

УДК 517.2

## О ВЕСОВЫХ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ СЛАБОЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В. В. Козлов, Т. Мадсен, А. А. Сорокин

**1. Средние Рисса.** Наша цель — обобщить и несколько усилить классический результат С. Н. Бернштейна [1] о законе больших чисел для слабо коррелированных случайных величин. Напомним сначала теорему Бернштейна.

Рассматривается последовательность случайных величин  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$  с нулевыми математическими ожиданиями и конечными дисперсиями  $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots$ . Эти величины не предполагаются независимыми, и поэтому их попарные ковариации  $R_{i,j} = \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = E(\xi_i \xi_j)$ , вообще говоря, отличны от нуля. Теорема Бернштейна утверждает, что если

- 1) дисперсии  $\sigma_n^2$  ограничены,
  - 2)  $|R_{i,j}| \leq \varphi(|i-j|)$ , причем  $\varphi(m) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ ,
- то для любого  $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{\xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n}{n+1}\right| \geq \varepsilon\right\} \rightarrow 0 \quad (1)$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Условия 1 и 2 можно несколько ослабить, заменив их следующими:

$$\sigma_0^2 + \dots + \sigma_n^2 = o(n^2), \quad (2)$$

$$[\varphi(0) + \varphi(1) + \dots + \varphi(n)]/(n+1) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Итак, из (2) и (3) следует (1). Именно это утверждение мы и собираемся обобщить.

Основная идея обобщения состоит в замене средних арифметических в (1) весовыми средними более общего вида:

$$\frac{p_0 s_0 + p_1 s_1 + \dots + p_n s_n}{p_0 + \dots + p_n}. \quad (4)$$

Здесь  $p_j \geq 0$  и  $\sum p_j = \infty$ . Такие средние часто называются средними Рисса. С ними связан метод суммирования: если последовательность (4) при  $n \rightarrow \infty$  сходится к  $s$ , то говорят, что  $s_n \rightarrow s(R, p_n)$ . Этот метод линеен и регулярен (теорию см., например, в [2]). При  $p_0 = p_1 = \dots$  средние (4) превращаются в обычные средние арифметические. Будем предполагать дополнительно, что

$$\frac{p_n}{p_0 + \dots + p_n} \rightarrow 0 \quad (5)$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Это условие естественно: если, напротив, отношения в (5) отделены от нуля, то  $(R, p_n)$ -сходимость эквивалентна обычной сходимости. Однако с точки зрения закона больших чисел обычной сходимости явно недостаточно.

Наш основной результат составляет

**Теорема 1.** *Если*

$$\frac{p_0^2 \sigma_0^2 + p_1^2 \sigma_1^2 + \dots + p_n^2 \sigma_n^2}{(p_0 + p_1 + \dots + p_n)^2} \rightarrow 0 \quad (6)$$

и

$$\frac{p_0 R_{0,n+1} + p_1 R_{1,n+1} + \dots + p_n R_{n,n+1}}{p_0 + p_1 + \dots + p_n} \rightarrow 0, \quad (7)$$

то для любого  $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{p_0 \xi_0 + p_1 \xi_1 + \dots + p_n \xi_n}{p_0 + p_1 + \dots + p_n}\right| \geq \varepsilon\right\} \rightarrow 0 \quad (8)$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Условие (6) можно заменить более простым:

$$\frac{\sigma_n^2 p_n}{p_0 + \dots + p_n} \rightarrow 0. \quad (9)$$

Более точно, с помощью теоремы Штольца и предположения (5) легко доказать, что из (9) следует (6).

С другой стороны, предполагая, что  $|R_{i,j}| \leq \varphi(|i-j|)$ , условие (7) можно представить в более простом и универсальном виде:

$$\frac{p_0\varphi(n+1) + p_1\varphi(n) + \dots + p_n\varphi(1)}{p_0 + p_1 + \dots + p_n} \rightarrow 0. \tag{10}$$

Средние такого вида часто называются средними Вороного, и (10) принято обозначать так:  $\varphi(n+1) \rightarrow 0 (W, p_n)$ . Условие (5) — критерий регулярности  $(W, p_n)$ -метода. В частности, если  $\varphi(n) \rightarrow 0$ , то заведомо выполнено (10) и, следовательно, (7).

Что нового дает теорема 1? Классическое условие (2) означает, что дисперсии  $\sigma_n^2$  могут расти медленнее  $n$ ; точнее, если  $\sigma_n^2 = o(n)$ , то имеет место (2). Если же  $\sigma_n^2 = cn (c = \text{const} > 0)$ , то (2) не выполняется и хорошо известно, что в этом случае закон больших чисел (1), вообще говоря, несправедлив даже для независимых случайных величин (см. по этому поводу [3, гл. X]).

Положим  $p_{n-1} = 1/n (n \geq 1)$ . Тогда соотношение (9) принимает вид  $\sigma_n^2 = o(n \ln n)$ . В частности, дисперсии могут линейно расти вместе с  $n$  и мы имеем дело с законом больших чисел в форме (8), если, конечно, ковариации  $R_{i,j}$  равномерно по  $|i-j|$  стремятся к нулю (или, более общо, справедливо условие (7) с весовыми коэффициентами  $p_{n-1} = 1/n$ ).

Это наблюдение можно обобщить. Пусть  $l_m(x)$  — итерированный натуральный логарифм:  $l_1 = \ln, l_2 = \ln(\ln), \dots$ . Если  $\sigma_n^2 = o(n l_1(n) l_2(n) \dots l_m(n))$  и  $\varphi(n) \rightarrow 0$ , то имеет место (8) с весовыми коэффициентами

$$p_n = [n l_1(n) \dots l_{m+1}(n)]^{-1}. \tag{11}$$

Следует иметь в виду, что сила такого  $(R, p_n)$ -метода возрастает с ростом  $m$ . И наоборот, сила соответствующего  $(W, p_n)$ -метода убывает. Тем не менее соотношение (10) заведомо выполнено, если  $\varphi(n) \rightarrow 0$  (благодаря свойству (5)).

Идея обобщения закона больших чисел с использованием методов суммирования, отличных от метода Чезаро, конечно, не нова. Упомянем работы [4, 5], а также [6, 7], где закон больших чисел (в том числе и усиленный) обсуждается с точки зрения эргодической теории. В этих работах можно найти дальнейшие ссылки. Новизна нашего подхода состоит в том, что рассматривается случай слабозависимых случайных величин и условия сходимости самих случайных величин и их ковариаций оказались естественным образом связанными с суммируемостью двумя “двойственными” методами Рисса и Вороного. Кроме того,  $(R, p_n)$ -методы, определяемые последовательностью (11), не удовлетворяют условиям, которые принимаются в [4, 5].

**2. Доказательство основной теоремы.** Доказательство теоремы 1 опирается на неравенство Чебышева

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2},$$

где  $\sigma^2(X)$  — дисперсия случайной величины  $X$  с нулевым математическим ожиданием. Полагая

$$X = \frac{p_0\xi_0 + p_1\xi_1 + \dots + p_n\xi_n}{p_0 + \dots + p_n},$$

получаем формулу для дисперсии

$$\sigma^2(X) = \frac{\sum p_k^2 \sigma_k^2}{(\sum p_k)^2} + \frac{2 \sum_{i < j} p_i p_j R_{i,j}}{(\sum p_k)^2}. \tag{12}$$

Необходимо проверить, что эта сумма стремится к нулю, когда  $n \rightarrow \infty$ . Первое слагаемое стремится к нулю согласно (6). Так как  $\sum_{k=0}^n p_k \rightarrow \infty$ , то для вычисления предела второй суммы в (12) можно воспользоваться теоремой Штольца:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2p_{n+1} \sum_{k=0}^n p_k R_{k,n+1}}{(\sum_{k=0}^{n+1} p_k)^2 - (\sum_{k=0}^n p_k)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sum_{k=0}^n p_k R_{k,n+1}}{2(p_0 + \dots + p_n) + p_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n p_k R_{k,n+1}}{p_0 + \dots + p_n} = 0$$

согласно (7), что и требовалось.

**3. Средние Вороного.** Сформулируем аналог теоремы 1, когда средние Рисса заменяются средними Вороного. Вообще, в задачах подобного рода метод Вороного более предпочтителен, поскольку любые два регулярных метода Вороного совместны: если  $s_n \rightarrow s(W, p_n)$  и  $s_n \rightarrow s'(W, p'_n)$ , то  $s' = s$ . Отметим, что разные методы могут суммировать одну и ту же последовательность к разным пределам (см. [2]).

**Теорема 2.** Если

$$\frac{p_0^2 \sigma_n^2 + p_1^2 \sigma_{n-1}^2 + \dots + p_n^2 \sigma_0^2}{(p_0 + \dots + p_n)^2} \rightarrow 0 \quad (13)$$

и

$$\varphi(n) \rightarrow 0(W, p_n), \quad (14)$$

то для любого  $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{p_0 \xi_n + p_1 \xi_{n-1} + \dots + p_n \xi_0}{p_0 + \dots + p_n}\right| \geq \varepsilon\right\} \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Это утверждение доказывается так же, как и теорема 1. К сожалению, условие (14) нельзя заменить более общим условием типа (7), которое содержит только ковариации  $R_{0,n+1}, \dots, R_{n,n+1}$ .

К обсуждаемому кругу вопросов можно подойти с иной стороны. Рассмотрим случай, когда  $\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \dots$  (например, случайные величины  $\xi_0, \xi_1, \dots$  одинаково распределены, но зависимы). Тогда условия (6) и (13) заведомо выполнены ввиду предположения (5) (опять-таки по теореме Штольца). Можно рассмотреть случай, когда  $p_n$  монотонно возрастает и при этом остается справедливым соотношение (5). Примером служит последовательность  $p_n = \exp n^\alpha$ , где  $0 < \alpha < 1$ . С ростом  $\alpha$  "сила" соответствующих  $(W, p_n)$ -методов возрастает и поэтому мы будем иметь все более слабые условия на убывание ковариаций  $\varphi(n)$ . С другой стороны, сила  $(R, \exp n^\alpha)$ -методов убывает и при  $\alpha \rightarrow 1$  эти методы неограниченно приближаются к обычной сходимости. Но тогда сходимость по вероятности средних Рисса для случайных величин  $\xi_0, \xi_1, \dots$  к нулю будет более тонким (а следовательно, и более глубоким) фактом.

**4. О возможной скорости возрастания дисперсий.** Как отмечено в п. 1, если

$$\sigma_n^2 = n l_1(n) \dots l_m(n) \quad (15)$$

( $l_k$  — итерированный логарифм) и  $\varphi(n) \rightarrow 0$ , то дисперсия случайной величины  $\sum_{k=0}^n p_k \xi_k / \sum_{k=0}^n p_k$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Спрашивается: справедливо ли данное свойство в тех случаях, когда последовательность дисперсий  $\sigma_n^2$  возрастает быстрее (15) (например, когда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k^2} \quad (16)$$

сходится)? Ответ оказывается отрицательным даже для *независимых* случайных величин. Действительно, ввиду неравенства

$$\frac{\sum_{k=0}^n p_k^2 \sigma_k^2}{\sum_{k=0}^n p_k^2} \geq \frac{1}{\sum_{k=0}^n \sigma_k^{-2}}$$

ряд (16) расходится, так как левая часть этого неравенства стремится к нулю согласно предположению.

Мы рассмотрим поставленный вопрос для более общих *регулярных* матричных методов суммирования  $T = (t_{ij})$  (к которым относятся методы Рисса и Вороного). Пусть  $\eta_n = \sum_{j=0}^{\infty} t_{nj} \xi_j$ , где  $\xi_0, \xi_1, \dots$  — последовательность *независимых* случайных величин с нулевыми средними и ненулевыми дисперсиями  $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots$ . Предполагается, что случайные величины  $\eta_n$  имеют конечные дисперсии

$$D(\eta_n) = \sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}^2 \sigma_j^2 \quad (17)$$

(эти ряды сходятся для всех  $n \geq 0$ ).

**Теорема 3.** Ряд (16) расходится тогда и только тогда, когда существует регулярный матричный метод с неотрицательными  $t_{ij}$ , такой, что последовательность дисперсий (17) стремится к нулю.

Действительно, по неравенству Коши

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}^2\right)^2 / \sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}^2 \sigma_j^2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_j^2}. \quad (18)$$

Так как метод  $(t_{ij})$  регулярен, то (по теореме Теплица [2]) ряд  $\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}$  сходится при всех  $n$  и при  $n \rightarrow \infty$  эта сумма стремится к единице. Поскольку  $D(\eta_n) \rightarrow 0$ , левая часть (18) стремится к бесконечности при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, ряд (16) расходится.

Обратно, пусть ряд (16) расходится. Тогда для любого целого  $n \geq 0$  величина  $M_n = \min \left\{ M : \sum_{j=n}^M \frac{1}{\sigma_j^2} \geq n \right\}$  конечна. Положим

$$S_n = \sum_{j=n}^M \frac{1}{\sigma_j^2}. \quad (19)$$

Ясно, что  $S_n \geq n$ . Рассмотрим следующий матричный метод суммирования:  $t_{nj} = (S_n \sigma_j^2)^{-1}$ , если  $n \leq j \leq M_n$ , и  $t_{nj} = 0$  в противном случае. Этот метод регулярен. Действительно,

$$\sum t_{nj} = \frac{1}{S_n} \sum_{j=n}^M \frac{1}{\sigma_j^2} = 1$$

ввиду (19) и определения  $t_{nj}$ . Далее,  $t_{nj} \leq \frac{1}{n \sigma_j^2}$ . Следовательно,  $t_{nj} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $j$ . Остается применить критерий регулярности Теплица [2].

Наконец,

$$D(\eta_n) = \left(\sum_{j=n}^M \frac{1}{\sigma_j^2}\right)^{-2} \sum_{j=n}^M \sigma_j^2 \frac{1}{\sigma_j^4} = \left(\sum_{j=n}^M \frac{1}{\sigma_j^2}\right)^{-1} \leq \frac{1}{n}.$$

Откуда  $D(\eta_n) \rightarrow 0$ , что и требовалось.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 01-01-22004 и гранта программы "Ведущие научные школы" № НШ-136.2003.1.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернштейн С.Н. О законе больших чисел // Сообщ. Харьков. матем. о-ва. Сер. 2. 1918. 16. 82-87.
2. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. М.: Мир, 1984.
4. Frank W.E., Hanson D.L. Some results giving rates of convergence in the law of large numbers for weighted sums of independent random variables // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. 124, N 2. 347-359.
5. Hanson D.L., Wright F.T. Some convergence results for weighted sums of independent random variables // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. 1971. 19. 81-89.
6. Krengel U. Ergodic Theorems. Berlin: Walter de Gruyter, 1985.
7. Козлов В.В. Суммирование расходящихся рядов и эргодические теоремы // Тр. Семинара им. И.Г. Петровского. 2002. 22. 142-168.

Поступила в редакцию  
17.03.04