории, только времена движения по этим траекториям разные. Формула (4.3) задает каноническое распределение Гиббса для слегка измененной гамильтоновой системы.

§ 5. Приложение к системе слабо связанных маятников

Рассмотрим n одинаковых математических маятников массы m и длины l, последовательно связанных друг с другом упругими пружинами с малой жесткостью $\varkappa$. Для простоты будем считать, что точки подвеса маятников совпадают. Эта система с n степенями свободы описывается каноническими дифференциальными уравнениями с функцией Гамильтона $H_0+\varepsilon H_1$, где

$$H_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2/(2ml^2) - mgl\cos x_i, \quad H_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \cos(x_i - x_{i+1}),$$

$\varepsilon = -\varkappa l^2/4$ — малый параметр. Для маятника переход к переменным действие-угол осуществляется с помощью эллиптических функций (см., например, [40]). Можно показать, что ряд Фурье для возмущающей функции по угловым переменным $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \bmod 2\pi$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} H_1 = \sum_{m_1,\, m_2} h_{m_1,\, m_2}(I_1) e^{2i(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} + \cdots + \\ + \sum_{m_{n-1},\, m_n} h_{m_{n-1},\, m_n}(I_n) e^{2i(m_{n-1}\varphi_{n-1} + m_n\varphi_n)}. \end{aligned}$$

Суммирование ведется по всем целым $m_1, \ldots, m_n$ от $-\infty$ до $+\infty$. Коэффициенты в этом разложении можно представить в явном виде с помощью известных разложений эллиптических функций sn^2, cn^2 и $\operatorname{sn}\operatorname{cn}$ в ряды Фурье [67]; все они отличны от нуля.

Множество Пуанкаре $\mathbb{P}$ в этой задаче определяется как множество точек $I = (I_1, \ldots, I_n)$, удовлетворяющих $n-1$ уравнениям

$$m_1\omega_1(I_1) + m_2\omega_2(I_2) = \ldots = m_{n-1}\omega_{n-1}(I_{n-1}) + m_n\omega_n(I_n) = 0,$$

причем либо $m_1 m_2 \cdots m_{n-1} \neq 0$, либо $m_2 m_3 \cdots m_n \neq 0$. При выполнении одного из двух последних условий векторы $(m_1, m_2, 0, \ldots, 0)$, $(0, m_2, m_3, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, m_{n-1}, m_n)$ линейно независимы. Можно показать, что множество $\mathbb{P}$, состоящее из бесконечного числа кривых, всюду плотно заполняет область определения переменных действие $\{I_1 \geqslant 0, \ldots, I_n \geqslant 0\}$.

Таким образом, для цепочки связанных маятников справедливы заключения теорем 1 и 2. Если убрать одну из пружин, то система распадется на две несвязанные цепочки, гамильтонианы которых будут первыми интегралами полной системы. В этом случае плотность распределения вероятностей уже не будет функцией только полной энергии системы, и поэтому она не будет подчиняться распределению Гиббса.

§ 6. Термодинамика механических систем

Рассмотрим гамильтонову систему с гамильтонианом H, причем плотность распределения вероятностей определяется формулой Гиббса (1.1). Согласно теореме 1, это может быть система с n степенями свободы, составленная из независимых одномерных подсистем, либо одна из таких подсистем. Покажем, следуя Гиббсу [22], что с этой механической системой можно естественным путем связать некоторую термодинамическую систему.

Предположим, что функция Гамильтона H зависит не только от канонических переменных x, y, но еще от нескольких параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. В качестве такого параметра можно принять, например, длину маятника. Параметры λ можно рассматривать как обобщенные координаты некоторой системы с $n+m$ степенями свободы, а постоянство λ — как наложение голономных связей. Итак, пусть $H_*(x, y, \lambda, \mu)$ — гамильтониан системы с $n+m$ степенями свободы, $\mu_1, \ldots, \mu_m$ — канонические импульсы, сопряженные с дополнительными координатами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Динамика расширенной системы описывается каноническими уравнениями

$$\dot{x} = \partial H_*/\partial y, \quad \dot{y} = -\partial H_*/\partial x, \quad \dot{\lambda} = \partial H_*/\partial \mu, \quad \dot{\mu} = -\partial H_*/\partial \lambda. \tag{6.1}$$

Наложим теперь на эту систему m независимых связей $\lambda_1, \ldots, \lambda_m = \mathrm{const}$. Следовательно, $\dot{\lambda}_i = 0$, и из уравнений

$$\partial H_*/\partial \mu_1 = \cdots = \partial H_*/\partial \mu_m = 0 \tag{6.2}$$

можно найти импульсы μ как функции от x, y и постоянных параметров λ. Достаточное условие разрешимости уравнений (6.2) относительно μ сводится к неравенству

$$\det \|\partial^2 H_*/\partial \mu_i \partial \mu_j\| \neq 0.$$

Оно заведомо выполнено, если H_* — положительно определенная квадратичная форма по $n+m$ импульсам y, μ.

Если подставить найденные выражения для μ в последнюю группу уравнений (6.1), то получим дополнительные соотношения на канонические переменные x, y, которые в общем случае, разумеется, не будут выполняться. Поэтому необходимо ввести дополнительные силы — *реакции связей* $R_1, \ldots, R_m$ — и заменить последнее уравнение (6.1) на следующее:

$$\dot{\mu} = -\partial H_*/\partial\lambda + R. \tag{6.3}$$

Пусть $\mu = \mu(x, y, \lambda)$ — решение алгебраической системы (6.2). Положим

$$H(x, y, \lambda) = H_*(x, y, \lambda, \mu(x, y, \lambda)).$$

Ввиду (6.2),

$$\partial H/\partial x = \partial H_*/\partial x, \quad \partial H/\partial y = \partial H_*/\partial y, \quad \partial H/\partial\lambda = \partial H_*/\partial\lambda.$$

Следовательно, при постоянных значениях λ переменные x, y изменяются в соответствии с уравнениями Гамильтона с гамильтонианом H, а уравнение (6.3) можно заменить на следующее:

$$\dot{\mu} = -\partial H/\partial\lambda + R. \tag{6.4}$$

Пусть $x(t, x_0, y_0)$, $y(t, x_0, y_0)$ — решения канонических уравнений с функцией Гамильтона H. Предположим, что для каждого такого решения $\mu(t)/t \to 0$ при $t \to +\infty$. Тогда временное среднее $\dot{\mu}$ равно нулю. Это предположение заведомо выполнено, если конфигурационное пространство $\{x\}$ компактно: ввиду наличия интеграла энергии функция $\mu(t)$ будет ограниченной.

Усредним сначала обе части равенства (6.4) по времени, а затем по мере $\rho(x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0$, где ρ определяется (1.1). Согласно эргодической теореме Биркгофа–Хинчина, полученное соотношение эквивалентно следующему:

$$\langle R\rangle = \langle \partial H/\partial\lambda\rangle. \tag{6.5}$$

Здесь $\langle\ \rangle$ — среднее по мере Гиббса (1.1).

Замечание. Обычно [32, 8] соотношение (6.5) выводится из упрощенного соотношения (6.4), в котором отсутствует производная $\dot{\mu}$.

Соотношение (1.2) определяет «внутреннюю» энергию E как функцию от параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и β (напомним, что $\beta^{-1} = k\tau$). Положим

$\Lambda = -\langle R \rangle$ — фазовые средние значения введенных выше реакций связей (с обратным знаком). Соотношения

$$\Lambda_i = f_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \beta), \quad 1 \leqslant i \leqslant m \tag{6.6}$$

в термодинамике обычно называются уравнениями состояния. Задание функций E и Λ_i входит в определение термодинамической системы. Однако эти функции не могут быть произвольными: должны быть выполнены аксиомы — I-ое и II-ое начала термодинамики.

Введем статистический интеграл

$$Z(\lambda, \beta) = \int e^{-\beta H}\, dx\, dy.$$

Легко проверить справедливость равенств

$$\Lambda_i = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial \lambda_i} \quad (1 \leqslant i \leqslant m), \quad E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}. \tag{6.7}$$

В термодинамике основную роль играет дифференциальная 1-форма притока тепла

$$\omega = dE + \sum \Lambda_i d\lambda_i.$$

Согласно первому равенству (6.7), при фиксированных значениях β (или абсолютной температуры τ) форма ω — полный дифференциал. Это — первое начало термодинамики. Далее, с учетом (6.7) получаем

$$\beta\omega = \beta dE + \sum \Lambda_i d\lambda_i = d(\beta E) - E d\beta + \sum \Lambda_i d\lambda_i = d(\beta E + \ln Z).$$

Таким образом, форма притока тепла имеет интегрирующий множитель $\beta = 1/(k\tau)$. Это — второе начало термодинамики. Функция $S = \beta E + \ln Z$ — энтропия термодинамической системы.

В заключение приведем иллюстративный пример. Рассмотрим движение материальной точки массы m, прикрепленной к концу нерастяжимой нити длины l. Пусть x — угол поворота нити, y — сопряженный канонический импульс. Если на точку не действуют активные силы, то ее динамика описывается каноническими уравнениями с гамильтонианом

$$H = y^2/(2ml^2).$$

В качестве параметра λ примем длину нити l. Статистический интеграл равен

$$Z = (2\pi)^{3/2} m^{1/2} l \beta^{-1/2}.$$

Пусть p — сила, отвечающая параметру l (натяжение нити). Тогда, согласно (6.7), уравнение состояния (6.6) имеет вид $p = 1/(\beta l)$ или $pl = k\tau$. Оно похоже на уравнение состояния идеального газа. Второе уравнение (6.7) дает выражение для внутренней энергии $E = 1/(2\beta)$ или $E = k\tau/2$. Из этих соотношений получаем формулу $p = 2E/l$, которая, впрочем, справедлива и до применения операции усреднения.

§ 7. Ансамбль слабо взаимодействующих гамильтоновых систем со многими степенями свободы

Метод и результаты § 2 можно распространить на более общий случай, когда изучается динамика слабого взаимодействия конечного числа *многомерных* гамильтоновых систем. Рассмотрим ансамбль гамильтоновых систем с функцией Гамильтона

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0(P, Q) + \varepsilon \mathscr{H}_1(P, Q), \tag{7.1}$$

где

$$\begin{gathered} \mathscr{H}_0 = \sum_{s=1}^{n} H_0(p^{(s)}, q^{(s)}), \\ p^{(s)} = (p_1^{(s)}, \ldots, p_m^{(s)}), \quad q^{(s)} = (q_1^{(s)}, \ldots, q_m^{(s)}). \end{gathered} \tag{7.2}$$

Таким образом, при $\varepsilon = 0$ система с гамильтонианом (7.1) распадается на n одинаковых систем с m степенями свободы и гамильтонианом H_0. Канонические переменные P, Q являются набором импульсов $p^{(1)}, \ldots, p^{(n)}$ и координат $q^{(1)}, \ldots, q^{(n)}$ отдельных подсистем. Возмущающая функция $\mathscr{H}_1$ имеет смысл энергии взаимодействия n подсистем; она обычно зависит только от их положения Q. Малый параметр ε характеризует интенсивность их взаимодействия.

Мы будем рассматривать случай, когда гамильтониан $\mathscr{H}$ достаточно *гладко* зависит от переменных P, Q. Однако в приложениях часто встречаются случаи с сингулярным взаимодействием. Классическим примером служит газ Больцмана–Гиббса: набор твердых шариков в кубе, которые упруго сталкиваются друг с другом. Как уже отмечалось, классический подход Дарвина – Фаулера к выводу канонического распределения Гиббса существенно использует эргодическую гипотезу: при *всех* малых $\varepsilon > 0$ гамильтонова система с гамильтонианом (7.1) эргодична на фиксированных энергетических многообразиях $\mathscr{H} = \mathrm{const}$. В § 1 указаны некоторые примеры, в которых эргодическая гипотеза легко опровергается результатами КАМ-теории. В частности, если гамильтонова система с гамильтонианом H_0 вполне интегрируема и энергетические поверхности $H_0 = \mathrm{const}$ компактны, то эргодическое свойство заведомо отсутствует.

В связи с этим замечанием можно поставить следующую интересную задачу: доказать, что в аналитическом (или даже бесконечно-дифференцируемом) случае в предположении компактности энергетических поверхностей $H_0 = \mathrm{const}$ гамильтонова система с гамильтонианом (7.2) вообще не может удовлетворять эргодической гипотезе.

Можно попытаться модифицировать метод Дарвина – Фаулера, считая, что $\varepsilon \neq 0$ и n зависит от ε так, что $n(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Можно предположить, что для некоторых функций $\varepsilon \mapsto n(\varepsilon)$ система с гамильтонианом (7.1) будет эргодической на поверхностях $\mathscr{H} = \mathrm{const}$ ввиду огромного числа ее степеней свободы. Этот несколько ослабленный вариант эргодической гипотезы тесно связан с нерешенной задачей об оценке малого параметра в КАМ-теории, при котором исчезает «последний» колмогоровский тор. Не доказано пока более слабое предположение о транзитивности системы с гамильтонианом (7.2) на энергетических поверхностях $\mathscr{H} = \mathrm{const}$ при больших значениях n и малых ε.

Как хорошо известно, плотность распределения вероятностей — однозначный во всем фазовом пространстве первый интеграл дифференциальных уравнений Гамильтона. Поэтому мы исследуем условия существования интеграла $\mathscr{F}(P, Q, \varepsilon)$ канонических дифференциальных уравнений

$$\dot{P} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q}, \quad \dot{Q} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial P} \tag{7.3}$$

с гамильтонианом $\mathscr{H}$ вида (7.1) – (7.2). Подчеркнем, что интеграл $\mathscr{F}$ зависит от параметра ε. Пуанкаре рассматривал аналитический случай; в частности, интеграл $\mathscr{F}$ можно искать в виде ряда по степеням ε. Мы будем предполагать, что $\mathscr{F}$ — функция класса C^2 по совокупности своих аргументов P, Q и ε. Следовательно, можно положить

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_0(P, Q) + \varepsilon \mathscr{F}(P, Q) + o(\varepsilon), \tag{7.4}$$

где $\mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F}_1$ — функции из классов C^2 и C^1 соответственно относительно P и Q. Вероятно, что для последующих рассуждений можно уменьшить требования к классу гладкости интеграла $\mathscr{F}$. Однако, это — самостоятельная задача, которая здесь не обсуждается.

§ 8. Невозмущенная задача

Положим сперва $\varepsilon = 0$. Тогда будем иметь систему из n независимых подсистем. Она сильно неэргодическая: при $\varepsilon = 0$ система дифференциальных уравнений (7.3) допускает n независимых первых интегралов

$$H_s = H_0(p^{(s)},\, q^{(s)}), \quad 1 \leqslant s \leqslant n. \tag{8.1}$$

Ясно, что функция $\mathscr{F}_0$ из разложения (7.4) будет первым интегралом этой несвязанной системы. Покажем, что при определенных условиях функция $\mathscr{F}$ будет зависеть лишь от $H_1, \ldots, H_n$. В частности, из этих условий будет вытекать, что каждая из отдельных подсистем с m степенями свободы не допускает первых интегралов, независимых от интеграла энергии. Наши рассуждения в идейном отношении следуют методу Пуанкаре.

Пусть Γ — фазовое пространство гамильтоновой системы с функцией Гамильтона (8.1). Разумеется, при всех s эти пространства идентичны. Фазовым пространством новой системы служит прямое произведение

$$\mathscr{T} = \Gamma \times \ldots \times \Gamma, \quad \dim \mathscr{T} = 2nm.$$

Пусть h_s — значение полной энергии s-ой системы, и

$$\Sigma_{h_s} = \{p^{(s)},\, q^{(s)} : H_s(p^{(s)},\, q^{(s)}) = h_s\}$$

— энергетическая поверхность. Если значение h_s некритическое, то Σ — гладкое многообразие размерности $2m - 1$. При фиксированных значениях $h = (h_1, \ldots, h_n)$ и $\varepsilon = 0$ несвязанная гамильтонова система (7.3) сводится к прямому произведению динамических систем, определенных на

$$S_h = \Sigma_{h_1} \times \ldots \times \Sigma_{h_n} \subset \mathscr{T}.$$

Не следует думать, что свойство эргодичности системы с гамильтонианом H_s на Σ_{h_s} влечет постоянство интеграла $\mathscr{F}_0$ на инвариантном множестве S_h. Это показывает следующий простой

Пример. Пусть на прямом произведении k-мерных торов $\mathbb{T}^k\{x \bmod 2\pi\} \times \mathbb{T}^k\{y \bmod 2\pi\}$ задана динамическая система

$$\dot{x}_i = \omega_i, \quad \dot{y}_j = \omega_j; \quad i,\, j = 1,\, \ldots,\, k \tag{8.2}$$

с постоянными несоизмеримыми частотами $\omega = (\omega_1,\, \ldots,\, \omega_k)$. По теореме Вейля, каждая из отдельных подсистем эргодична на $\mathbb{T}^k$. Однако уравнения (8.2) имеют однозначные непостоянные интегралы $\sin(x_i - y_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Замечание. Однако, если гамильтоновы системы являются слабо перемешивающими (перемешивающими) системами на Σ_{h_s}, то их прямое произведение также обладает свойством слабого перемешивания (перемешивания) на S_h. В частности, в этих случаях функция $\mathscr{F}_0$ постоянна на каждой связной компоненте многообразия S_h.

Пусть $\mathbb{T}^1$ — невырожденная периодическая траектория s-ой системы с энергией h_s, T_s — ее период, а $\omega_s = 2\pi/T_s$ — частота. По *теореме Флоке–Ляпунова*, в ее окрестности на Σ_{h_s} можно так ввести координаты $\varphi_s \bmod 2\pi$, $z_1^{(s)},\, \ldots,\, z_{2m-2}^{(s)}$, что в этих переменных уравнения движения примут следующий вид:

$$\dot{\varphi}_s = \omega_s + f_s(\varphi_s,\, z^{(s)}), \quad \dot{z}^{(s)} = \Omega_s z^{(s)} + g_s(\varphi_s,\, z^{(s)}). \tag{8.3}$$

Здесь $f_s = O(|z^{(s)}|)$, $g_s = o(|z^{(s)}|)$, а постоянная квадратная матрица Ω_s порядка $2m-2$ невырождена. Полагая в (8.3) $z^{(s)} = 0$, получим уравнение периодической траектории:

$$\dot{\varphi}_s = \omega_s \quad (1 \leqslant s \leqslant n). \tag{8.4}$$

Ввиду предположения о невырожденности периодической траектории $\mathbb{T}^1$, на близких энергетических поверхностях Σ_{h_s} будут расположены невырожденные периодические траектории с близким периодом, причем их периоды и частоты непрерывно зависят от энергии h_s.

Ясно, что прямое произведение $\mathbb{T}^1 \times \ldots \times \mathbb{T}^1 = \mathbb{T}^n$ будет n-мерным инвариантным тором канонической системы дифференциальных уравнений (7.3) при $\varepsilon = 0$, лежащим на S_h. В окрестности этого тора уравнения движения имеют вид (8.3). Следовательно, такой тор будет *приводимым* и *невырожденным* (см., например, [40]). На самом торе уравнения сводятся к условно-периодическому виду (8.4). Как обычно, инвариантный тор будем называть нерезонансным, если частоты $\omega_1,\, \ldots,\, \omega_n$ независимы над кольцом целых чисел. Для дальнейшего существенную роль играет условие

A) *Для почти всех допустимых значений* $h \in \mathbb{R}^n$ *нерезонансные торы всюду плотны на многообразии* S_h.

Пример. Пусть отдельные подсистемы описывают движение по инерции по многообразию $\mathscr{N}$ отрицательной кривизны. Энергия h принимает неотрицательные значения. Все периодические траектории с положительной энергией гиперболичны; следовательно, они невырождены. Периодические траектории — это движения по замкнутым геодезическим на $\mathscr{N}$ с разной скоростью. Если l — длина замкнутой геодезической, то период равен $l/\sqrt{2h}$. Следовательно, частота ω определяется по формуле

$$2\pi\,\frac{\sqrt{2h}}{l}.$$

Поскольку длины n геодезических $l_1, \ldots, l_n$ фиксированы, то для почти всех положительных значений энергии $h_1, \ldots, h_n$ частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ несоизмеримы. Можно показать (и это отдельная задача), что в рассматриваемой ситуации условие A выполнено.

Предложение 1. *Если выполнено условие A, то для всех* $h \in \mathbb{R}^n$ *функция* $\mathscr{F}_0$ *принимает постоянное значение на каждой связной компоненте* S_h.

Доказательство. Поскольку $\mathscr{F}_0$ — интеграл системы уравнений (7.3) при $\varepsilon = 0$, то (по теореме Кронекера) $\mathscr{F}_0$ принимает постоянное значение на каждом нерезонансном торе $\mathbb{T}^n$. Так как это тор приводимый и невырожденный, то $d\mathscr{F}_0 = 0$ в точках $\mathbb{T}^n$ (см. [40], гл. IV). Согласно условию A, для почти всех значений $h \in \mathbb{R}^n$ нерезонансные торы всюду плотны на S_h. Следовательно, $d\mathscr{F}_0 = 0$ на таких многообразиях S_h. Отсюда вытекает, что $\mathscr{F}_0$ принимает постоянные значения на их связных компонентах. Для остальных значений h заключение предложения 1 вытекает из соображений непрерывности.

Замечание. Как видно из доказательства, в условии A вместо «для почти всех допустимых значений $h \in \mathbb{R}^n$» можно было бы сказать «для всюду плотного множества значений $h \in \mathbb{R}^n$». Однако, такое ослабление условия A практически не дает ничего нового.

В дальнейшем будет использовано предположение о всюду плотности множества максимально резонансных торов (когда все частоты рационально выражаются через одну частоту). Это условие вместе с условием A означает «перемежаемость» резонансных и нерезонансных инвариантных торов и заменяет условие невырожденности невозмущенной вполне интегрируемой системы в теории Пуанкаре.

§ 9. Энергетические поверхности

Будем рассматривать случай, когда функция $H_0 : \Gamma \to \mathbb{R}$ имеет конечное число критических значений $a_1 < a_2 < \ldots < a_r$, причем $a_1 = \min H_0$. Такая ситуация часто встречается в приложениях. При прохождении полной энергии h_0 через критическое значение теряется непрерывная зависимость энергетической поверхности Σ_{h_0} от h_0. При этом, как правило, меняется ее топология.

На рис. 21 изображен график гамильтониана H_0 с тремя критическими значениями. Точки a_1 и a_3 — стационарные значения H_0, а критическая точка a_2 стационарным значением не является. Наличие критических точек, не являющихся стационарными, — характерное свойство потенциалов, описывающих гравитационное или кулоновское взаимодействие.

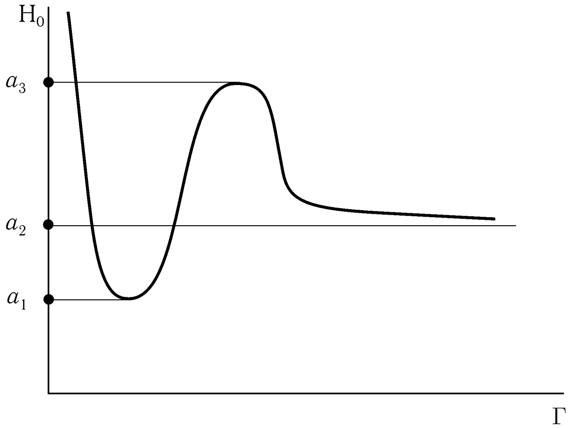

Рис. 21. График гамильтониана.

Обозначим через $K_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ открытый параллелепипед в $\mathbb{R}^n = \{h_1, \ldots, h_n\}$, который является прямым произведением интервалов

$$a_{i_1} < h_1 < a_{i_1+1}, \ \ldots, \ a_{i_n} < h_n < a_{i_n+1}. \tag{9.1}$$

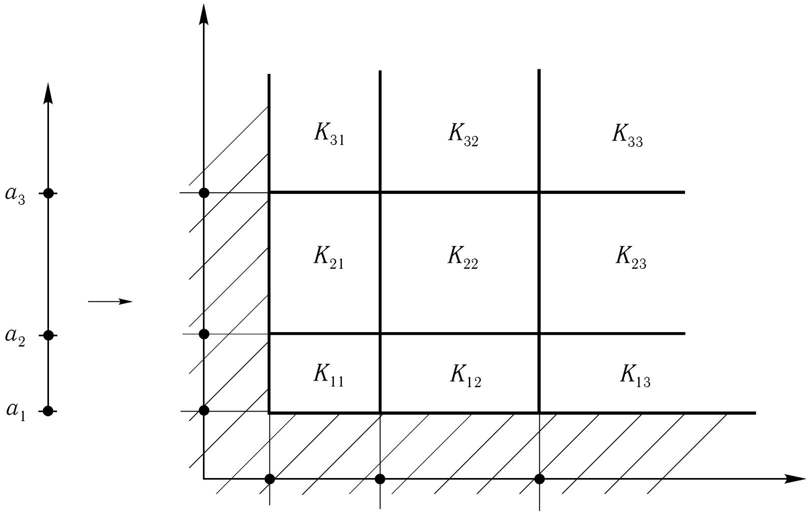

Рис. 22. Области регулярности.

Если номер $i_s + 1$ окажется больше r, то a_{i_s+1} надо заменить символом ∞. На рис. 22 эти области изображены для $n = 2$ и $r = 3$. Каждой точке $h \in K_i$, $i = (i_1, \ldots, i_n)$ отвечает гладкое регулярное многообразие, которое может состоять из нескольких связных частей. Количество связных компонент S_h не зависит от точки $h \in K_i$; обозначим это число $\varkappa_i$.

Введем в фазовом пространстве $\mathscr{T}$ открытые области $\mathscr{K}_i$, которые определяются неравенствами, аналогичными (9.1):

$$a_{i_1} < H_1(p^{(1)}, q^{(1)}) < a_{i_1+1}, \ldots, a_{i_n} < H_n(p^{(n)}, q^{(n)}) < a_{i_n+1}.$$

Ясно, что замыкание этих областей в совокупности покрывает все $\mathscr{T}$.

Кроме этого, каждое из $\mathscr{K}_i$ состоит ровно из $\varkappa_i$ связных компонент.

Предложение 2. *Для каждой связной компоненты области $\mathscr{K}_i$ существует непрерывно дифференцируемая функция*

$$f_i : K_i \to \mathbb{R},$$

такая, что в этой области имеет место равенство

$$\mathscr{F}_0 = f_i(H_1, H_2, \ldots, H_n). \tag{9.2}$$

Замечание. На самом деле функция f_i принадлежит классу гладкости C^2. Однако для дальнейшего это не имеет существенного значения.

Доказательство. Ясно, что область $\mathscr{K}_i$ расслоена на регулярные поверхности S, на которых (точнее, на связных компонентах которых) функция $\mathscr{F}_0$ постоянна (предложение 1). Следовательно, в каждой связной компоненте $\mathscr{K}_i$ функция $\mathscr{F}_0$ допускает естественное представление (9.2). По определению, в каждой точке $\mathscr{K}_i$ функции $H_1, \ldots, H_n$ независимы. Поэтому локально можно ввести новые координаты так, что в качестве n переменных будут фигурировать $H_1, \ldots, H_n$. Переход к таким координатам заведомо осуществляется с помощью непрерывно дифференцируемого обратимого преобразования. В новых переменных функция $\mathscr{F}_0$ непрерывно дифференцируема и зависит лишь от n переменных $H_1, \ldots, H_n$. Что и требовалось.

§ 10. Резонансы

Рассмотрим снова инвариантный тор $\mathbb{T}^n$ невозмущенной системы, на котором уравнения движения приводятся к виду (8.4). Этот тор назовем полностью резонансным, если найдутся $n-1$ линейно независимых целочисленных векторов

$$u = (u_1, \ldots, u_n), \quad v = (v_1, \ldots, v_n), \ldots, \quad w = (w_1, \ldots, w_n),$$

таких, что

$$(u, \omega) = u_1\omega_1 + \ldots + u_n\omega_n = 0, \quad (v, \omega) = 0, \ldots, \quad (w, \omega) = 0. \quad (10.1)$$

Другими словами, все частоты ω рационально выражаются через одну из них. Это эквивалентно предложению, что все решения дифференциальных уравнений (8.4) на торе $\mathbb{T}^n$ периодические с одним и тем же периодом.

Пусть Φ — ограничение возмущающей функции $\mathscr{H} : \mathscr{T} \to \mathbb{R}$ на инвариантный тор $\mathbb{T}^n$. Ясно, что Φ — 2π-периодическая функция от $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \varphi$. Сопоставим ей кратный ряд Фурье

$$\Phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi_k \exp i(k, \varphi). \quad (10.2)$$

Резонансный тор назовем *тором Пуанкаре*, если коэффициенты Фурье разложения (10.2) с номерами $u, v, \ldots, w$ отличны от нуля. Поскольку торы Пуанкаре составлены из отдельных замкнутых траекторий, то они не обладают «жесткостью» и разрушаются при добавлении возмущения. Не исключено, что из семейства вырожденных периодических траекторий, составляющих тор Пуанкаре, при возмущении рождается конечное число невырожденных периодических траекторий с близким периодом.

Введем наконец, *множество Пуанкаре* $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^n$. Это множество точек из $\mathbb{R}^n = \{h_1, \ldots, h_n\}$, в которые переходят торы Пуанкаре при отображении «энергии» $\mathscr{T} \to \mathbb{R}^n$: точка с координатами

$$(P, Q) = (p^{(1)}, \ldots, p^{(n)}, q^{(n)}, \ldots, q^{(n)})$$

переходит в точку с координатами

$$h_1 = H_1(p^{(1)}, q^{(1)}), \ldots, \quad h_n = H_n(p^{(n)}, q^{(n)}).$$

Замечание. В теории Пуанкаре [40, 56] обычно предполагается, что невозмущенная система с гамильтонианом $\mathscr{H}_0$ вполне интегрируема и невырождена. Поэтому ее первые интегралы — это набор переменных действие, которые «нумеруют» инвариантные торы. Множество Пуанкаре (введенное в [40]) здесь определяется как множество точек в пространстве переменных действие, которым соответствуют полностью резонансные торы, разрушающиеся при добавлении возмущения. В нашем случае функции $H_1, \ldots, H_n$ составляют набор интегралов невозмущенной задачи и множество Пуанкаре — это множество точек в пространстве значений этих интегралов.

Предложение 3. *В точках множества Пуанкаре $\mathbb{P}$ функции*

$$\mathscr{H}_0 = \sum_{s=1}^{n} H_s \quad \text{и} \quad \mathscr{F}_0 = f(H_1, \ldots, H_n)$$

зависимы.

Доказательство. Пусть $\{\,,\}$ — скобка Пуассона, связанная с симплектической структурой на $\mathscr{T}$. Так как функция $\mathscr{F}$ — первый интеграл канонической системы (7.3), то $\{\mathscr{H}, \mathscr{F}\} = 0$ для всех значений ε. Поскольку $\{\mathscr{H}_0, \mathscr{F}_0\} = 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\{\mathscr{H}, \mathscr{F}\}}{\varepsilon} = 0. \tag{10.3}$$

Используя разложения (7.2) и (7.4), из (10.3) получаем равенство

$$\{\mathscr{H}_0, \mathscr{F}_1\} = \{\mathscr{F}_0, \mathscr{H}_1\}. \tag{10.4}$$

Хорошо известно, что $\{\mathscr{F}_0,\,\mathscr{H}_1\}$ — производная от $\mathscr{F}_1$ в силу канонической системы дифференциальных уравнений с гамильтонианом $\mathscr{H}_0$. Аналогичный смысл имеет скобка Пуассона $\{\mathscr{F}_0,\,\mathscr{H}_1\}$. Кроме того, по формуле (9.2),

$$\{\mathscr{F}_0,\,\mathscr{H}_1\} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial H_s}\,\{H_s,\,\mathscr{H}_1\}. \tag{10.5}$$

Ограничим теперь равенство (10.4) на инвариантный тор $\mathbb{T}^n$. Ясно, что $\{\mathscr{H}_0,\,\mathscr{F}_1\}$ равно производной ограничения функции $\mathscr{F}_1$ на $\mathbb{T}^n$ в силу системы дифференциальных уравнений (8.4). Пусть $\Psi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ — ограничение $\mathscr{F}_1$ на $\mathbb{T}^n$ и

$$\Psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \psi_k \exp i(k,\,\varphi) \tag{10.6}$$

— ее ряд Фурье. В точках $\varphi \in \mathbb{T}^n$ левая часть (10.4) принимает вид

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} i(k,\,\omega)\psi_k \exp i(k,\,\varphi). \tag{10.7}$$

С учетом формул (10.2) и (10.5) правая часть соотношения (10.4) в точках инвариантного тора равна

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} i\Big(\frac{\partial f}{\partial H_1}\,k_1\omega_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial H_n}\,k_n\omega_n\Big)\varphi_k \exp i(k,\,\varphi). \tag{10.8}$$

Сопоставляя (10.7) и (10.8), получаем цепочку равенств

$$(k,\,\omega)\psi_k = (\xi_1 k_1\omega_1 + \ldots + \xi_n k_n\omega_n)\varphi_k, \quad k \in \mathbb{Z}^n; \quad \xi_j = \partial f/\partial H_j. \tag{10.9}$$

Пусть теперь $\mathbb{T}^n$ — это тор Пуанкаре. Полагая k равным $u,\,v,\,\ldots,\,w$ получим, что ω как вектор n-мерного пространства ортогонален гиперплоскости Π, порожденной линейно независимыми векторами $u,\,v,\,\ldots,\,w$. Поскольку $(u,\,\omega) = \ldots = (w,\,\omega) = 0$, а $\varphi_u \neq 0,\,\ldots,\,\varphi_w \neq 0$, то из (10.9) получаем $n-1$ линейных соотношений:

$$\begin{gathered} u_1(\xi_1\omega_1) + \ldots + u_n(\xi_n\omega_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_1(\xi_1\omega_1) + \ldots + w_n(\xi_n\omega_n) = 0. \end{gathered}$$

Отсюда вытекает, что вектор с компонентами $\xi_1\omega_1,\,\ldots,\,\xi_n\omega_n$ ортогонален гиперплоскости Π и поэтому коллинеарен вектору $\omega = (\omega_1,\,\ldots,\,\omega_n)$. Следовательно, $\xi_1 = \ldots = \xi_n$.

Таким образом, в точках множества Пуанкаре производные $\partial f/\partial H_1, \ldots, \partial f/\partial H_n$ равны между собой, что, очевидно, означает зависимость функций $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{F}_0$.

Замечание. Поскольку функции Φ и Ψ считаются лишь один раз непрерывно дифференцируемыми, то ряды Фурье (10.2), (10.6)–(10.8) могут оказаться расходящимися. В этом случае соотношения (10.9) можно вывести по-другому. Для этого умножим производную по времени

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\,\omega_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_n}\,\omega_n$$

на $\exp i(k,\,\omega)$, применим операцию усреднения по $\mathbb{T}^n$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{T}^n} (\cdot)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n$$

и воспользуемся интегрированием по частям. В результате получим левую часть соотношения (10.9) с точностью до множителя $-i$. Аналогично получается правая часть (10.9).

Введем еще условие

B) *Множество Пуанкаре $\mathbb{P}$ всюду плотно в каждом параллелепипеде K_i.*

Из предложения 3 вытекает

Следствие. *Если выполнены условия A и B, то функции $\mathscr{F}_0$ и $\mathscr{H}_0$ всюду зависимы.*

Отсюда немедленно вытекает, что в каждом параллелепипеде K_i имеет место следующее представление:

$$\mathscr{F}_0 = F_i(\mathscr{H}_0), \tag{10.10}$$

где F_i — некоторая непрерывно дифференцируемая функция.

Действительно, вводя вместо $H_1, \ldots, H_n$ новые переменные $H_1, \ldots, H_{n-1}$, $\mathscr{H}_0 = \Sigma H_s$, формулу (9.2) можно записать по-другому:

$$\mathscr{F}_0 = f_i(H_1, \ldots, H_{n-1}, \mathscr{H}_0 - H_1 - \ldots - H_{n-1}).$$

Поскольку функции $\mathscr{F}_0$ и $\mathscr{H}_0$ зависимы, то правая часть этого равенства на самом деле не зависит от $H_1, \ldots, H_{n-1}$.

§ 11. Распределение ансамбля при исчезающем взаимодействии

Устремим теперь ε к нулю. В пределе получается n несвязанных друг с другом подсистем, которые движутся независимо: изменение начальных данных $p^{(l)}$, $q^{(l)}$ при $l \neq s$ никак не скажется на динамике s-ой подсистемы. Чтобы быть последовательными, при $\varepsilon = 0$ также следует предположить, что пребывание s-ой подсистемы в фиксированном состоянии $(p^{(s)}, q^{(s)}) \in \Gamma$ является случайным событием. Ключевую роль при выводе распределения Гиббса играет следующее естественное условие

C) *Эти случайные события независимы.*

Если $\rho(p^{(s)}, q^{(s)})$, $1 \leqslant s \leqslant n$ — плотность распределения вероятностей s-ой подсистемы, а

$$\rho(P, Q, \varepsilon) = \rho_0(P, Q) + O(\varepsilon)$$

— плотность распределения вероятностей в исходной системе с гамильтонианом (7.1) то при $\varepsilon \to 0$ из условия C и правила умножения вероятностей независимых событий получим:

$$\rho_0 = \rho_1 \ldots \rho_n. \tag{11.1}$$

Равенство (11.1) называется еще гипотезой Гиббса о сохранении термодинамического равновесия подсистем при исчезающем взаимодействии.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия A, B и C. Тогда*

$$\rho_s = c_s e^{-\frac{H_s}{k\tau}}, \quad c_s = \mathrm{const} > 0 \tag{11.2}$$

для всех $1 \leqslant s \leqslant n$.

В частности, согласно (11.1),

$$\rho_0 = c_0 e^{\frac{\mathscr{H}_0}{k\tau}}, \quad c_0 = c_1, \ldots, c_n.$$

Из (11.1) видно, что все отдельные подсистемы распределены одинаково. Множители c_s разумеется, находятся из условия нормировки

$$\int\limits_{\Gamma} \rho_s \, d^n p \, d^n q = 1.$$

Доказательство теоремы. Отметим сначала, что ρ_s — функция только от гамильтониана H_s, непрерывно дифференцируемая в каждом из открытых интервалов

$$(a_1,\, a_2), \quad (a_2,\, a_3),\, \ldots, \quad (a_r,\, \infty). \tag{11.3}$$

Точнее, таких функций ровно столько, сколько связных компонент имеет поверхность уровня Σ_{h_s}, когда энергия h_s изменяется в каждом из интервалов (11.3). Некоторые их этих функций могут совпадать.

Действительно, для почти всех $h_s \geqslant a_1$ на энергетических поверхностях Σ_{h_s} гамильтонова система с гамильтонианом H_s имеет всюду плотное множество невырожденных периодических траекторий. В противном случае из-за идентичности отдельных подсистем не будет выполнено условие A. Далее, как заметил еще Пуанкаре [56], точки невырожденных периодических траекторий являются стационарными для ограничения любого первого интеграла на Σ_{h_s}. Ввиду непрерывности, первые интегралы гамильтоновой системы с функцией Гамильтона H_s постоянны на связных компонентах Σ_{h_s}. Остается заметить, что ρ_s — первый интеграл и использовать рассуждения § 9 (в упрощенном варианте).

Вернемся теперь к уравнению (11.1), справедливому в каждом параллелепипеде K_i:

$$\rho_0(H_1 + \ldots + H_n) = \rho_1(H_1) \ldots \rho_n(H_n). \tag{11.4}$$

Это функциональное уравнение легко решается. Продифференцируем (11.4) последовательно по $H_1,\, \ldots,\, H_n$ и разделим на произведение $\rho_1 \ldots \rho_n$. В результате получаем серию уравнений

$$\frac{\rho_1'}{\rho_1} = \ldots = \frac{\rho_n'}{\rho_n} = -\beta.$$

Здесь β — некоторая постоянная, не зависящая от номера s. Отсюда

$$\rho_s = c_s e^{-\beta H_s}, \quad c_s - \mathrm{const}. \tag{11.5}$$

Постоянная β имеет размерность, обратную размерности энергии. Обычно полагают $\beta = (k\tau)^{-1}$, где τ — абсолютная температура, а k — постоянная Больцмана.

Следует иметь ввиду, что формула (11.5) может зависеть от выбора мультииндекса $i = (i_1,\, \ldots,\, i_n)$. Более точно, коэффициенты β и c_s в (11.5) свои для каждой связной компоненты множества $\mathscr{K}_i \subset \mathscr{T}$.

Однако, легко показать, что постоянная β имеет универсальный характер. Действительно, пусть для некоторой связной компоненты области $\mathscr{K}_i$ при некотором i постоянные β в формуле (11.5) принимают значения $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Тогда, согласно (11.1), в этой области

$$\rho_0 = c_0 e^{\Sigma \beta_s H_s}. \tag{11.6}$$

Если не все β_s равны между собой, то функции (11.6) и $\mathscr{H}_0 = \Sigma H_s$ будут независимыми. Однако это противоречит следствию из предложения 3.

Это рассуждение имеет прозрачный физический смысл: при термодинамическом равновесии все составные части системы имеют одинаковую температуру.

Остается еще возможность, что постоянные c_s в формуле (11.5) разные для разных интервалов значений энергии (11.3). Но эта возможность на самом деле не реализуется ввиду свойства непрерывности функций $\rho_s : \Gamma \to \mathbb{R}$.

Теорема полностью доказана.

В заключение сделаем одно важное замечание. Из теории Гиббса ниоткуда не вытекает, что плотности распределения вероятностей $\rho_1, \ldots, \rho_n$ должны быть непрерывными функциями в Γ. Можно рассматривать более общую ситуацию и предположить, например, что функции ρ_s непрерывно дифференцируемы лишь в областях фазового пространства Γ, в которых энергия заключена между ее соседними критическими значениями

$$a_r < H_s < a_{r+1} \quad (r = 1, \ldots, p; \quad a_{p+1} = \infty). \tag{11.7}$$

Естественность такого предположения видна уже на примере математического маятника: сепаратрисы на фазовом цилиндре разделяют области с принципиально различным типом движений (колебания и вращения).

Применяя развитый выше метод, мы снова приходим к формуле (11.2), только постоянные c_s принимают разные значения в разных областях (11.7). Более того, эти константы могут быть разными для разных связных компонент областей (11.7). Вполне возможно, что такое обобщенное разрывное распределение Гиббса может оказаться полезным при рассмотрении конкретных термодинамических систем.

Предположим, например, что в фазовом пространстве Γ имеется всего две области Γ_+ и Γ_- вида (11.7). В областях $\Gamma_\pm$ мы имеем плотности распределения

$$c_{\pm} e^{-\frac{H}{k\tau}}.$$

Постоянные c_+ и c_- находятся из условия нормировки

$$c_+ \int\limits_{\Gamma_+} e^{-\frac{H}{k\tau}}\, d^n p\, d^n q + c_- \int\limits_{\Gamma_-} e^{-\frac{H}{k\tau}}\, d^n p\, d^n q = 1.$$

Если задана разность $\Delta = c_+ - c_-$, то из этого равенства коэффициенты $c_{\pm}$ находятся однозначно:

$$c_+ \int\limits_{\Gamma} e^{-\frac{H}{k\tau}}\, d^n p\, d^n q = 1 + \Delta \int\limits_{\Gamma_-} e^{-\frac{H}{k\tau}}\, d^n p\, d^n q,$$

$$c_- \int\limits_{\Gamma} e^{-\frac{H}{k\tau}}\, d^n p\, d^n q = 1 - \Delta \int\limits_{\Gamma_+} e^{-\frac{H}{k\tau}}\, d^n p\, d^n q.$$

Поскольку $c_{\pm} > 0$, то правые части этих равенств должны быть положительными. Это заведомо так, если скачок Δ удовлетворяет неравенству

$$|\Delta| < \left[\int\limits_{\Gamma} e^{-\frac{H}{k\tau}}\, d^n p\, d^n q \right]^{-1}.$$

Можно ли распределение вероятностей с кусочно-гладкой функцией распределения получить методом Дарвина – Фаулера?

Примечания и библиография

Глава I

1. Материалы дискуссии по проблеме необратимости (в которой кроме Больцмана приняли участие Лошмидт, Цермело, Лармор и другие ученые) опубликованы в книге [13].

2. Автору известна лишь одна работа на русском языке, в которой упоминаются результаты Пуанкаре по кинетике бесстолкновительной среды. Это — неоконченная книга Н. С. Крылова по обоснованию статистической механики [49]. Н. С. Крылов дает весьма критический анализ текста Пуанкаре, из которого становится ясным, что он также не понял точку зрения Пуанкаре по поводу статистического смысла второго начала термодинамики (подробнее об этом в гл. II).

Отчасти здесь имеется «вина» и самого Пуанкаре. В. И. Арнольд однажды заметил: «К сожалению, бесхитростные тексты Пуанкаре трудны для математиков, воспитанных на теории множеств. Видимо поэтому многие его идеи остались незамеченными ближайшими к нему поколениями». Наверное, такое же замечание можно отнести не только к математикам, но и к физикам (некоторые считают, что работы Пуанкаре по релятивистской теории тоже написаны не очень ясно).

В текстах Пуанкаре иногда встречаются действительно странные вещи: в разных местах одной и той же работы могут содержаться *различные* точки зрения по *одному и тому же* вопросу! Так во введении к своей книге «Теория вероятностей» (1912 г.) он обсуждает вопрос о влиянии формы сосуда на стремление бесстолкновительного газа к равномерному распределению. Пуанкаре замечает, что этого заведомо не случится, если сосуд сферический или имеет форму *прямоугольного параллелепипеда* (ввиду свойства интегрируемости биллиардов в этих областях). С другой стороны, книга заканчивается фразой о том, что бесстолкновительный газ в *прямоугольном параллелепипеде* независимо от закона начального распределения в конце концов равномерно заполнит этот сосуд.

3. Теорема 1 сформулирована и доказана в работе [83]. Это утверждение справедливо и при некоторых других ограничениях на функции f и g. Например, пусть $f(\omega, x)$ — абсолютно суммируемая по Лебегу функция, причем при каждом значении ω она суммируема с квадратом как функция на $\mathbb{T}^n$. Функция $g(x)$ считается суммируемой с квадратом. Если

$$\sum_m |g_{-m}| \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_m(\omega)|\, d^m\omega < \infty, \tag{1}$$

то предел $K(t)$ при $t \to \pm\infty$ существует и равен $\langle f\rangle \overline{g}$.

Доказательство. Зафиксируем сначала значения ω и t. Так как функции $f(\omega, x - \omega t)$ и $g(x)$ принадлежат классу $L_2(\mathbb{T}^n)$, то

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} f(\omega, x - \omega t) g(x)\, d^n x = \sum_m f_m(\omega) g_{-\omega} e^{-i(m,\omega)t}. \tag{2}$$

Поскольку $|f| \in L_1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n)$, то (по теореме Фубини) функции f_m интегрируемы на $\mathbb{R}^n$. Ввиду условия (1) ряд

$$\sum_m |f_m(\omega) g_{-m}|$$

сходится к некоторой интегрируемой функции (теорема Леви). Отсюда в свою очередь вытекает (по теореме Леви), что сумма ряда (2) представляет интегрируемую функцию в $\mathbb{R}^n$ и

$$K(t) = \sum_m g_{-m} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_m(\omega) e^{-i(m,\omega)t}\, d^n\omega. \tag{3}$$

Поскольку f_m — интегрируемая функция, то (согласно теории преобразования Фурье)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_m(\omega) e^{-i(m,\omega)t}\, d^n\omega \to 0$$

при $t \to \infty$, когда $m \neq 0$.

Из условия (1) вытекает равномерная сходимость ряда (3) по t. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что сумма его членов с номерами $|m| > N$ будет меньше $\varepsilon/2$ при всех значениях t. С другой стороны, сумма конечного числа оставшихся членов с номерами $m \neq 0$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Поэтому при $t > T(\varepsilon)$ она будет меньше $\varepsilon/2$ (T зависит, конечно, от N). Так как

$$(2\pi)^n g_0 \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(\omega)\, d^n\omega = \langle f\rangle \overline{g},$$

то $|K(t) - \langle f\rangle \overline{g}| < \varepsilon$ при всех $t > T(\varepsilon)$. Что и требовалось доказать.

При доказательстве этого утверждения (как и теоремы 1) использовался следующий факт: если f — интегрируемая функция в $\mathbb{R}^n = \{\omega\}$ и $m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, то

$$F(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\omega) e^{-i(m,\omega)t}\, d^n\omega \to 0$$

при $|t| \to \infty$. На всякий случай приведем его доказательство.

Можно считать, что $m = km'$, где k — целое, а числа $(m'_1, \ldots, m'_n) = m'$ взаимно просты. Из алгебры известно, что найдутся $n-1$ целочисленных векторов $s, \ldots, p$, таких, что

$$\begin{vmatrix} m'_1, \ldots, m'_n \\ s_1, \ldots, s_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_1, \ldots, p_n \end{vmatrix} = 1.$$

Выполним линейную замену переменных $\omega \mapsto m'$ по формулам

$$\begin{gathered} \omega'_1 = m'_1\omega_1 + \ldots + m'_n\omega_n, \\ \omega'_2 = s_1\omega_1 + \ldots + s_n\omega_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega'_n = p_1\omega_1 + \ldots + p_n\omega_n. \end{gathered}$$

Якобиан этой подстановки равен единице. Поэтому

$$F(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\omega') e^{ik\omega'_1 t}\, d\omega'_1 \ldots d\omega'_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\omega'_1) e^{-ik\omega'_1 t}\, d\omega'_1,$$

$$g = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\omega')\, d\omega'_2 \ldots d\omega'_n.$$

По теореме Фубини, функция g интегрируемая. Функция $F(t/k)$ будет фурье-преобразованием функции g. Если g — кусочно-постоянная функция, то, очевидно, $F(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Остается заметить, что кусочно-постоянные функции всюду плотны в L_1.

Пуанкаре в [55] предполагал, что g имеет суммируемую производную и что $g(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. В этом случае

$$F(t) = \frac{1}{ikt} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g'(x) e^{-ikxt}\, dx$$

стремится к нулю как $1/t$.

4. В связи с теоремой о стремлении газа к равномерному заполнению прямоугольного ящика с зеркальными стенками возникает желание привести следующий «контрпример». Предположим, что в начальный момент газ сосредоточен в половине ящика, и *все* его частицы имеют *одну и ту же скорость* v_0, направленную вдоль ребра ящика. Тогда газ будет совершать *периодические* колебания между стенками, вовсе не стремясь равномерно распределиться по всему объему.

В этом случае формулу (4.2) надо заменить на следующую:

$$f(\omega,\, x) = \lambda(x)\delta(v - v_0).$$

Сразу видно, что здесь нет никакого *распределения* частиц по скоростям. Плотность f даже не функция и уж заведомо $f \notin L_1$.

Обсудим еще один вопрос, восходящий к Лошмидту и связанный с обращением скоростей всех частиц газа. Предположим, что прямоугольный ящик поделен перегородкой на две половины и бесстолкновительный газ долгое время находился в одной из них. По теореме 1, такой газ будет равномерно распределен по половине объема ящика. В момент времени $t = 0$ резко уберем перегородку. Тогда газ начнет растекаться по всему объему ящика. Через большой промежуток времени $t = t_0$ он практически равномерно заполнит обе половины с уменьшенной вдвое плотностью. Обратим теперь в момент t_0 скорости *всех* частиц газа. Тогда частицы будут двигаться по своим траекториям в обратную сторону и через время t_0 весь газ снова соберется в первой половине ящика. Если в этот момент поставить заслонку, то газ окажется в первоначальном равновесном состоянии. Если же перегородку не ставить, то частицы газа будут двигаться по всему объему ящика и в конце концов (по теореме 1) равномерно заполнят этот объем. Таким образом, хотя бесстолкновительная сплошная среда демонстрирует необратимое поведение, ее предельные состояния при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$ совпадают.

5. Теорема 2 доказана в [83]. Тем же методом можно исследовать диффузию в динамических системах с интегральным инвариантом на двумерном торе (добавление 7). Эти системы изучались в работах А. Пуанкаре и А. Н. Колмогорова.

Неравномерная возвращаемость является механизмом диффузии в гамильтоновых системах с линейным по импульсам гамильтонианом (добавление 8).

7. Подробные вычисления Пуанкаре скачков энтропии для *одномерного* газа носят качественный характер и нацелены главным образом на доказательство *роста* энтропии для адиабатических необратимых процессов. Однако (в отличие от нашего примера) величину этих скачков нельзя сопоставить с предсказаниями феноменологической термодинамики.

8. *Демон Максвелла* описан Максвеллом в его книге «Theory of Heat» (1871 г.). Это проворное существо располагается в небольшом отверстии в перегородке, разделяющей сосуд на две части A и B. Демон пропускает через отверстие *быстрые* частицы, которые перелетают из A в B, и *медленные* частицы, которые перелетают из B в A. В результате через некоторое время в камере A соберутся, в основном, медленные частицы, а в камере B — быстрые. В результате возникнет разность температур без совершения работы в противоречие со вторым началом термодинамики.

Недавно Г. М. Заславский предложил динамическую реализацию демона Максвелла, в основе которой лежит представление об идеальном газе как бесстолкновительной среде (см. [99–101]). Вообразим себе перегороженный пополам ящик с небольшим отверстием в перегородке. В одну из половинок поместим окружность, а в другую — *овал Кассини*, причем эти кривые ограничивают фигуры *равной площади*. Частицы свободно двигаются по камерам, упруго отражаясь от границ и от этих двух кривых (рис. 23).

Если закрыть отверстие, то получим два биллиарда: *рассеивающий биллиард Синая* (с кругом) и *биллиард Кассини* (термин Г. М. Заславского). Ввиду выпуклости круга, биллиард Синая будет эргодическим и даже с перемешиванием [64]. Эргодические свойства биллиарда Кассини зависят от

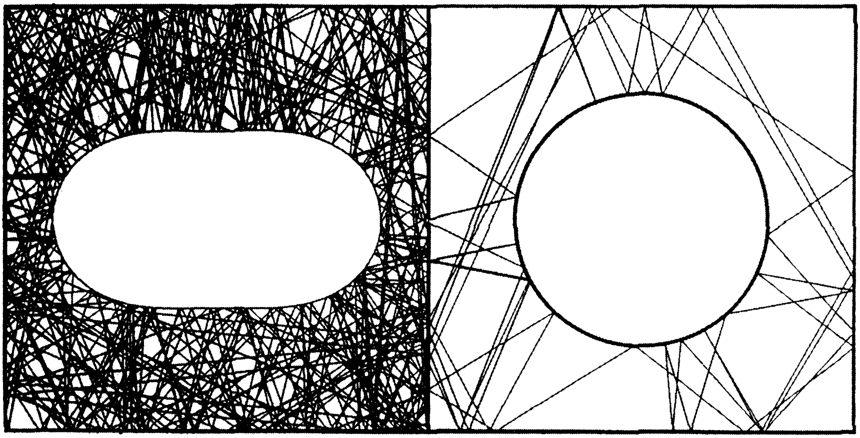

Рис. 23. Динамический демон Максвелла (из работы [99])

параметров a и c, которые содержатся в уравнении овала: $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) - (a^4 - c^4) = 0$. При $a \geqslant \sqrt{2}\,c$ овал выпуклый и поэтому биллиард будет эргодическим (по теореме Синая). Если $a < \sqrt{2}\,c$, то эргодичности может не быть. Например, при $a = 4,0309525$ и $c = 3$ в отображении Пуанкаре возникает фрактальная структура островов устойчивости, обнаруженная численно в [101].

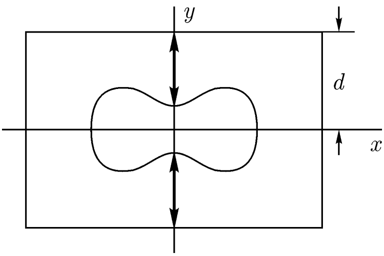

Рис. 24. Устойчивые периодические траектории биллиарда Кассини

Запустим теперь частицу газа и будем следить за долями времени, в течение которого она будет находиться слева или справа от перегородки. Неожиданный результат Г. М. Заславского состоит в том, что бо́льшую часть времени частица проводит в левой части, где расположен овал Кассини (несмотря на то, что площади левой и правой камер совпадают). Разницу в средних временах можно интерпретировать (по Заславскому) как различие эффективных давлений бесстолкновительного газа в левой и правой камерах.

Кстати сказать, наличие *зон устойчивости* для биллиарда Кассини можно доказать аналитически при некоторых ограничениях на параметры этого биллиарда. Для этого надо рассмотреть простые *двузвенные* периодические траектории, изображенные на рис. 24. Условие их устойчивости в *линейном приближении* легко получить, используя известные результаты (см. [45]):

$$d < \frac{2c^2\sqrt{a^2 - c^2}}{2c^2 - a^2}. \tag{4}$$

Здесь d — половина стороны объемлющего прямоугольника (см. рис. 24). При этом, конечно, должны быть выполнены неравенства $a^2 > c^2$ и $a^2 < 2c^2$. Первое из них — условие *связности* овала Кассини, а второе — условие его *невыпуклости*. Как вытекает из результатов КАМ-теории, для почти всех значений параметров a, c, d, удовлетворяющих неравенству (4), указанные периодические траектории на самом деле заведомо устойчивы по Ляпунову (см. [88]). Таким образом, если частицу запустить вблизи такой траектории, то она будет вечно находиться в ее малой окрестности и никогда не попадет в щель между двумя камерами. Нетрудно проверить, что численные данные для a, c, d, использованные Заславским, удовлетворяют условию (4).

9. Содержание этого параграфа имеет определенное отношение к *супераэродинамике* (термин Х. Ш. Тзяна) — аэродинамике сильно разреженных газов, когда средний свободный молекулярный пробег становится много больше размеров движущегося тела. В расчетах с ультраразреженными газами, как правило, продолжают пользоваться распределением Максвелла. При этом появляются существенные расхождения с экспериментальными данными (см. по этому поводу, например, [23]). Характерная цитата из [23]: «Но поскольку другие данные отсутствуют, будем рассматривать газ согласно Максвеллу; это, конечно, весьма грубое приближение».

Глава II

2–4. Теорема 2 указана в работе [43]. Там же предложен метод исследования слабой сходимости вероятностных мер, основанный на теореме Стоуна о спектральном разложении группы унитарных операторов.

Биркгофовские средние можно определять (и вычислять) не только как предел средних арифметических. Сходимость по Чезаро можно заменить более общими определениями (например, *сходимостью по Вороному* и *Риссу*). Имеется продвинутая теория, которая связывает общие линейные методы суммирования расходящихся рядов и последовательностей с эргодическими теоремами. С этим кругом вопросов можно познакомиться, например, по работе [42], в которой приведена соответствующая библиография.

Доказательство теоремы 2, основанное на формуле Стоуна, приведено в работе [43].

5–6. Слоистые потоки и φ_ω-однородные векторные поля введены в [47]. Эти объекты тесно связаны с *квазиоднородными* динамическими системами. В той же работе [47] установлена теорема 3. Первоначальное ее доказательство, основанное на теореме Стоуна, воспроизведено в § 6. Затем было найдено другое доказательство, которое использует новую форму статистической теоремы фон Неймана (см. по этому поводу § 8). Именно это доказательство приведено в [47].

7. Формулу скачка энтропии

$$S_+ - S_- = \ln \frac{v_+}{v_-} \tag{5}$$

для свободного расширения газа в пустоту (Введение, п. 3) можно обосновать не только для сосуда в форме прямоугольного параллелепипеда (глава I, § 7), но и для сосудов, в которых потоки с отражениями являются эргодическими. Рассмотрим, например, сосуд объема v_+ с *вогнутыми* стенками (рассеивающий биллиард Синая). Предположим, что в начальный момент газ находился в тепловом равновесии и занимал часть сосуда с объемом v_-, у которого стенки также вогнуты. Уберем теперь перегородку и дождемся равновесного состояния газа в объеме v_+. Легко сосчитать, что $\Delta S = \ln(v_+/v_-)$. Здесь используются теоремы 1 и 3, а также тот факт, что биркгофовское среднее любой суммируемой функции зависит лишь от полной энергии (поскольку биллиард Синая обладает перемешиванием, а поэтому эргодичен).

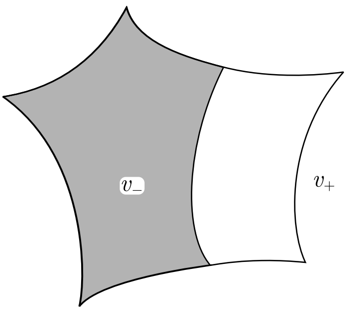

Рис. 25. Расширение газа в случае рассеивающих биллиардов

Для сосудов произвольной формы формула скачка (5), наверное, не справедлива. Здесь нет ничего неожиданного, поскольку в общем случае не происходит даже выравнивания плотности газа. С другой стороны, при традиционном подходе к обоснованию термодинамики (вывод канонического распределения Гиббса) принимают эргодическую гипотезу. Так что неполноту нашего обоснования формулы скачка энтропии можно считать относительной.

Мы знаем, что после снятия перегородки *больцмановская* энтропия начнет возрастать. Но можно ли этот закон возрастания энтропии проверить *экспериментально*? По-видимому нет, поскольку во время переходного процесса термодинамические величины газа *в целом* не определены (например, давление газа будет разным в разных местах сосуда) и поэтому не имеет смысла говорить об энтропии *всего* газа. Как заметил Пуанкаре, «... соображения Гиббса, по-видимому, предполагают, что после изменения внешних условий, до того как изменять их снова, следует подождать, пока установится режим. Это существенное допущение» [55].

График энтропии как функции времени изображен на рис. 26: энтропия принимает одинаковые значения при конечных значениях t, а при $t = -\infty$ и $t = +\infty$ она имеет неотрицательный скачок. Четность функции $t \mapsto S(t)$ является отражением свойства обратимости уравнений динамики. Этот график полезно сравнить с диаграммой Поппера, иллюстрирующей *стрелу времени* по Больцману (стрела времени определяется возрастанием энтропии) (см. [54], гл. 8).

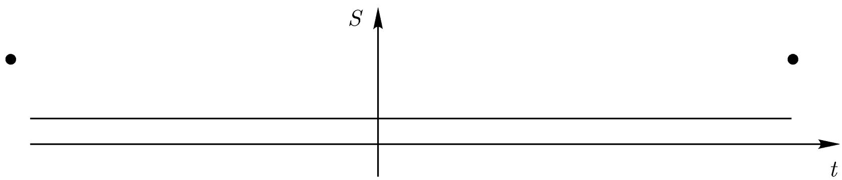

Рис. 26. График энтропии

Глава III

1. Теоремы 1 и 2 отмечены в работе [44]. Теорема 2 напоминает известную теорему Ли Хуа-Джуна об единственности универсальных инвариантов Пуанкаре для гамильтоновых систем.

2–5. Материал этих параграфов взят из работы [81].

В связи с вопросом о массивности вложенных друг в друга пространств из последовательности (3.1) следует упомянуть классический результат В. А. Рохлина о том, что в слабой топологии множество всех сильно перемешивающих преобразований имеет первую категорию (см., например, [72]).

6. *Реальная* атмосфера Земли имеет довольно сложную структуру. Она разделена на пять концентрических страт, которые отделены друг от друга узкими переходными зонами. Основная масса всей атмосферы сосредоточена в *тропосфере* — слое, наиболее близком к поверхности Земли. В среднем температура в тропосфере уменьшается на 6° C на километр. Все проявления погоды происходят в тропосфере, хотя из-за турбулентности может оказывать влияние нижняя часть стратосферы. Слово тропосфера означает «*область смешивания*» и это название возникло по причине присутствия в этом слое сильных конвективных потоков воздуха.

Верхняя граница этого слоя имеет высоту 8 км в верхних широтах и растет до 18 км на экваторе. Она изменяется по сезонам: наибольшая летом и наименьшая зимой.

Стратосфера — второй по значимости страт в атмосфере. Он расположен в интервале высот 10–50 км над поверхностью Земли. Температура воздуха в стратосфере остается относительно постоянной до высоты 25 км, а затем она начинает возрастать с высотой. При этом конвекции нет и атмосферные условия стабильны.

Далее идет *мезосфера* — слой, простирающийся от 50 до 80 км и характеризующийся падением температуры с высотой. На высоте 80 км она достигает 180° K.

Термосфера расположена выше мезосферы. Температура в термосфере увеличивается с высотой вплоть до 1000–1500 градусов Кельвина. Это увеличение обусловлено поглощением интенсивного солнечного излучения ограниченным количеством оставшегося молекулярного кислорода. На таких высотах молекулы газа находятся на большом расстоянии друг от друга и понятие температуры становится условным.

Наконец, *экзосфера* — самая дальняя от земной поверхности часть атмосферы. Верхняя граница этого слоя, вероятно, достигает 1000 км и достаточно неопределенна.

На рисунках 27 и 28 приведены графики зависимости температуры и плотности от высоты места. Интересно отметить, что в диапазоне вы-

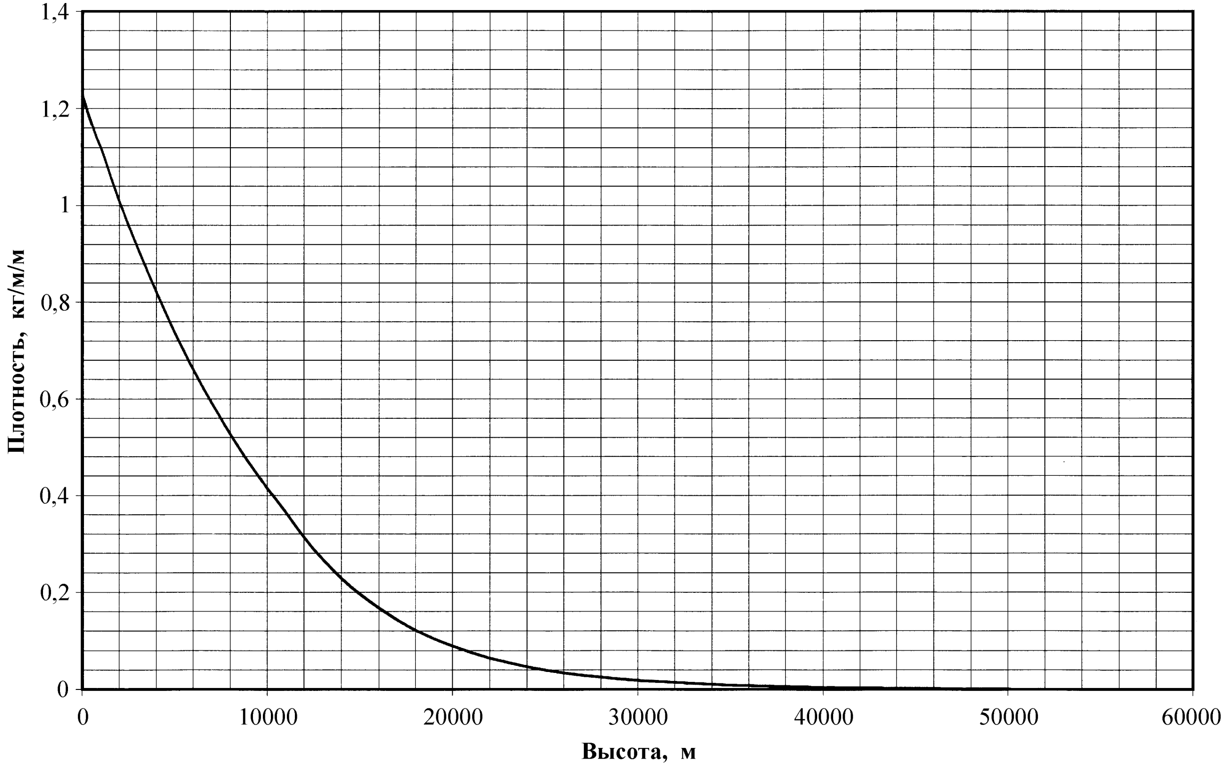

Рис. 27. Зависимость плотности от высоты

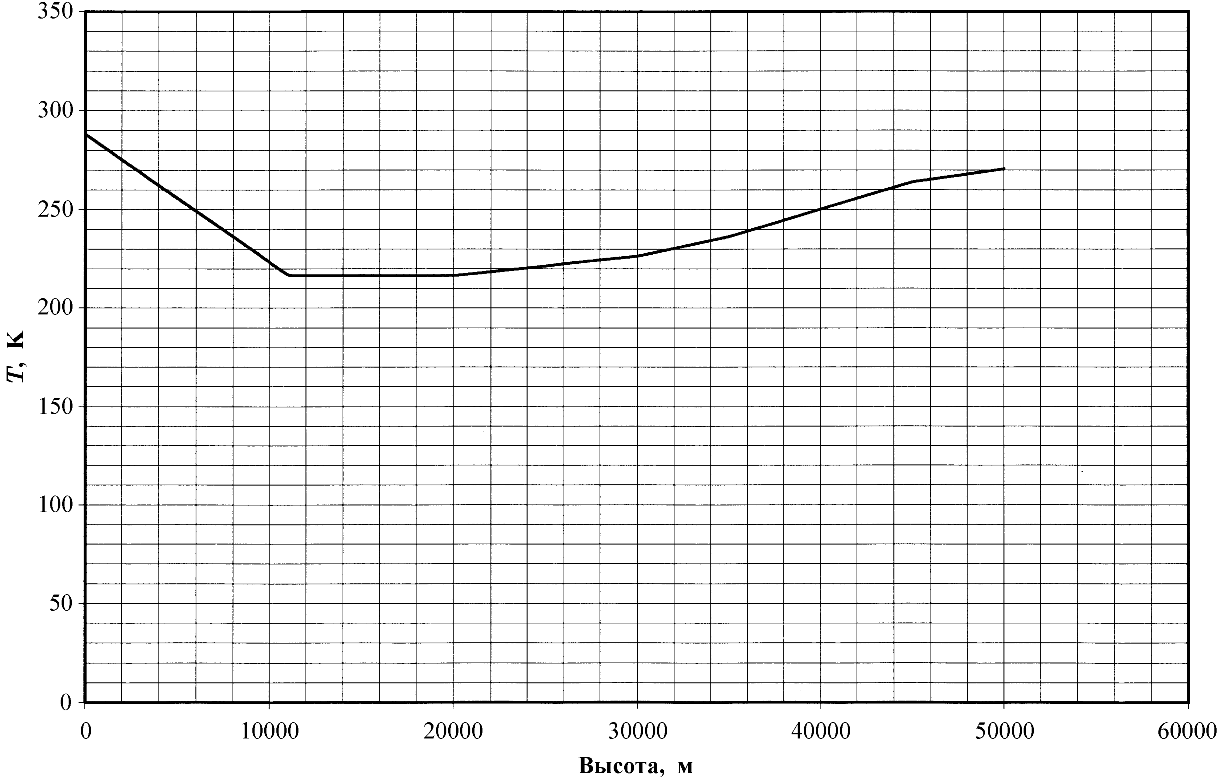

Рис. 28. Зависимость температуры от высоты

сот от 10 до 20 км (где температура не меняется) плотность убывает по экспоненциальному закону (в соответствии с (6.1)).

Интегральное уравнение (6.11) выведено в работе [37]; там же указан способ его явного решения. В этой же работе рассмотрено распределение (6.13) и показано, что после усреднения получаются классические уравнения состояния для идеального газа.

7. Теоремы 3 и 4 приведены в работе [41]. Если потенциал не сводится к тригонометрическому многочлену, то нахождение условий существования дополнительных полиномиальных по импульсам первых интегралов существенно усложняется. Природа трудностей показана в дополнении 5, где рассмотрен наиболее простой случай двух степеней свободы. Любопытно проследить, как из предположения о наличии дополнительного полиномиального интеграла рождаются дискретные симметрии спектра потенциала.

Однако, при рассмотрении конкретных гамильтоновых систем бесконечность спектра не является серьезным препятствием. В качестве примера укажем систему взаимодействующих частиц на окружности (с периодическим потенциалом). Она описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \sum_{i<j} f(x_i - x_j),$$

где $f(\cdot)$ — четная аналитическая функция. Эта система всегда имеет два интеграла: H и $F = \sum y_i$. Как показано в работе [38], если $f \neq \mathrm{const}$, то полного набора (в количестве n) независимых полиномиальных интегралов не существует. При $n = 3$ речь идет о существовании одного дополнительного интеграла в виде полинома по импульсам с периодическими и аналитическими по x_1, x_2, x_3 коэффициентами.

Если потенциал f имеет сингулярности, то задача о дополнительных интегралах усложняется. Как правило, в задачах такого сорта применяются численные расчеты или же доказываются более слабые результаты об отсутствии дополнительных мероморфных интегралов в комплексифицированном пространстве. В дополнении 10 рассмотрена система с потенциалом Дайсона, когда $f = \ln\sin$.

Интересно отметить, что в случае тригонометрического многочлена $f \neq \mathrm{const}$ из теоремы 3 при всех $n \geqslant 3$ вытекает более сильное утверждение об отсутствии *одного* дополнительного полиномиального интеграла, независимого вместе с функциями H и F (добавление 6). Было бы интересным распространить этот результат на случай произвольного аналитического потенциала f без сингулярностей.

В связи с обсуждаемым кругом вопросов следует упомянуть работу [24], в которой указаны препятствия к существованию дополнительного аналитического интеграла многомерных динамических систем, основанные на детальном исследовании гомоклинических структур.

Глава IV

1. Круг вопросов, связанных с доказательством существования термодинамического предела, является существенной частью современной статистической механики. На этом пути получены глубокие результаты, представление о которых дают, например, книги [8] и [60]. Правда, ценность этих результатов снижается из-за недоказанности (или даже отсутствия) свойства эргодичности соответствующих гамильтоновых систем.

По-видимому, впервые с этой проблемой столкнулись Ферми, Паста и Улам [70], численно исследуя динамику цепочки нелинейно взаимодействующих сосредоточенных масс. Она описываются гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \frac{\mu_2}{2}\sum_{i=1}^{n+1}(q_{i-1}-q_i)^2 + \frac{\mu_4}{4}\sum_{i=1}^{n+1}(q_{i-1}-q_i)^4, \qquad \mu_2,\, \mu_4 > 0. \quad (6)$$

Здесь используются граничные условия $q_0 = q_{n+1} = 0$ (концы цепочки закреплены) и предполагается, что n четно (в [70] рассматривался случай $n = 64$). Численная проверка эргодической гипотезы привела к неожиданному для авторов результату: вопреки ожиданию энергия не распределялась по различным модам колебаний, а система регулярно возвращалась к начальному состоянию.

Интересно отметить, что работа [70] опубликована в 1955 году, спустя год после публикации знаменитой работы А. Н. Колмогорова [48], давшей начало КАМ-теории и из которой можно, в частности, вывести отсутствие эргодичности в системах с гамильтонианом вида (6).

Вместе с тем гамильтонова система с гамильтонианом (6) не допускает дополнительного аналитического первого интеграла, независимого от полной энергии H. Этот результат установлен в [97] с помощью техники, развитой в работах С. Л. Зиглина и Х. Иошиды.

Кстати сказать, метод работы [97] позволяет доказать, что для почти всех потенциалов четвертой степени $V_4(x)$ гамильтонова система с гамильтонианом (1.6) не имеет непостоянных вещественных аналитических интегралов на энергетических поверхностях $\mathscr{H} = \lambda$, λ — мало. Этот строгий результат заменяет ошибочную гипотезу Ф. А. Березина.

Задачу о существовании термодинамического предела обычно рассматривают для гамильтонианов следующего вида:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i<j} V(|q_i - q_j|),$$

где q_i — радиус-вектор i-ой частицы в m-мерном евклидовом пространстве, p_i — ее импульс, функция V — потенциал парного взаимодействия. На рис. 29 изображен график типичного потенциала: взаимодействие между удаленными друг от друга частицами пренебрежимо мало, а с другой стороны взаимодействие не допускает скопления бесконечного числа частиц в ограниченной области евклидова пространства.

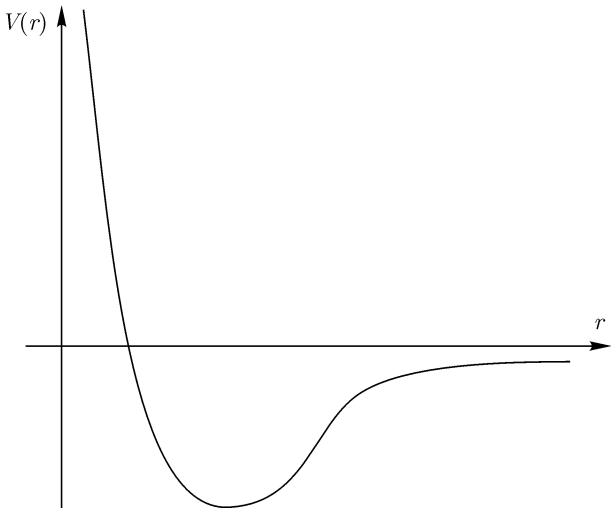

Рис. 29. Типичный парный потенциал

Однако в этом случае эргодическая гипотеза, по-видимому, вообще не справедлива. Более точно, потенциальная энергия

$$V(q) = \sum_{i<j} V(|q_i - q_j|)$$

имеет строгий минимум. Ввиду инвариантности этой функции относительно действия группы движений $E(m)$ евклидова пространства, точки минимума не изолированы, а образуют $m(m+1)/2$-параметрические семейства. Каждое из таких равновесий представляет кластер частиц с «нулевой» температурой. Теперь слегка увеличим энергию. Тогда частицы начнут совершать малы колебания около положения равновесия (в барицентрической системе отсчета). После этого следует воспользоваться КАМ-теорией, применяя ее к редуцированной (по группе $E(m)$) гамильтоновой системе. При этом следует проверить условие применимости КАМ-теории: отсутствие резонансов до четвертого порядка и изоэнергетическую невырожденность (см. [5]). Это отдельная и содержательная задача.

С этой точки зрения интересно рассмотреть случай, когда V — потенциал гравитационного взаимодействия: $V(r) = -\gamma/r$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$. Эта функция уже не имеет конечного минимума. Полезно рассмотреть простейшую задачу о движении трех одинаковых частиц по прямой, притягивающихся по закону Ньютона. Частицы могут сталкиваться между собой. При этом тройные соударения бесконечно редки (мера таких начальных условий равна нулю), а двойные столкновения *регуляризуемы*: после удара частицы разлетаются в противоположные стороны. Эта задача изучалась численно (с учетом регуляризации) в работах [89, 90]. Для отрицательных значений полной энергии наблюдается хаотическая картина траекторий (в инерциальной барицентрической системе отсчета). Однако полного хаоса здесь нет. Дело в том, что на каждой трехмерной поверхности уровня отрицательной энергии редуцированной системы (с неподвижным центром масс) имеется *устойчивая* периодическая траектория. Такие траектории найдены численно Шубартом (1956), а их устойчивость установлена Эно (1976).

Хотя в этом варианте задачи трех тел нет эргодичности, однако уравнения движения не допускают дополнительного аналитического интеграла в коплексифицированном фазовом пространстве [98]. Более общие результаты об отсутствии *полного* набора мероморфных первых интегралов в пространственной задаче n тел получены в [26].

Упрощенным вариантом задачи многих гравитирующих тел является *задача n центров*: изучение движения частицы в поле ньютоновского притяжения n *неподвижных* центров. При $n = 1$ и $n = 2$ имеем интегрируемые задачи Кеплера и Эйлера. С. В. Болотин доказал, что *плоская* задача $n \geqslant 3$ центров неинтегрируема: уравнения движения не допускают дополнительного аналитического первого интеграла [12].

Важной модификацией этой задачи служит задача о динамике электронного газа в металлах. Более точно, речь идет о динамике электрона в кулоновском поле кристаллической решетки (решетки Браве) положительно заряженных атомов. На рис. 30 изображена плоская решетка Браве и примитивная ячейка — параллелограмм, сдвиги вдоль сторон которого порождают группу трансляций решетки. Факторизация плоскости по этой группе трансляций сводит задачу о движения электрона в решетке к задаче о движении электрона по «плоскому» тору в потенциальном поле с конечным числом сингулярностей кулоновского типа. С использованием результатов работы [10] в [35] показано, что эта задача не допускает дополнительного аналитического интеграла. В [80] использованы условия на периодический потенциал с особенностями кулоновского типа, при которых рассматриваемая система будет эргодической при положительных значениях энергии.

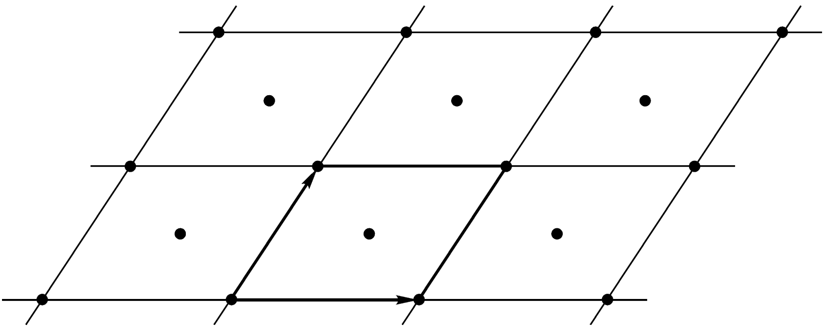

Рис. 30. Решетка Браве и примитивная ячейка

Еще в 1905 г. Лоренц предложил упрощенную модель электронного газа, заменив кулоновские центры непересекающимися шарами. Эта бильярдная система обладает свойством перемешивания [65].

2-4. Теоремы 1 и 2 доказаны в работе [82].

6. Трактовка обобщенных сил как усредненных реакций связей (с обратным знаком) предложена в [82].

11. Теорема 3 установлена в [84].

Литература

[1] *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды МИАН СССР. 1967. Т. 90. С. 3–210.

[2] *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функций. М.: «Мир». 1976.

[3] *Арнольд В. И.* Особенности систем лучей // УМН. 1983. Т. 38. №2. С. 77–147.

[4] *Арнольд В. И.* Теория катастроф. М.: «Наука». 1990.

[5] *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. 2-ое изд. М.: УРСС. 2002.

[6] *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М.: «Наука». 1961.

[7] *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука. 1983.

[8] *Березин Ф. А.* Лекции по статистической физике. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1972.

[9] *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М. — Л.: Гостехиздат. 1946.

[10] *Болотин С. В.* Влияние особенностей потенциальной энергии на интегрируемость механических систем // ПММ. 1984. Т. 48. №3. С. 356–362.

[11] *Болотин С. В.* Интегрируемые по Биркгофу бильярды // Вестник Моск. ун-та. Сер. Матем., Механ. 1990. №2. С. 33–36.

[12] *Болотин С. В.* Неинтегрируемость задачи n центров при $n > 2$ // Вестник Моск. ун-та. Сер. Матем., Механ. 1983. №6. С. 65-68.

[13] *Больцман Л.* Избранные труды. М.: «Наука». 1984.

[14] *Больцман Л.* Лекции по теории газов. М.: Гостехиздат. 1956.

[15] *Брейн Н. Г.* Асимптотические методы в анализе. М.: ИЛ. 1961.

[16] *Ван-Дайк М.* Альбом течений жидкости и газа. М.: «Мир». 1986.

[17] *Веденяпин В. В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлиз. 2001.

[18] *Вейль Г.* О равномерном распределении чисел по модулю один. В кн.: «Избранные труды». М.: «Наука». 1984. С. 58–93.

[19] *Власов А. А.* Статистические функции распределения. М.: «Наука». 1966.

[20] *Встовский Г. В., Колмаков А. Г., Бунин И. Ж.* Введение в мультифрактальную параметризацию структур материалов. М. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001.

[21] *Вукалович М. Т., Новиков И. И.* Уравнения состояния реальных газов. М. — Л.: Гос. энергетическое изд-во. 1948.

[22] *Гиббс Дж. В.* Термодинамика. Статистическая механика. М.: «Наука». 1982.

[23] *Девиен М.* Течения и теплообмен разреженных газов. М.: ИЛ. 1962.

[24] *Довбыш С. А.* Трансверсальное пересечение сепаратрис, структура множества квазислучайных движений и несуществование аналитического интеграла в многомерных системах // УМН. 1996. Т. 51. № 4. С. 153–154.

[25] *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: «Мир». 1974.

[26] *Зиглин С. Л.* Об интегралах в инволюции групп линейных симплектических преобразований и натуральных механических систем с однородным потенциалом // Функц. анализ и его прилож. 2000. Т. 34. Вып. 3. С. 26–36.

[27] *Зоммерфельд А.* Термодинамика и статистическая физика. М.: ИЛ. 1955.

[28] *Ивон Ж.* Корреляции и энтропия в классической статистической механике. М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ. 2001.

[29] *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики. М.: «Наука». 1972.

[30] *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир. 1965.

[31] *Кац М.* Несколько вероятностных задач физики и математики. М.: «Наука». 1967.

[32] *Квасников И. А.* Термодинамика и статистическая физика. Теория равновесных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1991.

[33] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М. — Л.: ОНТИ. 1937.

[34] *Козлов В. В.* Вихревая теория адиабатических равновесных процессов // Вестник Моск. ун-та. Сер. Математика, Механика. 2000. № 2. С. 35–40.

[35] *Козлов В. В.* Замкнутые орбиты и хаотическая динамика заряда в периодическом электрическом поле // Рег. и хаотич. динамика. 1997. Т. 2. № 1. С. 3–12.

[36] *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1980.

[37] *Козлов В. В.* Неэкспоненциальная атмосфера и неканонические распределения вероятностей // ДАН. 2001. Т. 380. № 3. С. 346–348.

[38] *Козлов В. В.* О полиномиальных интегралах системы взаимодействующих частиц // ДАН СССР. 1988. Т. 301. № 4. С. 785–788.

[39] *Козлов В. В.* Общая теория вихрей. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет». 1998.

[40] *Козлов В. В.* Симметрии, резонансы и топология в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1995.

[41] *Козлов В. В.* Статистическая динамика системы связанных маятников // ДАН. 2000. Т. 373. № 5. С. 597–599.

[42] *Козлов В. В.* Суммирование расходящихся рядов и эргодические теоремы // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 2002.

[43] *Козлов В. В.* Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре // ДАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 602–605.

[44] *Козлов В. В.* Термодинамика гамильтоновых систем и распределение Гиббса // ДАН. 2000. Т. 370. № 3. С. 325–327.

[45] *Козлов В. В., Трещёв Д. В. Биллиарды.* Генетическое введение в теорию систем с ударами. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1991.

[46] *Козлов В. В., Трещёв Д. В.* Об интегрируемости гамильтоновых систем с торическим пространством положений // Матем. сб. 1988. Т. 135. № 1. С. 119–138.

[47] *Козлов В. В., Трещёв Д. В.* Слабая сходимость решений уравнения Лиувилля для нелинейных гамильтоновых систем // Теорет. и матем. физика. 2002.

[48] *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. 1954. Т. 98. № 4. С. 527–530.

[49] *Крылов Н. С.* Работы по обоснованию статистической физики. М. — Л.: Изд-во АН СССР. 1950.

[50] *Лазуткин В. Ф.* Выпуклые биллиарды и собственные функции оператора Лапласа. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та. 1981.

[51] *Левич В. Г.* Введение в статистическую физику. М.: Гостехиздат. 1954.

[52] *Леонтович М. А.* Введение в термодинамику. М. — Л.: Гостехиздат. 1952.

[53] *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М. — Л.: Гостехиздат. 1949.

[54] *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. М.: «Прогресс». 1986.

[55] *Пуанкаре А.* Замечания о кинетической теории газов. В кн.: «Избранные труды», т. III. М.: «Наука». 1974. С. 385–412.

[56] *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. В кн.: «Избранные труды», Т. I. М.: «Наука». 1971.

[57] *Пуанкаре А.* Теория вероятностей. Ижевск: Ред. журнала «Регулярная и хаотическая динамика». 1999.

[58] *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: «Наука». 1967.

[59] *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир. 1979.

[60] *Рюэль Д.* Статистическая механика. Строгие результаты. М.: Мир. 1971.

[61] *Сванидзе Н. В.* Существование инвариантного тора для трехмерного биллиарда, расположенного в окрестности «замкнутой геодезической на границе области» // УМН. 1978. Т. 33. Вып. 4. С. 225–226.

[62] *Сидоров Е. А.* Гладкие топологически транзитивные системы // Математические заметки. 1968. Т. 4. №6. С. 751–759.

[63] *Синай Я. Г.* Введение в эргодическую теорию. М.: Фазис. 1996.

[64] *Синай Я. Г.* Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих биллиардов // УМН. 1970. Т. 125. №2. С. 141–192.

[65] *Синай Я. Г.* Эргодические свойства газа Лоренца // Функц. анализ и его прилож. // 1979. Т. 13. №3. С. 46-59.

[66] *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М.: ИЛ. 1960.

[67] *Уиттекер Э., Ватсон Г.* Курс современного анализа. Т. II. М.: Физматгиз. 1963.

[68] *Уиттекер Э., Робинсон Г.* Математическая обработка результатов наблюдений. М. — Л.: ОНТИ. 1935.

[69] *Уленбек Дж., Форд Дж.* Лекции по статистической механике. М.: «Мир». 1965.

[70] *Ферми Э. Паста Дж., Улам С.* Исследование нелинейных задач. В кн.: Энрико Ферми. Научные труды. Т. II. М.: Наука. 1972. С. 645–656.

[71] *Фон Нейман Дж.* Об операторных методах в классической механике. В кн.: «Избранные труды по функциональному анализу», Т. I. М.: «Наука». 1987. С. 7–59.

[72] *Халмош П.* Эргодическая теория. М. ИЛ. 1959.

[73] *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М.: ИЛ. 1951.

[74] *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: ИЛ. 1948.

[75] *Хинчин А. Я.* Математические основания статистической механики. М. — Л.: Гостехиздат. 1943.

[76] *Хуанг К.* Статистическая механика. М.: Мир. 1966.

[77] *Burgers J. M.* The Nonlinear Diffusion Equation. Dordrecht. D. Reidel. 1974.

[78] *Colin de Verdiere Y.* Nombre de points entiers une famile homotétique de domains de $\mathbb{R}^n$ // Ann. Sci. École Norm. Sup. Sér. 4. 1977. №4. P. 559–575.

[79] *Ehrenfest P., Ehrenfest T.* Begriffliche Grundlagen der Statistischen Auffassung in der Mechanik. Enzyclopädie der Math. Wiss. Bd. IV. 1911.

[80] *Klein M., Knauf A.* Classical Planar Scattering by Coulombic Potentials. Springer-Verlag. 1992.

[81] *Kozlov V. V.* Billiards, Invariant Measures, and Equilibrium Thermodynamics // Reg. and Chaotic Dyn. 2000. №2. P. 129–138.

[82] *Kozlov V. V.* Canonical Gibbs Distribution and Thermodynamics of Mechanical Systems with a Finite Number of Degree of Freedom // Reg. and Chaotic Dyn. 1999. V. 4. №2. P. 44–54.

[83] *Kozlov V. V.* Kinetics of Collisionless Continuous Medium // Reg. and Chaotic Dyn. 2001. V. 6. № 3. P. 235–251.

[84] *Kozlov V. V.* On Justification of Gibbs Distribution // Reg. and Chaotic Dyn. 2002. V. 7. № 1. P. 1–10.

[85] *Kozlov V. V.* Phenomena of Nonintegrability in Hamiltonian Systems. Proc. Int. Congr. Math. Berkeley. California. USA. 1987. P. 1161–1170.

[86] *Lasota A., Mackey M. C.* Probabilistic Properties of Deterministic Systems. Cambridge Univ. Press. 1985.

[87] *Lebowitz J. L.* Microscopic Origins of Irreversible Macroscopic Behavior // Physica A. 1999. V. 263. P. 516-527.

[88] *Markeev A. A.* The Method of Poincare Mappings in the Stability Problem of Two-Segment Trajectories of the Birkhoff Billiards // Dynamical Systems in Classical Mechanics. Transl. Amer. Math. Soc. Ser. 2. V. 168. P. 211–226.

[89] *Mikkola S., Hietarinta J.* A Numerical Investigation of the One-Dimensional Newtonian Three-Body Problem // Cel. Mech. and Dyn. Astronomy. 1989. V. 46. P. 1–18.

[90] *Mikkola S., Hietarinta J.* A Numerical Investigation of the One-Dimensional Newtonian Three-Body Problem. II. Positive Energies. 1990. V. 47. P. 321–331.

[91] *Oxtoby J. C.* Note of Transitive Transformations // Proc. Math. Acad. Sci. U.S. 1937. V. 23. P. 443–446.

[92] *Prigogine I., Georg C., Henin F., Rosenfeld L.* United Formulation of Dynamics and Thermodynamics // Chemica Scripta. 1973. V. 4. P. 5–32.

[93] *Szász D.* Boltzmann's ergodic hypothesis, a conjecture for centures // Scientiarum Mathematicarum Hungarica. 1966. V. 31. № 1–3. P. 299–322.

[94] *Szász D.* Hard Ball Systems and the Lorentz Gas. Springer-Verlag. 2000.

[95] *Ten V. V.* On normal Distribution in Velocities // Reg. and Chaotic Dynamics. 2002. V. 7. № 1. P. 11–20.

[96] *Tolman R.* The Principles of Statistical Mechanics. Oxford. Univ. Press. 1938.

[97] *Umeno K.* Non-perturbative Non-integrability of Non-homogeneous Nonlinear Lattices Induced by Non-resonance Hypothesis // Phys. D. 1996. V. 94. P. 116-139.

[98] *Yoshida H.* A criterion for the non-existence of an additional integral in Hamiltonian systems with homogeneous potential // Phys. D. 1987. V. 29. P. 128–142.

[99] *Zaslavsky G. M.* Chaotic Dynamics and the Origin of Statistical Laws // Physics Today. 1999, Aug. Part 1. P. 39–45.

[100] *Zaslavsky G. M.* From Hamiltonian Chaos to Maxwell's Demon // CHAOS. 1995. V. 5. № 4. P. 653–661.

[101] *Zaslavsky G. M., Edelman M.* Maxwell's demon as a dynamical model // Physical Review E. 1997. V. 56. № 5. P. 5310–5320.

Добавление 1

О существовании интегрального инварианта гладких динамических систем[1]

Рассматривается задача о существовании у динамической системы на цилиндрическом фазовом пространстве интегрального инварианта с гладкой плотностью. Известная теорема Крылова – Боголюбова гарантирует существование инвариантной меры у любой системы на компактном пространство (обсуждение этих вопросов см. в [4, 7]). Однако эта мера зачастую сосредоточена на инвариантных множествах малой размерности и в общем случае не является интегральным инвариантом с суммируемой плотностью. Для содержательных применений эргодической теории, а также в теории интегрирующего множителя Эйлера – Якоби полезно иметь инвариантную меру в виде интегрального инварианта с гладкой плотностью. Ниже предложены эффективные критерии существования таких мер у гладких динамических систем. Результаты общего характера проиллюстрированы примерами из неголономной механики.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим цилиндрическое фазовое пространство $M^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^{n-k}$ с координатами $x_1, \ldots, x_n$, среди которых k линейных и $n-k$ угловых. Пусть v — гладкое векторное поле на M^n. Ему отвечает дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x). \tag{1.1}$$

Рассмотрим задачу о существовании у системы (1.1) интегрального инварианта

$$\mathrm{mes}(D) = \int\limits_D f(x)\, d^n x \tag{1.2}$$

с гладкой положительной плотностью $f : M^n \to \mathbb{R}$.

[1]Опубликовано в журнале «Прикладная математика и механика». 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 538–546.

Критерием существования интегрального инварианта (1.2) является уравнение Лиувилля $\operatorname{div}(fv) = 0$, которое с учетом положительности функции f можно переписать в виде

$$\dot{w} = -\operatorname{div} v, \quad w = \ln f. \tag{1.3}$$

Ясно, что w — гладкая функция на M^n.

По теореме о выпрямлении траекторий, в малой окрестности неособой точки системы (1.2) имеется целое семейство интегральных инвариантов. Следовательно, задачу об интегральном инварианте имеет смысл рассматривать или в окрестности положений равновесия, или же в достаточно больших областях фазового пространства, где траектории обладают свойством возвращаемости.

Известно, что уравнения движения голономных механических систем всегда имеют естественную инвариантную меру (форма объема па пространстве кокасательного расслоения пространства положений). Как отмечено в [3], неголономные системы могут вообще не иметь инвариантной меры с интегрируемой плотностью.

Укажем два примера неголономных систем, которые будут использованы для иллюстрации результатов.

1°. *Задача о качении тяжелого твердого тела с выпуклой поверхностью по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости*. Чаплыгин нашел инвариантную меру в случае, когда поверхность ограничена сферой и центр масс тела совпадает с ее геометрическим центром [8]. Можно доказать существование инвариантной меры и в том случае, когда твердое тело обладает осевой симметрией (как геометрической, так и динамической).

2°. *Задача Суслова о вращении по инерции твердого тела вокруг неподвижной точки с неголономной связью*: обращается в нуль проекция угловой скорости на некоторое неподвижное в теле направление [6]. Пусть $Ox_1x_2x_3$ — подвижная ортогональная система осей, p, q, r — проекции угловой скорости на эти оси, матрица инерции твердого тела

$$\begin{Vmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{Vmatrix}, \tag{1.4}$$

α, β, γ — направляющие косинусы неподвижной вертикали относительно осей x_1, x_2, x_3. Уравнение неголономной связи примем в виде $r = 0$.

Поворотом осой x_1 и x_2 можно добиться выполнения соотношения $D = 0$. В переменных p, q, α, β, γ уравнения вращения тела имеют вид [6]

$$\begin{gathered} A\dot{p} = Epq + Fq^2, \quad B\dot{q} = -Fpq - Ep^2, \\ \dot{\alpha} = -q\gamma, \quad \dot{\beta} = p\gamma, \quad \dot{\gamma} = q\alpha - p\beta. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Было показано [3], что эти уравнения имеют интегральный инвариант тогда и только тогда, когда $E = F = 0$. В этом случае ось x_3 является собственной для матрицы инерции (1.4).

§ 2. Условия существования интегрального инварианта

Теорема 1. *Пусть* $x : \mathbb{R} \to M^n$ — *решение системы* (1.1) *с компактным замыканием его траектории. Если система* (1.1) *имеет интегральный инвариант, то существует*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int\limits_0^s (\operatorname{div} v)_{x(t)}\, dt = 0. \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть $x(t) \in D_0$ и D_0 — компактная подобласть в M^n. Согласно (1.3)

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int\limits_0^s \operatorname{div} v\, dt = \lim_{s\to\infty} \frac{w(x(0)) - w(x(s))}{s} = 0$$

так как непрерывная функция w ограничена снизу и сверху на множестве D_0.

Следствие. *Пусть* $x = 0$ — *равновесное решение нелинейной системы* $\dot{x} = Xx + \ldots$ *. Если* $\operatorname{tr} X \neq 0$, *то эта система не имеет в окрестности точки* $x = 0$ *интегрального инварианта с гладкой плотностью.*

Действительно в этом случае $(\operatorname{div} v)_{x=0} = \operatorname{tr} X$. Остается воспользоваться формулой (2.1) для равновесного решения $x(t) \equiv 0$.

Интересно отметить, что условие $\operatorname{tr} X = 0$ означает сохранение стандартной формы объема в $\mathbb{R}^n$ фазовым потоком линейной системы $\dot{x} = Xx$. Таким образом, если линейная система с постоянными коэффициентами имеет хотя бы один интегральный инвариант, то она обязательно имеет стандартную инвариантную меру.

В неавтономном случае уравнение Лиувилля имеет вид $\partial f/\partial t + \operatorname{div}(fv) = 0$. Если $f > 0$, то, полагая $w = \ln f$, снова приходим к равенству (1.3). Известно, что решения $f(x, t)$ неавтономного уравнения Лиувилля всегда существуют. Они однозначно определяются, например, значениями плотности f при $t = 0$. Следовательно, в этой ситуации естественно рассматривать задачи о существовании интегральных инвариантов специального вида. Пусть, например, $\dot{x} = X(t)x + \ldots$ — нелинейная ω-периодическая система, имеющая тривиальное решение $x(t) \equiv 0$. Можно показать, что необходимым условием существования интегрального инварианта с ω-периодической плотностью является равенство

$$\int\limits_0^\omega \operatorname{tr} X(t)\, dt = 0.$$

Известно, что экспонента от левой части этого равенства равна произведению мультипликаторов линеаризованной системы.

Для положений равновесия неголономных систем сумма характеристических чисел равна нулю. Таким образом, необходимое условие существования интегрального инварианта выполнено. Однако для стационарных движений (относительных равновесий) это уже не так.

Приведем соответствующие примеры.

1°. При качении тяжелого твердого тела но горизонтальной шероховатой плоскости существуют стационарные движения, когда одна из центральных осей инерции вертикальна, а тело вращается с постоянной угловой скоростью, касаясь плоскости одной и той же точкой O. Из вида характеристического уравнения можно сделать вывод, что сумма характеристических чисел пропорциональна (с ненулевым коэффициентом) $\sin\alpha\cos\alpha$, где α — угол между главными направлениями поверхности тела в точке O и двумя другими горизонтальными центральными осями инерции. Таким образом, если эти оси не совпадают, то уравнения качения не имеют интегрального инварианта. Несовпадение динамических и геометрических осей — характерное свойство так называемых кельтских камней (см. [2]).

2°. Уравнения движения в задаче Суслова (1.5) имеют стационарное решение, при котором

$$p = -kF, \quad q = kE, \quad \alpha = lp, \quad \beta = lq, \quad \gamma = 0. \tag{2.2}$$

Здесь k и l — постоянные, такие, что $(kl)^2(E^2+F^2)=1$. Решения (2.2) существуют лишь при очевидном условии $E^2+F^2\neq 0$.

След матрицы линеаризованной системы равен $k(E^2/A+F^2/B)$. Таким образом, согласно следствию из теоремы 1, интегральный инвариант для системы (1.5) существует лишь при условии $E=F=0$. Этот вывод получен в [3] из геометрических соображений.

§ 3. Интегральный инвариант в окрестности положения равновесия

Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x}_s=\sum\lambda_r^{(s)}x_r+\frac{1}{2}\sum a_{ij}^{(s)}x_ix_j+\ldots\,. \tag{3.1}$$

Вопрос о существовании интегрального инварианта сводится к вопросу о разрешимости уравнения (1.3). Положим

$$w=w_0+(a,\,x)+\ldots;\quad w_0\in\mathbb{R},\quad q\in\mathbb{R}^n.$$

Вычислим дивергенцию правой части системы (3.1):

$$-\operatorname{div}v=\operatorname{tr}\Lambda+(b,\,x)+\ldots\,,$$

$$\Lambda=||\lambda_r^{(s)}||,\quad b=(b_1,\,\ldots,\,b_n)^T,\quad b_j=\sum_{s=1}^{n}a_{sj}^{(s)}.$$

В рассматриваемом случае уравнение (1.3) имеет следующий явный вид:

$$(a,\,\Lambda x)+\ldots=-\operatorname{tr}\Lambda-(b,\,x)-\ldots\,. \tag{3.2}$$

Отсюда получаем серию равенств: $\operatorname{tr}\Lambda=0$, $\Lambda^T a=b,\,\ldots$. Первое из них уже было ранее получено в п. 2. Положим $X=\Lambda^T$, $Y=||X,\,b||$. Матрица Y имеет размер $n\times(n+1)$.

Теорема 2. *Если* $\operatorname{rank}X<\operatorname{rank}Y$, *то система* (3.1) *не имеет интегрального инварианта в окрестности точки* $x=0$.

Действительно, всегда $\operatorname{rank}X\leqslant\operatorname{rank}Y$ и равенство рангов является условием разрешимости линейной системы $\Delta^T a=b$ относительно a. Это условие заведомо выполнено в случае, когда матрица Λ невырождена.

Отметим, что постоянную w_0 в разложении Маклорена функции w можно считать произвольной. Это соответствует тому факту, что плотность инвариантной меры определена с точностью до положительного постоянного множителя. Условием разрешимости уравнения (3.2) в первом приближении является совпадение рангов матриц X и Y. Если оно выполнено, то можно определить (возможно, неоднозначно) линейные по x слагаемые в разложении функции w. Приравнивая коэффициенты при членах второй степени в уравнении (3.2), получим линейную систему алгебраических уравнений для отыскания квадратичных слагаемых в разложении функции w. В эту систему линейно входят компоненты вектора a. Условием ее разрешимости является известное условие совпадения рангов Кронекера–Капелли. Аналогично, при анализе разрешимости уравнения (3.2) в высших приближениях возникают условия на ранги матриц, элементы которых выражаются через коэффициенты правых частей системы (3.1).

В качестве примера применения теоремы 2 снова рассмотрим систему (1.5) задачи Суслова. Так как на твердое тело не действуют силы, то любое ее положение является положением равновесия. Пусть α_0, β_0, γ_0 — значения направляющих косинусов в равновесном состоянии. Дивергенция векторного поля (1.5) равна $qE/A - pF/B$, поэтому $b = (-F/B,\, E/A,\, 0,\, 0,\, 0)^T$. Выпишем нетривиальную ненулевую часть матрицы Y:

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 0 & \gamma_0 & -\beta_0 & -F/B \\ -\gamma_0 & 0 & \alpha_0 & E/A \end{array} \right\|.$$

Вертикальная черта отделяет элементы матрицы X. Пусть $\gamma_0 = 0$. Тогда $\operatorname{rank} X = 1$. Если

$$E\beta_0/A - F\alpha_0/B \neq 0, \tag{3.3}$$

то $\operatorname{rank} Y = 2$. Пусть $E^2 + F^2 \neq 0$. Тогда можно подобрать значения α_0 и β_0 $(\alpha_0^2 + \beta_0^2 = 1)$ так, чтобы выполнялось условие (3.3). В этом случае, как уже отмечалось в п. 1, уравнения не имеют интегрального инварианта.

§ 4. Принцип усреднения

Рассмотрим системы нормального вида, которые часто встречаются в приложениях:

$$\dot I_k = \varepsilon F_k(I,\, \varphi) + \ldots\,, \quad \dot\varphi_s = \omega_s(I) + \varepsilon G_s(I,\, \varphi) + \ldots\,. \tag{4.1}$$

Здесь $I = (I_1, \ldots, I_m)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^m$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — набор угловых координат на n-мерном торе $\mathbb{T}^n$, ε — малый параметр. Функции F_s, G_s, $\ldots$ предполагаются 2π-периодическими относительно угловых переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. При $\varepsilon = 0$ система (4.1), очевидно, имеет семейство инвариантных мер, плотности которых — произвольные гладкие положительные функции от переменных $I_1, \ldots, I_m$.

Исследуем задачу о наличии у системы (4.1) интегрального инварианта с плотностью в виде ряда

$$f_0(I, \varphi) + \varepsilon f_1(I, \varphi) + \ldots \tag{4.2}$$

с гладкими и однозначными на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^n$ коэффициентами f_α $(\alpha = 0, 1, \ldots)$. Ясно, что $f_0 > 0$.

Невозмущенная система (4.1) легко интегрируется: переменные I, являющиеся первыми интегралами, нумеруют инвариантные торы, заполненные условно-периодическими движениями с частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Инвариантный тор $I = I_0$ называется нерезонансным, если $(\omega(I^0), k) \neq 0$ для всех целочисленных векторов $k \neq 0$. Фазовые траектории всюду плотно заполняют нерезонансные торы. Невозмущенную систему назовем невырожденной, если нерезонансные торы всюду плотно заполняют фазовое пространство $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^n$.

Теорема 3. *Предположим, что невозмущенная система невырождена и уравнения* (4.1) *имеют интегральный инвариант с плотностью* (4.2). *Тогда усредненная система*

$$\dot{J}_k = \varepsilon F_k(J), \quad k = 1, \ldots, m \tag{4.3}$$

имеет интегральный инвариант с плотностью $\overline{f}_0$.

Здесь черта означает, как обычно, результат применения оператора усреднения по угловым переменным φ. Переход от полной системы (4.1) к усредненной (4.3) является стандартным приемом теории возмущений. Отметим одно из следствий теоремы 3: если $k = 1$ и функция $\overline{F}$ имеет изолированный нуль, то полная система (4.1) не имеет инвариантной меры с плотностью в виде ряда (4.2).

Доказательство теоремы 3. Так как $f_0 > 0$, то при малых значениях ε в окрестности каждого инвариантного тора невозмущенной системы функцию $w = \ln f$ также можно представить в виде ряда по степеням ε: $w = w_0(I, \varphi) + \ldots$. В рассматриваемой задаче уравнение (1.3) имеет следующий вид:

$$\sum \frac{\partial w_0}{\partial \varphi_s}\,\omega_s + \varepsilon\left[\sum \frac{\partial w_0}{\partial I_k}\,F_k + \sum \frac{\partial w_1}{\partial \varphi_s}\,\omega_s\right] + \ldots =$$
$$= -\varepsilon\left[\sum_k \frac{\partial F_k}{\partial I_k} + \sum_s \frac{\partial G_s}{\partial \varphi_s}\right] + \ldots .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим цепочку уравнений для последовательного нахождения функций $w_0, w_1, \ldots$:

$$\sum \frac{\partial w_0}{\partial \varphi_s}\,\omega_s = 0, \tag{4.4}$$

$$\sum \frac{\partial w_0}{\partial I_k}\,F_k + \sum \frac{\partial w_1}{\partial \varphi_s}\,\omega_s = -\sum \frac{\partial F_k}{\partial I_k} - \sum \frac{\partial G_s}{\partial \varphi_s}. \tag{4.5}$$

Из (4.4) следует, что w_0 — интеграл невозмущенной системы. Так как эта система невырождена, то w_0 не зависит от угловых переменных (ср. с [5], гл. V). Усредняя (4.5) по переменным φ, приходим к равенству

$$\sum \frac{\partial w_0}{\partial I_k}\,\overline{F}_k = -\sum \frac{\partial \overline{F}_k}{\partial I_k}.$$

Следовательно, функция $f_0 = \exp w_0 > 0$ также не зависит от φ и является плотностью инвариантной меры усредненной системы.

Теорема 3 обобщается на случай систем, рассмотренных в [1]: при $\varepsilon = 0$ фазовое пространство расслоено на интегральные многообразия. Невырожденность невозмущенной системы означает всюду плотность инвариантных многообразий, на которых динамическая система эргодична.

§ 5. Интегральный инвариант систем нормального вида

Ниже будут указаны более точные условия существования интегрального инварианта системы (4.1). Разложим функции F_k и G_k в кратные ряды Фурье

$$F_k = \sum_\alpha F_\alpha^{(k)}(I)e^{i(\alpha,\varphi)}, \quad G_s = \sum_\alpha G_\alpha^{(k)}(I)e^{i(\alpha,\varphi)}; \quad \alpha \in \mathbb{Z}^n.$$

Ключевым множеством системы (4.1) назовем множество всех точек $I \in \mathbb{R}^m$, таких, что:

1) $(\omega(I), \xi) = \ldots = (\omega(I), \zeta) = 0$ с некоторыми целочисленными векторами $\xi, \ldots, \zeta$;

2) $\operatorname{rank} X < \operatorname{rank} Y$, где

$$X = \left\| \begin{matrix} F_\xi^{(1)} & \ldots & F_\xi^{(m)} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ F_\zeta^{(1)} & \ldots & F_\zeta^{(m)} \end{matrix} \right\|, \quad Y = \left\| X \left| \begin{matrix} \sum \dfrac{\partial F_\xi^{(k)}}{\partial I_k} + i \sum \xi_s G_\xi^{(s)} \\ \dotfill \\ \sum \dfrac{\partial F_\zeta^{(k)}}{\partial I_k} + i \sum \zeta_s G_\zeta^{(s)} \end{matrix} \right. \right\|.$$

Подчеркнем, что в этом определении не предполагается линейная независимость векторов $\xi, \ldots, \zeta$.

Теорема 4. *Если невозмущенная система невырождена и ключевое множество непусто, то система* (4.1) *не имеет интегрального инварианта с плотностью* $\sum f_s \varepsilon^s$.

Это утверждение доказывается методом Пуанкаре ([5], гл. V). Будем исходить из уравнения (4.5), в котором w_0 — неизвестная гладкая функция переменных $I_1, \ldots, I_m$. Положим

$$w_1 = \sum W_\alpha(I) e^{i(\alpha, \varphi)}.$$

По методу Фурье из уравнения (4.5) получаем серию равенств

$$\sum \frac{\partial w_0}{\partial I_k} F_\alpha^{(k)} + i(\alpha, \omega) W_\alpha = -\sum \frac{\partial F_\alpha^{(k)}}{\partial I_k} - i \sum \alpha_s G_\alpha^{(s)}; \quad \alpha \in \mathbb{Z}^n.$$

Пусть теперь точка I принадлежит ключевому множеству. Полагая α равным $\xi, \ldots, \zeta$, получим серию алгебраических уравнений относительно производных $\partial w_0 / \partial I_1, \ldots, \partial w_0 / \partial I_m$. Условием ее разрешимости является равенство рангов матриц X и Y.

Рассмотрим простой пример. Пусть точка I_0 — положение равновесия векторного поля $\overline{F} = (F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(m)})$ и целочисленный вектор $\alpha = 0$. Тогда $\operatorname{rank} X = 0$, а $\operatorname{rank} Y = 1$, если при $I = I_0$ сумма $\sum \partial F_0^{(k)} / \partial I_k$ — дивергенция усредненной системы, линеаризованной в окрестности точки I_0 — отлична от нуля. В этом случае ключевое множество содержит точку I_0 и поэтому применима теорема 4. Отметим, что отсутствие интегрального инварианта в этом примере можно установить также при помощи теоремы 3 и следствия из теоремы 1.

Рассмотрим случай, когда уравнения (4.1) имеют первый интеграл в виде ряда: $H = H_0(I, \varphi) + \varepsilon H_1(I, \varphi) + \ldots$. В условиях теоремы 4 функция H_0 не зависит от φ и в точках ключевого множества

$$X \partial H_0 / \partial I = 0. \tag{5.1}$$

Следовательно, если точка из ключевого множества не является критической для функции H_0, то в этой точке ранг матрицы X падает по крайней мере на единицу по сравнению с его максимально возможным значением.

Для доказательства применим снова метод Пуанкаре. Функция H_0 — первый интеграл невозмущенной системы, не зависящий от φ, так как эта система невырождена. В первом приближении по ε тождество $\dot{H} \equiv 0$ дает соотношение

$$\sum \frac{\partial H_0}{\partial I_k} F_k + \sum \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_s} \omega_s \equiv 0.$$

Пусть $H_1 = \sum_\alpha h_\alpha(I) e^{i(\alpha, \varphi)}$. Применяя метод Фурье, приходим к серии равенств

$$\sum \frac{\partial H_0}{\partial I_k} F_\alpha^{(k)} + i(\alpha, \omega) h_\alpha = 0$$

эквивалентных (5.1), когда точка I принадлежит ключевому множеству.

§ 6. Приложение к слабо неголономным системам

Теорему 4 можно модифицировать для случая вырожденных систем. Вместо рассуждений общего характера рассмотрим поучительный пример из неголономной механики. Исследуем неголономную систему с торическим пространством положений $\mathbb{T}^3 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \mathrm{mod} 2\pi\}$ и неголономной связью

$$\dot{\varphi}_3 = \varepsilon \{a_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \dot{\varphi}_2\}. \tag{6.1}$$

Коэффициенты a_1 и a_2 — однозначные гладкие функции на $\mathbb{T}^3$, ε — малый параметр. При $\varepsilon = 0$ будем иметь движение по двумерному тору $\varphi_3 = \mathrm{const}$. В этом случае система голономна и уравнения движения имеют естественную инвариантную меру. При малых значениях $\varepsilon \neq 0$ система будет мало отличаться от голономной.

Условие интегрируемости уравнения связи (6.1) в первом приближении по ε будет иметь вид

$$\partial a_1/\partial\varphi_2 - \partial a_2/\partial\varphi_1 = 0. \tag{6.2}$$

Разложим функции a_1 и a_2 в ряды Фурье по переменным φ_1 и φ_2:

$$a_s = \sum_k a^{(s)}_{k_1,\,k_2} \exp[i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2)].$$

Коэффициенты $a^{(s)}_k$ — периодические функции переменной φ_3.

Условие (6.2) эквивалентно следующей цепочке соотношений, связывающих коэффициенты Фурье:

$$k_2 a^{(1)}_{k_1,\,k_2} - k_1 a^{(2)}_{k_1,\,k_2} = 0. \tag{6.3}$$

Рассмотрим теперь динамику неголономной системы со связью (6.1) и лагранжианом $L = (\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2 + \dot\varphi_3^2)/2$. С точностью до членов $o(\varepsilon)$ уравнения движения таковы:

$$\dot\varphi_1 = I_1, \quad \dot\varphi_2 = I_2, \quad \dot\varphi_3 = \varepsilon(a_1 I_1 + a_2 I_2), \quad \dot I_1 = \dot I_2 = 0. \tag{6.4}$$

Отметим, что невозмущенная система вырождена.

Изучим вопрос о существовании у системы (6.4) интегрального инварианта с плотностью в виде ряда $f = f_0 + \varepsilon f_1 + \ldots$ с периодическими по φ коэффициентами. Запишем уравнение Лиувилля с точностью до $o(\varepsilon)$:

$$I_1 \frac{\partial f}{\partial\varphi_1} + I_2 \frac{\partial f}{\partial\varphi_2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial\varphi_3} f(a_1 I_1 + a_2 I_2) = 0. \tag{6.5}$$

Полагая $\varepsilon = 0$, получаем уравнение для f_0. Применяя метод Фурье, приходим к заключению, что f_0 зависит от I_1, I_2 и φ_3 (ср. [5], гл. V).

В первом приближении по ε уравнение (6.5) имеет вид

$$I_1 \frac{\partial f_1}{\partial\varphi_1} + I_2 \frac{\partial f_1}{\partial\varphi_2} + \frac{\partial}{\partial\varphi_3}(a_1 I_1 + a_2 I_2) f_0 = 0. \tag{6.6}$$

Применяя снова метод Фурье, положим $f_1 = \sum f^{(1)}_k e^{i(k,\,\varphi)}$. Равенство (6.6) дает серию уравнений для коэффициентов Фурье. На резонансных прямых $I_1 = \delta k_2$, $I_2 = -\delta k_1$ $(\delta \in \mathbb{R})$ будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_3} g_k(\varphi_3) f_0(\delta k_2 - \delta k_1,\, \varphi_3) = 0, \quad g_k = k_2 a^{(1)}_k - k_1 a^{(2)}_k. \tag{6.7}$$

Ввиду (6.3) это условие заведомо выполнено для случая интегрируемости связи (6.1). Обратное неверно. Пусть, например, a_1 и a_2 не зависят от φ_3. Условие (6.3) в общем случае не выполнено, однако уравнение (6.7) имеет решение в виде функций f_0, не зависящих от φ_3.

Найдем условия разрешимости бесконечной цепочки уравнений (6.7) относительно функции f_0. Из (6.7) имеем

$$f_0 g_k = c_k(\delta). \tag{6.8}$$

Возможны два случая: либо функция g_k имеет нуль на окружности $\mathbb{T}^1 = \{\varphi_3 \bmod 2\pi\}$, либо нулей нет. Так как c_k не зависит от φ_3, то в первом случае должно выполняться условие (6.3). Полагая в (6.8) $\delta = 0$, получаем, что во втором случае отношение функций g_k с разными значениями k не зависит от переменной φ_3. Эти условия являются достаточными для разрешимости системы (6.7).

Действительно, для значений k, отвечающих первому случаю, уравнение (6.7) заведомо выполнено. Во втором случае для некоторого вектора k полагаем $f_0 = c/g_k$. Знак постоянной c подбирается так, чтобы функция f_0 была положительной. Из условия постоянства отношений g_k вытекает, что функция f_0 удовлетворяет уравнениям (6.7) при других значениях k.

Для разрешимости исходного уравнения (6.6) необходимо потребовать выполнения дополнительных условий: свободные коэффициенты $a_0^{(1)}$ и $a_0^{(2)}$ либо тождественно обращаются в нуль, либо отношения $a_0^{(1)}/a_0^{(2)}$ и $a_0^{(s)}/g_k$ $(s = 1,\ 2;\ g_k \neq 0)$ не зависят от φ_3.

Результат анализа уравнения (6.6) можно сформулировать в геометрической форме. Множество всех систем с лагранжианом $L = (\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2 + \dot\varphi_3^2)/2$ и со связью (6.1) имеет естественную структуру линейного пространства (изоморфного пространству пар гладких функций a_1 и a_2 на трехмерном торе). Все системы, обладающие интегральным инвариантом (в первом приближении по ε), образуют линейное подпространство $\mathbb{L}$. Точно так же, системы с интегрируемой связью (6.1) образуют линейное подпространство $\mathbb{L}' \subset \mathbb{L}$. Из анализа разрешимости уравнений (6.7) вытекает, что размерность фактор-пространства $\mathbb{L}/\mathbb{L}'$ равна бесконечности. Таким образом, системы с интегрируемой связью — редкое исключение среди систем, обладающих интегральным инвариантом.

В заключение рассмотрим системы Чаплыгина, для которых функции a_1 и a_2 не зависят от переменной φ_3. Они также образуют линейное подпространство; обозначим его $\mathbb{L}''$. Можно проверить, что для таких систем в первом приближении по ε выполнены все условия применимости метода приводящего множителя, гарантирующего существование интегрального инварианта [8]. Для систем Чаплыгина $g_k = \mathrm{const}$. Следовательно, $\mathbb{L}'' \subset \mathbb{L}$. Можно проверить, что размерность фактор-пространства $\mathbb{L}/\mathbb{L}''$ также равна бесконечности.

Литература

[1] *Аносов Д. В.* Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро колеблющимися решениями // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1960. Т. 24. №5. С. 721–742.

[2] *Карапетян А. В.* О реализации неголономных связей силами вязкого трения и об устойчивости кельтских камней // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 42–51.

[3] *Козлов В. В.* К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики. 1985. Т. 8. Вып. 3. С. 85–107.

[4] *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат. 1949.

[5] *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука. 1971.

[6] *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат. 1946.

[7] *Халмош П. Р.* Лекции по эргодической теории. М.: Изд-во иностр. лит. 1959.

[8] *Чаплыгин С. А.* Исследования по динамике неголономных систем. М.; Л.: Готсехиздат. 1949.

Добавление 2

Лиувиллевость инвариантных мер вполне интегрируемых систем и уравнение Монжа–Ампера[1]

§ 1. Лиувиллевы инвариантные меры

Пусть M^{2n} — $2n$-мерное многообразие, v — гладкое векторное поле, порождающее динамическую систему

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in M. \tag{1.1}$$

Напомним, что эта система называется *гамильтоновой*, если найдется замкнутая невырожденная 2-форма Ω на M и функция $H : M \to \mathbb{R}$ такие, что

$$\Omega(v, \cdot) = -dH. \tag{1.2}$$

Форма Ω обычно называется *симплектической структурой*, а функция H — *гамильтонианом*. Отметим, что одну и ту же динамическую систему можно разными способами представить в гамильтоновом виде. По *теореме Лиувилля*, $2n$-форма

$$\Omega^n = \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega$$

инвариантна относительно фазового потока системы (1.1).

Определение. Инвариантная $2n$-форма μ системы (1.1) называется *лиувиллевой*, если $\mu = \Omega^n$, где Ω — симплектическая структура из равенства (1.2).

Задача о лиувиллевости заданной инвариантной меры включает задачу о распознавании гамильтоновости динамической системы и поэтому в общем случае представляется безнадежно сложной. Однако, для некоторых

[1]Это — работа автора, опубликованная в «Математических заметках», 1993. Т. 53, №4. С. 45–52.

классов динамических систем она допускает конструктивное решение. Сюда относятся *вполне интегрируемые системы*, задаваемые уравнениями

$$\dot{I}_1 = \ldots = \dot{I}_n = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = \omega_1, \ldots, \dot{\varphi}_n = \omega_n. \tag{1.3}$$

Здесь $I = (I_1, \ldots, I_n)$ — координаты в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — набор угловых координат, нумерующих точки n-мерного тора $\mathbb{T}^n$, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — функции от I. Движение в системе (1.3) происходит по n-мерным торам $I = \mathrm{const}$ условно-периодически с частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$. В дальнейшем рассматривается *невырожденный* случай, когда

$$\frac{\partial(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{\partial(I_1, \ldots, I_n)} \neq 0. \tag{1.4}$$

Наш основной результат состоит в том, что любая инвариантная мера уравнений (1.3) с непрерывной положительной плотностью является лиувиллевой. Его доказательство сводится к разрешимости многомерного аналога *уравнения Монжа–Ампера*.

Если не оговорено противное, то все объекты, встречающиеся ниже, считаются бесконечно дифференцируемыми.

§ 2. Гамильтоновость вполне интегрируемых систем

Сначала рассмотрим задачу о представимости уравнений (1.3) в виде уравнений Гамильтона. Для простоты область D будем считать малой окрестностью некоторой точки, в которой выполнено неравенство (1.4).

Теорема 1. *Система* (1.3) *всегда гамильтонова, причем*

$$\Omega = d\sigma, \quad \sigma = \sum a_k(I)\, dI_k + \sum \frac{\partial K}{\partial \omega_k}\, d\varphi_k, \tag{2.1}$$

$$H = \sum \omega_k \frac{\partial K}{\partial \omega_k} - K + \mathrm{const}, \tag{2.2}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ – произвольные гладкие функции в D; K — функция от $\omega_1, \ldots, \omega_n$ и

$$\det\left\| \frac{\partial^2 K}{\partial I_i \partial \omega_j} \right\| \neq 0. \tag{2.3}$$

Условие (2.3) гарантирует невырожденность 2-формы Ω. Функции a_k на самом деле не участвуют в представлении уравнений (1.3) в виде уравнений Гамильтона (поскольку $\dot I = 0$). Таким образом, различных гамильтоновых представлений уравнений (1.3) ровно столько, сколько имеется функций $K(\omega)$, удовлетворяющих условию (2.3).

Функция K имеет прозрачный смысл: это — лагранжиан рассматриваемой системы. Действительно, K — функция от скоростей $\dot\varphi_k = \omega_k$. Производные $\dfrac{\partial K}{\partial \omega_k} = \mathscr{I}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ — канонические импульсы, сопряженные с координатами φ_k. В переменных $\mathscr{I}$, φ симплектическая структура (2.1) имеет канонический вид (существующий по теореме Дарбу)

$$d\Big(\sum \frac{\partial K}{\partial \omega_k}\, d\varphi_k\Big) = d\sum \mathscr{I}_k\, d\varphi_k = \sum d\mathscr{I}_k \wedge d\varphi_k.$$

Наконец, формула (2.2) определяет гамильтониан H в соответствии с преобразованием Лежандра. Необходимое условие осуществимости преобразования Лежандра

$$\det\left\| \frac{\partial^2 K}{\partial \omega^2} \right\| \neq 0$$

автоматически выполнено в силу (1.4) и (2.3).

Доказательство. Для краткости изложения доказательство теоремы 1 будет проведено при $n = 2$. Положим

$$\Omega = \alpha\, dI_1 \wedge dI_2 + \beta\, dI_1 \wedge d\varphi_1 + \gamma\, dI_1 \wedge d\varphi_2 + \\ + \delta\, dI_2 \wedge d\varphi_1 + \varepsilon\, dI_2 \wedge d\varphi_2 + \zeta\, d\varphi_1 \wedge d\varphi_2.$$

Коэффициенты α, β, $\ldots$, ζ — гладкие функции в $D \times \mathbb{T}^2$. Условие замкнутости формы Ω эквивалентно четырем уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial \beta}{\partial I_2} + \frac{\partial \delta}{\partial I_1} = 0, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial \gamma}{\partial I_2} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial I_1} = 0, \\ &\frac{\partial \beta}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial I_1} = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial I_2} = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Равенство (1.2) дает нам еще четыре уравнения

$$\begin{aligned} \beta\omega_1 + \gamma\omega_2 &= \frac{\partial H}{\partial I_1}, \qquad \delta\omega_1 + \varepsilon\omega_2 = \frac{\partial H}{\partial I_2}, \\ \zeta\omega_2 &= \frac{\partial H}{\partial \varphi_1}, \qquad\qquad \zeta\omega_1 = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_2}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Функция H должна быть 2π-периодической по φ_1 и φ_2.

Из двух последних уравнений (2.5) получаем равенство

$$\omega_1 \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} + \omega_2 \frac{\partial H}{\partial \varphi_2} = 0. \tag{2.6}$$

Представим гамильтониан в виде ряда Фурье:

$$H = \sum H_{mn}(I) e_{mn}, \quad e_{mn} = \exp[i(m\varphi_1 + n\varphi_2)].$$

Тогда из (2.6) получим бесконечное число соотношений

$$(m\omega_1 + n\omega_2) H_{mn} = 0.$$

Ввиду предположений о невырожденности (1.4), равенство $m\omega_1 + n\omega_2 = 0$ не может быть выполнено в целой окрестности любой точки из D. Следовательно, $H_{mn} = 0$ при всех $m^2 + n^2 \neq 0$. Это означает, что гамильтониан не зависит от углов φ_1 и φ_2.

Поскольку $\omega_1^2 + \omega_2^2 \neq 0$ на всюду плотном множестве из D, то из (2.5) вытекает, что $\zeta = 0$.

Теперь применим метод Фурье к двум последним уравнениям (2.4):

$$n\beta_{mn} = m\gamma_{mn}, \quad n\delta_{mn} = m\varepsilon_{mn}. \tag{2.7}$$

Здесь $\beta_{mn}, \ldots$ — коэффициенты Фурье функций $\beta, \ldots$. Из (2.7) вытекает, что при $m^2 + n^2 \neq 0$

$$\beta_{mn} = mA_{mn}, \quad \gamma_{mn} = nA_{mn};$$
$$\delta_{mn} = mB_{mn}, \quad \varepsilon_{mn} = nB_{mn},$$

Применяя метод Фурье к первым двум уравнениям (2.5), получаем соотношения

$$(m\omega_1 + n\omega_2) A_{mn} = 0, \quad (m\omega_1 + n\omega_2) B_{mn} = 0.$$

Ввиду предположения о невырожденности, $A_{mn} = B_{mn} = 0$ для всех $m^2 + n^2 \neq 0$. Следовательно, коэффициенты $\beta, \gamma, \varepsilon, \delta$ не зависят от углов φ_1 и φ_2. Из первых двух уравнений (2.4) вытекает, что тогда и коэффициент α также не зависит от φ_1 и φ_2.

Уравнения (2.4) теперь принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \beta}{\partial I_2} = \frac{\partial \delta}{\partial I_1}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial I_2} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial I_1}.$$

Следовательно,

$$\beta = \frac{\partial F}{\partial I_1}, \quad \delta = \frac{\partial F}{\partial I_2}, \quad \gamma = \frac{\partial \Phi}{\partial I_1}, \quad \varepsilon = \frac{\partial \Phi}{\partial I_2}, \tag{2.8}$$

где F, Φ — некоторые функции, определенные в D. Подставляя полученные соотношения в (2.5), получим два уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial I_1}\,\omega_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial I_1}\,\omega_2 = \frac{\partial H}{\partial I_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial I_2}\,\omega_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial I_2}\,\omega_2 = \frac{\partial H}{\partial I_2}. \tag{2.9}$$

Приравнивая смешанные производные функции H, придем к уравнению, связывающему функции F и Φ:

$$\frac{\partial F}{\partial I_1}\,\frac{\partial \omega_1}{\partial I_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial I_1}\,\frac{\partial \omega_2}{\partial I_2} = \frac{\partial F}{\partial I_2}\,\frac{\partial \omega_1}{\partial I_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial I_2}\,\frac{\partial \omega_2}{\partial I_1}. \tag{2.10}$$

Ввиду невырожденности (1.4), в малой окрестности D в качестве независимых переменных можно принять ω_1 и ω_2. Поэтому F и Φ будем считать функциями от ω. Тогда (2.10) примет следующий вид:

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial \omega_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1}\Big)\,\frac{\partial(\omega_1,\, \omega_2)}{\partial(I_1,\, I_2)} = 0.$$

Следовательно, найдется функция $K(\omega_1,\, \omega_2)$ такая, что

$$F = \frac{\partial K}{\partial \omega_1}, \quad \Phi = \frac{\partial K}{\partial \omega_2}.$$

Этот вывод вместе с формулами (2.8) приводит к заключению (2.1).

Найдем теперь функцию Гамильтона. С учетом (2.9) имеем

$$\frac{\partial H}{\partial I_k} = \omega_1 \frac{\partial}{\partial I_k}\,\frac{\partial K}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial I_k}\,\frac{\partial K}{\partial \omega_2} = \frac{\partial}{\partial I_k}\Big(\omega_1 \frac{\partial K}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial K}{\partial \omega_2} - K\Big);$$

$k = 1,\, 2$. Отсюда вытекает формула (2.2).

Теорема доказана.

§ 3. Уравнение Монжа – Ампера

Пусть

$$f(I,\, \varphi)\, dI_1 \wedge d\varphi_1 \wedge dI_2 \wedge d\varphi_2 \tag{3.1}$$

— инвариантная мера уравнений (1.3) с дифференцируемой плотностью f. Эта функция удовлетворяет *уравнению Лиувилля*

$$\operatorname{div}(fv) = \omega_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} + \omega_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} = 0.$$

Ввиду невырожденности, f не зависит от φ_1 и φ_2. На самом деле этот вывод справедлив и для меры (3.1) с непрерывной плотностью f.

С другой стороны, по формуле (2.1),

$$\Omega \wedge \Omega = \det \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial I_i \partial \omega_j} \right\| dI_1 \wedge d\varphi_1 \wedge dI_2 \wedge d\varphi_2.$$

Следовательно, задача о лиувиллевости инвариантной меры (3.1) сводится к разрешимости относительно функции K уравнения

$$\det \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial I_i \partial \omega_j} \right\| = f(I). \tag{3.2}$$

Как уже отмечалось в п. 2, в качестве локальных координат I_1, I_2 можно взять ω_1, ω_2. Тогда уравнение (3.2) примет вид уравнения Монжа–Ампера

$$\frac{\partial^2 K}{\partial I_1^2} \frac{\partial^2 K}{\partial I_2^2} - \left(\frac{\partial^2 K}{\partial I_1 \partial I_2} \right)^2 = f(I). \tag{3.3}$$

Как известно, это уравнение всегда разрешимо для любой непрерывной положительной функции f. Более того, оно имеет много различных решений: они параметризуются функциями на окружности. Действительно, согласно [1], задача Дирихле для уравнения (3.3) разрешима, если краевые условия для функции K заданы на выпуклой кривой в области D. С другой стороны, согласно старому результату Реллиха, если $f > 0$, то задача Дирихле для уравнения Монжа–Ампера имеет не более двух различных решений.

При $n > 2$ обобщенное уравнение Монжа–Ампера (3.2) также имеет решения для всех непрерывных положительных функций f. Строгие формулировки и соответствующие ссылки относительно задачи Дирихле для уравнения (3.2) имеются в книге [2].

Итак, доказана

Теорема 2. *Все инвариантные меры невырожденной вполне интегрируемой системы лиувиллевы.*

§ 4. Замены времени в интегрируемых системах

Выполним в (1.3) замену времени $t \mapsto \tau$ по формуле

$$d\tau = F(I,\, \varphi)\, dt, \tag{4.1}$$

где F — гладкая положительная функция в $D \times \mathbb{T}^n$. Тогда уравнения (1.3) примут следующий вид

$$I'_k = 0, \quad \varphi'_k = \omega_k F; \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{4.2}$$

Штрихом обозначено дифференцирование по τ.

Естественно поставить вопрос об условиях гамильтоновости системы (4.2). Эта задача рассматривалась в работе [3]. В классической динамике известны примеры нетривиальных замен времени, после которых вполне интегрируемая гамильтонова система остается гамильтоновой, но уже по отношению к новой симплектической структуре. В [3] введены так называемые лиувиллевы замены времени (4.1), когда можно найти новые угловые координаты $\psi_1, \ldots, \psi_n$, гладко зависящие от I и φ, в которых уравнения (4.2) принимают вид

$$\psi'_k = \chi_k(I). \tag{4.3}$$

Ясно, что лиувиллевы замены времени оставляют систему гамильтоновой и что не все замены вида (4.1) лиувиллевы (см. [3]).

Теорема 3. *Если система* (4.2) *гамильтонова и не имеет положений равновесия, то замена времени* (4.1) *лиувиллева.*

Таким образом, лиувиллевы замены времени исчерпывают все замены, при которых система остается гамильтоновой. Для краткости, мы рассмотрим случай $n = 2$.

Условия замкнутости 2-формы Ω снова имеют вид (2.4), а уравнения (2.5) перейдут в уравнения

$$\begin{aligned} \beta\omega_1 + \gamma\omega_2 &= G\frac{\partial H}{\partial I_1}, & \delta\omega_1 + \varepsilon\omega_2 &= G\frac{\partial H}{\partial I_2}, \\ \zeta\omega_2 &= G\frac{\partial H}{\partial \varphi_1}, & \zeta\omega_1 &= -G\frac{\partial H}{\partial \varphi_2}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

где $G = F^{-1}$. Из двух последних уравнений (4.4) вытекает, что

$$\omega_1\frac{\partial H}{\partial \varphi_1} + \omega_2\frac{\partial H}{\partial \varphi_2} = 0.$$

Следовательно, из-за невырожденности, гамильтониан зависит лишь от I_1, I_2. В частности, $\zeta = 0$ (см. (4.4)) и для коэффициентов Фурье функций $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ справедливы соотношения (2.7). Поэтому снова можно положить

$$\beta_{mn} = mA_{mn}, \ \ldots, \ \varepsilon_{mn} = nB_{mn}.$$

Из первых двух уравнений системы (4.4) вытекают равенства

$$\begin{aligned}(m\omega_1 + n\omega_2)A_{mn} &= \frac{\partial H}{\partial I_1}\, G_{mn},\\ (m\omega_1 + n\omega_2)B_{mn} &= \frac{\partial H}{\partial I_2}\, G_{mn},\end{aligned} \tag{4.5}$$

справедливые при $m^2 + n^2 \neq 0$. Здесь G_{mn} — коэффициенты Фурье функции G.

Поскольку, согласно предположению, система (1.3) не имеет равновесий, то $dH \neq 0$ в области D. В противном случае поле v где-то обращается в нуль (ввиду невырожденности Ω). Следовательно, из (4.5) вытекают равенства

$$G_{mn} = \Lambda_{mn}(m\omega_1 + n\omega_2), \quad m^2 + n^2 \neq 0.$$

Введем функцию

$$R = -i\sum \Lambda_{mn} e_{mn}.$$

Она очевидно 2π-периодична по φ_1, φ_2 и бесконечно дифференцируема. Функция R удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi_1}\,\omega_1 + \frac{\partial R}{\partial \varphi_2}\,\omega_2 = G - \langle G\rangle, \tag{4.6}$$

где

$$\langle G\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} G\, d\varphi_1\, d\varphi_2.$$

Однако, как установлено в [4, гл. VII], если уравнение (4.6) допускает гладкое однозначное решение, то можно указать явные формулы перехода к новым угловым координатам ψ_1, ψ_2, переводящие уравнения (4.2) для φ_1, φ_2 к виду (4.3). Эта замена гладко зависит от координат I_1, I_2 как от параметров. Следовательно, замена времени (4.1) лиувиллева.

Отметим в заключение, что задача о периодических решениях уравнения (4.6) тесно связана с классической проблемой малых знаменателей. Условия приводимости уравнений (4.2) к виду (4.3) при $n = 2$ изучены впервые А. Н. Колмогоровым в работе [5]. Они связаны с наличием периодических решений «гомологического уравнения» — дискретного аналога уравнения (4.6).

Литература

[1] *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969.

[2] *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. М.: Наука, 1985.

[3] *Веселов А. П.* О замене времени в интегрируемых системах // Вестник МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1987. №5. С. 25–29.

[4] *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980.

[5] *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // ДАН СССР. 1953. Т. 93. №5. С. 763–766.

Добавление 3

О существовании и гладкости интеграла гамильтоновой системы определенного вида[1]

В настоящей работе доказана высказанная в [1] гипотеза В. В. Козлова: построен пример гамильтоновой системы, зависящей от действительного параметра $\varepsilon > 0$, которая на множествах $M_\varnothing, M_0, M_1, \ldots, M_k, \ldots, M_\infty$, M_ω значений параметра, соответственно, не имеет непрерывной инвариантной функции, отличной от тождественной постоянной, имеет непрерывную, но не дифференцируемую инвариантную функцию, интеграл фиксированной гладкости $C^1, \ldots, C^k, \ldots, C^\infty$ и аналитический интеграл. Множества $M_\varnothing, M_0, \ldots, M_k, \ldots, M_\infty, M_\omega$ будут всюду плотны в $\mathbb{R}_+$. Построение проводится согласно общей схеме, предложенной в [1]. При построении множества $M_\varnothing$ используются свойства цилиндрических каскадов (см. [2,4]).

1. Рассмотрим гамильтонову систему с одной степенью свободы

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{1.1}$$

где $H = \varepsilon y + f(x,t)$, $(x,t) \in \mathbb{T}^2$, $y \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ — параметр, а функция f такова, что

$$-\frac{\partial f}{\partial x}\, F(x,t) = \sum_{m,\, n\in\mathbb{N}}^{*} 2^{-m-n}\cos 2\pi(mx-nt) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}^{*} F_{m,\,n} e^{2\pi i(mx-nt)}.$$

Здесь и далее знак $\overset{*}{\sum}$ означает, что суммирование ведется по взаимно простым индексам m и n, а $F_{m,n}$ определяются последним равенством. Отметим, что гамильтониан H аналитически зависит от переменных x, y, t

[1]Это — статья Н. Г. Мощевитина, опубликованная в «Математических заметках». 1991. Т. 49. № 5. С. 80–85.

и параметра ε. Очевидно,

$$x = \varepsilon t + x_0, \quad y = \int_0^t F(\varepsilon s + x_0, s)\, ds + y_0 \tag{1.2}$$

есть общее решение системы (1.1).

Введем следующие множества значений параметра ε:

$M_{\varnothing} = \{\varepsilon\colon \exists \{m_\nu\}, \{n_\nu\}$ — последовательности натуральных чисел, $(m_\nu, n_\nu) = 1$, $\exists C > 0$, что $|m_\nu \varepsilon - n_\nu| < C 2^{-m_\nu - n_\nu}\}$,

$M_k = \{\varepsilon\colon \exists \{m_\nu\}, \{n_\nu\} \subset \mathbb{N}$, $(m_\nu, n_\nu) = 1$, $\exists C_{1,2} > 0$, что $C_1 m_\nu^k 2^{-m_\nu - n_\nu} < |\varepsilon - n_\nu/m_\nu| < C_2 m_\nu^k 2^{-m_\nu - n_\nu}$, $\exists \varkappa, C > 0$, что для любой несократимой дроби $n/m \neq n_\nu/m_\nu$ выполняется $|\varepsilon - n/m| > C m^{-\varkappa}\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$M_\infty = \{\varepsilon\colon \exists \{m_\nu\}, \{n_\nu\} \subset \mathbb{N}$, $(m_\nu, n_\nu) = 1$, $\exists C_{1,2} > 0$, что $C_1 2^{(m_\nu + n_\nu)(\ln m_\nu)^{-1} - m_\nu - n_\nu} < |\varepsilon - n_\nu/m_\nu| < C_2 2^{(m_\nu + n_\nu)(\ln m_\nu)^{-1} - m_\nu - n_\nu}$, $\exists \varkappa, C > 0$, что для любой несократимой дроби $n/m \neq n_\nu/m_\nu$ выполняется $|\varepsilon - n/m| > C m^{-\varkappa}\}$,

$M_\omega = \{\varepsilon\colon \exists C, \varkappa > 0\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ |m\varepsilon - n| > C m^{-\varkappa}\}$.

Замечание. Множества $M_\varnothing, M_0, M_1, \ldots, M_k, \ldots, M_\infty, M_\omega$ всюду плотны в $\mathbb{R}_+$ и обладают мощностью континуума каждое. Это достаточно просто можно показать, используя теорию цепных дробей [3]. Действительно, для $M_\varnothing$ это очевидно, ибо выполнение соответствующих условий на ε гарантировано при достаточно быстром росте коэффициентов разложения ε в цепную дробь. Для M_k и M_∞ это выясняется ниже. Что же касается M_ω, то хорошо известно, что почти все (в смысле меры Лебега) значения ε принадлежат M_ω. Таким образом, $M_\varnothing, \ldots, M_\infty$ имеют меру нуль.

Докажем сделанное утверждение о множестве M_k. Пусть задан интервал (α_1, α_2). Разложим какое-нибудь иррациональное число $\beta \in (\alpha_1, \alpha_2)$ в цепную дробь: $\beta = [b_0; b_1, b_2, \ldots]$ и пусть ν_0 столь велико, что $\nu_0 \geqslant 2$,

$$2^{\nu_0 - 1} > \min(|\beta - \alpha_1|, |\beta - \alpha_2|), \tag{1.3}$$

$$q < 2^q / q^{k+1} \ \text{ при } \ q > 2^{(\nu_0+1)/2}. \tag{1.4}$$

Тогда любое число γ, разложение которого в цепную дробь имеет первые коэффициенты $b_0, \ldots, b_{\nu_0}$, принадлежит (α_1, α_2), ибо если p_ν/q_ν суть подходящие дроби для γ, то $p_{\nu_0}/q_{\nu_0} = [b_0; b_1, \ldots, b_{\nu_0}]$ является подходящей дробью также и для β, а потому и β, и γ отстоят от p_{ν_0}/q_{ν_0} менее чем на $1/q_{\nu_0}^2$, и притом в одну и ту же сторону. Значит,

$$|\beta - \gamma| < \frac{1}{q_{\nu_0}^2} < \frac{1}{2^{\nu_0 - 2}} < \min(|\beta - \alpha_1|, |\beta - \alpha_2|)$$

(используем то, что

$$q_\nu \geqslant 2^{(\nu-1)/2}; \tag{1.5}$$

см. [3, теорема 12], и (1.3)). Положим $a_\nu = b_\nu$ при $\nu = 1, \ldots, \nu_0$, а при $\nu > \nu_0$ подчиним коэффициенты a_ν цепной дроби $\varepsilon = [a_0; a_1, \ldots]$ такому условию: для соответствующих подходящих дробей

$$q_{\nu+1} \in (2^{p\nu+q\nu}/q_\nu^{k+1}, 2^{p\nu+q\nu+1}/q_\nu^{k+1}). \tag{1.6}$$

Из (1.4), (1.5) видно, что (поскольку $p_\nu > 0$)

$$q_\nu < 2^{p_\nu+q_\nu-1}/q_\nu^{k+1},$$
$$q_\nu + q_{\nu-1} < 2q_\nu < 2^{p_\nu+q_\nu}/q_\nu^{k+1},$$

поэтому в отрезке, указанном в (1.6), лежат по крайней мере два числа вида $aq_\nu + q_{\nu-1}$ с натуральными a. Такие a и можно взять за $a_{\nu+1}$ (стало быть, для каждого $\nu > \nu_0$ коэффициент a_ν выбирается по крайней мере двумя способами и множество соответствующих ε действительно имеет мощность континуума).

Поскольку

$$\frac{1}{2q_\nu q_{\nu+1}} < \frac{1}{q_\nu(q_{\nu+1} + q_\nu)} < \left|\varepsilon - \frac{p_\nu}{q_\nu}\right| < \frac{1}{q_\nu q_{\nu+1}}$$

(см. [3, теоремы 9, 13]), то

$$\frac{q_\nu^k}{2^{p_\nu+q_\nu+2}} < \left|\varepsilon - \frac{p_\nu}{q_\nu}\right| < \frac{q_\nu^k}{2^{p_\nu+q_\nu}}.$$

Значит, если положить

$$\frac{n_\nu}{m_\nu} = \frac{p_{\nu+\nu_0}}{q_{\nu+\nu_0}}, \quad \nu \geqslant 1,$$

то неравенства, фигурирующие в определении M_k, выполняются с $C_1 = 1/4$, $C_2 = 1$. Остаются еще неравенства, относящиеся к дробям n/m, не являющимися подходящими дробями для ε, а также для нескольких первых подходящих дробей $p_0/q_0, \ldots, p_{\nu_0}/q_{\nu_0}$. Для первых

$$\left|\varepsilon - \frac{n}{m}\right| > \frac{1}{2m^2}$$

(теорема Лежандра; см. [3, теорема 19]), так что соответствующие неравенства выполняются с $\varkappa = 2$ и любым $C \leqslant 1/2$. А при достаточно малом C неравенства будут выполняться и для дробей $p_0/q_0, \ldots, p_{\nu_0}/q_{\nu_0}$.

Доказательство сделанного утверждения о множестве M_∞ аналогично.

Теорема. *При $\varepsilon \in M_\varnothing$ система* (1.1) *неинтегрируема. При $\varepsilon \in M_0$, $M_1, \ldots, M_k, \ldots, M_\infty$ система* (1.1) *допускает существование инвариантной функции $\varphi(x, y, t)$ фиксированной гладкости $C, C^1, \ldots, C^k, \ldots, C^\infty$, соответственно, причем произвольная непостоянная инвариантная функция системы* (1.1) *обладает гладкостью, не превосходящей гладкости функции $\varphi(x, y, t)$. При $\varepsilon \in M_\omega$ система допускает непостоянный аналитический интеграл.*

2. Доказательство теоремы.

1) Пусть $\varepsilon \in M_\varnothing$. Решение (1.2) системы (1.1) порождает цилиндрический каскад

$$x \mapsto x + \varepsilon, \quad y \to y + h(x), \tag{2.1}$$

где

$$h(x) = \int_0^1 F(\varepsilon s + x, s)\, ds = \sum_{m \neq 0} h_m e^{2\pi i m x}.$$

Имеет место равенство

$$F(\varepsilon s + x, s) = \sum_{m \neq 0} e^{2\pi i m x} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ (m,n)=1}} F_{m,n} e^{2\pi i (m\varepsilon - n)},$$

причем ввиду равномерной сходимости здесь возможно почленное интегрирование. Следовательно,

$$h_m = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ (m,n)=1}} F_{m,n} \frac{e^{2\pi i m \varepsilon} - 1}{2\pi i (m\varepsilon - n)}.$$

Покажем, что гомологическое уравнение $g(x+\varepsilon)-g(x)=h(x)$ не удовлетворяется ни при какой непрерывной функции $g(x)$ с периодом 1. Известно (см. [2, 4]), что в этом случае каскад (2.1) будет топологически транзитивным и, следовательно, некоторая полутраектория уравнений будет всюду плотна в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}(y)\times\mathbb{T}^2(x,t)$, что, в свою очередь, означает неинтегрируемость системы (1.1).

Действительно, предполагая противное, получим, что коэффициенты Фурье g_m функции g суть

$$g_m=\frac{h_m}{e^{2\pi i m\varepsilon}-1}=\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\(m,n)=1}}\frac{F_{m,n}}{2\pi i(m\varepsilon-n)}.$$

По теореме Лебега $g_m\to 0$ при $|m|\to\infty$. Но из неравенств для $\varepsilon\in M_\varnothing$ видно, что в выражении для g_{m_ν} слагаемое с $n=n_\nu$ не стремится к нулю при $\nu\to\infty$, а у остальных слагаемых знаменатель по модулю $\geqslant 1/2$, так что сумма модулей этих слагаемых $\leqslant C\sum\limits_n F_{m,n}<C_2^{-m_\nu}$, где C не зависит от ν. Получается, что g_{m_ν} не стремится к нулю.

2) Пусть $\varepsilon\in M_j$; $j\in\{0;1;2;\ldots;\infty;\omega\}$. Покажем, что у системы (1.1) имеется инвариантная функция вида

$$\varphi(x,y,t)=y+g(x,t), \tag{2.2}$$

удовлетворяющая условию теоремы. Функцию $g(x,t)$ будем искать из соотношения

$$g(\varepsilon t+x,t)-g(x,0)=-\int\limits_0^1 F(\varepsilon s+x,s)\,ds.$$

Этому соотношению удовлетворяет функциональный ряд

$$-\sum_{m,n\in\mathbb{N}}^{*}(2\pi)^{-1}2^{-m-n}(m\varepsilon-n)^{-1}\sin 2\pi(mx-nt). \tag{2.3}$$

При $\varepsilon\in M_\omega$ ряд (2.3) будет задавать функцию, аналитическую в некоторой комплексной окрестности действительного тора в силу оценки

$$0<2^{-m-n}|m\varepsilon-n|^{-1}<C_2^{-\gamma_1(m+n)},$$
$$C,\gamma_1>0.$$

При $\varepsilon \in M_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ ряд (2.3) разобьем на два:

$$g(x,t) = -(2\pi)^{-1}\Bigg[\sum_{|\varepsilon - n/m| > Cm^{-\varkappa}}^{*} 2^{-m-n}(m\varepsilon - n)^{-1} \times$$

$$\times \sin 2\pi(mx - nt) + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-m_\nu - n_\nu}(m_\nu\varepsilon - n_\nu)^{-1} \sin 2\pi(m_\nu x - n_\nu t)\Bigg].$$

Здесь первое слагаемое задает аналитическую функцию. Обратимся ко второму ряду. При $\varepsilon \in M_j$, $j \in \mathbb{N}$, формальное дифференцирование до j-го порядка включительно дает равномерно сходящиеся ряды (ряд для производных j-го порядка оценивается сверху сходящимся рядом $C\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} m_\nu^{-1}$). Значит, наш ряд определяет функцию класса C^j. Если бы она была класса C^{j+1}, то при $(j+1)$-кратном формальном дифференцировании получались бы, по меньшей мере, коэффициенты Фурье, стремящиеся к нулю при $\nu \to \infty$. Но легко видеть, что это не так. Аналогично, при $\varepsilon \in M_\infty$ получается бесконечно дифференцируемая на торе функция, но ее коэффициенты Фурье убывают медленнее любой показательной функции и, следовательно, его сумма не является аналитической ни в одной комплексной окрестности вещественного тора $\mathbb{T}^2(x,t)$.

3) Покажем, что при $\varepsilon \in M_j$, $j = 1, 2, \ldots, \infty$ всякая непостоянная гладкая инвариантная функция $G(x,y,t)$ системы (1.1) обладает гладкостью по переменным x, t, не превосходящей гладкости построенной инвариантной функции вида (2.2), а при $j = 0$ гладкой G не существует. Допустим противное. Зафиксируем поверхность уровня

$$\varphi(x,y,t) = y + g(x,t) = c. \tag{2.4}$$

Функция $G(x, -g(x,t) + c, t)$, определенная на ней, будет тождественной постоянной, так как на поверхности уровня (2.4) траектории всюду плотны. Итак, $G(x, -g(x,t) + c, t) = \psi(c)$. Это означает функциональную зависимость G и φ. Кроме того, при $j > 0$ функция $\psi(c)$ гладко зависит от c. Но это так и при $j = 0$, потому что она совпадает с функцией $c \mapsto G(x, -g(x,t) + c, t)$, отвечающей каким-нибудь фиксированным значениям x и t, так что гладкость функции ψ следует из одной только гладкости G по y. Далее,

$$\psi'(c) = \frac{\partial G(x,y,t)}{\partial y}\bigg|_{(x,y,t)=(x,-g(x,t)+c,t)},$$

так что производная $\partial G/\partial y$ постоянна на поверхности уровня (2.4). Очевидно, найдется такая поверхность уровня, на которой $\partial G/\partial y \neq 0$. Разрешая в некоторой окрестности этой поверхности равенство $G(x, y, t) = \psi(c)$ относительно y, в силу единственности получаем $y = -g(x, t) + c$, причем функция $g(x, t)$ будет обладать гладкостью не меньшей, чем функция $G(x, y, t)$ по переменным x и t. Теперь предположение, что G обладает гладкостью большей, чем построенная инвариантная функция $\varphi(x, y, t)$, приводит к противоречию. Теорема доказана.

Литература

[1] *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1988. Т. 38, вып. 1. С. 3–67.

[2] *Сидоров Е. А.* Топологически транзитивные цилиндрические каскады // Мат. заметки. 1973. Т. 14, вып. 3. С. 441–452.

[3] *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. — М.: Наука, 1978.

[4] *Gottschalk W., Hedlund G.* Topological dynamics // A. M. S. Col. No. 36. — New York, 1955.

Добавление 4

Ветвление решений и полиномиальные интегралы уравнений динамики[1]

Задача о связи между ветвлением решений в плоскости комплексного времени и наличием нетривиальных законов сохранения (они чаще называются первыми интегралами или просто интегралами) восходит к Пенлеве. В. В. Голубев [3] связывает эту задачу с классическими исследованиями Ковалевской, Ляпунова и Гюссона в динамике тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Роль ветвящихся решений как препятствия к интегрируемости в комплексном фазовом пространстве впервые выяснена в [11] с помощью метода малого параметра Пуанкаре. Затем эти вопросы были связаны с самопересечением комплексных сепаратрис [8] и со строением группы монодромии уравнений в вариациях [5]. Еще один подход опирается на метод Ляпунова, развитый в применении к общим квазиоднородным системам [17].

Ниже установлена связь структуры ветвления решений как функций комплексного времени и количества полиномиальных по импульсам интегралов, которые могут допускать уравнения динамики.

1. Основные результаты. Пусть M^n — конфигурационное пространство динамической системы, $P^{2n} = T^*M$ — ее $2n$-мерное фазовое пространство. Локальные координаты на M обозначим $(x_1, \ldots, x_n) = x$; пусть $(y_1, \ldots, y_n) = y$ — сопряженные импульсы (декартовы координаты в линейных пространствах $T^*_x M$). Переменные $(x, y) = z$ являются координатами в фазовом пространстве P.

Пусть

$$K(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) y_i y_j$$

— кинетическая энергия рассматриваемой системы (положительно определенная квадратичная форма на $T^*_x M$), $F = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$ — силовое

[1] Это — работа автора, опубликованная в ПММ, 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 3–11.

поле (ковекторное поле на M). Если силы F потенциальны, то

$$F_i = -\partial\Pi/\partial x_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

где $\Pi : M^n \to \mathbb{R}$ — потенциальная энергия.

Уравнения движения имеют следующий канонический вид:

$$\dot{x}_i = \partial K/\partial y_i, \qquad \dot{y}_i = -\partial K/\partial x_i + F_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{1.1}$$

В случае потенциальных сил они принимают форму дифференциальных уравнений Гамильтона с гамильтонианом $H = K + \Pi$, который, конечно, будет их интегралом. Уравнения (1.1) обратимы: они переходят в себя при инволюции $t \mapsto -t$, $y \mapsto -y$.

Все известные интегралы уравнений (1.1) — полиномы по импульсам (либо функции от полиномов). Задача о наличии полиномиальных интегралов восходит к Уиттекеру [13] и Биркгофу [2]. Линейные по импульсам интегралы связаны со скрытыми циклическими координатами: после подходящей замены одна из координат (скажем, x_1) не входит в кинетическую энергию K и соответствующая компонента силы F_1 равна нулю; тогда исходный линейный интеграл будет совпадать с импульсом y_1. Существование квадратичных по импульсам интегралов связано с возможностью разделения переменных. Задача о полиномиальных интегралах степени, большей или равной трем, оказывается существенно более сложной. Обзор результатов в этом направлении можно найти в [12] (гл. VIII).

Ниже задача Уиттекера–Биркгофа рассматривается с более простой комплексной точки зрения. Предполагается, что многообразие M снабжено комплексной структурой, относительно которой K и $F_1, \ldots, F_n$ являются комплексно-аналитическими функциями на P и M соответственно. Исследуется вопрос о наличии полиномиальных по $y_1, \ldots, y_n$ интегралов с комплексно-аналитическими на M коэффициентами. Такие интегралы часто называют однозначными полиномиальными интегралами.

Положим сначала $F = 0$. Тогда будем иметь задачу о геодезических римановой метрики K на M. Хорошо известно (см., например, [12]), что в этой задаче все интегралы можно считать однородными многочленами по y: каждая однородная форма разложения интеграла в ряд Маклорена по $y_1, \ldots, y_n$ будет интегралом уравнений геодезических. Максимальное число s таких независимых однородных интегралов назовем *степенью интегрируемости* по Биркгофу задачи о геодезических. Степень интегрируемости тесно связана с топологией конфигурационного пространства. Пусть, например, M^2 — компактное ориентируемое связное многообразие. Если род M больше единицы, то $s = 1$ (единственным нетривиальным интегралом является энергия $H = K$), для тора (поверхность рода 1) $s = 2$. С другой стороны, геодезический поток на стандартной двумерной сфере имеет три независимых интеграла (поэтому здесь $s = 3$).

Пусть $\Phi : P \to \mathbb{R}$ — аналитический интеграл задачи о геодезических. Производная от Φ в силу канонических уравнений (1.1) равна

$$\dot{\Phi} = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} F_i. \tag{1.2}$$

В случае потенциального силового поля

$$\dot{\Phi} = \{\Phi, \Pi\},$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ — стандартная скобка Пуассона.

Пусть $t \mapsto z_0(t)$ — одно из решений укороченной системы (1.1), когда $F_i = 0$. В силу предположения об аналитичности, $z_0(\cdot)$ — голоморфная функция комплексного времени t, однозначная на некоторой римановой поверхности Ω (Ω получается в результате максимального аналитического продолжения своего аналитического элемента, существование которого гарантирует теорема Коши). Композиция $t \mapsto \dot{\Phi}(z_0(t))$ является голоморфной функцией на Ω или в некоторой ее подобласти, если компоненты силы F имеют сингулярности. Пусть γ — замкнутая ориентированная кривая на Ω, в окрестности которой функция $t \mapsto \dot{\Phi}(t)$ голоморфна.

Теорема 1. *Если*

$$\int\limits_{\gamma} \dot{\Phi}(z_0(t))\, dt \neq 0, \tag{1.3}$$

то полная система уравнений (1.1) *имеет решения, многозначные на* Ω.

Свойство ветвления решений означает следующее. По теореме Коши уравнения (1.1) имеют решения, которые голоморфны в окрестности точки $t_0 \in \gamma$ и при $t = t_0$ принимают заданное значение из P. Теорема 1 утверждает, что среди этих решений имеются такие, аналитическое продолжение которых вдоль замкнутого пути γ приводит к многозначным функциям.

Теорему 1 удобно применять на практике, когда общее решение задачи о геодезических представляется мероморфными функциями на комплексной плоскости времени. Тогда риманова поверхность Ω — комплексная плоскость $\mathbb{C} = \{t\}$, из которой удалены полюсы мероморфной вектор-функции $t \mapsto z_0(t)$. Пусть компоненты силы F не имеют сингулярностей. Тогда $f(t) = \dot{\Phi}(z_0(t))$ будет мероморфной функцией. Теорема 1 утверждает, что если f имеет хотя бы один полюс с ненулевым вычетом, то решения системы (1.1) ветвятся как функции комплексного времени.

Следует, конечно, иметь в виду, что в общем случае $\dot{\Phi}(z(t)) \neq$ $\neq [\Phi(z(t))]^{\cdot}$, иначе интеграл (1.3) равен нулю по формуле Ньютона–Лейбница.

Ветвление решений принято связывать с хаотической динамикой и отсутствием интегралов — законов сохранения (см., например, [15, 16]). Однако не всякое ветвление опасно с точки зрения свойства интегрируемости.

Простейший пример доставляет одномерная гамильтонова система с гамильтонианом $H = y^2/2 + h(x)$, где $h(x)$ — многочлен степени, большей или равной пяти с простыми корнями. Почти все решения многозначны как функции комплексного времени, однако система допускает полиномиальный интеграл H.

Пусть s — степень интегрируемости по Биркгофу задачи о геодезических риманова многообразия (M, K) и $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$ — набор независимых интегралов, однородных по импульсам. Более точно, предполагается, что градиенты этих функций линейно независимы хотя бы в одной точке фазовой траектории $t \mapsto z_0(t)$. Тогда, оказывается, они независимы во всех точках этой траектории (см., например, [5]). Отображение $\Phi : P \to \mathbb{C}^s$, задаваемое формулой $z \mapsto (\Phi_1(z), \ldots, \Phi_s(z))$, принято называть *отображением момента*.

Вычислим производную $\dot{\Phi}(z)$ в силу полной системы (1.1) (по формуле (1.2)) и затем составим композицию $t \mapsto \dot{\Phi}(z_0(t))$. В результате получим вектор-функцию $\dot{\Phi}$, голоморфную на римановой поверхности Ω.

Рассмотрим естественный гомеоморфизм

$$H_1(\Omega, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^s,$$

заданный формулой

$$\gamma \mapsto \int\limits_{\gamma} \dot{\Phi}(z_0(t))\, dt. \tag{1.4}$$

Здесь γ — одномерные циклы на Ω; ввиду голоморфности $\dot{\Phi}$ интегралы (1.4) по гомологичным циклам совпадают. Пусть r — ранг группы $\pi(H_1)$ как системы векторов в $\mathbb{C}^s$ (максимальное число линейно независимых над $\mathbb{C}$ векторов из $\pi(H_1)$). Например, если $\dot{\Phi}(\cdot)$ — мероморфная вектор-функция на $\mathbb{C}$, то ранг r равен максимальному числу линейно независимых ее вычетов (как векторов из $\mathbb{C}^s$).

Теорема 2. *Предположим, что система уравнений* (1.1) *имеет* k *полиномиальных голоморфных интегралов с независимыми старшими однородными формами. Тогда*

$$k + r \leqslant s. \tag{1.5}$$

Легко понять, что старшие однородные формы интегралов системы (1.1) являются интегралами задачи о геодезических (когда $F = 0$). По-видимому, предположение об их независимости можно снять, поскольку во всех известных автору случаях можно указать другие k полиномиальных интегралов, у которых старшие формы независимы почти всюду. Однако это утверждение доказано пока лишь в частных случаях. Например, когда M — n-мерный тор, $K = \sum a_{ij} y_i y_j / 2$ — невырожденная квадратичная форма с постоянными коэффициентами [6]. Используя метод Пуанкаре (см. [12]), предположение о независимости старших форм можно также снять в случае, когда уже известны $n - 1$ полиномиальных интегралов уравнений (1.1) с независимыми старшими однородными формами и задача заключается в отыскании еще одного полиномиального интеграла. Такая ситуация заведомо имеет место для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы: роль известного интеграла выполняет интеграл энергии $H = K + \Pi$.

Особенно просто теорема 2 формулируется для консервативных систем с двумя степенями свободы ($n = 2$), степень интегрируемости которых s равна двум. Здесь задача может идти о существовании дополнительного полиномиального интеграла, независимого от интеграла энергии. Теорема 2 дает простое условие неинтегрируемости в комплексном смысле:

$$\int\limits_{\gamma} \{\Phi, \Pi\}(z_0(t))\, dt \neq 0. \tag{1.6}$$

Здесь Φ — однородный интеграл задачи о геодезических.

Условие (1.6) полезно сравнить с известным условием вещественной неинтегрируемости ([12], гл. IV): в качестве решения «невозмущенной» задачи следует взять двоякоасимптотическое гомоклиническое решение, а интегрирование в (1.6) осуществляется по всей оси времени $\mathbb{R} = \{t\}$. Если такой несобственный интеграл отличен от нуля, то полная система не допускает вещественного полиномиального интеграла с аналитическими коэффициентами, независимого от интеграла энергии.

2. Доказательство теорем 1 и 2. Введем в уравнения (1.1) малый параметр ε с помощью подстановки

$$x \mapsto x, \qquad y \mapsto y/\sqrt{\varepsilon}, \qquad t \mapsto \sqrt{\varepsilon}\, t.$$

Уравнения (1.1) будут иметь тот же вид, только силу F надо заменить на εF. При $\varepsilon = 0$ будем иметь задачу о движении по инерции. Полиномиальные интегралы относительно импульсов y перейдут в многочлены по параметру ε

$$\Phi_j(z, \varepsilon) = \Psi_j(z) + \varepsilon G_j(z) + \ldots \,. \tag{2.1}$$

Ясно, что Ψ_j будут старшими однородными формами исходных интегралов ([12], гл. II). Эти функции независимы по предположению.

По теореме Пуанкаре решения системы (1.1) можно разложить в ряды по степеням ε

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + \ldots\,, \tag{2.2}$$

сходящиеся при малых значениях ε равномерно по t из окрестности замкнутой кривой γ.

Докажем теорему 1. Пусть Φ — интеграл невозмущенной системы. Согласно (1.2),

$$\dot{\Phi} = \varepsilon \sum \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} F_i. \tag{2.3}$$

Если все решения возмущенной системы однозначны на Ω, то значение функции Φ как функции времени не изменится после обхода замкнутого контура γ. Однако согласно (2.2) и (2.3) приращение этой функции равно $\varepsilon I + o(\varepsilon)$, где I — интеграл в левой части (1.4). Следовательно, при малых $\varepsilon \neq 0$ решение (2.2) ветвится после аналитического продолжения вдоль замкнутой кривой γ. Что и требовалось.

Докажем теперь теорему 2. Пусть $\omega \subset P$ — образ римановой поверхности Ω при отображении $t \mapsto z_0(t)$. Так как $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$ составляют максимальный набор независимых интегралов невозмущенной системы, то в каждой точке ω

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial z} = c_{j,1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \ldots + c_{j,s}\frac{\partial \Phi_s}{\partial z}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant k. \tag{2.4}$$

Поскольку $z_0(\cdot)$ — решение, то коэффициенты $c_{j,i}$ постоянны на ω ([12], гл. IV). Следовательно,

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial y} = \sum_{i=1}^{s} c_{j,i}\frac{\partial \Phi_i}{\partial y}$$

и, в частности,

$$\int\limits_{\gamma} \dot{\Psi}_j(z_0(t))\,dt = \sum_i c_{j,i} \int\limits_{\gamma} \dot{\Phi}_i(z_0(t))\,dt. \tag{2.5}$$

Так как (2.1) — однозначный первый интеграл системы (1.1), то все интегралы слева в равенстве (2.5) равны нулю. Поэтому согласно предположению найдутся r линейно независимых векторов

$$\xi = \int\limits_{\gamma} \dot{\Phi}(z_0(t))\,dt$$

таких, что $C\xi = 0$, $C = \|c_{j,i}\|$. Но тогда $\operatorname{rank} C \leqslant s - r$. Согласно (2.4), количество k линейно независимых векторов $\partial\Psi_j/\partial z$ равно рангу C и, следовательно, справедливо неравенство (1.5): $k \leqslant s - r$.

3. Некоторые приложения.

3.1. Рассмотрим классическую задачу о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Уравнения движения допускают нётеров интеграл: сохраняется проекция кинетического момента на вертикаль. Полагая эту проекцию нулю и факторизуя по группе поворотов вокруг вертикали, сведем задачу к обратимой системе с двумя степенями свободы ($n = 2$), конфигурационным пространством которой является двумерная сфера (сфера Пуассона). Понижение порядка детально и многократно обсуждалось (например, [6], гл. III).

В отсутствие сил имеем интегрируемый волчок Эйлера. Известно, что если не все главные моменты инерции совпадают, то для приведенной задачи $s = 2$ (кстати сказать, для исходной системы Эйлера с тремя степенями свободы $s = 4$). Решения задачи Эйлера выражаются через Θ-функции времени t и, следовательно, являются мероморфными функциями времени на комплексной плоскости $\mathbb{C} = \{t\}$ (см. [13], § 68). Если среди моментов инерции есть равные, то мероморфные функции вырождаются в целые голоморфные функции комплексного времени.

В качестве однородного интеграла Φ задачи Эйлера, независимого от кинетической энергии, возьмем квадрат длины вектора кинетического момента волчка, а в качестве решения $z_0(\cdot)$ возьмем двоякоасимптотическую траекторию, неограниченно приближающуюся к постоянным вращениям твердого тела вокруг средней оси инерции в противоположных направлениях. Конечно, такие решения существуют лишь для динамически несимметричного тела. Двоякоасимптотическое решение выражается через элементарные (а не эллиптические) функции времени, и поэтому дальнейшие вычисления существенно упрощаются.

Нетрудно вычислить значение скобки Пуассона

$$\{\Phi,\, \Pi\}(z_0(t)). \tag{3.1}$$

Эта мероморфная функция всегда имеет полюсы с ненулевыми вычетами. Значит, по теореме 2 приведенные уравнения вращения тяжелого динамически несимметричного волчка не допускают однозначного полиномиального интеграла, независимого от интеграла энергии. Этот результат другим методом получен впервые автором [10] и развит С. Л. Зиглиным [5, 7].

Двоякоасимптотические решения в задаче Эйлера — гетероклинические. Поэтому для доказательства вещественной неинтегрируемости недостаточно условия, чтобы интеграл от (3.1) по оси $\mathbb{R} = \{t\}$ был отличен от нуля: требуется, чтобы он принимал разные значения на семействе двоякоасимптотических траекторий [7]. Это условие сводится к тому, что сумма полюсов мероморфной функции (3.1) в некоторой полосе, примыкающей к вещественной оси, отлична от нуля. Для доказательства более простого факта о комплексной неинтегрируемости достаточно, чтобы имелся хотя бы один ненулевой вычет.

Этот пример имеет и исторический интерес: классические результаты Ковалевской и Ляпунова об однозначных решениях уравнений вращения тяжелого волчка привели к постановке общей проблемы о соотношении ветвления решений уравнений динамики и наличия однозначных интегралов — законов сохранения (см. [3,12]).

3.2. Пусть теперь M — n-мерный тор $\mathbb{T}^n = \{x_1,\, \ldots,\, x_n \bmod 2\pi\}$, кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}\sum g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j \tag{3.2}$$

— невырожденная квадратичная форма с постоянными коэффициентами, компоненты силы f аналитичны на $\mathbb{T}^n$ и продолжаются до мероморфных функций в аффинном пространстве комплексных переменных. Задача об однозначных полиномиальных интегралах такой системы рассматривалась ранее в [9].

Ввиду невырожденности формы (3.2) степень интегрируемости по Биркгофу задачи о геодезических равна n. Набор n независимых полиномиальных интегралов задачи о геодезических составляют импульсы

$$y_1, \ldots, y_n; \qquad y_j = \partial T/\partial \dot{x}_j = \sum g_{ij}\dot{x}_i.$$

Пусть

$$x = at + b, \qquad a,\, b \in \mathbb{C}^n, \qquad t \in \mathbb{C} \tag{3.3}$$

— прямая в $\mathbb{C}^n$, задающая одно из движений по инерции. Предположим, что ограничения мероморфных функций $F_1, \ldots, F_n$ на прямую (3.3) являются мероморфными функциями на плоскости комплексного времени $\mathbb{C} = \{t\}$. Обозначим их $(f_1, \ldots, f_n) = f$.

Согласно теореме 1, если при некоторых a, b функция $t \mapsto f(t)$ имеет полюс с ненулевым вычетом, то общее решение системы уравнений

$$\dot{x}_i = \partial H/\partial y_i, \quad \dot{y}_i = -\partial H/\partial x_i + F_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n; \quad H = T|_{\dot{x}\to y} \tag{3.4}$$

ветвится на плоскости $\mathbb{C} = \{t\}$.

Пусть при некоторых a, $b \in \mathbb{C}^n$ функция f имеет m полюсов, вычеты в которых линейно независимы над $\mathbb{C}$, а система (3.4) допускает k однозначных независимых полиномиальных по импульсам интегралов. Тогда, по теореме 2, $m + k \leqslant n$.

Эти утверждения доказаны в [9]. Теоремы 1 и 2 — обобщения результатов [9] на обратимые аналитические системы общего вида. Тем же способом были получены [4] аналоги теорем 1 и 2 для систем с конфигурационным пространством S^n.

3.3. В качестве примера, показывающего эффективность теоремы 2, докажем комплексную неинтегрируемость задачи о скольжении точки по наклоненному эллипсоиду вращения (его ось симметрии не вертикальна). Этот результат является новым.

Пусть

$$(x^2 + y^2)/a^2 + z^2/b^2 = 1 \tag{3.5}$$

— уравнение эллипсоида вращения, $\Pi = \alpha x + \beta z$ (α, $\beta = \mathrm{const}$) — потенциальная энергия силы тяжести. Если $\alpha = 0$, то задача будет интегрируемой: кроме энергии, сохраняется момент импульса частицы относительно вертикали

$$\Phi = x\dot{y} - y\dot{x}. \tag{3.6}$$

Уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x} = \lambda x/a^2 - \alpha, \qquad \ddot{y} = \lambda y/a^2, \qquad \ddot{z} = \lambda z/b^2 - \beta. \tag{3.7}$$

Здесь λ — множитель Лагранжа; с учетом уравнения связи (3.5) его можно представить в виде явной функции от $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и x, y, z.

Пусть $a \neq b$ (в противном случае будем иметь известную интегрируемую задачу о сферическом маятнике). Тогда $s = 2$ (если $a = b$, то, очевидно, $s = 3$). В качестве однородного интеграла задачи о движении по инерции возьмем интеграл момента (3.6). С учетом уравнений (3.7) получаем формулу $\dot{\Phi} = \alpha y$.

Введем естественную параметризацию поверхности эллипсоида (3.5) угловыми переменными θ, φ:

$$x = a \sin\theta \sin\varphi, \qquad y = a \sin\theta \cos\varphi, \qquad z = b\cos\theta. \tag{3.8}$$

Рассмотрим замкнутую геодезическую на (3.5), которая отвечает меридиональному сечению $x = 0$ (или $\varphi = 0$). Переменная θ удовлетворяет очевидному уравнению

$$(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta)\dot{\theta}^2 = h, \tag{3.9}$$

где h — удвоенная кинетическая энергия. Удобно ввести новую переменную $u = \cos\theta$ и перейти к новому времени τ по формуле

$$dt = (a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta)\, d\tau. \tag{3.10}$$

Из (3.9) и (3.10) получим

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = d\zeta, \qquad \zeta = b\sqrt{h}\,\tau, \qquad k^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2}.$$

Следовательно, u — эллиптическая функция переменной ζ с модулем $k \neq 0$: $u = \operatorname{sn}(\zeta,\ k)$. Согласно (3.8), $y = a \operatorname{cn}\zeta$.

По теореме 2, надо проинтегрировать 1-форму $y(t)\,dt$ по негомологичному нулю циклу на римановой поверхности рассматриваемой геодезической. После замены $t \mapsto \tau$ получаем 1-форму $y(t(\tau))t'\,d\tau$. С точностью до ненулевого постоянного множителя она имеет явный вид:

$$\operatorname{cn}\zeta \operatorname{dn}^2\zeta\, d\zeta.$$

В точке $\zeta = iK'$ (K' — полный эллиптический интеграл с дополнительным модулем $k' = (1-k^2)^{1/2}$) имеем полюс. Воспользовавшись известными формулами ([14], гл. 22)

$$\operatorname{cn}(\zeta + iK') = -\frac{i}{k\zeta} + \frac{2k^2-1}{6k}\, i\zeta + O(\zeta^3),$$

$$\operatorname{dn}(\zeta + iK') = -\frac{i}{\zeta} + \frac{2-k^2}{6}\, i\zeta + O(\zeta^3),$$

находим вычет. Он равен $-i/(2k)$ и, следовательно, отличен от нуля. Таким образом, задача о движении тяжелой частицы по наклоненному эллипсоиду, действительно, не имеет дополнительного голоморфного интеграла в виде полинома по скорости.

4. Необратимые системы. Результаты разд. 1 можно перенести на более общий случай, когда на систему действуют дополнительные гироскопические силы Γy, линейные по импульсам. Компоненты матрицы $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|$ предполагаются голоморфными функциями на комплексном многообразии M^n.

Пусть снова Φ — набор s независимых интегралов задачи о движении по инерции. Производную (1.2) следует заменить на

$$\dot{\Phi} = \sum_{i,j} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\, \gamma_{ij} y_j. \tag{4.1}$$

Можно показать, что теоремы 1 и 2 останутся справедливыми после замены (1.2) на (4.1). Доказательство использует подстановку

$$x \mapsto x, \qquad y \mapsto y/\varepsilon, \qquad t \mapsto \varepsilon t.$$

Уравнения (1.1) не изменят своей формы, только действующая на систему сила будет иметь вид $\varepsilon\Gamma y + \varepsilon^2 F$. Полиномиальные по импульсам интегралы перейдут в многочлены относительно ε.

В качестве примера рассмотрим задачу о движении частицы единичной массы по эллипсоиду (3.5), который вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси y. Производная (4.1) от интеграла (3.6) невозмущенной задачи имеет вид

$$\dot{\Phi} = -\omega y \dot{z}.$$

Как и в п. 3.3, рассмотрим замкнутую геодезическую, отвечающую меридиональному сечению $x = 0$. Если $a \neq b$, то с точностью до несущественного постоянного множителя 1-форма $y\dot{z}\,dt$ имеет явный вид:

$$\operatorname{cn}^2\zeta \operatorname{dn}\zeta\, d\zeta.$$

Интеграл от этой формы по малой окружности, охватывающей точку iK', отличен от нуля. Следовательно, при $a \neq b$ рассматриваемая задача не допускает однозначного полиномиального интеграла, независимого от интеграла энергии.

Литература

[1] *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ. 1985.

[2] *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941.

[3] *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

[4] *Денисова И. В.* О полиномиальных интегралах и ветвлении решений обратимых динамических систем на сфере // Вестн. МГУ. Сер. Математика, Механика. 1995. № 2. С. 79–82.

[5] *Зиглин С. Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике. I; II // Функц. анализ и его приложения. 1982. Т. 16. № 3. С. 30–41; 1983. Т. 17. № 1. С. 8–23.

[6] *Зиглин С. Л.* О полиномиальных первых интегралах гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием // Функц. анализ и его приложения. 1991. Т. 25. № 3. С. 88–89.

[7] *Зиглин С. Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела // Тр. Моск. мат. об-ва. 1980. Т. 41. С. 287–303.

[8] *Зиглин С. Л.* Самопересечение комплексных сепаратрис и несуществование интегралов в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 564–566.

[9] *Козлов В. В.* Ветвление решений и полиномиальные интегралы в обратимой системе на торе // Мат. заметки. 1988. Т. 44. № 1. С. 100–104.

[10] *Козлов В. В.* Несуществование дополнительного аналитического интеграла в задаче о движении несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестн. МГУ. Сер. Математика, Механика. 1975. № 1. С. 105–110.

[11] *Козлов В. В.* Несуществование однозначных интегралов и ветвление решений в динамике твердого тела // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 400–406.

[12] *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1995.

[13] *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1937.

[14] *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963.

[15] *Bountis T., Segur H., Vivaldi F.* Integrable Hamiltonian systems and Painlevé property // Phys. Rev. A. 1982. V. 25. № 3. P. 1257–1264.

[16] *Ercolani N., Siggia E. D.* Painlevé property and integrability // Phys. Letters A. 1986. V. 119. № 3. P. 112–116.

[17] *Yoshida H.* Necessary condition for the existence of algebraic first integrals. I; II // Celest. Mech. 1983 № 4. V. 31. P. 363–399.

Добавление 5

Полиномиальные интегралы обратимых механических систем с конфигурационным пространством в виде двумерного тора[1]

§ 1. Введение

Рассматриваются натуральные механические системы с двумя степенями свободы, конфигурационным пространством которых является двумерный тор, допускающие дополнительный полиномиальный первый интеграл по импульсам. Такие системы, очевидно, вполне интегрируемые. Полиномиальные интегралы представимы в виде суммы однородных многочленов по импульсам с гладкими и однозначными коэффициентами на конфигурационном пространстве.

В работе [2] Биркгоф исследовал локальную задачу о наличии линейных и квадратичных интегралов, являющихся полиномами по скоростям. Оказалось, что наличие условного линейного интеграла связано с существованием «скрытой» циклической координаты, а наличие условного квадратичного интеграла позволяет разделить канонические переменные. В работах [5, 14] приведены глобальные варианты этих утверждений для случая, когда конфигурационным пространством системы является двумерный тор. Задача о полиномиальных интегралах степени $\leqslant 2$ рассматривалась также в работах [1, 10].

В работе [8] изучена задача о полиномиальных интегралах геодезических потоков на двумерном торе для метрики, у которой конформный множитель является тригонометрическим многочленом. Установлено, что если геодезический поток допускает дополнительный неприводимый интеграл, полиномиальный по импульсам, то его степень не превосходит двух. Этот результат был уточнен в [5].

[1] Это — статья Н. В. Денисовой и автора, опубликованная в «Математическом сборнике», 2000, Т. 191, № 2, С. 43-63.

В [9] рассматривалась задача о наличии полного набора независимых полиномиальных интегралов системы с торическим пространством положений $\mathbb{T}^m = \{x_1, \ldots, x_m \bmod 2\pi\}$, кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{m} a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j, \quad a_{ij} = \mathrm{const} \tag{1.1}$$

и потенциалом $V : \mathbb{T}^m \to \mathbb{R}$ в виде тригонометрического многочлена. Оказалось, что полный набор полиномиальных интегралов существует тогда и только тогда, когда спектр тригонометрического многочлена V лежит на $k \leqslant m$ прямых, попарно ортогонально пересекающихся в начале координат. Показано, что тогда обязательно существуют m независимых интегралов, степени которых $\leqslant 2$. По теореме Вейерштрасса, тригонометрические многочлены всюду плотны в пространстве всех гладких функций на торе. Однако, метод работы [9] не применим к системам с потенциалом общего вида.

В [4] отмечено, что натуральная механическая система на двумерном торе с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \tag{1.2}$$

не может иметь неприводимых интегралов третьей и четвертой степени: в этом случае обязательно имеются интегралы первой и второй степени соответственно. Этот результат получил известность и часто цитируется (см., например, [3, 7, 11], где обсуждается этот круг вопросов). Однако, в [4] доказательство приведено лишь для интеграла третьей степени. К тому же оно содержит пробел, к счастью, не столь существенный для метрики вида (1.2). Однако, для метрики общего вида (1.1) заполнение этого пробела требует дополнительных усилий (подробнее об этом в § 4). Для интегралов четвертой степени метод работы [4] не проходит уже в самом простом случае с метрикой (1.2).

Полиномиальные интегралы для систем взаимодействующих частиц, когда потенциал имеет вид

$$\sum_{i<j} f(x_i - x_j), \tag{1.3}$$

изучались в работе [12]. Во всех найденных интегрируемых случаях периодическая функция f обязательно имеет полюсы на вещественной оси.

В работе [6] показано, что для периодических потенциалов парного взаимодействия без сингулярностей система с потенциальной энергией (1.3) не может быть вполне интегрируемой.

Ниже рассматривается задача о полиномиальных интегралах n-ой степени системы с кинетической энергией общего вида (1.1) и произвольным аналитическим потенциалом. Получено обобщение теоремы Бялого для $n = 3$, а при $n = 4$, 5, 6 аналогичный результат доказан при некоторых дополнительных предположениях о спектре потенциала.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Итак, рассмотрим гамильтонову систему, конфигурационное пространство которой является двумерный тор $\mathbb{T}^2 = \{q_1, q_2 \mod 2\pi\}$. Функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{ap_1^2 + 2bp_1p_2 + cp_2^2}{2} + W(q_1, q_2), \tag{2.1}$$

где потенциал W — 2π-периодическая функция по q_1 и q_2; a, b и c — вещественные постоянные, причем $a > 0$, $ac - b^2 > 0$. Будем искать потенциал W, при котором существует полиномиальный по импульсам интеграл n-ой степени F с 2π-периодическими коэффициентами, независимый от интеграла энергии H.

Пусть сумма

$$W = \sum_{-\infty}^{+\infty} [W]_{w_1 w_2} e^{i(w_1 q_1 + w_2 q_2)}$$

будет рядом Фурье функции W. *Спектром* функции W назовем (вообще говоря, бесконечное) подмножество целочисленной решетки

$$S = \{w = (w_1, w_2) \in \mathbb{Z}^2 : [W]_{w_1 w_2} \neq 0\}.$$

Оно переходит в себя при отражении $w \mapsto -w$.

Пусть имеется полиномиальный по импульсам интеграл n-ой степени

$$F = F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + \ldots + F_0.$$

где F_k — однородный полином по импульсам степени k, коэффициенты которого являются гладкими функциями от q_1 и q_2. Заметим, что скобка Пуассона двух однородных полиномов по p_1, p_2 степени r и s будет однородным полиномом степени $r + s - 1$. Отсюда вытекает следующий факт: если F — интеграл гамильтоновой системы с гамильтонианом (2.1), то функции

$$\Phi_1 = F_n + F_{n-2} + \ldots, \qquad \Phi_2 = F_{n-1} + F_{n-3} + \ldots$$

также будут интегралами этой системы. Поэтому будем считать F суммой однородных полиномов только четных или только нечетных степеней.

Условия существования линейных и квадратичных интегралов хорошо известны $[2, 5, 14]$. При $n = 1$ спектр потенциала W лежит на одной прямой, проходящей через начало координат. При $n = 2$ спектр лежит на двух прямых, ортогональных во внутренней метрике, порожденной кинетической энергией. Отметим, что для метрик общего вида такая ситуация не типична: нет двух ортогональных прямых, проходящих через точки целочисленной решетки.

Пусть спектр потенциала лежит на одной прямой. Тогда $W = f(mq_1 + nq_2)$, где m, n — взаимно простые целые числа, а f — 2π-периодическая функция. В этом случае имеется линейный по импульсам интеграл $F_1 = mp_2 - np_1$.

Пусть теперь спектр W лежит на двух прямых, ортогонально пересекающихся в начале координат. Тогда

$$W = f_1(m_1q_1 + n_1q_2) + f_2(m_2q_1 + n_2q_2),$$

условие ортогональности имеет вид

$$am_1m_2 + b(m_1n_2 + m_2n_1) + cn_1n_2 = 0,$$

а функции f_1 и f_2, разумеется, 2π-периодические. В этом случае имеется квадратичный интеграл

$$F_2 + F_0 = (a(r_1 + r_2) + 2b)p_1^2 + \\ + 2(c - ar_1r_2)p_1p_2 - (c(r_1 + r_2) + 2br_1r_2)p_2^2 + 2(r_1 - r_2)(f_1 - f_2),$$

где $r_i = m_i/n_i$.

Пусть натуральная механическая система (2.1) допускает дополнительный независимый интеграл F, степень которого $n \geqslant 3$. Если n четное, то

$$F = F_n + F_{n-2} + \ldots + F_2 + F_0.$$

где F_0 является функцией от q_1 и q_2. Если n нечетное, то

$$F = F_n + F_{n-2} + \ldots + F_3 + F_1.$$

Кинетическую энергию удобно привести к диагональному виду с помощью линейного преобразования

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Gamma^T \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad |\Gamma| \neq 0.$$

Перейдем к новым переменным x_1 и x_2, которые являются конформными координатами на накрывающей тор плоскости. Расширим это преобразование до канонического $q, p \mapsto x, y$, где

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \Gamma^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{gathered} H = H_2 + V(x_1, x_2), \qquad H_2 = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2}, \\ V = \sum_{-\infty}^{+\infty} [W]_w e^{i(\Gamma^T w, x)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} [W]_w e^{i(w, q)}, \quad w \in \mathbb{Z}^2. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Ясно, что в общем случае $\Gamma^{-1} w \notin \mathbb{Z}^2$. После указанной подстановки спектр потенциала W будет лежать в узлах решетки параллелограммов.

Пусть

$$\begin{gathered} F_n = \sum_{i=0}^{n} b_i^{[n]} y_1^{n-i} y_2^i, \qquad F_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-2} b_i^{[n-2]} y_1^{n-2-i} y_2^i, \\ F_{n-4} = \sum_{i=0}^{n-4} b_i^{[n-4]} y_1^{n-4-i} y_2^i, \ \ldots \ . \end{gathered} \tag{2.3}$$

Как показал Пуанкаре ([13], см. также [7]) функции F_n и H_2 можно считать независимыми. В противном случае найдется интеграл меньшей степени. Как показано в [10], функции F_n и H_2 зависимы тогда и только тогда, когда

$$b_0^{[n]} - b_2^{[n]} + b_4^{[n]} - \ldots = 0, \quad b_1^{[n]} - b_3^{[n]} + b_5^{[n]} - \ldots = 0.$$

Суммы в левых частях этих равенств будем называть *суммами Биркгофа* (см. [2]). Они получаются как действительная и мнимая части F_n, если положить $y_1 = 1$ и $y_2 = i$.

С помощью метода Пуанкаре доказываются следующие утверждения (см. [7, гл. IV]). Во-первых, коэффициенты $b_i^{[n]}$ старшего полинома F_n постоянны (не зависят от координат x_1, x_2). Далее, пусть спектр потенциала содержит точку с координатами m_1, m_2, причем $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$. Тогда

$$y_2 \frac{\partial F_n}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial F_n}{\partial y_2} = 0, \quad \text{если} \quad m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0. \tag{2.4}$$

Эквивалентное утверждение: многочлен

$$m_1 \frac{\partial F_n}{\partial y_1} + m_2 \frac{\partial F_n}{\partial y_2}$$

делится нацело на $m_1 y_1 + m_2 y_2$. Частное от деления этих многочленов обозначим $G_{m_1 m_2}$; это — однородный многочлен степени $n - 2$.

Наш основной результат составляет

Теорема 1.

$$m_1 \frac{\partial G_{m_1 m_2}}{\partial y_1} + m_2 \frac{\partial G_{m_1 m_2}}{\partial y_2} = 0 \tag{2.5}$$

на прямой $m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$.

Это утверждение дополняет классический результат Пуанкаре (2.4). Чтобы лучше понять смысл условий (2.4) и (2.5), рассмотрим частный случай, когда точки спектра потенциала лежат на вертикальной прямой ($m_1 = 0$). Тогда условие Пуанкаре (2.4) эквивалентно условию $b_1^{[n]} = 0$, а условие (2.5) переходит в равенство $b_3^{[n]} = 0$.

Замечание. Естественно предположить, что справедливо более общее утверждение о равенстве нулю коэффициентов многочлена F_n со всеми нечетными номерами. К сожалению, это утверждение нам не удалось доказать. Однако, оно все равно не позволило бы дать полное доказательство гипотезы о неприводимых интегралах, о которой говорилось во введении (см. § 5).

§ 3. Доказательство основной теоремы

Из уравнения $\{F, H\} = 0$ получим соотношения на коэффициенты интеграла F. Выпишем группу уравнений при мономах $y_1^i y_2^j$, где $i + j = n + 1$.

Она состоит из $n+2$ уравнений

$$\frac{\partial b_j^{[n]}}{\partial x_1} + \frac{\partial b_{j-1}^{[n]}}{\partial x_2} = 0, \quad j = 0, \ldots, n+1, \quad b_{-1}^{[n]} = b_{n+1}^{[n]} = 0. \tag{3.1.n}$$

Как уже говорилось, решениями данных уравнений являются постоянные; пусть

$$b_i^{[n]} = a_i^{[n]} = \text{const}, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при разных мономах $y_1^i y_2^j$, где $i+j=n-1$, получим следующую группу n уравнений

$$\frac{\partial b_j^{[n-2]}}{\partial x_1} + \frac{\partial b_{j-1}^{[n-2]}}{\partial x_2} = (n-j) a_j^{[n]} \frac{\partial V}{\partial x_1} + (j+1) a_{j+1}^{[n]} \frac{\partial V}{\partial x_2}, \tag{3.1.$n-2$}$$
$$j = 0, \ldots, n-1, \quad b_{-1}^{[n-2]} = b_{n-1}^{[n-2]} = 0.$$

Аналогично выглядят остальные уравнения

$$\frac{\partial b_j^{[n-4]}}{\partial x_1} + \frac{\partial b_{j-1}^{[n-4]}}{\partial x_2} = (n-2-j) b_j^{[n-2]} \frac{\partial V}{\partial x_1} + (j+1) b_{j+1}^{[n-2]} \frac{\partial V}{\partial x_2}, \tag{3.1.$n-4$}$$
$$j = 0, \ldots, n-3, \quad b_{-1}^{[n-4]} = b_{n-3}^{[n-4]} = 0.$$

. . . .

$$\frac{\partial b_j^{[n-2l]}}{\partial x_1} + \frac{\partial b_{j-1}^{[n-2l]}}{\partial x_2} =$$
$$= (n-2(l-1)-j) b_j^{[n-2(l-1)]} \frac{\partial V}{\partial x_1} + (j+1) b_{j+1}^{[n-2(l-1)]} \frac{\partial V}{\partial x_2},$$
$$j = 0, \ldots, n-2l+1, \quad b_{-1}^{[n-2l]} = b_{n-2l+1}^{[n-2l]} = 0. \tag{3.1.$n-2l$}$$

. . . .

Далее, если n четное, то последняя группа состоит из двух уравнений:

$$\frac{\partial b_0^{[0]}}{\partial x_1} = 2 b_0^{[2]} \frac{\partial V}{\partial x_1} + b_1^{[2]} \frac{\partial V}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial b_0^{[0]}}{\partial x_2} = b_1^{[2]} \frac{\partial V}{\partial x_1} + 2 b_2^{[2]} \frac{\partial V}{\partial x_2}. \tag{3.1.0}$$

Если n нечетное, то последнее уравнение имеет вид

$$0 = b_0^{[1]} \frac{\partial V}{\partial x_1} + b_1^{[1]} \frac{\partial V}{\partial x_2}. \tag{3.1.-1}$$

Уравнения $(3.1.n-2)$ являются линейными; решим их методом Фурье. Пусть

$$V = \sum_{-\infty}^{+\infty} [V]_{uv} e^{i(ux_1+vx_2)}, \quad b_j^{[n-2]} = \sum_{-\infty}^{+\infty} [b_j^{[n-2]}]_{uv} e^{i(ux_1+vx_2)},$$
$$j = 0, \ldots, n-2.$$

где $[V]_{uv}$, $[b_j^{[n-2]}]_{uv}$ — коэффициенты Фурье. Нетрудно показать, что для каждого набора u, v имеем систему

$$\begin{pmatrix} -u & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & na_0^{[n]}u + a_1^{[n]}v \\ -v & -u & 0 & \ldots & 0 & 0 & (n-1)a_1^{[n]}u + 2a_2^{[n]}v \\ 0 & -v & -u & \ldots & 0 & 0 & (n-2)a_2^{[n]}u + 3a_3^{[n]}v \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -v & -u & 2a_{n-2}^{[n]}u + (n-1)a_{n-1}^{[n]}v \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -v & a_{n-1}^{[n]}u + na_n^{[n]}v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [b_0^{[n-2]}]_{uv} \\ [b_1^{[n-2]}]_{uv} \\ [b_2^{[n-2]}]_{uv} \\ \vdots \\ [b_{n-2}^{[n-2]}]_{uv} \\ [V]_{uv} \end{pmatrix} = 0. \tag{3.2}$$

Система (3.2) имеет нетривиальное решение только для тех u и v, для которых определитель системы равен нулю. Подсчитаем определитель матрицы $(n \times n)$, раскладывая его по последнему столбцу:

$$0 = \Big(na_0^{[n]}u + a_1^{[n]}v\Big)v^{n-1} - \Big((n-1)a_1^{[n]}u + 2a_2^{[n]}v\Big)uv^{n-2} + \ldots$$
$$+(-1)^n\Big(2a_{n-2}^{[n]}u+(n-1)a_{n-1}^{[n]}v\Big)u^{n-2}v+(-1)^{n-1}\Big(a_{n-1}^{[n]}u+na_n^{[n]}v\Big)u^{n-1}.$$

Перепишем это тождество. Пусть $z = u/v$; тогда z — корень многочлена степени n:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \Big((i+1)a_{i+1}^{[n]} - (n-i+1)a_{i-1}^{[n]}\Big) z^i = 0. \tag{3.3}$$

При этом константы $a_j^{[n]}$ (причем $a_{-1}^{[n]} = a_{n+1}^{[n]} = 0$) должны быть такими, чтобы уравнение (3.3) допускало хотя бы один вещественный корень $z_m = u_m/v_m$. Пусть функция V имеет вид

$$V = \sum_{m=1}^{n} f_m(u_m x_1 + v_m x_2),$$

где

$$f_m = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} [V]_{\lambda u_m, \lambda v_m} e^{i\lambda(u_m x_1 + v_m x_2)},$$

т. е. спектр функции V лежит самое большее на n прямых в вещественной плоскости. Прямые, которые содержат спектр функции V, будем называть *прямыми спектра* функции V. Возьмем, например, k-тую прямую. С помощью поворота плоскости вокруг начала координат эту прямую можно сделать вертикальной. Расширяя это преобразование до канонического, получим функцию Гамильтона вида (2.2), однако теперь потенциальная энергия принимает форму

$$V = f_k(v_k x_2) + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n} f_m(u_m x_1 + v_m x_2). \tag{3.4}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_2} = v_m f_m' = \frac{v_m}{u_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_1}, \quad m = 1, \ldots, n; \quad m \neq k.$$

Штрих означает производную по своему аргументу.

Из трех первых уравнений $(3.1.n-2)$ найдем функции $b_0^{[n-2]}$ и $b_1^{[n-2]}$. Для этого выпишем явно три первых уравнения из группы уравнений $(3.1.n-2)$, где $a_1^{[n]} = 0$:

$$\frac{\partial b_0^{[n-2]}}{\partial x_1} = n a_0^{[n]} \frac{\partial V}{\partial x_1}, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial b_1^{[n-2]}}{\partial x_1} + \frac{\partial b_0^{[n-2]}}{\partial x_2} = 2a_2^{[n]} \frac{\partial V}{\partial x_2}, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial b_2^{[n-2]}}{\partial x_1} + \frac{\partial b_1^{[n-2]}}{\partial x_2} = (n-2)a_2^{[n]} \frac{\partial V}{\partial x_1} + 3a_3^{[n]} \frac{\partial V}{\partial x_2}. \tag{3.7}$$

Из уравнения (3.5) выразим функцию $b_0^{[n-2]}$:

$$b_0^{[n-2]} = n a_0^{[n]} V + c_0^{[n-2]}(x_2),$$

где функция $c_0^{[n-2]}$ зависит только от x_2. Найдем ее из уравнения (3.6):

$$\frac{\partial b_1^{[n-2]}}{\partial x_1}+na_0^{[n]}\left(\frac{df_k}{dx_2}+\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{n}\frac{v_m}{u_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\right)+\frac{dc_0^{[n-2]}}{dx_2}=2a_2^{[n]}\left(\frac{df_k}{dx_2}+\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{n}\frac{v_m}{u_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\right).$$

Это уравнение имеет следующий вид

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}+\left(\frac{dc_0^{[n-2]}}{dx_2}-(2a_2^{[n]}-na_0^{[n]})\frac{df_k}{dx_2}\right)=0, \tag{3.8}$$

где

$$\Delta=b_1^{[n-2]}-(2a_2^{[n]}-na_0^{[n]})\left(\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{n}\frac{v_m}{u_m}f_m\right).$$

Из уравнения (3.8) видно, что гармоники вида $e^{i\nu x_2}$ имеются только у функций $c_0^{[n-2]}$ и f_k'. Для этих функций имеем уравнение:

$$\frac{dc_0^{[n-2]}}{dx_2}-(2a_2^{[n]}-na_0^{[n]})\frac{df_k}{dx_2}=0.$$

Отсюда находим функцию $c_0^{[n-2]}$:

$$c_0^{[n-2]}=(2a_2^{[n]}-na_0^{[n]})f_k+a_0^{[n-2]},$$

где $a_0^{[n-2]}=\mathrm{const}$. Итак, мы нашли функцию $b_0^{[n-2]}$:

$$b_0^{[n-2]}=na_0^{[n]}V+(2a_2^{[n]}-na_0^{[n]})f_k+a_0^{[n-2]}. \tag{3.9}$$

Из уравнения (3.6) найдем функцию $b_1^{[n-2]}$. Вспомним, что нам удалось преобразовать уравнение (3.6) к виду (3.8), где

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}=0.$$

Тогда

$$b_1^{[n-2]}=(2a_2^{[n]}-na_0^{[n]})\left(\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{n}\frac{v_m}{u_m}f_m\right)+c_1^{[n-2]}(x_2),$$

где функция $c_1^{[n-2]}$ зависит только от x_2. Найдем ее из уравнения (3.7), переписав его в явной форме:

$$\frac{\partial b_2^{[n-2]}}{\partial x_1} + (2a_2^{[n]} - na_0^{[n]})\left(\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{n}\left(\frac{v_m}{u_m}\right)^2\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\right) + \frac{dc_1^{[n-2]}}{dx_2} =$$
$$= (n-2)a_2^{[n]}\frac{\partial V}{\partial x_1} + 3a_3^{[n]}\left(\frac{df_k}{dx_2} + \sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{n}\frac{v_m}{u_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\right).$$

Это уравнение имеет следующий вид

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial x_1} + \left(\frac{dc_1^{[n-2]}}{dx_2} - 3a_3^{[n]}\frac{df_k}{dx_2}\right) = 0. \qquad (3.10)$$

где

$$\Upsilon = b_2^{[n-2]} + (2a_2^{[n]} - na_0^{[n]})\left(\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{n}\left(\frac{v_m}{u_m}\right)^2 f_m\right) -$$
$$- (n-2)a_2^{[n]}V - 3a_3^{[n]}\left(\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{n}\frac{v_m}{u_m}f_m\right).$$

Из уравнения (3.10) видно, что гармоники вида $e^{i\nu x_2}$ имеются только у функций $c_1^{[n-2]}$ и f_k'. Для этих функций имеем уравнение

$$\frac{dc_0^{[n-2]}}{dx_2} - 3a_3^{[n]}\frac{df_k}{dx_2} = 0.$$

Отсюда находим функцию $c_1^{[n-2]}$:

$$c_1^{[n-2]} = 3a_3^{[n]}f_k + a_1^{[n-2]},$$

где $a_1^{[n-2]} = \mathrm{const}$. Итак, мы нашли функцию $b_1^{[n-2]}$:

$$b_1^{[n-2]} = 3a_3^{[n]}f_k + (2a_2^{[n]} - na_0^{[n]})\left(\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{n}\frac{v_m}{u_m}f_m\right) + a_1^{[n-2]}. \qquad (3.11)$$

Обратимся к первому уравнению группы $(3.1.n-4)$ и подставляя в это уравнение вместо функций $b_0^{[n-2]}$ и $b_1^{[n-2]}$ их выражения (3.9) и (3.11), получим

$$\frac{\partial b_0^{[n-4]}}{\partial x_1} = (n-2)\left(na_0^{[n]}V + (2a_2^{[n]} - na_0^{[n]})f_k + a_0^{[n-2]}\right)\frac{\partial V}{\partial x_1} +$$

$$+\left(3a_3^{[n]}f_k + (2a_2^{[n]} - na_0^{[n]})\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n}\frac{v_m}{u_m}f_m + a_1^{[n-2]}\right)\left(\frac{df_k}{dx_2} + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n}\frac{v_m}{u_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\right) =$$

$$= n(n-2)a_0^{[n]}\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial x_1} + (n-2)(2a_2^{[n]} - na_0^{[n]})\frac{\partial f_k V}{\partial x_1} + (n-2)a_0^{[n-2]}\frac{\partial V}{\partial x_1} +$$

$$+ (3a_3^{[n]}f_k + a_1^{[n-2]})\frac{df_k}{dx_2} + (2a_2^{[n]} - na_0^{[n]})\frac{df_k}{dx_2}\left(\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n}\frac{v_m}{u_m}f_m\right) +$$

$$+ 3a_3^{[n]}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n}\frac{v_m}{u_m}\frac{\partial f_k f_m}{\partial x_1} + (2a_2^{[n]} - na_0^{[n]})\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left(\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n}\frac{v_m}{u_m}f_m\right)^2\right) +$$

$$+ a_1^{[n-2]}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n}\frac{v_m}{u_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_1}.$$

Это уравнение имеет следующий вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + (3a_3^{[n]}f_k + a_1^{[n-2]})\frac{df_k}{dx_2} + (2a_2^{[n]} - na_0^{[n]})\frac{df_k}{dx_2}\left(\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n}\frac{v_m}{u_m}f_m\right) = 0, \quad (3.12)$$

где

$$\Psi = \frac{n(n-2)}{2}a_0^{[n]}V^2 + (n-2)(2a_2^{[n]} - na_0^{[n]})f_k V + (n-2)a_0^{[n-2]}V +$$

$$+(3a_3^{[n]}f_k + a_1^{[n-2]})\left(\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n}\frac{v_m}{u_m}f_m\right) + \frac{1}{2}(2a_2^{[n]} - na_0^{[n]})\left(\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n}\frac{v_m}{u_m}f_m\right)^2 - b_0^{[n-4]}.$$

Из уравнения (3.12) видно, что гармоники вида $e^{i\nu x_2}$ имеются только у функций f_k', $f_k f_k'$. Для функции f_k имеем уравнение:

$$(3a_3^{[n]} f_k + a_1^{[n-2]} + \varkappa) v_k f_k' = 0, \tag{3.13}$$

где $\varkappa$ — среднее значение функции

$$(2a_2^{[n]} - n a_0^{[n]}) \left(\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{n} \frac{v_m}{u_m} f_m \right).$$

По предположению, f_k — непостоянная аналитическая функция. Поскольку в кольце аналитических функций нет делителей нуля, то $a_3^{[n]} = 0$. Что и требовалось.

§ 4. Интегралы третьей степени

Теорема 2. *Если гамильтонова система с гамильтонианом* (2.1) *допускает интеграл третьей степени* $F_3 + F_1$, *причем* $F_3 \neq 0$, *то спектр потенциальной энергии лежит на одной прямой, проходящей через начало координат.*

Следствие. *В предположении теоремы* 2 *уравнения Гамильтона имеют интеграл, линейный по импульсам.*

Если $a = c$ и $b = 0$, то теорема 2 переходит в теорему М. Л. Бялого [4].

Доказательство теоремы 2. Поскольку $F_3 \neq 0$, то алгебраическое уравнение (3.3) имеет не более трех вещественных корней. Таким образом, число прямых спектра потенциальной энергии не превосходит трех.

Случай, когда спектр лежит на двух прямых, рассматривался в [7, гл. IV]. Показано, что уравнения Гамильтона допускают дополнительный полиномиальный интеграл тогда и только тогда, когда эти прямые ортогональны (в метрике, определяемой кинетической энергией). Подчеркнем, что это утверждение справедливо для интегралов любой степени. Если прямые спектра ортогональны, то имеется полиномиальный интеграл второй степени. Нам остается показать, что в этом случае нет нетривиальных интегралов степени 3.

Предположим противное: пусть имеется интеграл третьей степени $F_3 + F_1$, где

$$F_3 = a_0 y_1^3 + a_1 y_1^2 y_2 + a_2 y_1 y_2^2 + a_3 y_2^3. \tag{4.1}$$

С помощью поворота, одну из прямых спектра можно сделать вертикальной. Тогда другая прямая (ввиду ортогональности) будет горизонтальной. Согласно (2.4), $a_1 = a_2 = 0$. Применяя теорему 1, получаем еще два соотношения: $a_0 = a_3 = 0$. Следовательно, $F_3 \equiv 0$. Получили противоречие.

Замечание. Случай, когда спектр лежит на двух прямых, в работе [4] не рассмотрен, вероятно, по причине недостатка места.

Итак, осталось рассмотреть случай, когда имеется три различных прямых спектра. Одну из этих прямых считаем вертикальной. Тогда в (4.1) $a_1 = a_3 = 0$. Пусть (u, v) — еще одна точка спектра, причем $u \neq 0$. Соотношения (2.4) и (2.5) приводят к двум равенствам:

$$3a_0v^2 + a_2(u^2 - 2v^2) = 0, \quad a_0u^2 + a_2v^2 = 0. \tag{4.2}$$

Поскольку числа a_0 и a_2 отличны от нуля (иначе $F_3 = 0$), то определитель этой линейной системы должен обратиться в нуль:

$$3v^4 + 2u^2v^2 - u^4 = 0 \quad \text{или} \quad 3z^4 + 2z^2 - 1 = 0, \tag{4.3}$$

где $z = v/u$. Корни этого биквадратного уравнения равны $\pm\sqrt{3}/3$. Таким образом, углы между прямыми спектра равны $\pi/3$. При этом каждое из уравнений (4.2) приводит к следующему соотношению на оставшиеся коэффициенты a_0 и a_2:

$$3a_0 + a_2 = 0. \tag{4.4}$$

Замечание. Именно этот случай выпал из рассмотрения в работе [4]. М. Л. Бялый вводит числа

$$k_{ii} = u_i(a_1 + 3a_3 + z_i(3a_0 + a_2)),$$

где $z_i = v_i/u_i$ — корни многочлена (3.3), и считает, что только одно из них может быть равно нулю. Однако, в выделенном нами случае $k_{ii} = 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 3$. Правда, в [4] рассматривается метрика стандартного вида (1.2) и поэтому (ввиду иррациональности корней квадратного уравнения (4.3)) наклонные прямые спектра на самом деле не могут проходить через точки целочисленной решетки.

Итак, осталось рассмотреть исключительный случай, когда три прямые спектра потенциальной энергии образуют между собой углы, кратные $\pi/3$. Функция Гамильтона приводится к виду

$$H = \frac{(y_1^2 + y_2^2)}{2} + f_1(\sqrt{3}x_1 + x_2) + f_2(x_2) + f_3(-\sqrt{3}x_1 + x_2),$$

где f_s — непостоянные периодические аналитические функции.

Дополнительный интеграл третьей степени F имеет вид $F_3 + b_0 y_1 + b_1 y_2$, где b_0 и b_1 — аналитические функции на конфигурационном торе. В нашем случае $a_1 = a_3 = 0$ и выполнено соотношение (4.4). Поскольку $F_3 \neq 0$, то можно положить $a_0 = 1$ и $a_2 = -3$.

Функции f_s определены с точностью до произвольных аддитивных постоянных. Будем считать, что $\langle f_2 \rangle = 0$, где $\langle \cdot \rangle$ — среднее функции по тору $\mathbb{T}^2 = \{x_1, x_2 \bmod 2\pi\}$. Поскольку f_2 — периодическая функция, то найдется такое x_2^0, что $f_2'(x_2^0) = 0$. Положим

$$\langle f_1 \rangle = -\langle f_3 \rangle, \qquad \frac{\langle f_3 \rangle}{\sqrt{3}} = -f_2(x_2^0) + \frac{\langle b_0 \rangle}{6}. \tag{4.5}$$

Условие $\{H, F\} = 0$ эквивалентно следующей системе уравнений для b_0 и b_1:

$$\begin{gathered}\frac{\partial b_0}{\partial x_1} + 3\sqrt{3}(f_3' - f_1') = 0, \qquad \frac{\partial b_0}{\partial x_2} + \frac{\partial b_1}{\partial x_1} + 6(f_1' + f_2' + f_3') = 0,\\ \frac{\partial b_1}{\partial x_2} - 3\sqrt{3}(f_3' - f_1') = 0, \qquad \sqrt{3}\, b_0(f_3' - f_1') - b_1(f_1' + f_2' + f_3') = 0.\end{gathered} \tag{4.6}$$

Первое и третье уравнения дают равенства

$$b_0 = 3[f_1 + f_3 + a_0(x_2)], \qquad b_1 = 3\sqrt{3}\,[f_3 - f_1 + a_1(x_1)], \tag{4.7}$$

где a_0 и a_1 — пока неизвестные периодические функции одной переменной. Подставляя (4.7) во второе уравнение (4.6), получаем равенство

$$\frac{da_0}{dx_2} + \sqrt{3}\,\frac{da_1}{dx_1} + 2f_2' = 0.$$

Усредняя это равенство по x_1 и x_2, получаем, что $a_0 = -2f_2 + c_0$, $c_0 = \mathrm{const}$ и $a_1 = c_1 = \mathrm{const}$.

Итак, равенства (4.7) принимают следующий вид:

$$b_0 = 3(f_1 - 2f_2 + f_3 + c_0), \qquad b_1 = 3\sqrt{3}\,(f_3 - f_1 + c_1). \tag{4.8}$$

Подставляя (4.8) в последнее уравнение (4.6), получаем нетривиальное соотношение для функций f_s:

$$2f_1'(f_2 - f_3 - \frac{c_0}{2}) + f_2'(f_1 - f_3 - c_1) + 2f_3'(f_1 - f_2 + \frac{c_0}{2} - \frac{c_1}{2}) = 0. \tag{4.9}$$

Положим $x_2 = x_2^0$ и

$$g_1(x_1) = f_1(\sqrt{3}x_1 + x_2^0) - f_2(x_2^0) + \frac{c_0}{2} - \frac{c_1}{2},$$
$$g_3(x_1) = f_3(-\sqrt{3}x_1 + x_2^0) - f_2(x_2^0) + \frac{c_0}{2}. \tag{4.10}$$

Поскольку x_2^0 — критическая точка функции f_2, то равенство (4.9) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(g_1 g_3) = 0.$$

Следовательно,

$$g_1 g_3 = c = \text{const}. \tag{4.11}$$

Усредняя первое равенство (4.8) по $\mathbb{T}^2$, получаем

$$\langle b_0 \rangle = 3(\langle f_1 \rangle - 2\langle f_2 \rangle + \langle f_3 \rangle + c_0).$$

Согласно предположениям, $\langle f_1 \rangle + \langle f_3 \rangle = 0$ (см. (4.5)) и $\langle f_2 \rangle = 0$. Следовательно, $c_0 = \langle b_0 \rangle / 3$. Ясно, что

$$\langle g_3 \rangle = -\frac{\langle f_3 \rangle}{\sqrt{3}} - f_2(x_2^0) + \frac{\langle b_0 \rangle}{6}.$$

Однако, ввиду (4.5), правая часть этого равенства равна нулю. Поскольку g_3 — периодическая функция с нулевым средним, то она обязательно имеет нули. Следовательно, постоянная c из равенства (4.11) равна нулю. Так как в кольце аналитических функций нет делителей нуля, то либо g_1, либо g_3 тождественно равны нулю. Но тогда, согласно (4.10), одна из функций f_1 или f_3 будет постоянной. Таким образом, уравнение (4.9) не имеет нетривиальных периодических решений. Теорема доказана.

Замечание. Непериодические решения уравнения (4.9) существуют. Вот простой пример:

$$f_1 = \exp(\sqrt{3}x_1 + x_2), \quad f_2 = \exp(-2x_2), \quad f_3 = \exp(-\sqrt{3}x_1 + x_2),$$

а постоянные c_0 и c_1 равны нулю. Этот случай отвечает интегрируемой цепочке Тоды для трех частиц после исключения центра масс.

§ 5. Интегралы четвертой степени

Предположим, что уравнения Гамильтона с гамильтонианом (2.1) допускают интеграл четвертой степени $F_4 + F_2 + F_0$, где

$$F_4 = a_0 y_1^4 + a_1 y_1^3 y_2 + a_2 y_1^2 y_2^2 + a_3 y_1 y_2^3 + a_4 y_2^4. \tag{5.1}$$

Без ущерба для общности можно считать, что одна из прямых спектра вертикальна. Тогда, согласно результатам § 2, $a_1 = a_3 = 0$.

Предположим, что точка (u, v), $u \neq 0$ есть точка спектра. Условия (2.4) и (2.5) дадут нам два соотношения:

$$\begin{aligned} &2a_0 v^3 u + a_2(u^3 v - uv^3) - 2a_4 u^3 v = 0, \\ &2a_0 v u^3 + a_2(uv^3 - u^3 v) - 2a_4 uv^3 = 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Они заведомо выполнены, если $v = 0$. Это означает, что наличие горизонтальной прямой в спектре не противоречит интегрируемости рассматриваемой системы.

Какие еще прямые могут быть прямыми спектра системы с интегралом четвертой степени? Сократив левые части соотношений (5.2) на uv и складывая их, получим

$$2(a_0 - a_4)(u^2 + v^2) = 0.$$

Откуда $a_0 = a_4$. После этого каждое из уравнений (5.2) можно привести к виду:

$$(2a_0 - a_2)(u^2 - v^2) = 0.$$

Следовательно, либо $2a_0 = a_2$, либо $u = \pm v$. В первом случае сумма Биркгофа $a_0 - a_2 + a_4$ равна нулю. Учитывая еще равенства $a_1 = a_3 = 0$, получаем, что многочлен F_4 делится нацело на кинетическую энергию $(y_1^2 + y_2^2)/2$. Однако, этот случай уже нами исключен из рассмотрения (см. § 2). Итак, $u = \pm v$. Это означает, что к «допустимым» прямым спектра относятся также биссектрисы координатных углов.

Таким образом, доказано

Предложение 1. *Если система с гамильтонианом* (2.1) *допускает неприводимый интеграл четвертой степени, то ее спектр лежит на трех или четырех прямых, образующих между собой углы* $\pi/4$ *или* $\pi/2$.

Это утверждение оставляет нерассмотренной систему с гамильтонианом

$$H = \frac{(y_1^2 + y_2^2)}{2} + f_1(x_1) + f_2(x_1 + x_2) + f_3(x_2) + f_4(x_2 - x_1).$$

Здесь f_s — 2π-периодические функции, по крайней мере три из которых не постоянны. Интеграл четвертой степени, независимый от интеграла энергии, приводится к виду

$$F = \frac{(y_1^4 + y_2^4)}{4} + F_2 + F_0.$$

Из условия $\{H, F\} = 0$ можно получить (как в § 4) соотношение для функций f_s, аналогичное (4.9):

$$\begin{aligned} f_1'' f_2 + 3f_1' f_2' + 2f_1 f_2'' - f_1'' f_4 + 3f_1' f_4' - 2f_1 f_4'' - f_2 f_3'' - 3f_2' f_3' - 2f_2'' f_3 + \\ + f_3'' f_4 + 3f_3' f_4' + 2f_3 f_4'' + c_1(f_1'' - f_3'') + c_2(f_2'' - f_4'') = 0. \quad (5.3) \end{aligned}$$

Здесь штрих обозначает производную по аргументу функции, c_1 и c_2 — некоторые постоянные. К сожалению, нам не удалось установить отсутствие нетривиальных периодических решений уравнения (5.3). Отметим, что (5.3) допускает непериодические решения.

§ 6. Интегралы пятой и шестой степени

Пусть теперь система с гамильтонианом (2.1) допускает интеграл 5-той степени $F_5 + F_3 + F_1$, причем

$$F_5 = a_0 y_1^5 + a_2 y_1^3 y_2^2 + a_4 y_1 y_2^4 + a_5 y_2^5. \quad (6.1)$$

Мы считаем, как обычно, что одна из прямых спектра вертикальна (поэтому в (6.1) уже положено $a_1 = a_3 = 0$). Если этот интеграл неприводимый, то обязательно имеется еще хотя бы одна прямая спектра. Пусть она проходит через точку спектра с координатами u, v ($u \neq 0$). Соотношения (2.4) и (2.5) дают нам два уравнения:

$$\begin{aligned} \gamma z^4 + \delta z^2 + a_4 + 5a_5 z = 0, \\ 6\gamma z^2 + \delta(3z^4 - 2z^2 + 1) + a_4(10z^2 + 4) + 30a_5 z^3 = 0. \quad (6.2) \end{aligned}$$

здесь $\gamma = 5a_0 - 2a_2$, $\delta = 3a_2 - 4a_4$, $z = v/u$.

На самом деле имеется еще одна прямая спектра, если интеграл неприводимый. Действительно, как показано в [7], если спектр лежит на двух прямых и эти прямые не ортогональные, то вообще нет дополнительных полиномиальных интегралов любой степени. Если же две прямые спектра ортогональны, то имеется квадратичный интеграл и поэтому исходный интеграл пятой степени оказывается приводимым.

Пусть третья прямая спектра проходит через точку с координатами u_1, v_1 $(u_1 \neq 0)$ и $z_1 = v_1/u_1$. Тогда $z_1 \neq z$ удовлетворяет тем же самым уравнениям (6.2). Таким образом, мы имеем систему однородных линейных уравнений относительно γ, δ, a_4 и a_5. Если определитель Δ этой системы отличен от нуля, то $F_5 = 0$ и поэтому интеграл оказывается приводимым.

Определитель Δ равен

$$30(z^2+1)(z_1^2+1)(z-z_1)^2(z+z_1)[z^2z_1^2+(2zz_1+1)^2-(2zz_1+1)(z^2+z_1^2)]. \tag{6.3}$$

Поскольку $z \neq z_1$, то он равен нулю в двух случаях:

a) $\quad z_1 = -z, \qquad$ b) $\quad z^2z_1^2 + (2zz_1+1)^2 - (2zz_1+1)(z^2+z_1^2) = 0.$

В случае a) дополнительные прямые спектра симметричны относительно первой вертикальной прямой. Уравнение случая b) легко решается, если положить $2zz_1 + 1 = x$. Тогда $x^2 - x(z^2+z_1^2) + z^2z_1^2 = 0$. Отсюда $x = z^2$ или $x = z_1^2$. Следовательно,

$$2zz_1 + 1 = z^2 \quad \text{или} \quad 2zz_1 + 1 = z_1^2. \tag{6.4}$$

В первом случае

$$z_1 = -\left(\frac{2z}{1-z^2}\right)^{-1}. \tag{6.5}$$

Пусть вторая (третья) прямая спектра образует с горизонтальной осью угол φ (φ_1). Тогда соотношение (6.5) эквивалентно равенству

$$\varphi_1 = 2\varphi \pm \pi/2.$$

Отсюда получаем простой способ построения третьей прямой спектра: вторую прямую поворачиваем на угол φ против часовой стрелки и проводим перпендикулярную прямую. Аналогичный геометрический смысл имеет второе уравнение (6.4).

Отметим, что в качестве выделенной прямой спектра (которую мы считали вертикальной) можно взять любую из двух других прямых. Тогда взаимное расположение двух оставшихся прямых будет также удовлетворять указанным выше свойствам. В частности, пусть точки спектра лежат на вертикальной и горизонтальной прямой. Тогда эта прямая будет наклонена к горизонту под углом $\pi/4$.

Пусть l_0, l_1 и l_2 — прямые линии, пересекающиеся в одной точке; прямую l_0 будем считать вертикальной. Пусть z и z_1 — тангенсы углов наклона прямых l_1 и l_2 к горизонтальной прямой. Будем говорить, что l_2 сопряжена l_1 относительно l_0 (обозначение: $l_1 \to l_2$), если z и z_1 связаны соотношением

$$z_1 = \frac{2z}{(z^2 - 1)}.$$

Отметим, что так введенное отношение сопряжения не рефлексивно и не транзитивно.

Полученные результаты о строении спектра гамильтоновой системы с неприводимым интегралом 5-ой степени можно сформулировать следующим образом. Пусть l_0, l_1 и l_2 — произвольные три прямые спектра. Тогда либо прямые l_1 и l_2 симметричны относительно прямой l_0, либо выполнено одно из отношений: $l_1 \to l_2$ или $l_2 \to l_1$.

В качестве примера рассмотрим случай, когда спектр лежит на пяти прямых, последовательно составляющих друг с другом углы, равные $\pi/5$. Обозначим их l_0, $l_1, \ldots, l_4$. Покажем, что в этом случае выполнено необходимое условие существования неприводимого интеграла 5-ой степени. Действительно, таблица отношений сопряженности прямых (относительно одной из них, скажем, l_0) выглядит следующим образом:

$$l_0 \to l_0, \quad l_1 \to l_2, \quad l_2 \to l_4, \quad l_3 \to l_1, \quad l_4 \to l_3.$$

Зафиксируем прямую l_0. Тогда две других прямых спектра можно выбрать одним из шести способов:

$$l_1 \text{ и } l_4, \quad l_2 \text{ и } l_3, \quad l_1 \text{ и } l_2, \quad l_1 \text{ и } l_3, \quad l_2 \text{ и } l_4, \quad l_3 \text{ и } l_4.$$

В первых двух случаях выбранные прямые симметричны относительно прямой l_0, а в оставшихся четырех случаях одна из пары прямых сопряжена другой прямой.

Обсудим теперь задачу об интеграле шестой степени. Он имеет вид $F_6 + F_4 + F_2 + F_0$, где

$$F_6 = a_0 y_1^6 + a_2 y_1^4 y_2^2 + a_4 y_1^2 y_2^4 + a_5 y_1 y_2^5 + a_6 y_2^6. \tag{6.6}$$

Мы предполагаем, что одна из прямых спектра вертикальна. Поэтому в выражении (6.6) коэффициенты a_1 и a_3 отсутствуют.

Снова можно предположить, что кроме вертикальной прямой имеются еще две различные прямые спектра, которые однозначно определяются тангенсами z и z_1 углов наклона этих прямых к горизонтали. Согласно (2.4) и (2.5), вещественное z удовлетворяет двум уравнениям:

$$6a_0z^5 + (-2z^5 + 4z^3)a_2 + (-4z^3 + 2z)a_4 + (5z^2 - 1)a_5 - 6a_6z = 0, \quad (6.7)$$

$$10a_0z^3 + (2z^5 - 6z^3 + 2z)a_2 + (-2z^5 + 6z^3 - 2z)a_4 + (5z^4 - 5z^2)a_5 - 10a_6z^3 = 0. \quad (6.8)$$

Удобно ввести новые переменные

$$\gamma_1 = 6a_0 - 2a_2, \quad \gamma_2 = 4a_2 - 4a_4, \quad \gamma_3 = 2a_4 - 6a_6. \quad (6.9)$$

В этих обозначениях уравнения (6.7) и (6.8) слегка упрощаются:

$$\gamma_1z^5 + \gamma_2z^3 + \gamma_3z + a_5(5z^2 - 1) = 0,$$
$$10\gamma_1z^3 + \gamma_2(3z^5 - 4z^3 + 3z) + 10\gamma_3z^3 + a_5(30z^4 - 30z^2) = 0.$$

Точно таким же уравнениям, очевидно, удовлетворяет и число z_1. В итоге мы имеем линейную однородную систему для γ_1, γ_2, γ_3 и a_5. Если определитель этой системы отличен от нуля, то эти переменные равны нулю. Поскольку $a_1 = a_3 = 0$ и выполнены (6.9), то в этом случае суммы Биркгофа

$$a_1 - a_3 + a_5 \qquad \text{и} \qquad a_0 - a_2 + a_4 - a_6$$

одновременно равны нулю. Однако, это означает, что многочлен F_6 делится нацело на многочлен $(y_1^2 + y_2^2)/2$ (кинетическая энергия системы).

Указанный определитель равен

$$zz_1(zz_1 + 1)\Delta, \quad (6.10)$$

где Δ определяется (6.3). Таким образом, возможные положения двух других прямых спектра находятся из условия, что произведение (6.10) равно нулю. Условие $\Delta = 0$ уже было проанализировано выше в связи с задачей об интеграле пятой степени. К этим условиям добавляются два новых соотношения: $zz_1 = 0$ и $zz_1 + 1 = 0$. Первое из них показывает, что одна из прямых спектра может быть горизонтальной, а второе соотношение является условием ортогональности двух прямых спектра.

Итак, пусть l_0, l_1 и l_2 — любые три прямые спектра гамильтоновой системы. Если имеется неприводимый интеграл шестой степени, то выполнено одно из следующих условий:

(a) l_1 или l_2 ортогональны l_0,
(b) l_1 и l_2 ортогональны,
(c) l_1 и l_2 симметричны относительно l_0,
(d) $l_1 \to l_2$ или $l_2 \to l_1$ (относительно l_0).

Рассмотрим пример: шесть прямых спектра отстоят друг от друга на угол $\pi/6$. Зафиксируем одну из прямых l_0. Тогда две другие прямые l_1 и l_2 можно выделить 10 различными способами. Нетрудно проверить, что для каждого из этих способов выполнено одно из условий (a)-(d).

§ 7. Замечания об интегралах произвольной степени

К задаче о полиномиальных по импульсам интегралах можно подойти с другой стороны. Предположим, что спектр потенциальной энергии лежит на n различных прямых, проходящих через начало координат. Как было отмечено в § 2, в этом случае рассматриваемая динамическая система не допускает нетривиальных дополнительных интегралов степени $k < n$. Таким образом, минимальная возможная степень дополнительного полиномиального интеграла равна n.

С другой стороны, как показано в § 4, если система допускает интеграл третьей степени и имеются три различных прямых спектра, то углы между этими прямыми равны $\pi/3$. Аналогичное замечание справедливо и для интеграла четвертой степени: четыре возможные прямые спектра отстоят друг от друга на угол $\pi/4$. Оказывается, эти наблюдения можно обобщить.

Теорема 3. *Если имеется полиномиальный интеграл степени n, независимый от интеграла энергии, то n прямых спектра потенциальной энергии образуют между собой углы*

$$\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Это утверждение указывает на интересную связь между непрерывной группой симметрий (задаваемой дополнительным интегралом) и дискретными симметриями динамической системы.

Теорема 3 имеет интересное применение для систем со «стандартной» метрикой (1.2).

Следствие. *Предположим, что спектр гамильтоновой системы с кинетической энергией* (1.2) *лежит на* $n \neq 4$ *различных прямых, проходящих через начало координат. Тогда эта система не имеет дополнительного полиномиального интеграла степени* n.

Действительно, как хорошо известно, числа $\operatorname{tg}(\pi/n)$ иррациональны при $n \geqslant 3$ и $n \neq 4$. Трудности рассмотрения особого случая $n = 4$ показаны в § 5.

Доказательство теоремы 3. Пусть

$$F_n = a_0 y_1^n + a_1 y_1^{n-1} y_2 + \cdots + a_n y_2^n$$

— старшая однородная форма полиномиального интеграла n-ой степени. Пусть точка с координатами u, v есть точка спектра. Всегда можно считать, что $v \neq 0$ (после поворота плоскости вокруг начала координат). Отношение $z = u/v$ однозначно определяет прямую спектра, содержащую точку (u, v). По предположению, мы имеем n различных таких чисел $z_1, \ldots, z_n$. Согласно (2.4) и (2.5), эти числа одновременно являются корнями двух многочленов n-ой степени:

$$0 = \sum_{i=0}^{n} z^i \left((-1)^i C_{i+1}^1 a_{i+1} + (-1)^{i-1} C_{n-i+1}^1 a_{i-1}\right), \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=0}^{n} z^i \Big((-1)^i C_{i+3}^3 a_{i+3} &+ (-1)^{i-1} C_{n-i-1}^1 C_{i+1}^2 a_{i+1} + \\ &+ (-1)^{i-2} C_{n-i+1}^2 C_{i-1}^1 a_{i-1} + (-1)^{i-3} C_{n-i+3}^3 a_{i-3}\Big). \end{aligned} \tag{7.2}$$

Следовательно, их коэффициенты пропорциональны друг другу. Пусть ω — отношение коэффициентов при одинаковых степенях z многочленов (7.2) и (7.1).

Пусть $n = 2m$ — четно. Случай нечетного n рассматривается аналогично (он даже более простой). Условия пропорциональности коэффициентов разбиваются на две группы замкнутых линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \omega\left(-C_{2j+2}^1 a_{2j+2} + C_{n-2j}^1 a_{2j}\right) = -C_{2j+4}^3 a_{2j+4} &+ C_{n-2j-2}^1 C_{2j+2}^2 a_{2j+2} - \\ &- C_{n-2j}^2 C_{2j}^1 a_{2j} + C_{n-2j+2}^3 a_{2j-2}, \end{aligned} \tag{7.3}$$

где $j = 0, \ldots, m-1$, и

$$\omega\left(C^1_{2j+1}a_{2j+1} - C^1_{n-2j+1}a_{2j-1}\right) = C^3_{2j+3}a_{2j+3} - C^1_{n-2j-1}C^2_{2j+1}a_{2j+1} + \\ + C^2_{n-2j+1}C^1_{2j-1}a_{2j-1} - C^3_{n-2j+3}a_{2j-3}, \quad (7.4)$$

где $j = 0, \ldots, m$.

Умножая каждое из уравнений (7.3) на $(-1)^j$ и складывая их, приходим к соотношению

$$(\omega C^1_n + C^3_n)[a_0 - a_2 + a_4 - \cdots + (-1)^m a_{2m}] = 0. \quad (7.5)$$

Аналогично из уравнений (7.3) выводится аналогичное равенство

$$(\omega C^1_n + C^3_n)[a_1 - a_3 + a_5 - \cdots + (-1)^{m-1} a_{2m-1}] = 0. \quad (7.6)$$

Выражения в квадратных скобках (7.5) и (7.6) — это суммы Биркгофа для многочлена F_n. Поскольку (по предположению) F_n не делится на $(y_1^2 + y_2^2)/2$, то хотя бы одна из этих сумм отлична от нуля. Следовательно,

$$\omega = -C^3_n / C^1_n. \quad (7.7)$$

Подставляя это значение в (7.4) при $j = 0$, получим

$$a_1 = \alpha C^1_n, \quad a_3 = -\alpha C^3_n,$$

где α — некоторая ненулевая вещественная постоянная. Из соотношений (7.4) с учетом (7.7) последовательно находим коэффициенты a с нечетными индексами:

$$a_{2j+1} = (-1)^j \alpha C^{2j+1}_n; \qquad 0 \leqslant j \leqslant m-1.$$

Откуда получаем следующее соотношение:

$$C^1_{2j+1}a_{2j+1} - C^1_{n-2j+1}a_{2j-1} = (-1)^j \alpha n C^{2j}_n \quad (7.8)$$

Соотношение (7.3) при $j = 0$ с учетом (7.7) дает

$$-C^1_2 a_2 + C^1_n a_0 = \beta C^1_n,$$

где β — вещественное число, отличное от нуля.

Из (7.3) и (7.7) получаем последовательно

$$-C^1_{2j+2}a_{2j+2} + C^1_{n-2j}a_{2j} = (-1)^j\beta C^{2j+1}_n. \tag{7.9}$$

Соотношения (7.8) и (7.9) позволяют преобразовать алгебраическое уравнение (7.1) к следующему виду:

$$n\alpha\sum_{j=0}^{m}(-1)^j C^{2j}_n z^{2j} + \beta\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j C^{2j+1}_n z^{2j+1} = 0. \tag{7.10}$$

Учитывая, что $z = \operatorname{tg}\varphi$, где φ — угол наклона прямой спектра к горизонтали, из (7.10) получаем уравнение

$$n\alpha\cos n\varphi - \beta\sin n\varphi = 0. \tag{7.11}$$

Поскольку α и β отличны от нуля, то его решениями являются n углов из теоремы 3. Что и требовалось.

Литература

[1] *Бабенко И. К., Нехорошев Н. Н.* О комплексных структурах на двумерных торах, допускающих метрики с нетривиальным квадратичным интегралом // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 643–652.

[2] *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.-Л.: Гостехиздат, 1941.

[3] *Болсинов А. В., Козлов В. В., Фоменко А. Т.* Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твердого тела // УМН. 1995. Т. 50. № 3(303). С. 3–32.

[4] *Бялый М. Л.* О полиномиальных по импульсам первых интегралах для механической системы на двумерном торе // Функцион. анализ и его прил. 1987. Т. 21. № 4. С. 64–65.

[5] *Денисова Н. В.* Полиномиальные по скорости интегралы динамических систем с двумя степенями свободы и торическим конфигурационным пространством // Матем. заметки. 1998. Т. 64. вып. 1. С. 37–44.

[6] *Козлов В. В.* О полиномиальных интегралах системы взаимодействующих частиц // ДАН СССР. 1988. Т. 301. № 4. С. 785–788.

[7] *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1995.

[8] *Козлов В. В., Денисова Н. В.* Полиномиальные интегралы геодезических потоков на двумерном торе // Матем. сб. 1994. Т. 185. С. 49–64.

[9] *Козлов В. В., Трещёв Д. В.* Об интегрируемости гамильтоновых систем с торическим пространством положений // Матем. сб. 1988. Т. 135(177). С. 119–138.

[10] *Колокольцов В. Н.* Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 5. С. 994–1010.

[11] *Переломов А. М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.

[12] *Пидкуйко С. И., Степин А. М.* Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем // ДАН СССР. 1978. Т. 239. № 1. С. 50–51.

[13] *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики // В кн. Избр. труды. Т. I. — М.: Наука, 1971.

[14] *Kozlov V. V.* Integrable and Non-Integrable Hamiltonian Systems // Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys. 1989. V. 8. P. 1–81.

Добавление 6

Об интегралах гамильтоновых систем с торическим пространством положений[1]

Введение. Основные результаты

Следуя Пуанкаре [11, п. 13], рассмотрим «основную проблему динамики», связанную с изучением гамильтоновых систем следующего вида:

$$\dot{y}_s = -\frac{\partial H}{\partial x_s}, \quad \dot{x}_s = \frac{\partial H}{\partial y_s}, \quad 1 \leqslant s \leqslant n, \quad H = H_0(y) + \varepsilon H_1(y, x) + \ldots , \tag{0.1}$$

функции $H_k(y, x)$ считаются аналитическими и 2π-периодическими по $x_1, \ldots, x_n$; ε — малый параметр. Уравнения (0.1) часто встречаются в приложениях.

При $\varepsilon = 0$ будем иметь вполне интегрируемую гамильтонову систему, для которой переменные y, $x \bmod 2\pi$ являются переменными действие-угол. Так как система (0.1) имеет интеграл энергии $\sum\limits_{k\geqslant 0} H_k\varepsilon^k$, то естественно рассмотреть задачу о наличии дополнительных интегралов в виде рядов $\sum\limits_{k\geqslant 0} F_k(y, x)\varepsilon^k$ с аналитическими и 2π-периодическими по x коэффициентами. Постановка задачи, а также первые результаты в этом направлении принадлежат Пуанкаре [11, гл. V], [12]. Относительно обобщений см. [5, 6]. Хорошо известно, что вопрос о наличии полного набора независимых интегралов вида $\sum F_k\varepsilon^k$ тесно связан с возможностью реализации классической схемы теории возмущений (см. [3, гл. 4], [5], [11, гл. IX]).

В настоящей работе рассматриваются уравнения Гамильтона (0.1), гамильтонианы которых имеют вид

$$H = H_0(y) + \varepsilon H_1(x), \tag{0.2}$$

где $H_0 = \frac{1}{2}\sum a_{ij}y_iy_j$ — невырожденная квадратичная форма с постоянными коэффициентами, а H_1 — тригонометрический многочлен относи-

[1] Это — расширенный вариант статьи автора и Д. В. Трещёва, опубликованной в «Математическом сборнике», 1988. Т. 135. № 1. С. 119–138.

тельно $x_1, \ldots, x_n$. Системы с гамильтонианами (0.2) сохраняют наиболее существенные черты общего случая, однако их анализ проще в техническом отношении. Так как ряд Фурье возмущающей функции H_1 содержит лишь конечное число гармоник, то к системам с гамильтонианами (0.2) не применимы результаты Пуанкаре и их известные обобщения.

Уравнения Гамильтона (0.1) с гамильтонианом (0.2) можно трактовать как уравнения движения механической системы с конфигурационным пространством $\mathbb{T}^n$, кинетической энергией H_0 и малым потенциалом εH_1. Подчеркнем, что мы не требуем положительной определенности квадратичной формы H_0.

Условимся о некоторых обозначениях. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Положим

$$(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i, \quad \langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \eta_j.$$

Пусть

$$H_1 = \sum h_m e^{i(m,x)}, \quad h_m = \mathrm{const}. \tag{0.3}$$

Через $\mathfrak{M}$ обозначим конечное множество целочисленных векторов $m = (m_1, \ldots, m_n)$, для которых $h_m \neq 0$. Если $H_1 \neq \mathrm{const}$, то $\mathfrak{M}$ содержит по меньшей мере два элемента. Отметим еще, что $\mathfrak{M}$ допускает инволюцию $m \mapsto -m$.

Определение 1. Гамильтонова система с гамильтонианом $H_0 + \varepsilon H_1$ называется интегрируемой по Пуанкаре, если найдется n интегралов в виде степенных рядов

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= F_0^{(1)}(y, x) + \varepsilon F_1^{(1)}(y, x) + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{(n)} &= F_0^{(n)}(y, x) + \varepsilon F_1^{(n)}(y, x) + \ldots, \end{aligned} \tag{0.4}$$

коэффициенты которых — аналитические функции на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$, причем функции $F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(n)}$ почти всюду независимы.

В связи с этим определением сделаем некоторые замечания.

1) Мы не предполагаем, что ряды (0.4) сходятся при малых $\varepsilon \neq 0$. Этот момент требует некоторых разъяснений. Формальный ряд $\sum f_s \varepsilon^s$ считается

равным нулю, если все $f_s \equiv 0$. Ряд $F = \sum F_k \varepsilon^k$ — формальный интеграл уравнений Гамильтона с гамильтонианом $H = \sum H_m \varepsilon^m$, если формальный ряд

$$\{H,\, F\} = \sum_{s \geqslant 0} \biggl(\sum_{m+k=s} \{H_m,\, F_k\} \biggr) \varepsilon^s$$

равен нулю; символ $\{\,,\}$ обозначает стандартную скобку Пуассона.

2) Мы не предполагаем инволютивности интегралов (0.4). Оказывается, ввиду невырожденности функции H_0, любые два интеграла системы (0.1) автоматически находятся в инволюции (ср. с [13, § 5]).

3) В случае двух степеней свободы ($n = 2$) условие независимости функций H_0 и F_0 можно заменить более слабым и естественным условием нетождественной (по ε) зависимости интегралов $H_0 + \varepsilon H_1$ и $\sum F_s \varepsilon^s$ (см. [11, гл. V]). Более точно, несколько формальных рядов считаются независимыми, если некоторый минор максимального порядка их матрицы Якоби, рассматриваемый как формальный ряд по ε, отличен от нуля.

Положим теперь $\varepsilon = 1$ и рассмотрим гамильтонову систему с функцией Гамильтона $H_0 + H_1$.

Определение 2. Эта гамильтонова система называется интегрируемой по Биркгофу, если найдется полный набор (в количестве n) полиномиальных интегралов по импульсам $y_1, \ldots, y_n$ с аналитическими и 2π-периодическими по $x_1, \ldots, x_n$ коэффициентами, причем их старшие однородные формы почти всюду независимы.

Сделаем некоторые замечания.

1) В случае двух степеней свободы условие независимости старших форм полиномиальных интегралов мы заменяем более слабым условием независимости интегралов как аналитических функций в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$.

2) Нам не известны примеры вполне интегрируемых натуральных гамильтоновых систем, не имеющих полного набора полиномиальных интегралов.

3) Хорошо известно (см., например, [16, 1]), что линейные по импульсам интегралы связаны с существованием «скрытых» циклических координат, а интегралы, квадратичные по импульсам, связаны с наличием разделенных канонических переменных. Как показал Биркгоф, эти выводы справедливы и для полиномиальных функций, являющихся интегралами на каком-то одном уровне интеграла энергии системы с двумя степенями свободы [1, гл. II].

Предложение 1. *Если система с гамильтонианом $H_0 + H_1$, интегрируема по Биркгофу, то система с гамильтонианом $H_0 + \varepsilon H_1$ интегрируема по Пуанкаре.*

Для доказательства воспользуемся заменой переменных

$$x \mapsto x, \quad y \mapsto y/\sqrt{\varepsilon}, \quad t \mapsto \sqrt{\varepsilon}\,t. \tag{0.5}$$

После такой замены уравнения (0.1) перейдут в уравнения Гамильтона с гамильтонианом $H_0 + \varepsilon H_1$, а полиномиальный интеграл (с точностью до несущественного постоянного множителя) станет равным $F + \sqrt{\varepsilon}\,\Phi$, где F и Φ — аналитические по ε функции. Ясно, что F и Φ — интегралы системы с гамильтонианом $H_0 + \varepsilon H_1$, причем один из свободных членов F_0 или Φ_0 совпадает со старшей однородной формой исходного полиномиального интеграла, что и требовалось показать.

Как заметил С. В. Болотин, фактически справедливо и обратное утверждение. Действительно, предположим, что ряд

$$\sum F_s(y, x)\varepsilon^s, \quad F_s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}, \tag{0.6}$$

является интегралом гамильтоновой системы с функцией Гамильтона $H_0 + {}$ $+ \varepsilon H_1$. Замена переменных, обратная к (0.5), переводит эту систему в систему с гамильтонианом $H_0 + H_1$. При этом интеграл (0.6) перейдет в функцию

$$\sum F_s\bigl(\sqrt{\varepsilon}\,y, x\bigr)\varepsilon^s = \sum \Phi_m(y, x)\bigl(\sqrt{\varepsilon}\,\bigr)^m,$$

где Φ_m — полиномы по импульсам с периодическими по x коэффициентами. Так как полученная система не содержит параметра ε, то полиномы Φ_m являются ее интегралами. В случае двух степеней свободы отсюда сразу вытекает наличие полиномиального интеграла, независимого с функцией $H_0 + H_1$. Вопрос о существовании интегралов с независимыми старшими формами в многомерном случае требует дальнейшего изучения. В дальнейшем используется лишь предложение 1. Отметим, что если возмущающая функция H_1 зависит от импульсов y, то предложение 1 не справедливо.

Основной результат статьи составляет

Теорема 1. *Предположим, что квадратичная форма H_0 положительно определена. Тогда гамильтонова система с функцией Гамильтона $H_0 + \varepsilon H_1$ интегрируема по Пуанкаре* (*по Биркгофу*) *тогда и только тогда,* *когда точки множества $\mathfrak{M}$ расположены на $d \leqslant n$ прямых, ортогонально (в метрике $\langle\,,\rangle$) пересекающихся в начале координат.*

Доказательство достаточности условий теоремы 1 совсем простое. Действительно, пусть $l_1, \ldots, l_n$ — прямые в $\mathbb{R}^n$, о которых идет речь в теореме 1. Через $k_i \neq 0$ обозначим точку из множества $\mathbb{Z}^n \cap l_i$, ближайшую к началу координат. Дополним $k_1, \ldots, k_d$ целочисленными векторами $k_{d+1}, \ldots, k_n$ до базиса в $\mathbb{R}^n$. Выполним теперь линейное преобразование $x' = Mx$ с невырожденной целочисленной матрицей

$$M = \begin{Vmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{Vmatrix}$$

и расширим его до канонического преобразования $y, x \mapsto y', x'$, полагая $y' = (M^T)^{-1}y$. В новых переменных y', x' функция Гамильтона $H_0 + H_1$ приводится к виду

$$H = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{d} a'_{ii}y_i'^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i>2} a'_{ij}y'_iy'_j\right) + \sum_{i=1}^{d} f_i(x'_i), \tag{0.7}$$

где $a'_{ij} = \mathrm{const}$, f_i — 2π-периодические тригонометрические многочлены. Ясно, что переменные y', x' разделяются и поэтому уравнения Гамильтона с гамильтонианом (0.7) имеют следующий набор n независимых инволютивных интегралов

$$F_i = \frac{1}{2}\left(a'_{ii}y_i'^2 + y'_i\sum_{s>d} a_{is}y'_s\right) + f_i(x'_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant d, \quad F_j = y'_j, \quad j > d.$$

В исходных переменных y, x интегралы F_i ($i \leqslant d$) снова будут квадратичными по импульсам функциями с аналитическими на $\mathbb{T}^n = \{x\}$ коэффициентами, а интегралы F_j ($j > d$) останутся линейными функциями от y с постоянными коэффициентами.

Следствие 1. *Если уравнения Гамильтона с гамильтонианом $H_0 + H_1$ имеют n полиномиальных интегралов с независимыми старшими формами, то они имеют n независимых инволютивных полиномиальных интегралов не выше второй степени.*

Рассмотрим k ортогональных прямых в $(\mathbb{R}^n, \langle\,,\rangle)$, пересекающихся в нуле. На каждой прямой возьмем по две точки, расположенных на равных расстояниях по разные стороны от точки $0 \in \mathbb{R}^n$. Выпуклую оболочку этих $2k$ точек назовем k-мерным *ромбоидом*. Число l-мерных граней k-мерного ромбоида равно $2^{l+1}C_k^{l+1}$; в частности, этот многогранник имеет ровно $2k$ вершин и 2^k граней. Ясно, что k-мерный ромбоид является выпуклым многогранником, двойственным k-мерному параллелепипеду.

Следствие 2. *Если уравнения Гамильтона с гамильтонианом $H_0 + \varepsilon H_1$ $(H_0 + H_1)$ интегрируемы по Пуанкаре (Биркгофу), то выпуклая оболочка $\mathscr{E}(\mathfrak{M})$ является k-мерным ромбоидом, $k \leqslant n$.*

В качестве примера рассмотрим систему с потенциалом следующего вида:
$$H_1 = \sum_{i<j} f(x_i - x_j), \tag{0.8}$$
где $f(\cdot)$ — четная функция, являющаяся непостоянным 2π-периодическим тригонометрическим многочленом (потенциал парного взаимодействия). Можно показать, что в этой задаче выпуклая оболочка множества $\mathfrak{M}$ является $(n-1)$-мерным многогранником с $2C_n^2$ вершинами. Так как $2C_n^2 > 2(n-1)$ при $n > 2$, то для $n \geqslant 3$ система с потенциалом (0.8) не имеет полного набора полиномиальных интегралов. Этот вывод не зависит от вида евклидовой метрики $\langle\,,\rangle$.

В работе Адлера и ван Мёрбеке [18] рассмотрен частный случай этой задачи: метрика $\langle\,,\rangle$ — стандартная метрика в $\mathbb{R}^n$, $f = \cos(\cdot)$. Это — классический вариант системы Гросс – Невё, хорошо известной в теоретической физике. С помощью анзаца Ковалевской доказано, что при $n = 3$ и $n = 4$ для почти всех начальных условий переменные y_s и $\exp(ix_s)$ не являются мероморфными функциями комплексного времени. В частности, система Гросс – Невё алгебраически неинтегрируема. Подчеркнем, что алгебраически неинтегрируемые системы могут быть вполне интегрируемыми. В качестве простого примера рассмотрим гамильтонову систему с одной степенью свободы, функция Гамильтона которой равна
$$\frac{y^2}{2} + f_n(x), \tag{0.9}$$
где f_n — многочлен n-й степени с простыми корнями. Эта система алгебраически интегрируема лишь при $n \leqslant 4$, однако она вполне интегрируема

при всех n в вещественной области ввиду наличия полиномиального интеграла (0.9).

Интересно отметить, что система с гамильтонианом

$$\frac{1}{2}\sum y_s^2 + \sum_{i<j} f(x_i - x_j), \tag{0.10}$$

где f является $\wp$-функцией Вейерштрасса (или ее вырожденными случаями z^{-2}, $\sin^{-2} z$, $\operatorname{sh}^{-2} z$), вполне интегрируема при всех значениях n [19,20]. В работе [10] показано, что в случае трех частиц это единственный случай, когда гамильтонова система с функцией Гамильтона (0.10) допускает дополнительный интеграл в виде многочлена третьей степени по импульсам. Отметим, что задача о дополнительном полиномиальном интеграле заданной степени много проще задачи о наличии интеграла в виде полинома, степень которого заранее не фиксирована.

Введем в $\mathbb{Z}^n$ стандартное отношение лексикографического порядка, обозначаемое в дальнейшем символом $\prec$: $\sigma \prec \delta$, если для наименьшего индекса s такого, что $\sigma_s \neq \delta_s$, выполнено неравенство $\sigma_s < \delta_s$. Мы скажем, что $\sigma \preccurlyeq \delta$, если $\sigma \prec \delta$ или $\sigma = \delta$.

Определение. Пусть α — наибольший элемент $\mathfrak{M}$, а β — наибольший линейно независимый с α элемент множества $\mathfrak{M} \setminus \{\alpha\}$. Вектор α назовем вершиной $\mathfrak{M}$, а вектор β — вершиной $\mathfrak{M}$, примыкающей к α.

Оставляя в стороне тривиальный случай интегрируемости, когда все точки из $\mathfrak{M}$ лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, мы будем предполагать в дальнейшем, что примыкающая вершина β всегда существует.

Доказательство теоремы 1 основано на применении следующего утверждения, представляющего самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Пусть α, β — вершины $\mathfrak{M}$ и*

$$m\langle\alpha,\, \alpha\rangle + 2\langle\alpha,\, \beta\rangle \neq 0 \tag{0.11}$$

для всех целых $m \geqslant 0$. Тогда гамильтонова система с функцией Гамильтона $H_0 + \varepsilon H_1$ неинтегрируема по Пуанкаре.

Подчеркнем, что для справедливости теоремы 2 нужна лишь невырожденность квадратичной формы H_0. Теорема 2 доказывается с помощью теории возмущений. Оказывается, свободные коэффициенты интегралов (0.4) — функции $F_0^{(s)}$ — не содержат угловых координат x и зависимы во всех точках гиперплоскостей $\langle y, m\alpha+\beta\rangle = 0$. Ввиду аналитичности и предположения о линейной независимости α и β, функции $F_0^{(s)}$ зависимы всюду на $\mathbb{R}^n = \{y\}$. Точки $y \in \mathbb{R}^n$, лежащие на гиперплоскости $\langle y, m\alpha + \beta\rangle = 0$, отвечают резонансным торам невозмущенной интегрируемой задачи, которые разрушаются на m-ом шаге теории возмущений.

Теорема 3. *Пусть α и β — векторы из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющие условиям теоремы* 2. *Если гамильтонова система с гамильтонианом $H_0+\varepsilon H_1$ имеет $n-1$ однозначных аналитических интегралов*

$$F_0^{(1)} + \varepsilon F_1^{(1)} + \ldots, \ \ldots, \ F_0^{(n-1)} + \varepsilon F_1^{(n-1)} + \ldots,$$

причем функции $F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(n-1)}$ независимы хотя бы в одной точке из $\Gamma \times \mathbb{T}^n$, где Γ — гиперплоскость $\langle \alpha, y\rangle = 0$, то уравнения Гамильтона не имеют независимого от функций $F_0^{(1)}+\varepsilon F_1^{(1)}+\ldots, \ldots, F_0^{(n-1)}+\varepsilon F_1^{(n-1)}+ \ldots$ интеграла в виде формального ряда $\sum F_s(y, x)\varepsilon^s$ с аналитическими в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ коэффициентами.

Из теоремы 3 и предложения 1 выводится

Следствие. *Пусть векторы α, $\beta \in \mathfrak{M}$ удовлетворяют условиям теоремы* 2 *и Γ — гиперплоскость $\langle \alpha, y\rangle = 0$. Предположим, что система с гамильтонианом $H_0 + H_1$ имеет $n-1$ полиномиальных интегралов $F^{(1)}, \ldots, F^{(n-1)}$, старшие однородные формы, которых независимы хотя бы в одной точке из $\mathbf{\Gamma} \times \mathbb{T}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$. Тогда уравнения Гамильтона не имеют дополнительного полиномиального интеграла, независимого с функциями $F^{(1)}, \ldots, F^{(n-1)}$.*

План дальнейшего изложения таков. В § 1 содержатся результаты вспомогательного характера, связанные с детальным анализом классической схемы теории возмущений применительно к гамильтоновой системе с функцией Гамильтона (0.2). С их помощью в § 2 доказываются теоремы 2 и 3. В § 3 содержится вывод теоремы 1 из теоремы 2. В § 4 обсуждаются возможные пути обобщения теорем 2–3 и некоторые их применения. Наконец, в § 5 указаны условия отсутствия одного дополнительно полиномиального интеграла.

§ 1. Вековое множество и его структура

Доказательство теорем 2 и 3 начнем с изложения некоторых сведений из теории возмущений. Классическая схема теории возмущений состоит в следующем: ищется каноническое преобразование y, $x \bmod 2\pi \mapsto$ $\mapsto u$, $v \bmod 2\pi$:

$$y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad v_i = \frac{\partial S}{\partial u_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

с производящей функцией

$$S = S_0(u, x) + \varepsilon S_1(u, x) + \ldots ,$$

переводящее исходный гамильтониан $H_0(y) + \varepsilon H_1(x)$ в функцию $K_0(u) +$ $+ \varepsilon K_1(u) + \ldots$, не зависящую от новых угловых переменных v. Если такое преобразование удастся найти, то исходная система будет проинтегрирована. В частности, функции $u_1(y, x, \varepsilon), \ldots, u_n(y, x, \varepsilon)$ будут составлять полный набор независимых инволютивных интегралов. Производящая функция S удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби:

$$H_0\Big(\frac{\partial S}{\partial x}\Big) + \varepsilon H_1(x) = K_0(u) + \varepsilon K_1(u) + \ldots . \tag{1.1}$$

Обычно полагают $S_0 = (u, x)$; тогда при $\varepsilon = 0$ будем иметь тождественное преобразование и поэтому $K_0(u) = H_0(u)$. Разлагая левую часть уравнения (1.1) в ряд по степеням ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим бесконечную цепочку уравнений для последовательного отыскания $S_1, S_2, \ldots$ и $K_1, K_2 \ldots$:

$$\begin{gathered}
\sum_l \frac{\partial H_0}{\partial u_l} \frac{\partial S_1}{\partial x_l} + H_1(x) = K_1(u), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sum_l \frac{\partial H_0}{\partial u_l} \frac{\partial S_m}{\partial x_l} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \sum_{p,q} \frac{\partial S_p}{\partial x_i} \frac{\partial S_q}{\partial x_j} = K_m(u), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered} \tag{1.2}$$

При выводе этих формул было учтено, что функция H_0 — квадратичная форма по u. В теории возмущении доказывается (см., например, [11, гл. IX]), что уравнения (1.2) имеют единственное решение $S_1, S_2, \ldots$ в виде тригонометрических рядов по $x_1, \ldots, x_n$ с нулевыми свободными коэффициентами:

$$S_m = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}^n}{}' S_m^\tau(y) e^{i(\tau, x)}. \tag{1.3}$$

Рассмотрим первое уравнение системы (1.2) и решим его методом Фурье. С помощью формул (0.3) и (1.3) (при $m = 1$) получим соотношения:

$$K_1 = h_0, \quad S_1^\tau = \frac{ih_\tau}{(\omega,\, \tau)}, \quad \tau \neq 0; \tag{1.4}$$

здесь $\omega = (\omega_1,\, \ldots,\, \omega_n)$, $\omega_s = \partial H_0/\partial y_s = \sum a_{is} y_i$ — частоты условно-периодических движений невозмущенной задачи. Из формул (1.4) видно, что функция S_1 не определена в точках из $\mathbb{R}^n = \{y\}$, лежащих на конечном числе гиперплоскостей $\langle y,\, \tau\rangle = 0$, $\tau \in \mathfrak{M}$, $\tau \neq 0$. Совокупность всех таких точек назовем вековым множеством первого порядка и обозначим его $\mathbf{B}_1$.

Коэффициенты Фурье S_m^τ, $m = 2, 3, \ldots,$ находятся по следующей индуктивной формуле:

$$S_m^\tau = \frac{1}{2i(\omega,\, \tau)} \sum_{\substack{u+v=m \\ \sigma+\delta=\tau}} \langle \sigma,\, \delta\rangle S_u^\sigma S_v^\delta. \tag{1.5}$$

Эта формула — следствие (1.2) и обозначения (1.3). Ясно, что S_r^τ можно представить в виде дробей, в знаменателях которых стоят выражения вида $(\omega,\, \tau)$ и их произведения.

Вековым множеством k-го порядка $\mathbf{B}_k$ назовем множество всех точек $\mathbb{R}^n = \{y\}$ таких, что выполнены следующие условия:

i) $(\omega(y),\, \tau) = 0$, $\tau \neq 0$,

ii) $(\omega(y),\, \tau) S_k^\tau(y) \not\equiv 0$,

iii) на гиперплоскости $(\omega,\, \tau) = 0$ все функции S_m^σ при $m < k$ аналитичны.

Положим

$$\mathbf{B} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{B}_k.$$

Назовем это множество вековым множеством возмущенной задачи. Поскольку точки множества $\mathbf{B}$ являются точками разрыва для коэффициентов Фурье функции S, то для дальнейшего важную роль играет его структура. Ясно, что каждое множество $\mathbf{B}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{B}_k$ состоит из конечного числа различных гиперплоскостей.

Основная лемма. *Пусть α и β — вершины множества $\mathfrak{M}$, удовлетворяющие условию* (0.11)*. Тогда множество $\mathbf{B}_k$ содержит гиперплоскость $\langle k\alpha + \beta,\, y\rangle = 0$. В частности, вековое множество $\mathbf{B}$ состоит из бесконечного числа различных гиперплоскостей и его замыкание содержит гиперплоскость $\langle \alpha,\, y\rangle = 0$.*

Вся оставшаяся часть § 1 будет посвящена доказательству основной леммы.

Из определения лексикографического порядка следует, что $\alpha \succ 0$ и $\alpha \succ \gamma$ для всех $\gamma \in \mathfrak{M} \setminus \{\alpha\}$.

Лемма 1. *Функции* $S_r^\tau \equiv 0$ *для всех* $\tau \succ r\alpha$.

Доказательство проводится индукцией по r. Для $r = 1$ справедливость леммы вытекает из формулы (1.4) и определения вершины α. Предположим, что лемма справедлива для всех $r \leqslant m$. Функция S_{r+1}^τ вычисляется по формуле (1.5). Пусть $\tau \succ (r+1)\alpha$. Покажем, что в любом слагаемом в правой части (1.5) должен присутствовать сомножитель S_w^τ при $\tau \succ w\alpha$, $w \leqslant r$, который равен нулю по предположению индукции. Действительно, если $\sigma \preccurlyeq u\alpha$ и $\delta \preccurlyeq v\alpha$, то $\sigma + \delta \preccurlyeq (u+v)\alpha = (r+1)\alpha \prec \tau$. Но это противоречит условию суммирования $\sigma + \delta = \tau$. Лемма доказана.

Лемма 2.

$$S_m^{m\alpha} = \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2im(\omega, \alpha)} \sum_{u+v=m} uv S_u^{u\alpha} S_v^{v\alpha}. \tag{1.6}$$

Доказательство. Выведем (1.6) из (1.5), положив $\tau = m\alpha$. Будем рассматривать лишь ненулевые слагаемые, стоящие справа. Согласно лемме 1, справедливы соотношения: $\sigma \preccurlyeq u\alpha$, $\delta \preccurlyeq v\alpha$, $\sigma + \delta = m\alpha = (u+v)\alpha$. Откуда $\sigma = u\alpha$ и $\delta = v\alpha$, что и требовалось.

Лемма 3.

$$S_m^{m\alpha} = K_m \left(\frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{i(\omega, \alpha)} \right)^{m-1} (S_1^\alpha)^m, \tag{1.7}$$

где

$$K_1 = 1, \quad K_m = \sum_{u+v=m} \frac{uv K_u K_v}{2m}. \tag{1.8}$$

Доказательство проводится индукцией по m. При $m = 1$ формула (1.7) совпадает с (1.4). Пусть при $m \leqslant r$ лемма 3 справедлива. Тогда

$$S_{r+1}^{(r+1)\alpha} = \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle \sum\limits_{u+v=r+1} uv K_u K_v}{2i(r+1)(\omega, \alpha)} \left(\frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{i(\omega, \alpha)} \right)^{u+v-2} (S_1^\alpha)^{u+v} =$$

$$= K_{r+1} \left(\frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{i(\omega, \alpha)} \right)^{r} (S_1^\alpha)^{r+1}.$$

Лемма 4. *Если вектор τ линейно независим с α и $(m-1)\alpha + \beta \prec \tau \prec m\alpha$, то $S^{\tau}_{m} \equiv 0$.*

Справедливость этого утверждения при $m = 1$ вытекает из определения вершин α и β. Пусть оно справедливо при всех $m \leqslant r$. Воспользуемся формулой (1.5) при $m = r + 1$. Согласно предположению индукции и лемме 1, произведение $S^{\sigma}_{u} S^{\sigma}_{v}$ может быть отличным от нуля лишь в следующих случаях:

1) векторы α, δ, σ попарно линейно зависимы;

2) $\sigma \preccurlyeq u\alpha$, $\delta \preccurlyeq (v-1)\alpha + \beta$ или $\sigma \preccurlyeq (u-1)\alpha + \beta$, $\delta \preccurlyeq v\alpha$.

В первом случае, очевидно, вектор τ параллелен α, а во втором справедливо неравенство $\tau = \sigma+\delta \preccurlyeq (u+v-1)\alpha+\beta = r\alpha+\beta$, что и требовалось доказать.

Лемма 5.

$$S^{m\alpha+\beta}_{m+1} = \frac{1}{i(\omega,\, m\alpha+\beta)} \sum_{\substack{u+v=m\\ u>0,\, v\geqslant 0}} \langle u\alpha,\, v\alpha+\beta\rangle S^{u\alpha}_{u} S^{v\alpha+\beta}_{v+1}. \qquad (1.9)$$

Формула (1.9) выводится из (1.5) с учетом леммы 4. Сначала заметим, что либо $\sigma \preccurlyeq (u-1)\alpha+\beta$, либо $\delta \preccurlyeq (v-1)\alpha+\beta$. В противном случае векторы σ, δ, α, $\sigma+\delta$ попарно линейно зависимы. Если одновременно $\sigma \prec u\alpha$ и $\delta \prec v\alpha$, то получим противоречивое неравенство $m\alpha+\beta = \sigma+\delta \prec (u+v-1)\alpha+\beta = m\alpha+\beta$. Следовательно, согласно лемме 4, в формуле (1.5) надо учитывать лишь следующие пары векторов σ и δ: 1) $\sigma = u\alpha$, $\delta = (v-1)\alpha+\beta$, 2) $\sigma = (u-1)\alpha+\beta$, $\delta = v\alpha$. Для завершения доказательства осталось воспользоваться симметрией формулы (1.5) по σ и δ. Лемма доказана.

Преобразуем формулу (1.9):

$$i(\omega,\, m\alpha+\beta) S^{m\alpha+\beta}_{m+1} = \sum_{\substack{u+v=m\\ u>0,\, v\geqslant 0}} \frac{\langle \alpha,\, v\alpha+\beta\rangle}{i(\omega,\, v\alpha+\beta)}\, u S^{u\alpha}_{u} i(w,\, v\alpha+\beta) S^{v\alpha+\beta}_{v+1}. \quad (1.10)$$

Введем следующие обозначения:

$$y_m = m S^{m\alpha}_{m}, \quad x_{m+1} = i(\omega,\, m\alpha+\beta) S^{m\alpha+\beta}_{m+1}, \quad l_v = \frac{\langle \alpha,\, v\alpha+\beta\rangle}{i(\omega,\, v\alpha+\beta)}.$$

Тогда (1.10) можно записать в следующем виде:

$$x_{m+1} = \sum_{\substack{u+v=m \\ u>0,\, v\geqslant 0}} l_v y_u x_{v+1}.$$

Лемма 6.

$$y_{m+1} = a_m y_1^m x_1, \tag{1.11}$$

где

$$a_0 = 1, \quad a_m = \sum_{\substack{u+v=m \\ u>0,\, v\geqslant 0}} uK_u h^{u-1} a_v l_v, \quad h = \frac{\langle \alpha,\, \alpha \rangle}{i(\omega,\, \alpha)}.$$

Доказательство проводится индукцией по m с применением формулы (1.7).

Положим $uK_u = r_u$. Из формулы (1.8) получаем

$$r_1 = 1, \quad r_m = \sum_{\substack{u+v=m \\ u>0,\, v\geqslant 0}} \frac{r_u r_v}{2}. \tag{1.12}$$

С учетом нового обозначения

$$a_m = \sum_{\substack{u+v=m \\ u>0,\, v\geqslant 0}} r_u h^{u-1} a_v l_v. \tag{1.13}$$

Лемма 7.

$$1 - \sqrt{1-2z} = \sum_{n=1}^{\infty} r_n z^n.$$

Следствие. $r_m = \dfrac{(2m-3)!!}{m!!}$ *при* $m > 1$.

Доказательство леммы 7. . Из 1.12 следует, что степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n z^n$$

удовлетворяет уравнению $f^2 - 2f + 2z = 0$. Так как $f(0) = 0$, то $f(z) = 1 - \sqrt{1-2z}$, что и требовалось.

Из формулы (1.13) получаем последовательно

$$a_1 = r_1 l_0, \quad a_2 = r_2 h l_0 + r_1^2 l_0 l_1,$$
$$a_3 = r_3 h^2 l_0 + r_1 r_2 h l_0 l_1 + r_1 r_2 h l_0 l_2 + r_1^3 l_0 l_1 l_2, \ \ldots\ .$$

Лемма 8. *При* $m \geqslant 1$

$$a_m = \sum_{0=j_0<j_1<\ldots<j_k<m} r_{j_1-j_0} r_{j_2-j_1} \ldots r_{m-j_k} h^{m-k-1} l_{j_0} l_{j_1} \ldots l_{j_k}. \quad (1.14)$$

Формула (1.14) просто выводится из (1.13) индукцией по m.

Приступим к анализу векового множества. Так как векторы α и β по предположению линейно независимы, то гиперплоскости $(\omega,\, \alpha) = 0$ и $\Gamma_m = \{y : (\omega,\, m\alpha + \beta) = 0\}$ не совпадают. Согласно лемме 1 функции S_r^σ аналитичны почти всюду на Γ_m при $r < m + 1$. Для того чтобы выяснить, принадлежит ли гиперплоскость Γ_m вековому множеству $\mathbf{B}_{m+1}$, необходимо исследовать неравенство $x_{m+1} \neq 0$. Воспользуемся формулой (1.11). В этой формуле $y_1 = S_1^\alpha$, $x_1 = i(\omega,\, \beta) S_1^\beta$. Коэффициенты S_1^α и S_1^β отличны от нуля согласно формуле (1.4) и определению вершин α и β. Если $(\omega,\, \beta) \equiv 0$ на гиперплоскости Γ_m, то векторы α и β должны быть коллинеарными. Это, однако, не так. Следовательно, $y_1 \neq 0$ и $x_1 \neq 0$. Поэтому $x_{m+1} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $a_m \neq 0$. Рассмотрим два случая: $\langle \alpha,\, \alpha \rangle = 0$ и $\langle \alpha,\, \alpha \rangle \neq 0$. В первом случае $h = 0$ и (по лемме 8) $a_m = l_0 l_1 \ldots l_{m-1}$. Так как согласно предположению (0.11) $\langle \alpha,\, \beta \rangle \neq 0$, то все $l_s \neq 0$ и, следовательно, $a_m \neq 0$. Во втором случае введем число $\lambda = \langle \alpha,\, \beta \rangle / \langle \alpha,\, \alpha \rangle$. В точках гиперплоскости Γ_m выполнено равенство $(\omega,\, \beta) = -m(\omega,\, \alpha)$ и поэтому

$$l_v = \frac{\lambda + v}{v - m}\, h.$$

Так как в рассматриваемом случае $h \neq 0$, то из формулы (1.14) следует, что $a_m = 0$ тогда и только тогда, когда λ является корнем многочлена

$$P_m(x) = \sum_{0=j_0<j_1<\ldots<j_k<m} r_{j_1-j_0} \ldots r_{m-j_k} \frac{(x + j_0) \ldots (x + j_k)}{(j_0 - m) \ldots (j_k - m)}. \quad (1.15)$$

Лемма 9. *Имеет место соотношение*

$$P_m = \frac{(-1)^m}{m!}\, x\Big(x + \frac{1}{2}\Big) \ldots \Big(x + \frac{m-1}{2}\Big). \quad (1.16)$$

Для доказательства леммы 9 рассмотрим новые многочлены

$$Q_n(y) = \frac{P_n(x)}{-\,x}\bigg|_{x=n-y}, \quad Q_0 = -\frac{1}{y}. \tag{1.17}$$

Лемма 10. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$mQ_m = \sum_{\substack{u+v=m\\ u>0,\, v\geqslant 0}} r_u(v-y)Q_v. \tag{1.18}$$

Доказательство. В формуле (1.15) сделаем замену: $m - j_l = j_{k-l+1}$. Тогда

$$P_m(x) = -\frac{x}{m}\, r_m +$$
$$+ \sum_{0<i_1<\ldots<i_k<m} r_{m-i_k} r_{i_k - i_{k-1}} \ldots r_{i_1} \frac{x}{-\,m}\,\frac{x+m-i_k}{-\,i_k}\ldots\frac{x+m-i_1}{-\,i_1}.$$

Выделив отдельно суммирование по i_k, получаем

$$P_m(x) = \frac{y}{-\,m}\sum_{i_k=0}^{m+1} P_{i_k}(x) r_{m-i_k}, \quad P_0 \equiv 1.$$

Это соотношение можно переписать в следующем виде:

$$m\frac{P-m}{x} = \sum_{k=0}^{m-1}(k-m-x)\frac{P_k}{y+m-k}\, r_{m-k}.$$

Полагая $x+m=y$ и $P_n = (n-y)Q_n$, приходим к равенству

$$mQ_m(y) = \sum_{k=0}^{m-1} r_{m-k}(k-y)Q_k(y), \quad Q_0 = -1/y,$$

которое эквивалентно (1.18).

Лемма 11. *Справедливо тождество*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^n = -\frac{1}{y}\left(\frac{1+\sqrt{1-2z}}{2}\right)^{2y}. \tag{1.19}$$

Доказательство. Положим

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^n.$$

Соотношение (1.18) приводит к следующему дифференциальному уравнению для функции g:

$$z\frac{dg}{dz} = \left(z\frac{dg}{dz} - yg\right)f.$$

Здесь f — функция из леммы 7. Решая это линейное дифференциальное уравнение с начальным условием $g(0) = -1/y$, получим

$$g(z) = -\frac{1}{y}\left(\frac{1+\sqrt{1-2z}}{2}\right)^{2y},$$

что и требовалось.

Функция (1.19) аналитична при малых z. Найдем ее ряд Маклорена. Положим $g(z) = F(\varphi^{-1}(z))$, где

$$F(z) = -\frac{1}{y}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{2y}, \quad \varphi = \frac{1-z^2}{2}.$$

Так как $\varphi'(1) \neq 0$, то можно воспользоваться теоремой Бюрмана [17]:

$$g(z) = g(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \left.\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\right|_{z=1} [F'(z)\Psi^m(z)], \tag{1.20}$$

где

$$\Psi = \frac{z-1}{\varphi(z)} = -\frac{2}{1+z}.$$

Из формул (1.19) и (1.20) легко получаем

$$m!Q_m = \left(\frac{2m-1}{2} - y\right)\left(\frac{2m-2}{2} - y\right)\ldots\left(\frac{m+1}{2} - y\right).$$

Возвращаясь к старой переменной x и используя соотношение (1.17), приходим к формуле (1.16) для многочлена $P_m(x)$. Лемма 9 доказана.

Продолжим анализ векового множества. Лемма 7 дает нам, что функция $a_m \equiv 0$ на гиперплоскости Γ_m тогда и только тогда, когда $\lambda = \langle\alpha,\, \beta\rangle/\langle\alpha,\, \alpha\rangle$

совпадает с одним из следующих чисел: $0, -1/2, -1, \ldots, -(m-1)/2$. Однако, согласно предположению (0.11) $\lambda \neq -m/2$ при всех целых $m \geqslant 0$. Следовательно, гиперплоскость $\Gamma_m = \{y : \langle y, m\alpha + \beta\rangle = 0\}$ принадлежит вековому множеству $\mathbf{B}_{m+1} \subset \mathbf{B}$. При $m \to \infty$ гиперплоскости Γ_m накапливаются, очевидно, у предельной плоскости $\langle y, \alpha\rangle = 0$. Доказательство основной леммы завершено.

§ 2. Доказательство теорем 2 и 3

Пусть n аналитических функций

$$F^{(k)} = \sum_{s=0}^{\infty} F_s^{(k)}(y, x)\varepsilon^s, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

являются первыми интегралами гамильтоновой системы с гамильтонианом (0.2). Все функции $F_s^{(k)}$, разумеется, 2π-периодичны по переменным $x_1, \ldots, x_n$.

Лемма 12. *Функции $F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(n)}$ не зависят от угловых переменных $x_1, \ldots, x_n$ и в точках векового множества их якобиан*

$$\frac{\partial\big(F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(n)}\big)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \tag{2.2}$$

обращается в нуль.

Из основной леммы § 1 и леммы 12 сразу же вытекает справедливость теоремы 2. Действительно, так как множество $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}^n$ состоит из бесконечного числа различных гиперплоскостей, проходящих через начало координат, то $\mathbf{B}$ является *множеством единственности* для класса функций, аналитических в $\mathbb{R}^n$: любая аналитическая функция, принимающая нулевое значение в точках множества $\mathbf{B}$, обращается в нуль всюду на $\mathbb{R}^n$. Следовательно, по лемме 12, аналитическая функция (2.2) тождественно равна нулю. Это в свою очередь означает зависимость интегралов (2.1) при $\varepsilon = 0$.

Доказательство теоремы 3 использует еще одну вспомогательную конструкцию, восходящую к Пуанкаре [11, п. 81].

Лемма 13. *Предположим, что функции $F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(n-1)}$ независимы в некоторой точке $y_0 \in \Gamma$ и уравнения Гамильтона имеют дополни-*

тельный формальный интеграл $F = \sum F_s(y,\, x)\varepsilon^s$, *независимый от функций* $F^{(1)},\, \ldots,\, F^{(n-1)}$. *Тогда существует окрестность* V *точки* y_0 *в* $\mathbb{R}^n = \{y\}$ *и формальный интеграл*

$$\Phi = \sum_{s=0}^{\infty} \Phi_s(y,\, x)\varepsilon^s$$

с аналитическими в $V \times \mathbb{T}^n$ *коэффициентами такой, что функции* $F_0^{(1)},\, \ldots,\, F_0^{(n-1)}$ *и* Φ_0 *независимы в* $V \times \mathbb{T}^n$.

Функции $F_0^{(1)},\, \ldots,\, F_0^{(n-1)}$ и Φ_0 в силу леммы 12 на самом деле зависят лишь от переменных y. Мы не будем приводить здесь доказательство леммы 13, так как оно по существу повторяет рассуждения Пуанкаре из [11, п. 81]. Доказательство теоремы 3 вытекает теперь из леммы 12, основной леммы § 1 и того обстоятельства, что пересечение $\mathbf{B} \cap V$ является множеством единственности для класса функций, аналитических в области V.

Лемма 12 обобщает известное утверждение Пуанкаре о зависимости функций $F_0^{(1)},\, \ldots,\, F_0^{(n-1)}$ на множестве $\mathbf{B}_1$ (см. [11, п. 82]). Ниже обсуждается доказательство леммы 12.

Первая часть леммы о независимости функций $F_0^{(k)}$ от угловых переменных $x_1,\, \ldots,\, x_n$ доказана Пуанкаре в [11, п. 82]. Вторую часть можно вывести, например, из одного результата работы [5, § 4, п. 3], который мы сформулируем здесь как вспомогательное утверждение.

Лемма 14. *Предположим, что уравнения Гамильтона с гамильтонианом* (0.2) *имеют* n *первых формальных интегралов* $F^{(1)},\, \ldots,\, F^{(n)}$ *таких, что*

i) $F_0^{(k)}$ *зависят лишь от* $y_1,\, \ldots,\, y_n$,

ii) *якобиан* (2.2) *отличен от нуля во всех точках области* $D \subset \mathbb{R}^n$.

Тогда существует производящая функция $S = \sum\limits_{m \geqslant 0} S_m(u,\, x)\varepsilon^m$ *классической схемы теории возмущений, коэффициенты которой аналитичны в прямом произведении* $D \times \mathbb{T}^n$.

Выведем отсюда лемму 12. Если якобиан (2.2) отличен от нуля в некоторой точке $y_0 \in \mathbf{B}$, то он отличен от нуля в целой окрестности V этой точки. Согласно лемме 14 в прямом произведении $V \times \mathbb{T}^n$ можно (по крайней мере формально) построить ряды теории возмущений по степеням ε с аналитическими коэффициентами. Однако по построению векового множества $\mathbf{B}$

в точках из $\{y_0\}\times\mathbb{T}^n \subset V\times\mathbb{T}^n$ хотя бы одна из функций S_m, $m = 1, 2, \ldots,$ не является аналитической.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Выполним каноническое преобразование $y, x \mapsto y', x'$ по формулам $y' = (B^T)^{-1}y$, $x' = Bx$, где B — целочисленная унимодулярная матрица. В новых переменных гамильтониан $H_0 + H_1$ будет иметь тот же вид, а множество $\mathfrak{M}$ перейдет в множество $\mathfrak{M}' = \{m'\}$, $m' = (B^T)^{-1}m$. Так как целочисленные векторы m преобразуются так же, как и импульсы y, то выполнение условия интегрируемости (0.11) можно проверять в исходных переменных. Действительно, пусть a, b — векторы из $\mathbb{Z}^n$ и a', b' — их образы при отображении $m \mapsto (B^T)^{-1}m$. Тогда

$$\langle a', b'\rangle' = (BAB^Ta', b') = (Aa, b) = \langle a, b\rangle.$$

Докажем сначала следствие 2 теоремы 1.

Лемма 15. *Пусть α — вершина многогранника $\mathscr{E}(\mathfrak{M})$, Γ — примыкающее к ней ребро, β — ближайшая к α точка множества $\mathfrak{M}\cap\Gamma$. Существует целочисленная унимодулярная матрица B такая, что при отображении $m \mapsto m' = (B^T)^{-1}m$ точки α и β переходят в вершины множества $\mathfrak{M}'$.*

Доказательство основано на индуктивном применении следующего известного факта: для любого целочисленного вектора $k_1 = (k_1^1, \ldots, k_1^m)$ со взаимно простыми координатами найдется еще $m-1$ целочисленных векторов $k_2, \ldots, k_m$ таких, что $\det\|k_j^l\| = \pm 1$. Пусть l — наибольший общий делитель компонент вектора $\alpha-\beta$ и B_1 — целочисленная унимодулярная матрица размером $n\times n$, у которой нижняя строка состоит из компонент вектора $(\alpha-\beta)/l$. При отображении

$$m \mapsto f(m), \quad f(m) = (B_1^T)^{-1}m$$

вектор $(\alpha-\beta)/l$ перейдет в вектор $e_n = (0, \ldots, 0, 1)^T$.

Спроектируем теперь выпуклый многогранник $\mathscr{E}(\mathfrak{M}')$, $\mathfrak{M}' = f(\mathfrak{M})$ на гиперплоскость, порожденную базисными векторами $e_1, \ldots, e_{n-1}$. При этом ребро $\Gamma' = f(\Gamma)$ спроектируется в вершину получившегося выпуклого многогранника. Рассмотрим ребро Δ, примыкающее к этой вершине.

С помощью подходящей целочисленной унимодулярной матрицы B_2 размером $(n-1)\times(n-1)$ ребро Δ можно сделать параллельным $(n-1)$-й координатной оси. Повторим эту операцию еще $n-2$ раз. Можно проверить, что матрица

$$B_1 \left\| \begin{array}{c|c} B_2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right\| \dots \left\| \begin{array}{c|ccc} B_n & & 0 & \\ \hline 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array} \right\|$$

будет искомой. Лемма доказана.

Лемма 16. *Пусть α и β — соседние вершины многогранника $\mathscr{E}(\mathfrak{M})$. Если гамильтонова система вполне интегрируема, то угол между векторами α и β не меньше $\pi/2$.*

Это утверждение непосредственно вытекает из леммы 15 и теоремы 2.

Лемма 17. *Предположим, что выпуклый многогранник в $(\mathbb{R}^n, \langle\,,\rangle)$ симметричен относительно начала координат и угол между радиус-векторами любых двух соседних вершин не меньше $\pi/2$. Тогда этот многогранник является ромбоидом.*

Доказательство проведем индукцией по размерности многогранника M. Когда $\dim M = 1$, то утверждение, очевидно, справедливо. Предположим, что заключение леммы справедливо при $\dim M \leqslant m$. Пусть α — одна из вершин $(m+1)$-мерного многогранника, а Π_α — замкнутое полупространство в $\mathbb{R}^{m+1}$, не содержащее α, граница которого $\partial\Pi_\alpha$ проходит через начало координат ортогонально вектору α. По условию все вершины M, соединенные с α ребром, лежат в Π_α. На самом деле все вершины M, кроме α, лежат в Π_α. Действительно, предположим, что имеется вершина β, не лежащая в Π_α. Выпуклый многогранник M является объединением множества M_α — выпуклой оболочки всех вершин, кроме α, и множества R_α — выпуклой оболочки одномерных ребер M, примыкающих к α. Вершина β, очевидно, не лежит в R_α. Отрезок Γ, соединяющий α и β, целиком расположен в выпуклом многограннике M. Однако, Γ имеет с R_α лишь одну общую точку — точку α, так как в противном случае $\Gamma \subset R_\alpha$ и поэтому точка β не была бы вершиной M. С другой стороны, отрезок Γ не весь лежит в M_α, иначе $M = M_\alpha$. Получили противоречие. Аналогично все вершины M, кроме $(-\alpha)$, лежат в Π_α. Таким образом, M является выпуклой оболочкой точек α, $-\alpha$ и выпуклой оболочки остальных вершин многогранника M, лежащей в $\partial\Pi_\alpha$. Последняя является ромбоидом по предположению индукции. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Лемма 18. *Пусть P — гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, причем точки множества $P \cap \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ образуют подгруппу $\mathbb{Z}^n$ ранга $(n-1)$. Тогда найдется целочисленная унимодулярная матрица B, последние $n-1$ столбцов (или строк) которой являются векторами из $P \cap \mathbb{Z}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко выводится из известных результатов о строении подгрупп $\mathbb{Z}^n$ (см., например, [4, гл. VII]).

Пусть α — одна из вершин ромбоида $\mathscr{E}(\mathfrak{M})$ и Π_α — замкнутое полупространство, о котором шла речь в доказательстве леммы 3. Пересечение $\partial\Pi_\alpha \cap \mathbb{Z}^n$ является подгруппой $\mathbb{Z}^n$, ранг которой равен $\dim \mathscr{E}(\mathfrak{M}) - 1$. Дополним эту подгруппу (если необходимо) до подгруппы ранга $(n-1)$ так, чтобы вектор α в ней не лежал. В силу леммы 18 найдется матрица B, последние $(n-1)$ строк которой являются векторами из этой подгруппы, а первая строка — вектор из $\mathbb{Z}^n$ — имеет положительную проекцию на α в метрике $\langle\,,\rangle$. После канонической замены координат $y \mapsto (B^T)^{-1}y$, $x \mapsto Bx$ имеем:

i) первая координата каждого вектора $\tau \in \partial\Pi_\alpha \cap \mathbb{Z}^n$ равна нулю,

ii) первая координата вектора α положительна,

iii) вектор α — максимальный элемент $\mathfrak{M}$ (относительно стандартного отношения порядка $\prec$ в $\mathbb{Z}^n$),

iv) если вектор τ не лежит в Π_α, то $0 \prec \tau$.

Лемма 19. *Если система* (0.1) *вполне интегрируема, то все точки $\mathfrak{M}$, не лежащие в Π_α, принадлежат отрезку Γ, соединяющему точки 0 и α.*

Предположим противное. В силу свойства iii) вектор α является вершиной множества $\mathfrak{M}$. Пусть β — вершина $\mathfrak{M}$, примыкающая к α. В силу сделанного предположения и определения примыкающей вершины, вектор β не лежит ни в полупространстве Π_α, ни на отрезке Γ. Так как векторы α и β лежат в одном полупространстве $\mathbb{R}^n \setminus \Pi_\alpha$, то скалярное произведение $\langle\alpha,\, \beta\rangle$ положительно. Следовательно, выполнено условие (0.11) и согласно теореме 2 система уравнений Гамильтона (0.1) неинтегрируема. Полученное противоречие доказывает лемму.

Применив лемму 19 ко всем вершинам ромбоида $\mathscr{E}(\mathfrak{M})$, убеждаемся в справедливости теоремы 1.

§ 4. Некоторые обобщения

1. Условие невырожденности квадратичной формы $H_0 = (Ay, y)/2$ в теореме 2 можно заменить более слабыми условиями:

i) $Am \neq 0$ для всех целочисленных векторов $m \neq 0$,

ii) векторы $A\alpha$ и $A\beta$ линейно независимы.

Отметим, что если $\det A = 0$, то условия i)–ii) могут выполняться одновременно лишь при $n \geqslant 3$.

Приведем простой пример. Если

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \alpha = (1,\, 0,\, 0)^T, \quad \beta = (1,\, -1,\, 0)^T,$$

то матрица A вырождена, однако условия i) и ii) выполнены.

2. Отметим, что теорема 2 несправедлива в том случае, когда коэффициенты Фурье возмущающей функции H_1 зависят от y. Приведем поучительный контрпример:

$$H = a^2y_1^2 + aby_1y_2 + b^2y_2^2 + \frac{\varepsilon}{ay_1 - by_2}(\sin x_1 - \sin x_2).$$

Гамильтонова система с таким гамильтонианом интегрируется методом разделения переменных: аналитические функции

$$F_1 = a^3y_1^3 - ay_1H + \varepsilon \sin x_1, \quad F_2 = b^3y_2^3 - by_2H + \varepsilon \sin x_2$$

составляют полный набор независимых интегралов.

В этой задаче $\alpha = (1,\, 0)^T$, $\beta = (0,\, 1)^T$ и поэтому неравенство (0.11) принимает вид: $b/a \neq -m/2$ при всех целых $m \geqslant 0$. «Предельная» прямая $\langle \alpha,\, y\rangle = 2ay_1 + by_2 = 0$ не совпадает с прямой $ay_1 - by_2 = 0$, в точках которой не определен гамильтониан (ср. с теоремой 3). Однако, интегрируемость имеет место для всех (в том числе и иррациональных) значений отношения b/a.

Пусть α', α'', … — элементы множества $\mathfrak{M}$, расположенные между вершинами α и β (относительно лексикографического порядка $\prec$ в $\mathbb{Z}^n$). Ясно, что каждый из векторов α', α'', … линейно зависим с α. Модифицируя рассуждения § 1, можно доказать справедливость теорем 2–3 и в том случае, когда коэффициенты h_α, $h_{\alpha'}$, $h_{\alpha''}$, …, h_β постоянны (при этом остальные коэффициенты Фурье могут быть непостоянными аналитическими функциями от переменных $y_1, \ldots, y_n$).

3. Если возмущающая функция H_1, не является тригонометрическим полиномом, то задача о наличии дополнительных интегралов гамильтоновой системы существенно упрощается: неинтегрируемость возмущенной системы, как правило, удастся установить после конечного числа шагов теории возмущенийх.

Рассмотрим для определенности случай двух степеней свободы. Итак, пусть $H = H_0 + \varepsilon H_1$, где

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} y_1 y_j, \quad H_1 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} h_m e^{i(m,y)}, \quad h_m = \mathrm{const}.$$

Если вековое множество $\mathbf{B}_1$ состоит из бесконечного числа прямых на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{y_1, y_2\}$, то неинтегрируемость возмущенной гамильтоновой системы вытекает из обобщенной теоремы Пуанкаре [6]. Поэтому предположим, что количество «резонансных» прямых, составляющих множество $\mathbf{B}_1$, конечно. На множестве $(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{B}_1) \times \mathbb{T}^2$ можно выполнить первый шаг теории возмущений. Интегрируемость возмущенной системы будет теперь зависеть от структуры векового множества $\mathbf{B}_2$. Опишем его. Для этого рассмотрим тригонометрический ряд

$$\sum h'_k(y) e^{i(k,x)}, \quad h'_k = \sum_{\tau+\sigma=k} \frac{\langle \tau, \sigma \rangle h_\tau h_\sigma}{\langle y, \tau \rangle \langle y, \sigma \rangle}. \tag{4.1}$$

Коэффициенты этого ряда определены в $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{B}_1$. Используя формулы (1.2), легко показать, что множество $\mathbf{B}_2$ состоит из точек $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{B}_1$, удовлетворяющих условиям

i) $\langle y, k \rangle = 0$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}^2$, $k \neq 0$,

ii) $h'_k(y) \neq 0$.

В типичной ситуации множество $\mathbf{B}_2$ содержит бесконечное множество различных прямых, проходящих через начало координат. Это в свою очередь влечет отсутствие дополнительного формального интеграла с аналитическими в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$ коэффициентами (см. § 2).

4. В качестве применения замечаний, содержащихся в предыдущем пункте, докажем

Предложение 2. *Пусть $n = 2$ и вековое множество $\mathbf{B}_1$, состоит всего из двух прямых. Тогда уравнения Гамильтона имеют дополнительный фор-*

мальный интеграл тогда и только тогда, когда эти прямые ортогональны (в метрике $\langle\,,\rangle$).

Доказательство достаточности. Так как $\mathbf{B}_1$ состоит из двух прямых, то в формуле (4.1) $\tau = \lambda\tau_0$ и $\sigma = \mu\sigma_0$, где τ_0, $\sigma_0 \in \mathbb{Z}^2$, λ, μ — целые числа. Ортогональность прямых, составляющих множество $\mathbf{B}_1$, означает ортогональность векторов τ_0 и σ_0. Покажем, что в этом случае гамильтонова система интегрируется методом разделения переменных. Действительно, пусть $\tau_0 = (\tau_1, \tau_2)$, $\sigma_0 = (\sigma_1, \sigma_2)$. Положим

$$X_1 = (\tau_1 x_1 + \tau_2 x_2), \quad X_2 = (\sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2).$$

Это однородное преобразование угловых координат однозначно продолжается до однородного канонического преобразования y, $x \mapsto Y$, X. В новых переменных

$$H = \frac{1}{2}(A_{11}Y_1^2 + 2A_{12}Y_1Y_2 + A_{22}Y_2^2) + \varepsilon(f(X_1) + g(X_2)),$$

где $A_{ij} = \mathrm{const}$, f, g — аналитические 2π-периоднческие функции. Так как $\langle\tau_0, \sigma_0\rangle = 0$, то $A_{12} = 0$. Следовательно, гамильтонова система имеет два линейных по ε интеграла

$$\frac{1}{2}\,A_{11}Y_1^2 + \varepsilon f(X_1), \quad \frac{1}{2}\,A_{22}Y_2^2 + \varepsilon g(X_2).$$

Доказательство необходимости. Рассмотрим сначала случай, когда возмущающая функция H_1 — тригонометрический полином. В качестве вершин множества $\mathfrak{M}$ можно взять векторы $\alpha = \pm\lambda_*\tau_0$ и $\beta = \pm\mu_*\sigma_0$, где λ_* и μ_* — некоторые положительные целые числа. Пусть $\langle\alpha, \alpha\rangle \geqslant 0$ (случай, когда $\langle\alpha, \alpha\rangle \leqslant 0$, рассматривается аналогично). Если $\langle\alpha, \beta\rangle \neq 0$, то без ущерба общности можно считать, что $\langle\alpha, \beta\rangle > 0$ (в противном случае заменим β на $-\beta$). Но тогда $m\langle\alpha, \alpha\rangle + 2\langle\alpha, \beta\rangle > 0$ при всех целых $m \geqslant 0$. Следовательно, если гамильтонова система имеет дополнительный интеграл, то по теореме 2 $\langle\alpha, \beta\rangle = 0$. Последнее условие, очевидно, эквивалентно условию $\langle\tau_0, \sigma_0\rangle = 0$.

Рассмотрим теперь оставшийся случай, когда функция H_1 не является многочленом. Воспользуемся замечаниями п. 3. Так как τ_0 и σ_0 линейно независимы, то при фиксированном $k = \lambda\tau_0 + \mu\sigma_0$ числа λ и μ определяются однозначно. По условию, функция H_1, не полином, следовательно, среди чисел λ и μ бесконечно много различных. Если $\langle\tau_0, \sigma_0\rangle \neq 0$, то из формулы (4.2) вытекает, что $\mathbf{B}_2$ состоит из бесконечного числа различных прямых и поэтому является множеством единственности для класса функций, аналитических в $\mathbb{R}^2 = \{y_1,\, y_2\}$. Для завершения доказательства отсутствия формального интеграла осталось воспользоваться рассуждениями § 2. Предложение доказано.

5. Предложение из п. 4 допускает (с некоторыми уточнениями) обобщение на системы с $n > 2$ степенями свободы. Предположим, что все точки множества $\mathfrak{M}$ расположены на $l \leqslant n$ прямых, проходящих через начало координат, причем их направляющие векторы линейно независимы. Тогда можно утверждать, что гамильтонова система с функцией Гамильтона $H_0 + \varepsilon H_1$, имеет n однозначных аналитических интегралов, независимых при всех достаточно малых значениях ε, тогда и только тогда, когда эти l прямых попарно ортогональны (в метрике $\langle\,,\rangle$). При $l = 1$ система, очевидно, интегрируема.

В качестве примера рассмотрим гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} y_s^2 + \varepsilon[f(x_1 - x_2) + \ldots + f(x_{n-1} - x_n)], \tag{4.2}$$

где f — вещественная аналитическая 2π-периодическая функция. Эта система описывает динамику «непериодической» цепочки n частиц на прямой. Оказывается, если $n > 2$ и $f \neq \mathrm{const}$, то система с гамильтонианом (4.2) не имеет полного набора независимых интегралов. Действительно, в этом случае $l = n - 1$ и соответствующие прямые определяются векторами $(1,\, -1,\, 0,\, \ldots,\, 0)^T,\, \ldots,\, (0,\, \ldots,\, 1,\, -1)^T$, которые не все попарно ортогональны. Если мы «замкнем» цепочку, добавив в гамильтониан (4.2) слагаемое $\varepsilon f(x_n - x_1)$, то сформулированное выше утверждение будет уже неприменимо: $l = n$ прямых расположены в гиперплоскости, ортогональной вектору $(1,\, 1,\, \ldots,\, 1)^T$. Интегрируемость «периодической» цепочки существенно зависит от конкретного вида потенциала взаимодействия f.

6. Укажем еще один путь обобщения теоремы 2. Речь пойдет о существовании аналитических комплекснозначных интегралов как функций вещественных канонических переменных $(y,\, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$. В выражениях (0.2) и (0.3) для функции Гамильтона коэффициенты a_{ij} и h_m считаются комплексными числами (при этом совсем не обязательно требовать комплексной сопряженности h_m и h_{-m}). Нетрудно понять, что теорема 2 справедлива и в этой, более общей, ситуации.

Поясним идею на примере обобщенных непериодических цепочек Тоды (см. [2]). Интересующий нас класс гамильтоновых систем — это системы с взаимодействием экспоненциального вида с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} y_s^2 + \varepsilon \sum_{k=1}^{l} c_k e^{(a_k, x)}, \tag{4.3}$$

где $l \leqslant n$, $c_k = \text{const} \neq 0$, $a_1, \ldots, a_n$ — набор линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^n$. Системы с гамильтонианами (4.3) формально не подходят под наше рассмотрение ввиду непериодичности экспоненты. Если, однако, выполнить линейное каноническое преобразование $x \mapsto ix$, $y \mapsto y/i$, то получится гамильтонова система с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2}\sum y_s^2 + \varepsilon \sum c_k e^{(ia_k, x)}. \tag{4.4}$$

Совершая еще одно линейное преобразование $x \mapsto X$ по формулам

$$X_s = (a_s, x), \quad s \leqslant l, \quad X_s = x_s, \quad s > l,$$

и дополняя его до канонического преобразования во всем фазовом пространстве, мы приходим к функции Гамильтона вида (0.2), 2π-периодической по отношению к $X_1, \ldots, X_n$. К такой системе уже можно применять теорему 2.

Известно [2, 9], что если векторы $a_1, \ldots, a_l$ образуют систему простых корней простой алгебры Ли, то уравнения Гамильтона с гамильтонианом (4.3) вполне интегрируемы. Можно показать, что независимые коммутирующие интегралы, представленные в новых переменных, обладают свойством периодичности по переменным X. Об интегрируемости обобщенной цепочки Тоды в общем случае мало что известно. Мы сейчас найдем необходимые условия существования полного набора интегралов, периодических по X. Как будет видно, эти условия фактически приведут нас к системам простых корней. Так как $l \leqslant n$, то (в переменных y, x) в качестве вершин α и β множества $\mathfrak{M} = \{a_1, \ldots, a_l\}$ можно взять любую пару векторов a_j и a_k $(j \neq k)$. Согласно теореме 2 необходимым условием интегрируемости является следующее (см. (0.11)): величины $2(a_j, a_k)/(a_j, a_j) = 2\langle\alpha, \beta\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle$ являются целыми неположительными числами. Таким образом, матрица

$$\left\| \frac{2(a_j, a_k)}{(a_j, a_j)} \right\| \tag{4.5}$$

является матрицей Картана некоторой корневой системы. Остается неясным, однако, является ли полученное условие достаточным для интегрируемости обобщенной цепочки Тоды. Работы [2, 9] не дают полного ответа на этот вопрос.

О. И. Богоявленским ранее было отмечено необходимое условие интегрируемости системы с гамильтонианом (4.3) в некотором неформальном смысле [2]. Оно заключается в конечности группы Кокстера, порожденной отражениями относительно гиперплоскостей, ортогональных векторам a_i.

В работе [18] найден критерий алгебраической интегрируемости системы с функцией Гамильтона (4.3), в которой $l = n + 1$. В предположении, что каждые n векторов из совокупности $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ линейно независимы, условием алгебраической интегрируемости является картановость матрицы (4.5).

Наблюдения этого пункта развиты в работах [7, 8].

7. Как было отмечено во введении, препятствием к полной интегрируемости гамильтоновой системы (0.1) является разрушение инвариантных торов $\mathbb{T}^n = \{x \bmod 2\pi,\ y = y^0\}$ невозмущенной системы, расположенных на гиперплоскостях $\langle m\alpha + \beta,\ y^0\rangle = 0$. Рассмотрим более подробно вопрос о бифуркациях этих резонансных торов для систем с двумя степенями свободы.

Предложение 3. *Пусть α, β — векторы из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющие условиям теоремы 2, а $y^0 \neq 0$ — точка из $\mathbb{R}^2$, расположенная на одной из прямых $\langle m\alpha + \beta,\ y^0\rangle = 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots,$ причем компоненты целочисленного вектора $m\alpha + \beta$ взаимно просты. Тогда гамильтонова система с функцией Гамильтона $H_0 + \varepsilon H_1$, при малых значениях $\varepsilon \geqslant 0$ имеет два аналитических по ε периодических решения таких, что*

(1) *их траектории расположены на фиксированном положительном уровне интеграла энергии,*

(2) *при $\varepsilon = 0$ они совпадают с парой периодических решений, лежащих на инвариантном торе $\mathbb{T}_0^2 = \{x \bmod 2\pi,\ y = y^0\}$,*

(3) *их характеристические показатели $\pm\mu$ разлагаются в сходящийся ряд по степеням $\sqrt{\varepsilon}$, причем*

$$\mu = \mu_0\big(\sqrt{\varepsilon}\,\big)^{m+1} + o\big(\big(\sqrt{\varepsilon}\,\big)^{m+1}\big), \quad \mu_0 \neq 0,$$

(4) *одно из этих решений эллиптическое ($\mu_0^2 < 0$), а другое — гиперболическое ($\mu_0^2 > 0$).*

При малых фиксированных значениях $\varepsilon > 0$ предложение 3 гарантирует в общем случае существование большого (но конечного) числа различных невырожденных периодических решений (для которых $\mu \neq 0$). Когда $\varepsilon \to 0$, их количество неограниченно возрастает. Применяя замену переменных, обратную к (0.5), это утверждение можно переформулировать для системы с гамильтонианом H_0+H_1: для каждого большого значения $h > 0$ на уровне интеграла энергии $H_0 + H_1 = h$ имеется много невырожденных короткопериодических решений. При $h \to \infty$ их число неограниченно возрастает. Известно, что на траекториях невырожденных периодических решений первые интегралы зависимы (см. [5,12]). Из этого факта и предложения 3 можно вывести теорему 2 (ср. с [5]). Доказательство предложения 3 основывается на применении обобщенного варианта теоремы Пуанкаре о рождении периодических решений, доказанного в работе [8].

В многомерном случае следует рассматривать задачу о бифуркациях семейств $(n-1)$-мерных торов с несоизмеримыми частотами, на которые расслаиваются типичные резонансные торы невозмущенной системы. Многомерный аналог предложения 3 найден Д. В. Трещёвым [14]. Правда, методами теории возмущений удается найти *гиперболические* (следовательно, неустойчивые) $(n-1)$-мерные торы с сильно несоизмеримыми наборами частот. Однако, наличие такого большого числа невырожденных инвариантных торов препятствует полной интегрируемости возмущенной гамильтоновой системы.

§ 5. Условия существования дополнительного интеграла, полиномиального по импульсам

Оказывается, результаты § 1 о строении векового множества возмущенной гамильтоновой системы с функцией Гамильтона (0.2) позволяют указать условия существования *одного* полиномиального по импульсам первого интеграла, независимого от интеграла энергии.

Сначала отметим простое утверждение, аналогичное предложению 1.

Предложение 4. *Пусть система с гамильтонианом $H_0 + H_1$ имеет дополнительный аналитический и полиномиальный по импульсам интеграл. независимый от функции Гамильтона. Тогда система с гамильтонианом $H_0 + \varepsilon H_1$ допускает интеграл в виде ряда*

$$F = F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots \tag{5.1}$$

с аналитическими коэффициентами, причем функции H_0 и F_0 независимы (точнее, независимы почти всюду).

Наличие интеграла возмущенной системы в виде ряда (5.1) доказывается точно также, как и в предложении 1. После этого существование интеграла вида (5.1) с независимыми «старшими» членами H_0 и F_0 легко доказывается методом Пуанкаре ([11], гл V; см. также [5]).

Заметим еще, что поскольку невозмущенная система с гамильтонианом (0.2) предполагается невырожденной, то F_0 зависит лишь от переменных действие: $F_0 = F_0(y)$ (см. [11], п. 81).

Лемма 20. *Пусть* $\Pi_\alpha = \{\langle \alpha, y\rangle = 0\}$ — *гиперплоскость в* $\mathbb{R}^n = \{y\}$ *из множества* $\mathbf{B}$. *Тогда в точках* Π_α

$$\left(\frac{\partial H_0}{\partial y}, \alpha\right) = \left(\frac{\partial F_0}{\partial y}, \alpha\right) = 0. \tag{5.2}$$

Доказательство. Пусть Π_α лежит в $\mathbf{B}_m$ при некотором $m \geqslant 1$. Согласно § 1, после подходящего канонического преобразования функция Гамильтона станет равной

$$K_0(u) + \varepsilon K_1(u) + \ldots + \varepsilon^{m-1} K_{m-1}(u) + \varepsilon^m K_m(u, v) + \ldots\,, \tag{5.3}$$

причем $K_0(u) \equiv H_0(u)$, а интеграл (5.1) примет вид степенного ряда

$$\Phi_0(u) + \varepsilon \Phi_1(u, v) + \ldots\,, \quad \Phi_0(u) \equiv F_0(u). \tag{5.4}$$

Здесь u, $v \bmod 2\pi$ — новые канонические переменные.

Функции (5.3) и (5.4) находятся в инволюции. Их скобка Пуассона — ряд по степеням ε. Приравнивая нулю m первых членов этого ряда, приходим к цепочке уравнений

$$\begin{gathered}\{K_0, \Phi_1\} = 0, \quad \{K_0, \Phi_2\} + \{K_1, \Phi_1\} = 0, \ldots\,, \\ \{K_0, \Phi_m\} + \{K_1, \Phi_{m-1}\} + \ldots + \{K_m, \Phi_0\} = 0.\end{gathered} \tag{5.5}$$

Первое уравнение показывает, что Φ_1 — интеграл невозмущенной интегрируемой гамильтоновой системы с невырожденной функцией Гамильтона K_0. Следовательно (ср. с [11], п. 81), Φ_1 не зависит от новых угловых координат v. Тогда $\{K_1, \Phi_1\} \equiv 0$ и второе уравнение (5.5) имеет вид $\{K_0, \Phi_2\} = 0$. Следовательно, Φ_2 будет зависеть лишь от переменных u.

Аналогично доказывается, что все функции Φ_k $(k < m)$ не зависят от угловых переменных v.

В итоге последнее уравнение (5.5) упрощается:

$$\{K_0,\,\Phi_m\} + \{K_m,\,\Phi_0\} = 0. \tag{5.6}$$

Пусть

$$K_m = \sum k_\lambda(y)e^{i(\lambda,k)}, \quad \Phi_m = \sum \varphi_\lambda(y)e^{i(\lambda,x)}$$

— разложения Фурье функций K_m и Φ_m; $\lambda \in \mathbb{Z}^n$. Подставляя эти ряды в (5.6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем серию соотношений

$$\left(\frac{\partial K_0}{\partial u},\,\lambda\right)\varphi_\lambda = \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial u},\,\lambda\right)k_\lambda. \tag{5.7}$$

Пусть теперь $u \in \Pi_\alpha$, где Π_α — одна из гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n = \{u\}$, лежащая в множестве $\mathbf{B}_m$. Тогда (согласно § 1)

$$\left(\frac{\partial K_0}{\partial u},\,\alpha\right) = \langle \alpha,\,u\rangle = 0, \quad k_\alpha(u) \not\equiv 0.$$

Из (5.7) вытекает, что

$$\left(\frac{\partial K_0}{\partial u},\,\alpha\right) = \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial u},\,\alpha\right) = 0$$

в точках Π_α. Что и требовалось.

Пусть имеется $n-1$ гиперплоскостей Π_λ, Π_μ, ... с линейно независимыми векторами λ, μ, ... из $\mathbb{Z}^n$. Их пересечения

$$l_{\lambda,\mu,\ldots} = \Pi_\lambda \cap \Pi_\mu \cap \ldots \tag{5.8}$$

будут прямыми в $\mathbb{R}^n = \{y\}$.

Предложение 5. *Предположим, что объединение пересечений* (5.8) *является множеством единственности для класса функций, аналитических в $\mathbb{R}^n = \{y\}$. Тогда уравнения Гамильтона с гамильтонианом $H = H_0 + H_1$ не допускают полиномиальных интегралов, независимых от интеграла энергии.*

Действительно в точках каждой прямой $l_{\lambda,\mu,\ldots}$ дифференциалы функций H_0 и F_0 линейно зависимы, поскольку в этих точках (согласно (5.2))

$$\left(\frac{\partial H_0}{\partial u},\, \lambda\right) = \left(\frac{\partial H_0}{\partial y},\, \mu\right) = \ldots = 0,$$
$$\left(\frac{\partial F_0}{\partial u},\, \lambda\right) = \left(\frac{\partial F_0}{\partial y},\, \mu\right) = \ldots = 0$$

и $n-1$ векторов λ, μ, $\ldots$ линейно независимы. Остается воспользоваться предположением об аналитичности первых интегралов.

Это утверждение позволяет сразу же доказать теорему 3 из главы III. Действительно, в предположениях теоремы 3 (с учетом утверждений § 3) в качестве плоскостей Π_λ можно рассматривать гиперплоскости $\langle\lambda,\, y\rangle = 0$, $\lambda = k\alpha + \beta$ $(k \geqslant 0)$, где α — вершина многогранника $\mathscr{E}(\mathfrak{M})$, а β — точка из $\mathfrak{M}$, лежащая на примыкающем к вершине α положительном ребре $\mathscr{E}(\mathfrak{M})$. При $k \to \infty$ эти гиперплоскости стремятся к гиперплоскости $\langle\alpha,\, y\rangle = 0$. Согласно предположению, добавление β смещает прямую пересечения (5.8). Структура объединения прямых (5.8) ясна из рис. 1 (где они изображены точками). Видно, что это объединение является множеством единственности для класса аналитических функций (хотя оно и не всюду плотно).

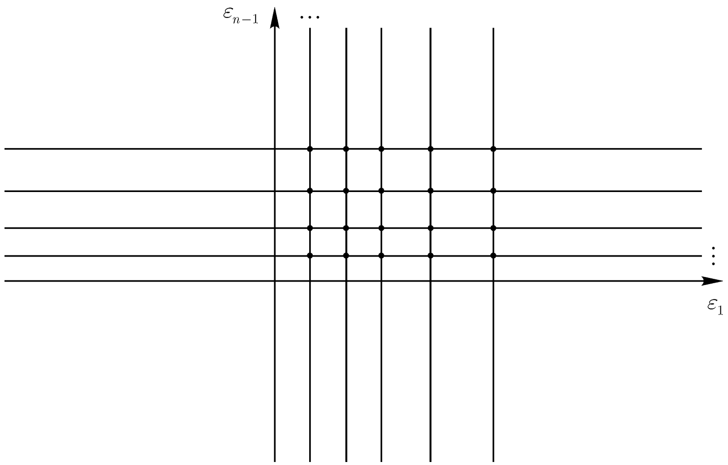

Рис. 1. Строение пересечений гиперплоскостей из векового множества

Это утверждение можно доказать вполне строго. Перепишем уравнение $\langle\lambda,\, y\rangle = 0$ в виде

$$\langle\alpha + \varepsilon\beta,\, y\rangle = 0, \tag{5.9}$$

где $\varepsilon = 1/m$ $(m \geqslant 1)$ — дискретный малый параметр: $\varepsilon \to 0$ при $m \to \infty$. Согласно предположению, число таких уравнений с линейно независимыми векторами α равно $n-1$. Координаты в $\mathbb{R}^n = \{y\}$ можно выбрать так, чтобы векторы α имели вид

$$(1,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, 0),\ (0,\, 1,\, \ldots,\, 0,\, 0),\ \ldots,\ (0,\, 0,\, \ldots,\, 1,\, 0). \tag{5.10}$$

Пусть в этих координатах компоненты векторов β равны

$$(\beta_{1,1},\, \ldots,\, \beta_{1,n}),\ \ldots,\ (\beta_{n-1,1},\, \ldots,\, \beta_{n-1,n}). \tag{5.11}$$

Тогда $n-1$ уравнений (5.9) примут следующий вид:

$$\begin{gathered} y_1 + \varepsilon_1(\beta_{1,1}y_1 + \ldots + \beta_{1,n}y_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} + \varepsilon_{n-1}(\beta_{n-1,1}y_1 + \ldots + \beta_{n-1,n}y_n) = 0. \end{gathered} \tag{5.12}$$

Решения этой системы — прямые в $\mathbb{R}^n = \{y\}$. Нас интересуют пересечения этих прямых с гиперплоскостью $y_n = a = \mathrm{const} \neq 0$. Точки пересечения находятся из (5.12) в виде рядов по степеням малых параметров $\varepsilon_1,\, \ldots,\, \varepsilon_{n-1}$, которые принимают *независимые* значения:

$$y_1 = -\varepsilon_1 a\beta_{1,n} + \ldots,\ \ldots,\ y_{n-1} = -\varepsilon_{n-1}a\beta_{n-1,n} + \ldots .$$

Многоточия обозначают совокупность слагаемых степени $\geqslant 2$ по $\varepsilon_1,\, \ldots,\, \varepsilon_{n-1}$.

Ясно, что при $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_{n-1} = 0$

$$\frac{\partial(y_1,\, \ldots,\, y_{n-1})}{\partial(\varepsilon_1,\, \ldots,\, \varepsilon_{n-1})} = -a^n\beta_{1,n}\ldots\beta_{n-1,n}.$$

Этот якобиан отличен от нуля, если компоненты $\beta_{1,n},\, \ldots,\, \beta_{n-1,n}$ не равны нулю. Другими словами, каждый из векторов (5.11) *не лежит* в гиперплоскости, порождаемой векторами (5.10). Но это условие является как раз одним из предположений теоремы 3.

Таким образом, по теореме о неявных функциях, отображение

$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \mapsto (y_1, \ldots, y_{n-1}) \tag{5.13}$$

— аналитический морфизм в окрестности нуля (если, конечно, $a \neq 0$).

Пусть теперь имеется аналитическая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ограничение которой на каждую гиперплоскость $y_n = a \neq 0$ обращается в нуль во всех точках, которые являются решениями системы (5.12) с дискретными значениями малых параметров $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$. Заменяя переменные $y_1, \ldots, y_{n-1}$ на $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ с помощью обратного отображения (5.13) (в окрестности нуля), получаем аналитическую функцию $\widetilde{f}$ от $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$. Структура ее нулей изображена как раз на рис. 1.

Теперь легко показать, что $\widetilde{f} \equiv 0$ (а, следовательно, и $f \equiv 0$). Пусть, например, $n = 3$. Рассмотрим любую горизонтальную прямую, содержащую бесконечное число нулей функции $\widetilde{f}$. Поскольку ограничение $\widetilde{f}$ на эту прямую будет аналитической функцией и ее нули имеют конечную предельную точку, то $\widetilde{f} = 0$ во всех точках этой прямой. Заметим, что таких прямых бесконечное число и они накапливаются у оси $\varepsilon_2 = 0$ (рис. 1). Рассмотрим теперь произвольную вертикальную прямую. Она бесконечно много раз пересекает горизонтальные прямые, на которых $\widetilde{f}$ обращается в нуль. Следовательно (по той же причине), $\widetilde{f} = 0$ на каждой вертикальной прямой. Таким образом, действительно, $\widetilde{f} \equiv 0$.

Случай произвольного числа степеней свободы рассматривается аналогично с использованием индукции по n.

Применим теорему 3 к задаче о движении n идентичных частиц на окружности $\{x \bmod 2\pi\}$, попарно взаимодействующих друг с другом. Их динамика описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum y_i^2 + \sum_{i<j} V(x_i - x_j), \tag{5.14}$$

Будем считать потенциал V тригонометрическим многочленом:

$$V(z) = \sum_{|m| \leqslant N} v_m e^{imz}; \quad v_N \neq 0, \quad N \geqslant 1.$$

Можно считать, что частицы движутся по прямой $\mathbb{R} = \{x\}$ с периодическим парным потенциалом.

Ясно, что кроме интеграла энергии система с гамильтонианом (5.14) всегда допускает интеграл момента $F = y_1 + \ldots + y_n$. Так что речь пойдет об условиях существования дополнительного полиномиального интеграла, независимого от функций H и F. С использованием интеграла момента F можно было бы понизить число степеней свободы на единицу (перейдя, например, в барицентрическую систему отсчета). Однако мы не будем этого делать (отчасти из-за желания сохранить симметрию гамильтониана по каноническим переменным x, y).

С помощью КАМ-теории легко показать, что рассматриваемая динамическая система заведомо не является эргодической на совместных многообразиях уровня интегралов $\{H = \mathrm{const},\ F = \mathrm{const}\}$ (при больших значениях H). Тем не менее, она не допускает новых однозначных интегралов, полиномиальных по импульсам. Доказательство дано ниже.

Спектр $\mathfrak{M}$ потенциала в формуле (5.14) состоит из точек вида $(0, \ldots, k, \ldots, -k, \ldots, 0)$, где $|k| \leqslant N$. Все они лежат в гиперплоскости $y_1 + \ldots + y_n = 0$, проходящей через начало координат. Это свойство — отражение факта существования интеграла момента. Структура выпуклой оболочки $\mathscr{E}(\mathfrak{M})$ определяется точками спектра с числами $|k| = N$. Поэтому, не уменьшая общности (и упрощая запись формул), можно положить $N = 1$.

Покажем теперь, что $n - 1$ точек спектра

$$(1, -1, 0, \ldots, 0), (1, 0, -1, \ldots, 0), \ldots, (1, 0, 0, \ldots, -1) \tag{5.15}$$

являются вершинами $\mathscr{E}(\mathfrak{M})$. Для этого достаточно показать, что точки (5.15) лежат на $(n-2)$-мерной грани $\mathscr{E}(\mathfrak{M})$; более точно, их выпуклая оболочка является как раз $(n-2)$-мерной гранью.

Рассмотрим две линейные функции

$$f = (n-1)y_1 - y_2 - \ldots - y_n, \quad g = y_1 + \ldots + y_n.$$

Все точки $\mathfrak{M}$ являются нулями функции g. С другой стороны, $f = n$ в точках (5.15), а во *всех* других точках спектра выполнено строгое неравенство $f < n$. Следовательно, точки (5.15) лежат на одной грани $(n-1)$-мерного выпуклого многогранника $\mathscr{E}(\mathfrak{M})$. Более точно, выпуклая оболочка этого набора точек будет $(n-2)$-мерным симплексом, вершины которого — именно эти $n - 1$ точек. Следовательно, точки (5.15) — вершины $\mathscr{E}(\mathfrak{M})$.

Теперь в качестве линейно независимых векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ (фигурирующих в условиях теоремы 3) примем $n - 1$ векторов из набора (5.15):

$$(1, 0, -1, \ldots, 0), \ldots, (1, 0, 0, \ldots, -1). \tag{5.16}$$

Они, действительно, линейно независимы и точка спектра $(1,\ -1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ не лежит в $(n-2)$-мерной плоскости Λ^{n-2}, проходящей через начало координат и $n-2$ точки (5.16). Поскольку эта точка (являющаяся вершиной $\mathscr{E}(\mathfrak{M})$) соединяется с вершинами (5.16) положительными ребрами, не лежащими в плоскости Λ^{n-2}, то выполнены все условия теоремы 3.

Литература

[1] *Биркгоф Дж.* Динамические системы. М., Л.: Гостехиздат, 1941.

[2] *Богоявленский О. И.* Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980.

[3] *Борн М.* Лекции по атомной механике. Харьков — Киев: Науч.-техн. изд. Украины, 1934.

[4] *Бурбаки Н.* Алгебра. Модули, кольца, формы. М.: Наука, 1966.

[5] *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.

[6] *Козлов В. В.* О несуществовании аналитических интегралов канонических систем, близких к интегрируемым. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. и мех. 1974. № 2. С. 77–82.

[7] *Козлов В. В., Трещёв Д. В.* Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием // Изв. АН СССР, Сер. матем. 1989. Т. 51. № 3. С. 537–556.

[8] *Козлов В. В., Трещёв Д. В.* Числа Ковалевской обобщенных цепочек Тоды // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 5. С. 17–28.

[9] *Переломов А. М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.

[10] *Пидкуйко С. И., Степин А. М.* Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем // ДАН СССР. 1978. Т. 239. № 1. С. 50–51.

[11] *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики // Избранные труды. Т. I. М.: Наука, 1971.

[12] *Пуанкаре А.* О задаче трех тел и об уравнениях динамики // Избранные труды. Т II. М.: Наука, 1972.

[13] *Степин А. М.* Интегрируемые гамильтоновы системы // Качественные методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений и нелинейных колебаний. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. С. 116–143.

[14] *Трещёв Д. В.* Механизм разрушения резонансных торов гамильтоновых систем // Матем. сборник. 1989. Т. 180. № 10. С. 1325–1346.

[15] *Трещёв Д. В.* О существовании бесконечного количества невырожденных периодических решений гамильтоновой системы, близкой к интегрируемой // Геометрия, дифференциальные уравнения и механика. М.: Изд-во МГУ. 1986. С. 121–127.

[16] *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М., Л.: ОНТИ, 1937.

[17] *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Kvpc современного анализа. Т. 1. М.: Физматгиз, 1963.

[18] *Adler M., van Moerbeke P.* Kowalewski's Asymptotic Method, Kac-Moody Lie Algebras and Regularization // Commun. Math. Phys. 1982. V. 83. P. 83–106.

[19] *Calogero F.* Exactly solvable one-dimensional many body problems // Letters al Nuovo Cimento. 1975. V. 13. № 11. P. 411–416.

[20] *Moser J.* Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations // Adv. Math. 1975. V. 16. P. 197–220.

Добавление 7

Диффузия в системах с интегральным инвариантом на торе[1]

1. Хорошо известно, что дифференциальные уравнения на двумерном торе с интегральным инвариантом и без положений равновесия приводятся к следующему виду

$$\dot{x}_1 = \omega_1/f, \qquad \dot{x}_2 = \omega_2/f, \tag{1.1}$$

где $\omega_1,\, \omega_2 = \mathrm{const}$ $(\omega_1^2 + \omega_2^2 \neq 0)$, а f — гладкая положительная функция на $\mathbb{T}^2 = \{x_1,\, x_2 \bmod 2\pi\}$ — плотность интегрального инварианта [4]. Уравнения (1.1) на $\mathbb{T}^2$ рассматривал еще Пуанкаре [6].

Как доказал А. Н. Колмогоров [4], для почти всех чисел вращения $\gamma = \omega_1/\omega_2$ («плохо» приближающихся рациональными числами) с помощью обратимой замены переменных уравнения (1.1) приводятся к условно-периодическому виду:

$$\dot{x}_1 = \omega_1/\Lambda, \qquad \dot{x}_2 = \omega_2/\Lambda, \tag{1.2}$$

где

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x_1,\, x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

В таком виде этот результат сформулирован в [3].

Наоборот, если иррациональное γ аномально быстро приближается рациональными числами, то такое приведение невозможно [4] (см. также [1,7]). Достаточное условие неприводимости состоит в том, что интеграл от условно-периодической функции

$$\int\limits_0^t [f(\gamma s,\, s) - \Lambda]\, ds \tag{1.3}$$

неограничен.

[1] Опубликовано в Докладах Академии наук. 2001. Т. 381. № 5. С. 596–598.

Пусть γ рационально. Тогда тор $\mathbb{T}^2$ расслоен на семейство замкнутых траекторий Γ. Если они имеют разные периоды, то приведение уравнений (1.1) к (1.2) также невозможно. Это эквивалентно условию, что среднее значение плотности f по траекториям Γ не постоянно.

2. Пусть g^t — фазовый поток системы (1.1) и F, G — две суммируемые с квадратом функции на $\mathbb{T}^2$. Введем функцию времени

$$K(t) = \int\limits_{\mathbb{T}^2} F(g^{-t}(x))G(x)f(x)\, dx_1 x_2. \tag{2.1}$$

Положим для краткости

$$\langle H \rangle = \int\limits_{\mathbb{T}^2} H(x)f(x)\, dx_1 dx_2.$$

Если при $t \to \infty$ функция $K(t)$ стремится к

$$\langle F \rangle \langle G \rangle / \Lambda, \tag{2.2}$$

то (1.1) есть система с *перемешиванием*. В работе [4] был поставлен вопрос о возможности перемешивания в том случае, когда (1.1) не приводится к (1.2). На самом деле этот вопрос рассматривал еще Пуанкаре [6]. Он высказал предположение о перемешивании, если интеграл (1.3) неограничен.

Отрицательный ответ в задаче о перемешивании получен в работах [2,5]. Более сильное утверждение о *равномерной возвращаемости* получено в [3]: существует неограниченная последовательность моментов времени t_n, что

$$\|g^{t_n}(x) - x\| \to 0$$

при $n \to \infty$ равномерно по x. Отсюда, конечно, сразу же вытекает отсутствие не только *перемешивания*, но и *диффузии*.

Определение. Система (1.1) называется системой с диффузией, если функция (2.1) имеет предел при $t \to \pm\infty$.

Чтобы лучше понять смысл этого определения, рассмотрим случай, когда F — плотность вероятностной меры на $\mathbb{T}^2$ (по Гиббсу); в частности, $\langle F \rangle = 1$. Пусть G — характеристическая функция измеримой области D. Тогда $K(t)$ имеет смысл вероятности нахождения системы в области D в момент времени t. Для систем с перемешиванием при $t \to \infty$ эта вероятность стремится к доли области D: $\operatorname{mes} D / \operatorname{mes} \mathbb{T}^2$. Для систем с диффузией вероятность стремится к определенному пределу. Для некоторых областей этот предел может оказаться равным нулю. Однако, если $D = \mathbb{T}^2$, то $K(t) \equiv 1$. Наличие диффузии говорит о свойстве необратимости в поведении динамической системы.

Если γ рационально, то система (1.1) не эргодическая и поэтому о перемешивании не может быть речи. Однако, поскольку в общем случае периоды обращения по разным траекториям не совпадают, то равномерной возвращаемости здесь нет и поэтому не исключена возможность появления диффузии.

3. Итак, пусть $\gamma = p/q$, где целые p, q взаимно просты. Найдутся целые r, s такие, что $ps - qr = 1$. Рассмотрим линейный автоморфизм тора

$$z_1 = sx_1 + rx_2, \qquad z_2 = -qx_1 + px_2.$$

В новых угловых переменных z_1, $z_2 \bmod 2\pi$ дифференциальные уравнения (1.1) принимают вид

$$\dot{z}_1 = \Omega/f, \qquad \dot{z}_2 = 0. \tag{3.1}$$

Здесь $\Omega = s\omega_1 - r\omega_2$, а f — это плотность инвариантной меры, представленная в переменных z_1, z_2.

Уравнения (3.1) можно еще упростить. Для этого перейдем к новым угловым координатам v_1, v_2 по формулам

$$v_1 = \frac{1}{\lambda} \int_0^{z_1} f(s,\, z_2)\, ds, \qquad v_2 = z_2, \tag{3.2}$$

где

$$\lambda(v_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s,\, v_2)\, ds.$$

Якобиан этой замены переменных равен

$$\frac{\partial(v_1,\, v_2)}{\partial(z_1,\, z_2)} = \frac{f}{\lambda}. \tag{3.3}$$

В переменных v_1, v_2 уравнения (3.1) принимают вид

$$\dot{v}_1 = \frac{\Omega}{\lambda(v_2)}, \qquad \dot{v}_2 = 0. \tag{3.4}$$

4. Исследуем эти уравнения более подробно, переписав их в более общей форме:

$$\dot{x}_1 = \omega(y), \qquad \dot{y} = 0; \tag{4.1}$$

x, y — угловые координаты на торе, ω — гладкая 2π-периодическая функция, нигде не обращающаяся в нуль. Общее решение (4.1) имеет вид

$$x = \omega(y)t + x_0, \qquad y = y_0; \qquad x_0,\, y_0 = \mathrm{const}.$$

Пусть A и B — суммируемые с квадратом функции на $\mathbb{T}^2 = \{x,\, y \bmod 2\pi\}$. Положим

$$a(y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} A(x,\, y)\, dx, \qquad b(y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} B(x,\, y)\, dx.$$

Теорема 1 (о диффузии). *Если все критические точки функции $y \mapsto \omega(y)$ невырождены, то*

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_{\mathbb{T}^2} A(x - \omega(y)t,\, y)B(x,\, y)\, dx\, dy = 2\pi\int\limits_0^{2\pi} ab\, dy. \tag{4.2}$$

Замечание. Если функция $\omega(\cdot)$ из класса C^∞, то достаточно потребовать, чтобы ее критические точки были конечнократными. Это условие заведомо выполнено, если $\omega(\cdot)$ — непостоянная аналитическая функция.

5. Применим теорему 1 к уравнениям (3.4). В этом случае $\omega = \Omega/\lambda(y)$. Поэтому критические точки (и свойства их невырожденности) функций по ω и λ совпадают.

Покажем, что усреднение по координате v_1 эквивалентно усреднению в исходной системе (1.1) по времени вдоль периодических траекторий. Пусть $H(v_1,\, v_2)$ — функция на торе, $H'(z_1,\, z_2)$ — та же функция, но представленная в других переменных. Используя формулы перехода (3.2), среднее

$$h(v_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} H(v_1,\, v_2)\, dv_1$$

можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} H'(z_1,\, z_2)\frac{f(z_1,\, z_2)}{\lambda(z_2)}\, dz_1.$$

С учетом (3.1) это равно

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^{T} \mu\, dt.$$

Здесь μ — это функция H, в которой переменные z заменены решениями (3.1), T — период замкнутой траектории (зависящей от z_2).

Теорема 2 (о полной диффузии). *Пусть γ рационально и все критические точки периодической функции $\lambda(\cdot)$ невырождены. Пусть F и G — характеристические функции измеримых областей X и Y положительной меры на торе $\mathbb{T}^2 = \{x_1,\, x_2 \bmod 2\pi\}$ и почти все траектории системы* (1.1) *пересекаются с X. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} K(t) > 0.$$

6. Зафиксируем функции F и G из L_2 и рассмотрим последовательность рациональных чисел вращения $\{\gamma_n\}_1^\infty$, стремящуюся к иррациональному пределу γ. Тогда функция $K(t)$, определяемая (2.1), будет зависеть от n; обозначим ее $K_n(t)$. Каждому γ_n будет отвечать своя периодическая функция $\lambda_n(\cdot)$, которая получается усреднением плотности инвариантной меры по замкнутым траекториям n-ой динамической системы. Если λ_n — функция Морса, то (по теореме 1) $K_n(t) \to \varkappa_n$ при $t \to \infty$.

Теорема 3 (о предельном перемешивании). *Если λ_n — функция Морса при всех n, то*

$$\lim_{t\to\infty} \varkappa_n = \langle F\rangle\langle G\rangle/\Lambda.$$

Эту формулу следует сравнить с (2.2). При компьютерном моделировании (когда иррациональное γ заменяется несократимой дробью p/q с большими p и q) система (1.1) практически неотличима от системы с перемешиванием.

Отметим, что для типичной плотности f средние $\lambda(\cdot)$, подсчитанные для всех рациональных γ, будут функциями Морса.

Литература

[1] *Аносов Д. В.* Об аддитивном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37. № 6. С. 1259–1274.

[2] *Каток А. Б.* Спектральные свойства динамических систем с интегральным инвариантом на торе // Функц. анализ и его прил. 1967. Т. 1. № 4. С. 75–85.

[3] *Козлов В. В.* Об интегралах квазипериодических функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем., механ. 1978. № 1. С. 106–115.

[4] *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // ДАН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.

[5] *Кочергин А. В.* Об отсутствии перемешивания у специальных потоков над поворотом окружности и потоков на двумерном торе // ДАН СССР. 1972. Т. 205. № 3. С. 515–518.

[6] *Пуанкаре А.* Теория вероятностей. Ижевск: Ред. журнала «Регулярная и хаотическая динамика». 1999.

[7] *Шкловер М. Д.* О классических системах на торе с непрерывным спектром // Известия вузов. Мат. 1967. № 10. С. 113–124.

Добавление 8

О диффузии в гамильтоновых системах[1]

1. Согласно Пуанкаре основной задачей динамики является исследование уравнений Гамильтона

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \frac{dy_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}; \quad k = 1, \ldots, n,$$
$$H = H_0(y) + \varepsilon H_1(x, y). \tag{1.1}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n) \bmod 2\pi$ — угловые канонические координаты, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — канонические импульсы, ε — малый параметр. Гамильтониан H 2π-периодичен по каждой угловой координате $x_1, \ldots, x_n$. При $\varepsilon = 0$ имеем вполне интегрируемую систему, причем переменные y, x являются *переменными действие-угол* этой системы.

В соответствии с *КАМ-теорией* при возмущении системы с невырожденным гамильтонианом

$$\det\left\| \frac{\partial^2 H_0}{\partial y^2} \right\| \neq 0 \tag{1.2}$$

большинство (в смысле меры Лебега) инвариантных торов

$$x \bmod 2\pi, \quad y = y_0$$

не исчезает, а лишь слегка деформируется. Такие сохраняющиеся торы называются *колмогоровскими*. При $n = 2$ колмогоровские торы *разделяют* трехмерную поверхность уровня интеграла энергии $H = \mathrm{const}$ на инвариантные области и поэтому переменные действие y при малых значениях ε не эволюционируют. Как показал на модельном примере В. И. Арнольд [1], при $n > 2$ система может *дрейфовать* в связной щели между колмогоровскими торами. При этом переменные действие y могут изменяться на конечную величину. Такое явление называется *диффузией Арнольда*. Механизмы диффузии в многомерных гамильтоновых системах пока еще до конца не ясны.

[1] Это — работа автора и Н. Г. Мощевитина, опубликованная в Вестнике Моск. ун-та, сер. Матем., механика. 1997. № 5. С. 49–52.

Н. Н. Нехорошев [7] нашел оценку скорости диффузии Арнольда для аналитических систем с *крутым* гамильтонианом (условие крутизны является требованием более сильным, чем неравенство (1.2)): найдутся такие положительные постоянные ε_0, a, b, что при всех

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \exp \frac{1}{\varepsilon^a}, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \tag{1.3}$$

справедливо неравенство

$$|y(t) - y(0)| < \varepsilon^b. \tag{1.4}$$

Постоянные a и b зависят лишь от невозмущенного гамильтониана H_0.

В настоящей работе мы приведем примеры гамильтоновых систем, для которых скорость диффузии существенно больше, чем экспоненциально малая. Однако системы будут сильно *вырождены* (т. е. не будет выполнено условие (1.2)).

Чтобы лучше понять оценки (1.3), (1.4), рассмотрим случай (который фактически нам встретится ниже), когда приращение переменных действие $y(t) - y(0)$ равно $\varepsilon \ln t$. Если, например, в формуле (1.4) оказывается, что $b = 1/2$, то получаем неравенство

$$|y(t) - y(0)| < \sqrt{\varepsilon},$$

справедливое на интервале экспоненциально большой длины

$$0 \leqslant t < \exp \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Если же оказывается, что $b = 0$, то приращение переменных действие становится равным 1 на несколько большем интервале времени

$$0 \leqslant t < \exp \frac{1}{\varepsilon}.$$

Отметим еще, что оценки вида (1.3), (1.4) впервые были получены Дж. Литлвудом [10, 11] в ограниченной круговой задаче трех тел. Правда, в этом случае $n = 2$ и КАМ-теорема дает более сильный результат о вечной устойчивости переменных действие.

2. Рассмотрим модельную гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H = H_0(y) + \varepsilon H_1(x), \quad H_0 = \sum_{k=1}^{n} \omega_k y_k, \tag{2.1}$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — рационально несоизмеримые вещественные числа, а H_1 — аналитическая функция на n-мерном торе $\mathbb{T}^n = \{x \bmod 2\pi\}$. Фазовым пространством служит прямое произведение тора $\mathbb{T}^n = \{x \bmod 2\pi\}$ и $\mathbb{R}^n = \{y\}$. Эта система допускает полный набор коммутирующих *многозначных* интегралов

$$\omega_n x_1 - \omega_1 x_n, \quad \omega_{n-1} x_1 - \omega_1 x_{n-1}, \ldots, \omega_2 x_1 - \omega_1 x_2, \quad H$$

и поэтому явно интегрируется. Однако, как мы увидим ниже, вопрос об эволюции переменных действие упирается в достаточно сложную проблему, связанную с малыми знаменателями.

Канонические уравнения с гамильтонианом (2.1) имеют следующий явный вид:

$$\frac{dx_k}{dt} = \omega_k, \quad \frac{dy_k}{dt} = \varepsilon f_k(x), \quad k = 1, \ldots, n, \quad f_k = \frac{\partial H_1}{\partial x_k}. \tag{2.2}$$

Первая группа уравнений определяет условно-периодическое движение по n-мерному тору

$$x_k = \omega_k t + x_k(0), \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — несоизмеримые *частоты* условно-периодического движения, а $x_1(0), \ldots, x_n(0)$ — начальные *фазы*. Переменные действие являются интегралами от условно-периодических функций:

$$y_k(t) = y_k(0) + \varepsilon \int\limits_0^t f_k(\omega\tau + x(0))\, d\tau.$$

Поскольку фазовые средние f_k по тору $\mathbb{T}^n$ равны нулю, то (по теореме Г. Вейля) $y_k(t) - y_k(0) = o(t)$, $t \to \infty$. Однако эта оценка скорости диффузии является слабым результатом ввиду его большой общности (теорема Вейля справедлива для непрерывных и даже интегрируемых по Риману функций). Отметим, что в случае гладких функций f_k оценка теоремы Вейля равномерна по начальным фазам $x(0)$.

Системы с гамильтонианом (2.1) рассматривались в [9] с точки зрения условий существования *однозначных* интегралов. Установлено, что при $n = 2$ можно указать такое иррациональное число ω_1/ω_2 и такую аналитическую функцию $H_1 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$, что уравнения (2.2) допускают независимый от H интеграл из класса C^d и при этом не существует никакого дополнительного интеграла класса C^{d+1}. Подробные доказательства даны в работе [4]. В [5] обсуждается аналогичный результат при произвольном $n \geqslant 2$.

Прежде чем формулировать результаты настоящей работы, отметим, что разность $y(t) - y(0)$ при фиксированном значении времени t зависит только от начальных фаз $x_k(0)$, $k = 1, \ldots, n$. Определим

$$Y_k(T) = \max_{1 \leqslant t \leqslant T} \max_{x(0)} |y_k(t) - y_k(0)|, \quad Y(T) = \max_{k=1, \ldots, n} Y_k(T).$$

Теорема 1. *Пусть* $n = 2$, ω_1/ω_2 *иррационально и функция* H_1 *аналитическая. Тогда*

(i) *существует последовательность* $t_\nu \uparrow \infty$, *такая, что расстояния между точками* $(x(t_\nu), y(t_\nu))$ *и* $(x(0), y(0))$ *(в стандартной метрике на* $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$*) стремятся к нулю равномерно по начальным данным при* $\nu \to \infty$*;*

(ii) *существуют постоянная* $c > 0$ *и последовательность* $T_\nu \uparrow \infty$, *такие, что*

$$Y(T_\nu) < \varepsilon c \ln T_\nu, \quad \forall \nu.$$

Заключение (i) фактически доказано в [2]. Оно устанавливает равномерную возвращаемость фазовых траекторий системы (2.1). Заключение (ii) доказывается разбором двух случаев: А и Б. В силу аналитичности функции f имеем

$$f_k(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} f_k(m) \exp(i\langle m, x\rangle),$$
$$|f_k(m)| \leqslant \gamma_1 \exp(-\gamma_2 |m|), \quad |m| = |m_1| + |m_2|.$$

Случай А. Если для всех $m \neq 0$ выполнено $|\langle m, \omega\rangle| > \exp(-\gamma' |m|)$ с некоторым $\gamma' \in (0; \gamma_2)$, то $Y(T) = O(\varepsilon)$ при $T \to \infty$ и все доказано.

Случай Б. Если имеется бесконечно много целочисленных векторов $m_\nu = (p_\nu, q_\nu) \in \mathbb{Z}^2$, $q_\nu > 0$, таких, что

$$|\langle m_\nu, \omega\rangle| = |\omega_1 p_\nu + \omega_2 q_\nu| < \exp(-\gamma'(|p_\nu| + q_\nu)),$$

то с некоторым $\gamma'' > 0$ выполнено

$$y_1(q_\nu/\omega_2) - y_1(0) = \varepsilon \int_0^{q_\nu/\omega_2} f_1(\omega\tau + x(0))\, d\tau = O(\varepsilon \exp(-\gamma'' q_\nu)),$$

и в силу того, что

$$y_1(\lambda q_\nu/\omega_2) - y_1(0) = \varepsilon \sum_{l=0}^{\lambda-1} \int\limits_0^{q_\nu/\omega_2} f_1(\omega\tau + \xi_l)\, d\tau = O(\varepsilon\lambda \exp(-\gamma'' q_\nu)) + O(\varepsilon),$$

имеем

$$y_1(\lambda q_\nu) = O(\varepsilon\lambda \exp(-\gamma'' q_\nu)) + O(\varepsilon), \quad \forall\lambda$$

и, следовательно,

$$y_1(t) = O(\varepsilon\lambda \exp(-\gamma'' q_\nu)) + O(\varepsilon q_\nu), \quad \forall t \in (0;\, \lambda q_\nu).$$

Выбирая $\lambda_\nu = \exp(-\gamma'' q_\nu)$ и $T_\nu = \lambda_\nu q_\nu$, получаем

$$Y_1(T_\nu) = O(\varepsilon \ln T_\nu).$$

Остается вспомнить, что имеет место интеграл энергии $H = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \varepsilon H_1(x) = \mathrm{const}$, и заключение (ii) теоремы 1 можно считать доказанным.

Перед формулировкой теорем 2, 3 еще раз напомним, что разность $y_k(t) - y(0)$ зависит (при фиксированном t) только от начальных фаз $x(0)$.

Теорема 2. *При $n = 2$ для любой заданной наперед, положительнозначной, монотонно возрастающей функции $g(t)$, такой, что $g(t) = o(t)$, $t \to \infty$, найдутся иррациональное число ω_1/ω_2 и аналитическая функция $H_1 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$, такие, что*

(i) *при каждом значении h система* (2.2) *транзитивна на уровне энергии $H = h$;*

(ii) *существуют постоянная $c > 0$ и последовательность $t_\nu \uparrow \infty$, такие, что выполнено*

$$\left(\int\limits_{\mathbb{T}^2} |y_k(t_\nu) - y(0)|^2 \, dx(0) \right)^{1/2} \geqslant \varepsilon c g(t_\nu).$$

Свойство *транзитивности* означает наличие траектории, всюду плотно заполняющей трехмерную поверхность $H = h$. Этот результат установлен в работе [2]. Таким образом, здесь изменение переменных действие неограниченно и можно говорить о диффузии в гамильтоновой системе (2.2), однако свойство (ii) не обеспечивает быстрой диффузии. Ввиду свойства возвращаемости такую диффузию можно назвать *мерцающей*. Оба заключения теоремы 2 доказываются стандартным образом с использованием простых свойств цилиндрических каскадов, порожденных рассматриваемой гамильтоновой системой (см. [8]).

Случай $n \geqslant 3$ существенно отличается от случая $n = 2$.

Теорема 3. *Пусть $n = 3$ и $g(t)$ — произвольная положительная функция, возрастающая при $t \to \infty$ и такая, что $g(t) = o(t)$. Тогда найдутся такие несоизмеримые частоты ω_1, ω_2, ω_3 и аналитическая функция $H_1 : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{R}$, что при любом t выполнено*

$$\left(\int\limits_{\mathbb{T}^3} |y_1(t) - y_1(0)|^2 \, dx(0) \right)^{1/2} > \varepsilon g(t). \tag{2.3}$$

Таким образом, при $k = 3$ уже нет свойства равномерной возвращаемости, хотя индивидуальная возвращаемость каждого $y_k(t)$ в отдельности, как доказано в [3], по-прежнему имеет место. Теорема 3 является следствием одного общего результата об интегралах условно-периодических функций [6]. По-видимому, можно указать примеры гамильтоновых систем с тремя степенями свободы, удовлетворяющих теореме 3 и транзитивных на энергетических уровнях $H = \mathrm{const}$, однако это связано с тонкими конструкциями теории диофантовых приближений.

В качестве примера положим в теореме 3 $g(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Из неравенства (2.3) получаем оценку

$$\max_{x(0)} |y_1(t) - y_1(0)| > 1, \tag{2.4}$$

справедливую при *любом*

$$t \asymp \varepsilon^{-1/\alpha}. \tag{2.5}$$

Оценки (2.4), (2.5) показывают, что изменение переменных действие на конечную величину происходит на коротких интервалах времени порядка $\varepsilon^{-\beta}$, $\beta > 1$. Таким образом, скорость диффузии будет уже не экспоненциально малой, а нарастать по степенному закону. Примеры систем с крутым гамильтонианом H_0 и возрастанием переменной действие по степенному закону указаны в работе [7]. Однако там речь шла об отдельных траекториях, в то время как оценка (2.3) справедлива в целом.

Литература

[1] *Арнольд В. И.* О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы // Докл. АН СССР. 1967. **156**, № 1. 9–12.

[2] *Козлов В. В.* Об одной задаче Пуанкаре // Прикл. матем. и механ. 1976. **40**, вып. 2. 352–355.

[3] *Мощевитин Н. Г.* О возвращаемости интеграла гладкой трехчастотной условно-периодической функции // Матем. заметки. 1995. **58**, вып. 5. 723–735.

[4] *Мощевитин Н. Г.* О существовании и гладкости интеграла гамильтоновой системы определенного вида // Матем. заметки. 1991. **49**, вып. 5. 80–85.

[5] *Мощевитин Н. Г.* О существовании и гладкости интеграла одной многочастотной системы уравнений Гамильтона // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М., 1995. 45–52.

[6] *Мощевитин Н. Г.* Распределение значений линейных функций и асимптотическое поведение траекторий некоторых динамических систем // Матем. заметки. 1995. **58**, вып. 3. 394–410.

[7] *Нехорошев Н. Н.* Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым // Успехи матем. наук. 1977. **32**, вып. 6. 5–66.

[8] *Gottschalk W., Hedlund G.* Topological Dynamics // AMC Col. № 36. N.Y., 1955.

[9] *Kozlov V. V.* Phenomena of Nonintegrability in Hamiltonian systems // Proc. Int. Congr. Math. Berkeley, California, USA. 1986. 1161–1170.

[10] *Littlewood J. E.* On the equilateral configuration in the restricted problem of three bodies // Proc. London Math. Soc. 1959. **3**, № 9. 343–372.

[11] *Littlewood J. E.* The Lagrange equilateral configuration in celectial mechanics // Proc. London Math. Soc. 1959. **3**, № 9. 525–543.

Добавление 9

Слабая сходимость вероятностных мер и круговая модель Каца

1. Наш подход к изучению теплового равновесия можно проиллюстрировать на примере *круговой модели Каца*, которая упоминалась в § 1 главы I. Напомним кратко суть дела. В вершинах правильного n-угольника расположены белые и черные шары. Выделено некоторое *фиксированное* множество M вершин; оно играет ключевую роль в динамике модели Каца. Рис. 1 иллюстрирует случай, когда $n = 6$, а множество M состоит всего из одной вершины. Движение заключается в циклической перестановке всех шаров против часовой стрелки. Причем шар изменяет свой цвет только в том случае, если он находился в множестве M.

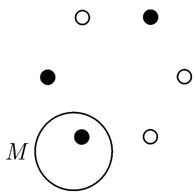

Рис. 1. Состояние системы

Фазовым пространством (пространством состояний) Γ служат 2^n наборов n белых и черных шаров. Описанный выше сдвиг g — это взаимно-однозначное отображение Γ на себя. Его степени $\{g^t\}$, $t \in \mathbb{Z}$ — фазовый поток на Γ. Имеется естественная вероятностная мера на Γ, которая инвариантна относительно действия $\{g^t\}$: вероятность каждого состояния равна 2^{-n}. Это простое наблюдение можно рассматривать как аналог теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема. Нас интересует динамика числа белых и черных шаров при итерациях отображения g.

Положим $N = 2^n$ и обозначим состояния системы символами $x_1, \ldots, x_N$. В соответствии с подходом Гиббса в начальный момент $t = 0$ надо задать некоторое распределение вероятностей — набор неотрицательных чисел

$$p(x_1), \ldots, p(x_N),$$

сумма которых равна единице. Затем это распределение начинает переноситься потоком $\{g^t\}$. Пусть $p_t(x_i)$ — вероятность нахождения системы в состоянии x_i в момент времени t. Ясно, что $p_0(x_i) = p(x_i)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant N$ и

$$p_t(x_i) = p_{t-1}(g^{-1}(x_i)).$$

Отсюда выводится простое правило переноса:

$$p_t(x_i) = p(g^{-t}(x_i)).$$

Оно является аналогом формулы (5.6) из Введения для общего решения уравнения Лиувилля. Нас интересует поведение распределения вероятностей $p_i(x_i)$, $1 \leqslant i \leqslant N$ при $t \to \pm\infty$.

2. В соответствии с общей с общей идеей Гиббса естественно ожидать, что $\{p_t\}$ сходятся в *каком-то* смысле к «*микроканоническому*» распределению, когда вероятности всех состояний одинаковы. Тогда в предельном стационарном состоянии число белых шаров было бы распределено по *биномиальному закону*

$$P(m) = C_n^m/2^n, \qquad m = 0, 1, \ldots, m.$$

После надлежащей нормировки это распределение при $n \to \infty$ стремится к *нормальному распределению* (теорема Муавра–Лапласа), которое служит естественным аналогом *канонического распределения Гиббса*. Однако, как легко понять, вероятности $p_t(x_i)$ осциллируют как функции t и вообще не имеют предела в обычном смысле.

Заменим обычную сходимость сходимостью в слабом смысле. Речь идет об исследовании сумм следующего вида

$$K(t) = p_t(x_1)\varphi(x_1) + \ldots + p_t(x_N)\varphi(x_N),$$

где φ — некоторая функция на Г. Однако функция $K(t)$ (ввиду ее периодичности по t) также не имеет предела при $t \to \pm\infty$. В этом состоит существенное отличие рассматриваемой системы от гамильтоновых систем, которые являются основным объектом нашего анализа (как говорят немцы, каждое сравнение хромает). Тем не менее, легко понять, что функция $K(t)$ сходится по Чезаро при $t \to \pm\infty$ к некоторому пределу

$$\overline{p}(x_1)\varphi(x_1) + \ldots + \overline{p}(x_N)\varphi(x_N),$$

где $\overline{p}(x_i) \geqslant 0$ и $\sum \overline{p}(x_i) = 1$ (эргодическая теорема фон Неймана).

При этом распределение числа белых шаров в предельном стационарном состоянии в общем случае будет отличаться от биномиального распределения. Однако, математическое ожидание этого числа равно $n/2$ и асимптотически при $n \to \infty$ белые и черные шары распределяются почти поровну (закон больших чисел).

Легко понять, что

$$\overline{p}(x_i) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \sum_{t=1}^{s} p_t(x_i).$$

Эта простая формула является аналогом формулы (2.1) главы II.

3. Продемонстрируем сказанное на простом примере, когда $n = 6$, а множество M состоит всего из одной вершины (рис. 1). В этом случае фазовое пространство Γ (из $2^6 = 64$ элементов) разбивается на шесть непересекающихся периодических орбит фазового потока $\{g^t\}$; обозначим их *а, б, в, г, д, е*. Число точек Γ в орбитах *а-д* равно 12, а орбита *е* состоит из четырех точек ($5 \cdot 12 + 4 = 64$). Отметим, что $12 = 6 \cdot 2$ — это период отображения g. Представители этих орбит указаны на рис. 2.

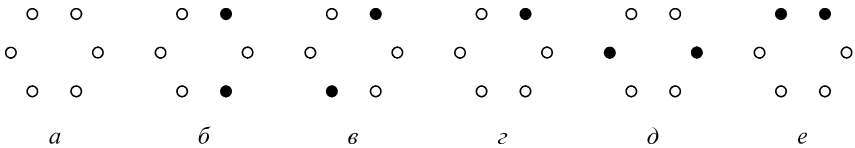

Рис. 2. Точки периодических орбит

Таким образом, отображение $g : \Gamma \to \Gamma$ не эргодическое и поэтому изучение динамики сводится к изучению отдельных замкнутых орбит. Возьмем, например, орбиту *а* и пусть точки Γ занумерованы так, что $x_1, \ldots, x_{12}$ составляют как раз эту орбиту. Поскольку отображение g циклически представляет эти точки, то легко сообразить, что

$$\overline{p}_1(x_1) = \ldots = \overline{p}(x_{12}) = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} p(x_i).$$

Предельные распределения числа белых шаров на каждой из орбит указаны на рис. 3. Все они отличаются от «нормального». Предельное рас-

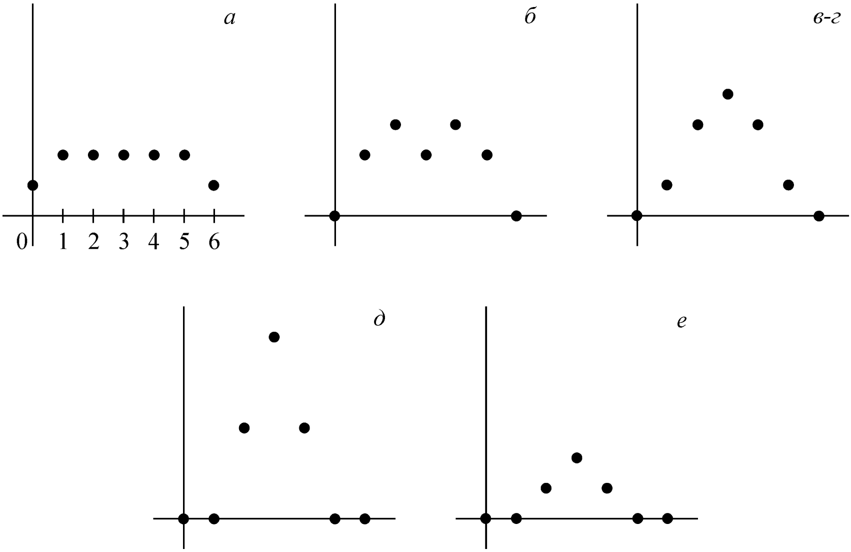

Рис. 3. Распределение белых шаров

пределение белых шаров в целом получается «смешением» этих частных распределений. Легко проверить, что всегда математическое ожидание числа белых шаров равно $3 = n/2$.

Добавление 10

Неинтегрируемость системы взаимодействующих частиц с потенциалом Дайсона[1]

1. Динамика системы n взаимодействующих частиц равной массы описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum y_i^2 + \sum_{i<j} V(x_i - x_j). \tag{1.1}$$

Здесь $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$ — координаты, $y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n$ — импульсы частиц, V — потенциальная энергия взаимодействия. Мы будем, следуя Дайсону [7], рассматривать случай, когда

$$V(z) = \ln|\sin z|. \tag{1.2}$$

Системы с таким потенциалом изучались в работе [7] в связи с анализом статистических свойств уровней энергии одномерного классического кулоновского газа. Аналогично ситуации, отмеченной Калоджеро для системы точечных вихрей на плоскости [5], положения равновесия системы (1.1), (1.2) определяют стационарные коллинеарные конфигурации на сфере (точечные вихри располагаются в экваториальной плоскости, равномерно вращающейся вокруг некоторой оси, также лежащей в этой плоскости).

Поскольку функция V 2π-периодична (она даже π-периодическая), то можно считать, что частицы движутся по окружности. Система с гамильтонианом (1.1) всегда допускает два интеграла

$$H,\ F = \sum y_i.$$

[1] Это — работа А. В. Борисова и автора, опубликованная в Докладах Академии наук. 1999. Т. 366. № 1. С. 30–31.

Отысканию условий на потенциал V, при котором рассматриваемая система вполне интегрируема (допускает набор из n независимых интегралов, полиномиальных по импульсам y_1, y_2, $\ldots$, y_n), посвящено большое число работ (см. обзоры в [3,5]). Если V — непостоянная аналитическая периодическая функция без сингулярностей, то при $n \geqslant 3$ система с гамильтонианом (1.1) не может быть вполне интегрируемой [2,4]. Потенциал Дайсона (1.2) имеет вещественную логарифмическую особенность. Задача об интегрируемости этой системы обсуждалась в работе [6].

Как отметил Дайсон, система с потенциалом (1.2) допускает семейство равновесий

$$x_j^0 = x_0 + \frac{\pi j}{n}, \quad j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Частоты малых колебаний, вычисленные в [9],

$$\omega_s^2 = 2s(n-s), \quad s = 1,\, 2,\, \ldots,\, n. \tag{1.4}$$

Равенство $\omega_n = 0$ связано с неизолированностью равновесий (1.3).

2. Рассмотрим простейший нетривиальный случай, когда $n = 3$. С помощью интеграла момента F можно понизить число степеней свободы на единицу. Для этого перейдем к неинерциальной барицентрической системе отсчета с помощью канонического преобразования $x,\, y \mapsto q,\, p$:

$$y_1 = p_1 + p_3, \quad y_2 = -p_1 + p_2 + p_3, \quad y_3 = -p_2 + p_3,$$
$$q_1 = x_1 - x_2, \quad q_2 = x_2 - x_3, \quad q_3 = x_1 + x_2 + x_3.$$

С учетом равенства $p_3 = 0$ и четности потенциала гамильтониан редуцированной системы имеет вид

$$p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2 + V(q_1) + V(q_2) + V(q_1 + q_2). \tag{2.1}$$

Эта система имеет устойчивое равновесие $q_1 = q_2 = \frac{\pi}{3}$ с равными частотами малых колебаний $\omega_1 = \omega_2 = 2$ (согласно (1.4)). Вычитая из потенциала $\ln \frac{\sqrt{3}}{2}$, можно считать, что в состоянии равновесия полная энергия равна нулю.

Естественно ожидать, что при малых положительных значениях полной энергии h система с потенциалом (1.2) будет демонстрировать интегрируемое поведение. Ситуация здесь точно такая же, как и в известной системе Хенона–Хейлеса ([9], см. также [3]). Применяя метод нормальных форм с учетом резонанса $\omega_1 = \omega_2$, можно найти квазиинтеграл, который очень медленно меняется со временем в окрестности положения равновесия (для системы Хенона–Хейлеса такую функцию вычислил Густавсон [8]).

3. Численные расчеты подтверждают это предположение. На рис. 1а показано почти интегрируемое поведение системы при $H = 10$. Для больших H система хаотизируется в окрестности сепаратрис. При этом формальные ряды, определяющие квазиинтеграл, расходятся, и для больших H он не аппроксимирует поведение системы. Рисунки 1б, 1в соответствуют значениям энергии $H = 20$ и $H = 22$, при которых начинается реальная стохастизация системы.

4. К задаче об интегрируемости системы взаимодействующих частиц с потенциалом Дайсона можно подойти с более простой точки зрения, считая канонические координаты x и y и время t комплексными переменными. Будем разыскивать первые интегралы в виде полиномов по импульсам с однозначными аналитическими коэффициентами (см. [2]). Ввиду логарифмической особенности потенциалов энергия H ветвится в комплексном фазовом пространстве, а функция F, конечно, будет однозначной.

Оказывается, интеграл момента F — единственный полиномиальный интеграл с однозначными коэффициентами в системе Дайсона. Это утверждение доказывается с помощью результатов работы [1].

Действительно, пусть $F_j = y_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, — полный набор независимых интегралов в задаче о движении частиц по окружности без взаимодействия. Вычислим производные этих функций в силу гамильтоновой системы с гамильтонианом (1.1), (1.2):

$$\dot{F}_j = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}(x_j - x_k), \quad 1 \leqslant j \leqslant k. \tag{4.1}$$

Подставим теперь в правую часть этих равенств какое-нибудь решение «свободной» системы, например

$$x_1 = \frac{\pi}{n}, \ \ldots, \ x_{n-1} = \frac{(n-1)\pi}{n}, \quad x_n = t.$$

Тогда правые части (4.1) будут мероморфными функциями на плоскости комплексного времени, причем $n-1$ точек $t = \frac{\pi}{n}, \ \ldots, \ t = \dfrac{(n-1)\pi}{n}$ будут простыми полюсами. Вычисляя вычеты в этих точках для функции $(\dot{F})_t$, нетрудно заметить, что они (как векторы $\mathbb{C}^n$) линейно-независимы. Следовательно, согласно [1], рассматриваемая система может иметь только один однозначный полиномиальный первый интеграл.

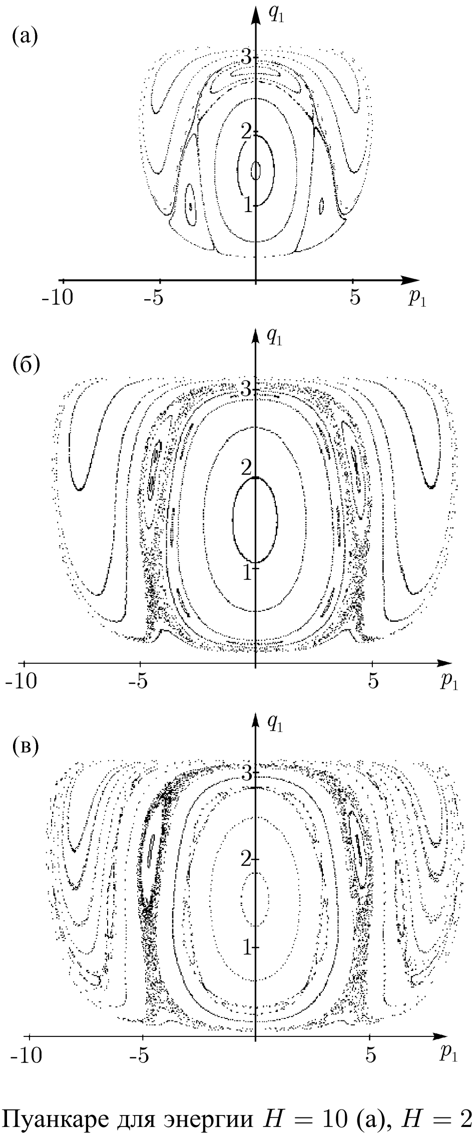

Рис. 1. Сечение Пуанкаре для энергии $H = 10$ (а), $H = 20$ (б), $H = 22$ (в).

Литература

[1] *Козлов В. В.* Ветвление решений и полиномиальные интегралы уравнений динамики // ПММ. 1998. Т. 62. № 1. С. 3–11.

[2] *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1995.

[3] *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973.

[4] *Переломов А. М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.

[5] *Calogero F.* Integrable many-body problems. In: Lect. NATO Advanced Study Institute on Nonlinear Equations in Physics and Mathematics. Istanbul, 1977. P. 3–53.

[6] *Calogero F., Perelomov A. M.* Properties of certain matrices related to the equilibrium configuration of the one- dimensional many-body problems with the pair potentials $v_1(x) = -\log|\sin x|$ and $v_2(x) = 1/\sin^2 x$ // Communs. Math. Phys. 1978. V. 59. P. 109–116.

[7] *Dyson F. J.* Statistical theory of the energy levels of complex systems. I, II, III // J. Math. Phys. 1962. V. 3. № 1. P. 140–156; P. 157–165; P. 166–175.

[8] *Gustavson F.* On the constructing formal integrals of a Hamiltonian system near an equilibrium point // Astron. J. 1966. V. 71. P. 670–686.

[9] *Hénon M., Heiles C.* The applicability of the third integral of motion; some numerical experiments // Astron. J. 1964. V. 69. P. 73–79.

Козлов Валерий Васильевич

ТЕПЛОВОЕ РАВНОВЕСИЕ ПО ГИББСУ И ПУАНКАРЕ

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерный набор и верстка Д. К. Князев
Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 22.10.02. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 18,6. Уч. изд. л. 18,23.
Гарнитура Times. Бумага офсетная №1.
Тираж 500 экз. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.