

УДК 531.36:532.5

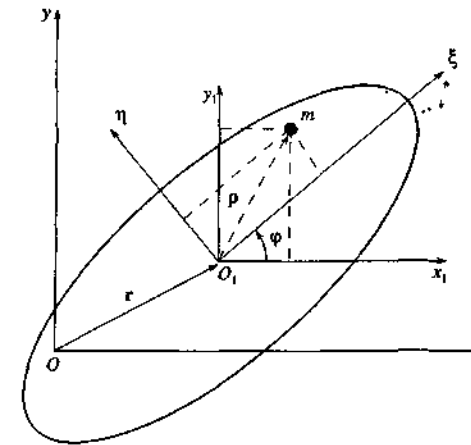
© 2003 г. В. В. Козлов, Д. А. Овнченко

**О ДВИЖЕНИИ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ТЕЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ВНУТРИ СЕБЯ ПОДВИЖНУЮ СОСРЕДОТОЧЕННУЮ МАССУ**

Рассматривается движение системы (твердое тело, симметричное относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей, плюс находящаяся внутри тела материальная точка) в безграничном объеме идеальной жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности. Движение тела происходит за счет перемещения материальной точки относительно тела. Изучаются два случая: а) внешние силы отсутствуют и б) система совершает движение в однородном поле силы тяжести. Аналитическое исследование динамических уравнений при условии, что точка совершает заданное плоское периодическое движение внутри тела, показало, что в случае а система может сколь угодно далеко отдалиться от начального положения. В случае б доказано, что за счет постоянного пополнения энергии соответствующего относительного движения точки тело может всплывать. Напротив, если скорость относительного движения точки ограничена, то тело тонет. Приводятся результаты численных расчетов, когда материальная точка совершает случайные блуждания по сторонам плоской квадратной решетки, жестко связанной с телом.

Классическая задача о движении твердого тела в бесконечном объеме идеальной жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности (см., например, [1, 2]), допускает различные обобщения, в том числе на случай тела с изменяемой геометрией. Ранее [3, 4] было изучено свободное (при отсутствии внешних сил) движение изменяемого тела при условии, что изменение геометрии масс тела и его формы осуществляется за счет действия внутренних сил и описывается наперед заданными функциями времени относительно некоторой подвижной системы отсчета. В такой постановке задача о движении изменяемого тела сводится к изучению движения указанной системы отсчета. Был обнаружен следующий новый эффект [3, 4] закон изменения геометрии тела можно подобрать таким образом, чтобы обеспечить перемещение тела в любую (сколь угодно далеко) точку окружающего объема жидкости. Полная управляемость такой системы оказалась возможной и при сохранении формы внешней поверхности тела (т.е. лишь за счет изменения внутренней геометрии масс). Единственное условие состоит в том, чтобы присоединенные массы тела (которые, напомню, зависят лишь от формы его поверхности) не были все равны между собой. Отметим, что полученные ранее результаты о возможности неограниченного движения изменяемого тела (см., например, [5, 6]) основываются на использовании таких механизмов управления геометрией тела, при которых изменяется форма его поверхности и объем. Ниже более детально изучается механизм перемещения тела с заключенной внутри него материальной точкой, а также изучается движение такого изменяемого тела в однородном силовом поле.

**1. Уравнения движения.** Известно, что задача о движении твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости может быть рассмотрена в обобщенной постановке, когда допускается изменение геометрии тела. Здесь изучается случай, когда изменяемое тело состоит из корпуса (собственно твердого тела) и материальной точки массы  $m$ , которая перемещается внутри него. Предполагается, что движение всей системы начинается из состояния покоя. Движение точки относительно корпу-



Фиг. 1

са считается заданным в том смысле, что в системе отсчета, жестко связанной с корпусом, координаты точки – известные функции времени. В этом случае задача сводится к изучению совместного движения тела (корпуса) в жидкости и точки при наличии нестационарных голономных связей. В соответствии с принципом освобожденности от связей (см., например, [2]), движение остова тела в идеальной жидкости (система тело плюс жидкость плюс точка) можно интерпретировать как классическую задачу о движении в жидкости твердого тела (система тело плюс жидкость) при действии некоторых заданных внутренних сил, в общем случае зависящих от времени. Указанные силы, очевидно, представляют собой не что иное, как силы реакции, возникающие в результате наложения связей, обеспечивающих заданное относительное движение точки в теле.

Задача может исследоваться различными способами. Ниже приводится решение, базирующееся на использовании основных теорем динамики. Вначале введем необходимые обозначения, найдем выражения для основных динамических характеристик изучаемой механической системы и выведем уравнения движения. Ограничимся случаем, когда тело симметрично (как по форме, так и по распределению масс) относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей и совершает плоское движение. Зафиксируем в этой плоскости неподвижную систему координат  $Ox$  (см. фиг. 1), относительно которой жидкость предполагается покоящейся на бесконечности. Свяжем с центром симметрии тела  $O_1$  подвижную систему координат  $O_1\xi\eta$ , ориентированную по главным осям инерции тела и занимающую поэтому в нем неизменное положение (напомним, что само тело предполагается абсолютно твердым). Иногда в целях удобства будем использовать также вспомогательную систему координат  $O_1x_1y_1$ , оси которой во время движения остаются параллельными неподвижным осям  $Ox$  и  $Oy$ .

Как известно [1], в случае безвихревого движения жидкости состояние системы тело плюс жидкость однозначно определяется положением и скоростью тела. В случае плоского движения тела (при соответствующем плоском движении точки  $m$ ) за обобщенные координаты системы тело плюс жидкость удобно принять величины  $x$

и  $y$  – координаты точки  $O_1$  и угол  $\varphi$  между осями  $O_1x_1$  и  $O_1\xi$ . Положение точки  $m$  характеризуем вектором  $\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}$ , где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки  $O_1$ , а  $\boldsymbol{\rho}$  – радиус-вектор точки  $m$  в подвижной системе отсчета. Пусть  $x_1, y_1$  – проекции вектора  $\boldsymbol{\rho}$  на ось  $x, y$ . Компоненты  $\xi, \eta$  радиус-вектора  $\boldsymbol{\rho}$  в подвижной системе координат  $O_1\xi\eta$  считаем заданными функциями времени. Зависимость между величинами  $x_1, y_1$  и  $\xi(t), \eta(t)$  определяется формулами поворота на угол  $\varphi$

$$x_1 = \xi(t)\cos\varphi - \eta(t)\sin\varphi, \quad y_1 = \xi(t)\sin\varphi + \eta(t)\cos\varphi \quad (1.1)$$

Заметим, что соотношения (1.1) в явном виде описывают наложенные на систему тело плюс жидкость плюс точка две голономные связи. Таким образом, рассматриваемая механическая система определяется пятью обобщенными координатами  $x, y, \varphi, x_1, y_1$  при наличии двух голономных связей (1.1) и имеет, следовательно, три степени свободы.

Как обычно, обозначим точкой дифференцирование функций по времени. Тогда проекции вектора скорости точки  $O_1$  на неподвижные оси равны  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ . Если обозначить через  $u$  и  $v$  компоненты этого же вектора в проекции на подвижные оси  $\xi$  и  $\eta$ , то аналогично формулам (1.1) имеем

$$\dot{x} = u\cos\varphi - v\sin\varphi, \quad \dot{y} = u\sin\varphi + v\cos\varphi \quad (1.2)$$

а также обратные соотношения

$$u = \dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi, \quad v = -\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi$$

Как известно [1], в рассматриваемом (плоском) случае кинетическая энергия системы тело плюс жидкость может быть представлена в виде

$$T^{(0)} = \frac{1}{2}(a_1u^2 + a_2v^2 + b\omega^2)$$

При этом проекции импульса  $\mathbf{P}^{(0)}$  на подвижные оси равны  $a_1u$  и  $a_2v$ , а момент количества движения  $K_{O_1}^{(0)}$  относительно точки  $O_1$  равен  $b\omega$ , где  $a_1, a_2, b$  – моменты инерции тела с присоединенными массами (без учета точки  $m$ ) и  $\omega = \dot{\varphi}$ .

Выпишем выражения проекций вектора импульса  $\mathbf{P}^{(0)}$  на неподвижные оси

$$P_x^{(0)} = a_1u\cos\varphi - a_2v\sin\varphi, \quad P_y^{(0)} = a_1u\sin\varphi + a_2v\cos\varphi \quad (1.3)$$

Суммарный импульс  $\mathbf{P}$  системы тело плюс жидкость плюс точка равен  $\mathbf{P}^{(0)} + \mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}^{(0)} + m\mathbf{V}^{(m)}$ . Так как вектор скорости точки  $m$  имеет компоненты

$$\mathbf{V}^{(m)} = (\dot{x} + \dot{x}_1, \dot{y} + \dot{y}_1)_{xy} = (u - \omega\eta + \xi, v + \omega\xi + \eta)_{\xi\eta}$$

то суммарный импульс  $\mathbf{P} = (P_\xi, P_\eta)$  в проекциях на подвижные оси может быть записан в виде

$$\mathbf{P} = ((a_1 + m)u + m(\xi - \omega\eta), (a_2 + m)v + m(\eta + \omega\xi))_{\xi\eta} \quad (1.4)$$

Вычислим теперь полный кинетический момент системы относительно точки  $O$

$$K = (K^{(0)} + K^{(m)})_z = (K_{O_1}^{(0)} + [\mathbf{r} \times \mathbf{P}^{(0)}] + m\{(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{V}^{(m)}\})_z \quad (1.5)$$

( $(\cdot)_z$  – проекция вектора на ось, ортогональную осям  $x, y$ ). Используя представление входящих в выражение (1.5) векторов в осях  $Ox_1y_1$ , находим

$$K = b\omega + x[P_y^{(0)} + m(\dot{y} + \dot{y}_1)] - y[P_x^{(0)} + m(\dot{x} + \dot{x}_1)] + m[x_1(\dot{y} + \dot{y}_1) - y_1(\dot{x} + \dot{x}_1)]$$

Замечая, что

$$m(\dot{x} + \dot{x}_1) = P_x - P_x^{(0)}, \quad m(\dot{y} + \dot{y}_1) = P_y - P_y^{(0)}$$

и используя соотношение (1.3), окончательно получаем

$$K = b\omega + (x + x_1)P_y - (y + y_1)P_x + a_1u\eta - a_2v\xi \quad (1.6)$$

Очевидно, наложенные на систему голономные связи (1.1) допускают параллельный перенос системы тело плюс жидкость плюс точка как твердого целого вдоль неподвижных осей и вращение вокруг неподвижной оси  $Oz$ . Согласно основным теоремам динамики [2], имеют место соотношения

$$\frac{dP_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dP_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dK}{dt} = M \quad (1.7)$$

где  $F_x, F_y$  – проекции суммы внешних сил на неподвижные оси  $Ox, Oy$  соответственно, а  $M$  – суммарный момент внешних сил относительно точки  $O$ . Соотношения (1.7) определяют в общем случае систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которые описывают плоское движение системы тело плюс жидкость плюс точка при заданном относительном движении точки и при заданных внешних силах.

**2. Движение в отсутствие внешних сил.** Было показано [3], что в случае, когда внешние силы отсутствуют и движение системы начинается из состояния покоя, задача является интегрируемой. Ниже такое интегрирование осуществляется в явном виде.

Итак, при отсутствии внешних сил  $F_x = F_y = M = 0$ . Поэтому с учетом того, что в начальный момент система находилась в покое, из уравнений (1.7) заключаем, что  $P_x = P_y = 0$  (а значит, и  $P_\xi = P_\eta = 0$ ), а также  $K = 0$ . В итоге из соотношений (1.4) и (1.6) получаем соотношения

$$(a_1 + m)u + m(\xi - \eta\omega) = 0, \quad (a_2 + m)v + m(\eta + \xi\omega) = 0 \\ b\omega + a_1u\eta - a_2v\xi = 0 \quad (2.1)$$

Введем обозначения

$$\tilde{a}_1 = \frac{m}{a_1 + m}, \quad \tilde{a}_2 = \frac{m}{a_2 + m}$$

Выражая  $u$  и  $v$  из первых двух соотношений (2.1)

$$u = \tilde{a}_1(\eta\omega - \xi), \quad v = -\tilde{a}_2(\xi\omega + \eta) \quad (2.2)$$

и подставляя эти выражения в третье, получаем

$$\omega \equiv \dot{\varphi} = \frac{f_1}{f_2}; \quad f_1 = a_1\tilde{a}_2\eta\xi - a_2\tilde{a}_1\xi\eta, \quad f_2 = b + a_2\tilde{a}_2\xi^2 + a_1\tilde{a}_1\eta^2 \quad (2.3)$$

Правая часть соотношения (2.3) – заданная функция времени, поэтому закон вращения  $\varphi(t)$  подвижного репера находится простым интегрированием

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \frac{f_1}{f_2} dt \quad (2.4)$$

Теперь, при учете соотношений (2.2), правые части соотношений (1.2) становятся известными функциями времени и, следовательно, координаты  $x, y$  точки  $O_1$  находятся простым интегрированием

Представим эти соотношения в несколько ином виде, более удобном для целей численного интегрирования. Сначала определим закон движения точки  $O$  относительно подвижной системы координат  $O_1\xi\eta$ . Обозначим компоненты вектора  $\mathbf{r}_O = -\mathbf{r}$  в подвижных осях через  $\xi_O$  и  $\eta_O$ . Теорема сложения скоростей дает

$$\mathbf{V}_O = \mathbf{0} = \mathbf{V}_{O_1} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_O] + (\mathbf{V}_O)_{rel} \quad (2.5)$$

Так как в подвижной системе координат  $O_1\xi\eta$

$$\mathbf{V}_{O_1} = (u, v), \quad [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_O] = (-\omega\eta_O, \omega\xi_O), \quad (\mathbf{V}_O)_{rel} = (\dot{\xi}_O, \dot{\eta}_O)$$

то из равенства (2.5) следует

$$u - \omega\eta_O + \dot{\xi}_O = 0, \quad v + \omega\xi_O + \dot{\eta}_O = 0$$

Отсюда с учетом соотношений (2.2) получаем

$$\dot{\xi}_O = \omega(\eta_O - \bar{a}_1\eta) + \bar{a}_2\dot{\xi}, \quad \dot{\eta}_O = \omega(-\xi_O + \bar{a}_2\xi) + \bar{a}_1\dot{\eta}$$

Делая замену

$$z_1 = \bar{a}_2\xi - \xi_O, \quad z_2 = \bar{a}_1\eta - \eta_O \quad (2.6)$$

приходим к системе

$$\dot{z}_1 = \omega z_2 - \kappa \dot{z}_1, \quad \dot{z}_2 = -\omega z_1 + \kappa \dot{z}_2, \quad \kappa = \bar{a}_1 - \bar{a}_2 = \frac{m(a_2 - a_1)}{(a_1 + m)(a_2 + m)} \quad (2.7)$$

Для удобства записи введем набор комплексных переменных

$$Z = z_1 + iz_2, \quad R = x + iy, \quad R_O = \xi_O + i\eta_O$$

а также две комплекснозначные функции времени, характеризующие относительное движение точки

$$\rho(t) = -\xi(t) + i\eta(t), \quad \sigma(t) = \bar{a}_2\xi(t) + i\bar{a}_1\eta(t)$$

В новых обозначениях соотношения (2.6) принимают вид

$$Z = \sigma - R_O \quad (2.8)$$

а система (2.7) запишется как линейное неоднородное уравнение первого порядка

$$\dot{Z} = -i\omega(t)Z + \kappa\rho(t) \quad (2.9)$$

Решение полученного уравнения имеет вид

$$Z(t) = S(t)e^{-i\varphi(t)} \quad (2.10)$$

Коэффициент  $S(t) = s_1(t) + is_2(t)$  находится из соотношения

$$S(t) = \kappa\rho(t)e^{i\varphi(t)} \quad (2.11)$$

т.е.

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \kappa\rho(t)e^{i\varphi(t)} dt \quad (2.12)$$

Предполагая без потери общности, что точки  $O$  и  $O_1$  в начальный момент времени совпадают (т.е.  $\xi_O(0) = \eta_O(0) = 0$ ) и что  $\varphi(0) = \varphi_0$ , получаем

$$S(0) = (\bar{a}_2\xi(0) + i\bar{a}_1\eta(0))e^{-i\varphi_0}$$

Из уравнений (2.8) и (2.10) находим

$$R_O(t) = \sigma(t) - S(t)e^{-i\varphi(t)} \quad (2.13)$$

Соотношение (2.13) совместно с (2.12) описывает относительное движение точки  $O$

Теперь несложно найти абсолютное движение точки  $O$ . Действительно, на комплексных плоскостях  $O_1\xi\eta$  и  $Oxy$ , повернутых на угол  $\varphi$  относительно друг друга, комплексные числа  $-R_O = -(\xi_O + i\eta_O)$  и  $R = x + iy$  соответственно задают одну и ту же точку. Поэтому, с учетом соотношений (2.8), (2.9) и (2.11)

$$R(t) = -R_O e^{i\varphi(t)} = S(t) - \sigma(t)e^{i\varphi(t)} \quad (2.14)$$

Соотношение (2.14) совместно с (2.4) описывает движение тела относительно неподвижной системы координат. Проведение численных расчетов с использованием этих соотношений не вызывает трудностей. Ниже будут приведены примеры траекторий тела в жидкости в случае различных относительных движений точки.

Следуя описанному ранее подходу [3], рассмотрим задачу о возможности неограниченного движения корпуса тела при периодическом относительном перемещении точки  $m$ . Пусть функции  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  имеют период  $T = 2\pi/\Omega$ . В этом случае согласно соотношениям (2.3) функция  $\varphi$  также периодична с тем же периодом, и следовательно,

$$\varphi(t) = \Lambda t + \Phi(t)$$

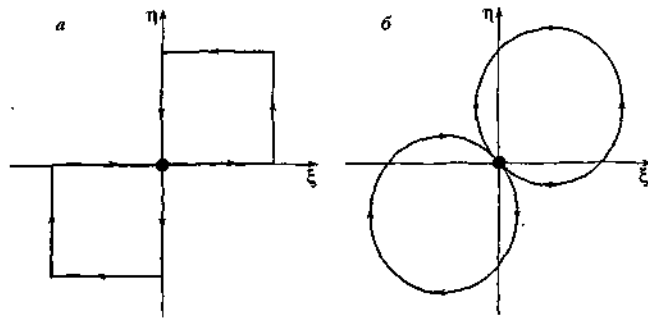
где  $\Lambda$  – среднее за период значение функции  $f_1/f_2$ , определяемой соотношениями (2.3), а  $\Phi(t)$  – некоторая функция периода  $T$ . Из уравнения (2.11) следует, что  $S = W(t)e^{i\Lambda t}$ , где функция  $W$  периодична с тем же периодом. Используя разложение  $W$  в ряд Фурье, приходим к соотношению

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n e^{i(n\Omega + \Lambda)t}$$

При интегрировании этого уравнения при наличии резонанса  $n\Omega + \Lambda = 0$  в представлении функция  $S$  появляется, вообще говоря, ненулевой вековой член  $W_n t$ , который в силу ограниченности слагаемого  $\sigma(t)e^{i\varphi(t)}$  в выражении (2.14) и обуславливает неограниченное удаление тела от начального (неподвижного) положения. Заметим, что простейшим вариантом резонанса является случай  $\Lambda = 0$ .

Если же резонансы отсутствуют (т.е.  $n\Omega + \Lambda \neq 0$  при всех  $n$ ), то функция  $S$  и, соответственно,  $R$  оказываются ограниченными, и поэтому тело будет совершать движение лишь в ограниченной окрестности начала координат.

Дополним проведенный анализ характерными изображениями траекторий тела, построенными по результатам численного интегрирования определяющей системы



Фиг. 2

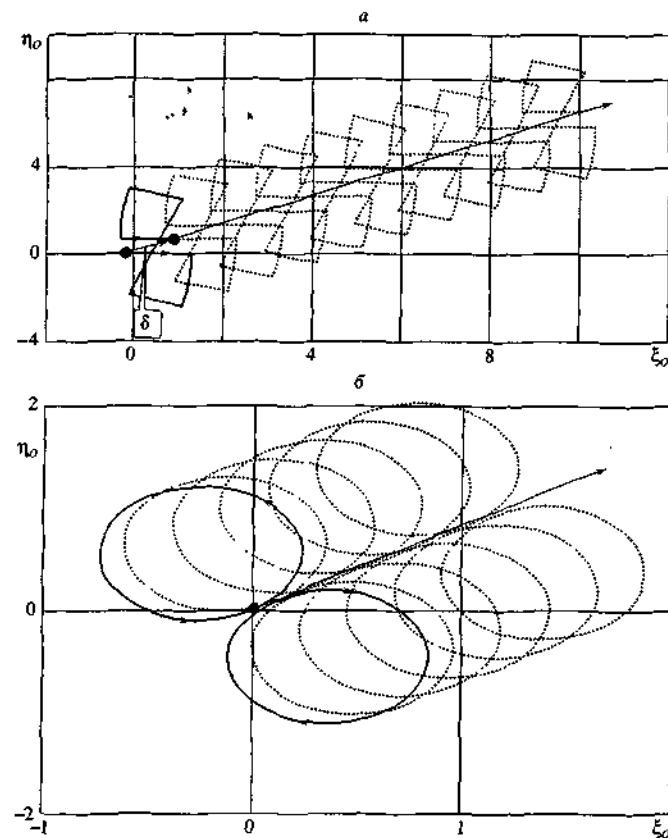
дифференциальных уравнений. Сначала проиллюстрируем резонансный случай. Было показано [4], что самопересекающийся контур на фиг. 2, а является резонансным: при движении по нему точки  $m$  с постоянной скоростью реализуется условие  $\Lambda = 0$ , а интеграл за период в правой части соотношения (2.12) отличен от нуля. На фиг. 3, а приведена соответствующая траектория “движения” точки  $O$  в подвижных осях  $O_1\xi_1\eta_1$  (на фиг. 3 для наглядности отложены значения  $-\eta_0$ ). Смещение тела за период равно  $\delta = W_0 T \neq 0$  и тело в целом смещается вдоль прямой линии, удаляясь с постоянной скоростью от начального положения. Направление указанной линии зависит от параметров тела.

Траектория, показанная на фиг. 3, б, отвечает резонансному контуру типа гладкой восьмерки, изображенному на фиг. 2, б, по которому точка  $m$  движется с постоянной скоростью. Качественно картина движения системы не меняется. Этот случай интересен тем, что в отличие от контура с углами здесь функции  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$  – гладкие. На фиг. 4 показаны в сопоставлении графики изменения во времени обобщенных координат тела  $\xi_0$ ,  $-\eta_0$ ,  $\varphi$  при движении точки по контуру типа восьмерки в резонансном случае (фиг. 4, а) и в нерезонансном (фиг. 4, б). Последний вариант реализован посредством уменьшения радиуса одной из окружностей “восьмерки”. Наглядно проявляется различие в характере изменения во времени функций  $\varphi(t)$ : в резонансном случае тело совершает колебательное движение, а в нерезонансном – вращательное.

Траектория движения тела в нерезонансном случае приведена на фиг. 5. Отметим, что при приближении к условию резонанса – в данном случае при сближении радиусов двух окружностей “восьмерки” – неограниченно увеличивается радиус кривизны “каркаса” траектории, по которой с колебаниями относительно небольшой амплитуды перемещается центр тела  $O$ . Вследствие этого на соответствующих конечных отрезках времени траектории движения тела в резонансном (фиг. 3, б) и нерезонансном (фиг. 5) случаях становятся практически неотличимыми друг от друга.

**3. Ускоренные движения тела.** Обратим внимание на одну важную особенность исследуемой системы в рассмотренном выше случае, когда на тело не действуют внешние силы и когда движение начинается из состояния покоя. Оказывается, траектория движения тела однозначно определяется лишь видом траектории относительного движения точки  $m$  и не зависит от скорости движения вдоль этого пути.

Более точно соответствующее утверждение формулируется следующим образом. Пусть известно движение системы  $\varphi(t)$ ,  $R(t)$ , когда относительная траектория точки  $m$  задается функциями  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$ , определенными при  $0 \leq t \leq t_*$ . Тогда, если точка про-



Фиг. 3

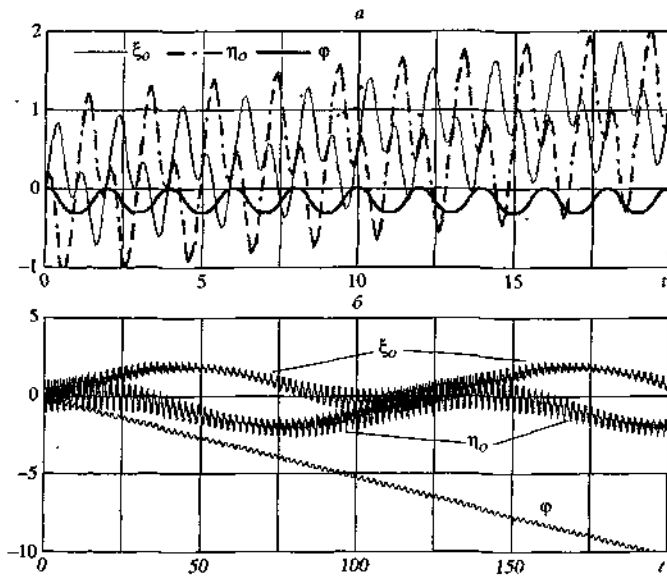
ходит ту же траекторию, но с другой скоростью (т.е. движение точки описывается функциями  $\xi(h(t))$ ,  $\eta(h(t))$ , где функция  $\tau \rightarrow h(t)$  монотонная), то движение системы описывается функциями  $\varphi(h(t))$ ,  $R(h(t))$ .

Отметим далее следующую качественную особенность движения тела в резонансном случае. Определим “эффективную” скорость тела в случае движения точки  $m$  с постоянной скоростью по замкнутому контуру  $\gamma$  как  $v_e(t) = R(t)/t$ . Если при  $\Lambda = 0$  смещение тела за период  $T$  равно

$$\delta_0 = R(T) - R(0) \neq 0$$

то очевидно, что при  $t \rightarrow \infty$

$$v_e(t) = \frac{\delta_0}{T} + \frac{O(t)}{t}$$



Фиг. 4

Таким образом, тело будет смещаться в среднем со скоростью  $\delta_0/T$ .

Как непосредственно вытекает из сказанного выше, при движении точки  $m$  по тому же контуру  $\gamma$  с большей скоростью тело получит то же смещение  $\delta_0$ , но это произойдет за меньшее время. Отсюда немедленно следует, что, заставляя точку проходить один и тот же "резонансный" контур за все уменьшающиеся промежутки времени, можно добиться ускоренного движения тела в целом.

Рассмотрим, например, следующий закон движения точки. Пусть точка движется с постоянной скоростью по замкнутому резонансному контуру и совершает один оборот за время  $T$ . Затем точка совершает два оборота с удвоенной скоростью и т.д. На  $n$ -м цикле точка совершает  $n$  оборотов со скоростью, превышающей начальную в  $n$  раз.

Подсчитаем эффективное ускорение тела. За время  $t_n = nT$  смещение тела (по прямой) равно

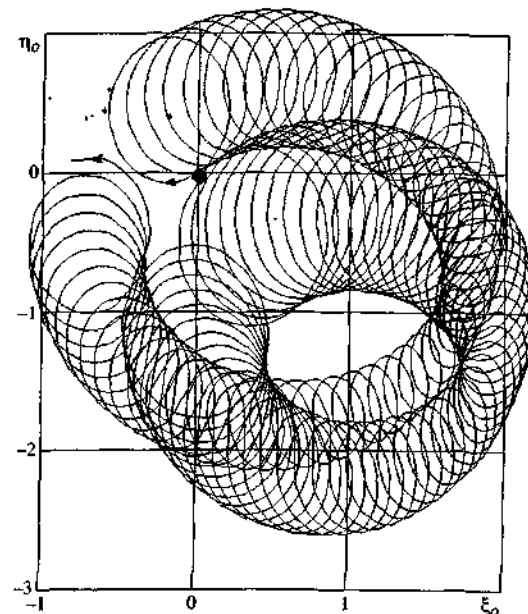
$$\delta_n = (n+1)n\delta_0/2$$

Эффективная скорость тела на  $n$ -м цикле равна

$$v_n = n\delta_0/T = (\delta_0/T^2)t_n$$

Предполагая на этом основании движение тела равноускоренным с эффективным ускорением  $a_e = \delta_0/T^2$ , найдем соответствующее смещение за время  $t_n$ :  $\delta = a_e t_n^2/2 = n^2\delta_0/2$ , что при достаточно больших  $n$  совпадает с величиной  $\delta_n$ , подтверждая тем самым предположение об ускоренном характере движения тела в рассмотренном случае.

Подчеркнем, что фактическая "тяговая" сила создается за счет неограниченного увеличения энергии относительного движения точки  $m$ .



Фиг. 5

4. Движение в однородном силовом поле. Усложним задачу и будем считать, что система тело плюс жидкость плюс точка находится в поле силы тяжести. Пусть  $F$  — постоянная по величине и направлению сила, действующая на рассматриваемую систему; считаем, что эта сила направлена против оси  $y$ .

Как следует из результатов разд. 3, за счет подходящего движения точки  $m$  внутри корпуса под действием внутренних сил тело может постоянно подниматься вверх. При этом энергия относительного движения точки  $m$  возрастает со временем. Напротив, оказывается, что если относительная скорость точки  $m$  ограничена (т.е. ограничены функции  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$ ), то  $y(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом, тело в итоге будет падать вниз при сколь угодно малой силе  $F$ .

Докажем это утверждение. Из уравнений (1.7) следуют соотношения  $\dot{P}_1 = 0$ ,  $P_2 = -F$ . Немного расширяя задачу и считая, что в исходном состоянии (до начала движения точки) тело имело некоторый импульс  $(c_1, c_2)_{xy}$ , получаем, что  $P_1 = c_1$ ,  $P_2 = -Ft + c_2$ , где  $c_1, c_2 = \text{const}$ . Сдвигом начала отсчета времени всегда можно добиться, чтобы  $c_2 = 0$ . Обозначим  $c_1 = c$ .

Рассматривая импульс в проекциях на подвижные оси, с учетом выражения (1.4) находим

$$(a_1 + m)u + m(\xi - \omega\eta) = c \cos \varphi - Ft \sin \varphi \quad (4.1)$$

$$(a_2 + m)v + m(\eta + \omega\xi) = -c \sin \varphi - Ft \cos \varphi \quad (4.2)$$

Представляет интерес движение тела по вертикали, поэтому воспользуемся вторым из соотношений (1.2). Выразив из уравнений (4.1) и (4.2)  $u$  и  $v$ , получим

$$y = -\frac{m}{a_1 + m}(\xi - \eta\phi)\sin\phi + \frac{c\cos\phi\sin\phi}{a_1 + m} - \frac{m}{a_2 + m}(\eta + \xi\phi)\cos\phi - \frac{c\sin\phi\cos\phi}{a_2 + m} - Fr \left[ \frac{\sin^2\phi}{a_1 + m} + \frac{\cos^2\phi}{a_2 + m} \right] \quad (4.3)$$

Выражение в квадратных скобках не меньше значения  $\lambda$ , где

$$\lambda = \min\left(\frac{1}{a_1 + m}, \frac{1}{a_2 + m}\right)$$

Следовательно, интеграл от последнего слагаемого в правой части соотношения (4.3) стремится к  $-\infty$  по крайней мере не медленнее, чем  $\lambda Fr^2/2$ .

Согласно предположению, функции  $\xi$  и  $\eta$  ограничены. Следовательно, сумма остальных слагаемых в выражении для  $\dot{y}$ , не содержащих  $\phi$ , ограничена. Поэтому интеграл от этих слагаемых по интервалу  $[0, t]$  растет не быстрее линейной функции  $t$ , т.е. ограничен некоторой функцией  $\mu$ .

Далее, оценим интеграл от суммы слагаемых, содержащих  $\phi$ .

$$\begin{aligned} & -\int_0^t \left[ \frac{m}{a_1 + m} \eta \frac{d}{dt}(\cos\phi) + \frac{m}{a_1 + m} \xi \frac{d}{dt}(\sin\phi) \right] dt = \\ & = \left( \frac{m}{a_1 + m} \eta \cos\phi + \frac{m}{a_1 + m} \xi \sin\phi \right) \Big|_0^t + \int_0^t \left( \frac{m \cos\phi}{a_1 + m} \eta + \frac{m \sin\phi}{a_2 + m} \xi \right) dt \end{aligned} \quad (4.4)$$

Так как  $\xi, \eta$  ограничены (точка  $m$  всегда находится внутри тела) вместе со своими производными  $\dot{\xi}, \dot{\eta}$  (кинетическая энергия относительного движения ограничена), то сумма (4.4) не превосходит величины  $v_1 + v_2 t$ , где  $v_1, v_2$  – некоторые постоянные.

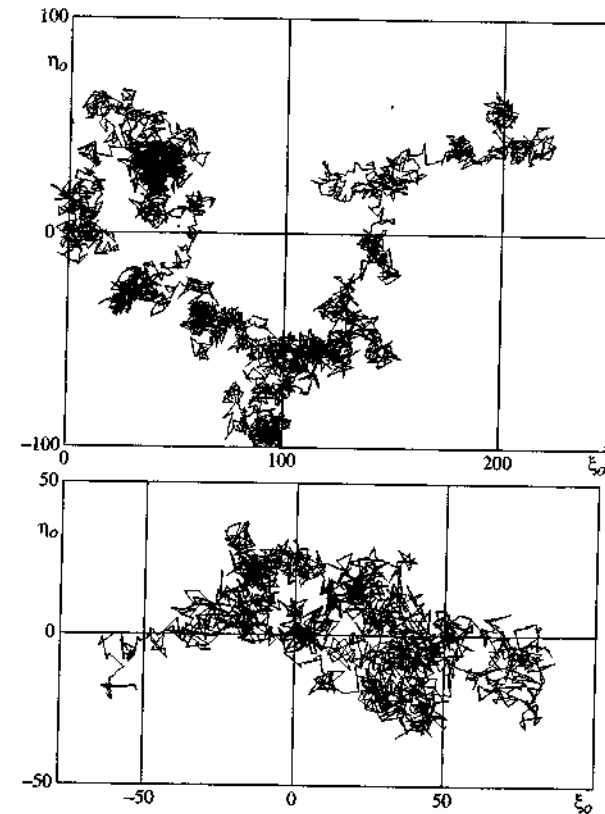
Итак,

$$y(t) \leq v_1 + (v_2 + \mu)t - \lambda Fr^2/2$$

Остается заметить, что правая часть этого неравенства стремится к  $-\infty$ , когда  $t \rightarrow \infty$ .

**5. Движение тела, порождаемое случайным блужданием внутренней точки.** Открытым остается вопрос о характере движения тела в отсутствие внешних сил, когда внутренняя точка перемещается по траектории "общего вида". В первую очередь, интерес вызывает случай движения точки с ограниченной скоростью. Для исследования задачи в первом приближении применим вероятностный подход, когда в качестве траектории общего вида рассматривается случайная траектория. В качестве иллюстрации приведем результаты численных расчетов траекторий движения тела, которые порождаются случайными перемещениями точки внутри корпуса.

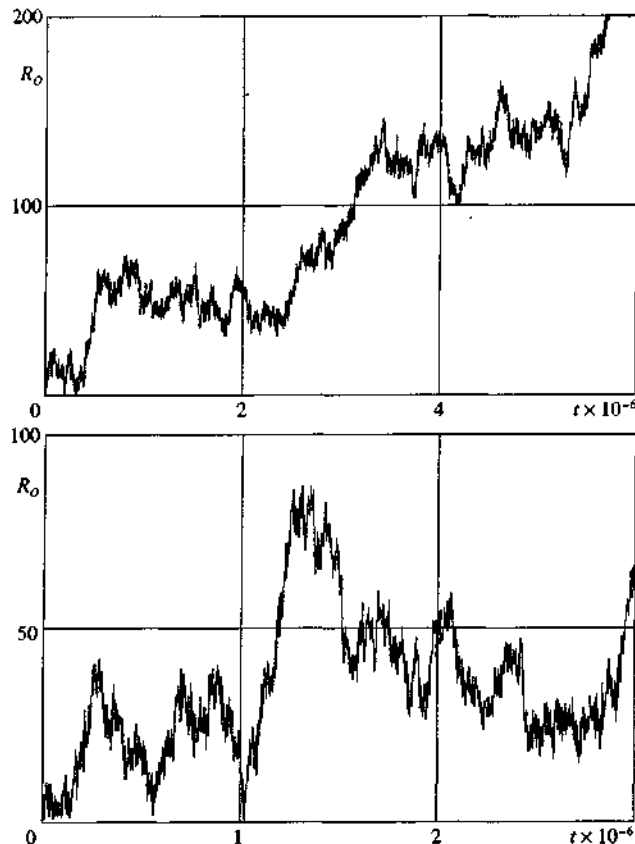
Ограничимся следующей постановкой. Пусть точка  $m$  совершает случайное блуждание (см., например, [7]) по узлам квадратной сетки, ориентированной по осям подвижной системы координат. Предположим, что за один шаг точка перемещается из текущего узла в один из соседних, при этом на четных шагах движение происходит вдоль одной из координатных осей, а на нечетных – вдоль другой (с вероятностью 0.5 в положительном или отрицательном направлении). Закон движения принимает вид одинаковым для всех шагов. Чтобы обеспечить нахождение точки внутри корпу-



Фиг 6

са, при проведении расчетов используется схема с отражением. Ограничим область возможного движения точки  $m$  квадратом с центром в точке  $O$ . После попадания точки на сторону указанного квадрата ее перемещение за пределы квадрата запрещается: на шаге, когда направление движения точки перпендикулярно границе, точка с вероятностью 1 перемещается внутрь квадрата.

В расчетах размер квадрата был принят равным 20 линейным единицам (шагам). Как было показано выше, конфигурация траектории тела зависит от конфигурации траектории точки и не зависит от "скоростного режима" движения точки. Для удобства реализации процедуры численного интегрирования определяющей системы был выбран следующий режим движения точки  $m$ : в узлах точка покоится (а это означает, что и вся система тело плюс жидкость плюс точка находится в состоянии покоя); движение точки от исходного узла до середины отрезка, вдоль которого она перемещается, является равноускоренным, а затем – равнозамедленным.



Фиг. 7

Сформулированная задача описывается теми же соотношениями (2.11), (2.4) с той лишь разницей, что при их численном интегрировании значения функций  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$ ,  $\dot{\xi}(t)$ ,  $\dot{\eta}(t)$ , задающих относительное движение точки  $m$ , вычисляются с учетом случайного выбора направления движения. В соответствующей компьютерной программе для этих целей используется датчик случайных чисел.

На фиг. 6 показаны два примера траекторий движения тела при следующих значениях параметров:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 7$ ,  $b = 10$ ,  $m = 1$ . На фиг. 7 приведены соответствующие графики изменения во времени расстояния от центра тела до исходного положения.

В каждом расчете точка  $m$  совершала от  $3 \cdot 10^6$  до  $6 \cdot 10^6$  шагов. Небольшое количество проведенных расчетов – достаточно длительных по времени – составляет слишком малую статистическую выборку, чтобы на ее основе можно было сделать сколько-нибудь обоснованные выводы статистического плана. Тем не менее можно

отметить следующие качественные результаты: во-первых, при увеличении длительности “наблюдения” (числа шагов) отмечалось увеличение максимального расстояния, на которое перемещалось тело, и во-вторых, в большинстве реализаций имел место возврат траектории в область начала координат. Заметим, что такое поведение соответствует свойствам классического случайного блуждания на плоскости [7], траектории которого, как известно, возвращаются в начальную точку с вероятностью 1.

Работа выполнена в рамках программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-136.2003.1) и программы “Интеграция” (А-00-97).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Lamb H Hydrodynamics. N.Y.: Dover publ., 1945 = Ламб Г. Гидродинамика. М.: Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. Kirchhoff G. Vorlesungen über Mathematische Physik. Bd. 1. Mechanik. Leipzig: B. Teubner, 1897 = Кирхгоф Г. Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
3. Козлов В В., Рамоданов С М. О движении изменяемого тела в идеальной жидкости // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 592–601.
4. Козлов В В., Рамоданов С М. О движении в идеальной жидкости тела с жесткой оболочкой и меняющейся геометрией масс // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 4. С. 478–481.
5. Miloh T., Galper A. Self-propulsion of general deformable shapes in a perfect fluid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1993. V. 442. No. 1915. P. 273–299.
6. Galper A., Miloh T. Dynamic equations of motion for a rigid or deformable body in an arbitrary non-uniform potential flow field // J. Fluid Mech. 1995. V. 295. P. 91–120.
7. Feller W. An Introduction to Probability Theory and its Applications. N.Y., etc.: Wiley, 1970 = Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984. 527 с.

Москва  
e-mail: kozlov@pran.ru  
onish@ipmnet.ru

Поступила в редакцию  
25.III.2003