ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2004, том 398, № 3, с. 314–318

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ НА ТОРЕ

© 2004 г. Академик В. В. Козлов, член-корреспондент Д. В. Трещев

Поступило 17.05.2004 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть

$$H = \frac{1}{2}(p, p) + \varepsilon V(\varepsilon) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \varepsilon V(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (1)$$

есть классический гамильтониан, $x \bmod 2\pi$ – угловые обобщенные координаты, p – сопряженные импульсы, $V: \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ – потенциальная энергия, ε – малый параметр. Операция квантования

$$x \mapsto \hat{x}, \quad p \mapsto \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

ставит ему в соответствие дифференциальный оператор второго порядка

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2\Delta}{2} + \varepsilon\hat{V}(x), \quad (2)$$

где Δ – оператор Лапласа, а $\hat{x}$ и $\hat{V}(x)$ – операторы умножения на x и $V(x)$ соответственно.

Пуанкаре изучал задачу о наличии у классической системы с гамильтонианом (1) дополнительного интеграла в виде ряда по степеням малого параметра

$$F = F_0(x, y) + \varepsilon F_1(x, y) + \varepsilon^2 F_2(x, y) + \ldots \quad (3)$$

с гладкими коэффициентами F_k, которые 2π-периодически зависят от угловых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Такие интегралы Пуанкаре называл однозначными. При этом, конечно, предполагается, что функции (1) и (3) независимы. Важную роль в условиях существования новых однозначных интегралов играет строение резонансного множества

$$\bigcup_{k \in Z^n} \{p \in \mathbb{R}^n: (k, p) = 0, v_k \neq 0\}, \quad (4)$$

где v_k – коэффициенты разложения потенциальной энергии в ряд Фурье:

$$V(x) = \sum v_k e^{i(k, x)}.$$

Детали см. в [1, 2].

Мы будем рассматривать похожую задачу о наличии однозначных операторов

$$\hat{A} = \hat{A}_0 + \varepsilon\hat{A}_1 + \ldots, \quad (5)$$

коммутирующих с оператором Гамильтона (2): $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$. Здесь скобки $[\cdot, \cdot]$ обозначают квантовый коммутатор:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -\frac{1}{i\hbar}(\hat{A} \circ \hat{B} - \hat{B} \circ \hat{A}).$$

Однозначность означает, что коэффициенты формального по ε ряда (5) имеют вид

$$\hat{A}_k = \sum_\mu a_\mu^{(k)}(x)(-i\hbar\partial)^\mu, \quad \mu \in \mathbb{Z}_+^n, \quad (6)$$

где $\partial^\mu = \partial_n^{\mu_1}\partial_n^{\mu_2} \ldots \partial_n^{\mu_n}$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $a_\mu^{(k)}(x)$ – гладкие 2π-периодические функции координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (вообще говоря, комплекснозначные). Будем предполагать, что операторы (5) и (2) независимы. Это предположение будет уточнено ниже.

Дифференциальному оператору (6) сопоставим его символ

$$A_k(x, p) = \mathrm{symb}\hat{A}_k = \sum_\mu a_\mu^{(k)}(x)p^\mu,$$

т.е. формальный степенной ряд по переменным $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Поскольку в записи оператора (6) все дифференцирования отнесены вправо, соответствие между операторами и их символами взаимно однозначное.

Ниже нам потребуются два свойства символов:

$$\mathrm{symb}[\hat{A}, \hat{V}] = -\frac{1}{i\hbar}(A(x, p - i\hbar\partial) - A(x, p))V(x), \quad (7)$$

$$\mathrm{symb}[\hat{A}, -\Delta] = (2(p, \partial) - i\hbar\partial^2)A(x, p). \quad (8)$$

Здесь $\partial = (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$ и оператор Лапласа $\partial_2 = (\partial, \partial) = \Delta$ действуют на функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Соотношения (7) и (8) проверяются прямым вычислением.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

2. РЕЗОНАНСЫ

Разлагая левую часть равенства $[\hat{A}, \hat{H}] = 0$ в ряд по степеням ε, получаем цепочку коммутационных соотношений:

$$[\hat{A}_0, -\Delta] = 0, \tag{9}$$

$$[\hat{A}_0, \hat{V}] + \frac{1}{2}[\hat{A}_1, -\Delta] = 0, \tag{10}$$

....

Покажем сначала, что оператор $\hat{A}_0$ не зависит от x. Для этого воспользуемся (9) и соотношением (8):

$$(2(p, \partial) - i\hbar\partial^2)A_0(x, p) = 0. \tag{11}$$

Представим функцию A_0 в виде ряда Фурье

$$A_0 = \sum a_k(p)e^{i(k, x)}, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Тогда из (11) получим бесконечную серию соотношений

$$[2(p, k) + \hbar(k, k)]a_k(p) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Поскольку при $k \neq 0$ выражение в квадратных скобках обращается в нуль только на одной гиперплоскости в $\mathbb{R}^n = \{p\}$, то $a_k(p) \equiv 0$ для всех $k \neq 0$. Что и требовалось.

Этот факт аналогичен замечанию Пуанкаре о том, что функция F_0 в разложении (3) зависит только от канонических импульсов. Если оператор $\hat{A}_0$ не зависит от x, то соотношение (9) заведомо выполнено.

Исследуем теперь соотношение (10). Используя тождества (7), (8) и разложения Фурье, получим

$$-\frac{1}{i\hbar}v_k(A_0(p - i\hbar\partial) - A_0(p))e^{i(k, x)} +$$

$$+\frac{1}{2}a_k(p)(2i(p, k) + i\hbar(k, k))e^{i(k, x)} = 0.$$

Здесь $a_k(p)$ – коэффициенты Фурье функции $A_1(x, p)$. Эти равенства можно представить в эквивалентном виде:

$$\frac{1}{\hbar}(A_0(p + \hbar k) - A_0(p))e^{i(k, x)}v_k +$$

$$+\frac{1}{2\hbar}((p + \hbar k, k + \hbar k) - (p, p))a_k(p) = 0 \tag{12}$$

для всех $k \in \mathbb{Z}^n$.

Положим теперь

$$2(p, k) + \hbar(k, k) = 0, \quad v_k \neq 0. \tag{13}$$

Тогда из (12) вытекает, что

$$A_0(p + \hbar k) = A_0(p). \tag{14}$$

Таким образом, роль резонансного множества (4) в квантовой механике играет объединение гиперплоскостей (13). В отличие от классического случая эти гиперплоскости не проходят через начало координат $p = 0$ и, если их бесконечно много, накапливаются в окрестности "бесконечно удаленных точек".

Наша цель – доказать, что в типичной ситуации из (14) вытекает, что A_0 – функция от (p, p). Если $A_0 = f((p, p))$, то $\hat{A}_0 = f(\Delta)$. Отсюда вытекает (по крайней мере на формальном уровне), что оператор (5) выражается через оператор Гамильтона (2) и поэтому не порождает новых законов сохранения. Действительно, оператор $\hat{A} - f(-2\hat{H})$ коммутирует с оператором $\hat{H}$ и его разложение по степеням ε не содержит свободного слагаемого:

$$\hat{A} - f(-2\hat{H}) = \varepsilon(\hat{A}_0' + \varepsilon\hat{A}_1' + \ldots).$$

Оператор в круглой скобке справа коммутирует с оператором $\hat{H}$, причем $\hat{A}_0'$ не зависит от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и также является функцией от оператора Лапласа. Следовательно,

$$\hat{A} = f(-2\hat{H}) + \varepsilon g(-2\hat{H}) + \ldots$$

Типичность ситуации состоит в том, что в разложении Фурье потенциальной энергии присутствуют практически все гармоники. Отсюда можно сделать вывод о том, что классическое резонансное множество (4) всюду плотно в $\mathbb{R}^n = \{p\}$. В свою очередь, это сразу же влечет зависимость функций $F_0(p)$ и (p, p).

Как уже отмечалось, в квантовом случае ситуация более сложная. Например, при $n = 1$ из (13) вытекает, что $p = -\hbar k/2$, и поэтому соотношение (14) принимает вид

$$A_0(\hbar k/2) = A_0(-\hbar k/2)$$

для всех целых k (если, конечно, все $v_k \neq 0$). Нам же надо показать, что A_0 – четная функция от p (или, что то же самое, A_0 – функция от p^2). Это заведомо так, если A_0 – полином относительно p. Однако в общем случае функция $A_0(p)$ необязательно четная. Вот простой пример: $A_0 = \sin\frac{2\pi p}{\hbar}$.

З а м е ч а н и е. Устремляя в (13) $\hbar$ к нулю, получаем резонансное соотношение в классическом случае. Это вполне соответствует известному переходу от квантовой механики к классической при стремлении к нулю постоянной Планка.

В работах [3, 4] обсуждается возможность распространения теории Пуанкаре на квантовые системы. Рассматривается задача о малых возмущениях линейной колебательной системы (модель Фредерикса). Однако, эта задача имеет косвенное отношение к теории Пуанкаре, поскольку невозмущенная система сильно вырождена и имеющееся резонансное соотношение отличается от (13). Чтобы приблизить рассмотрения [3, 4] к теории Пуанкаре, следует рассматривать "квазилинейные" гамильтоновы системы, нетривиально зависящие (кроме параметра ε) еще от одного параметра μ. В этом случае появляется несколько резонансов (при разных значениях μ), препятствующих существованию коммутирующего оператора, аналитически зависящего от ε и μ. Для классических систем эта идея реализована в [5] (см. также [2]).

3. УСЛОВИЯ НЕИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Наша задача свелась к следующей: найти условия, при которых из (13) и (14) вытекает, что $A_0(p)$ есть функция от (p, p). Рассмотрим сначала случай, когда оператор $\hat{A}$ является полиномом относительно дифференцирований $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n$ с однозначными на $\mathbb{T}^n$ коэффициентами. Тогда A_0 будет полиномом от $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Отметим, что во всех известных задачах операторы, коммутирующие с оператором Гамильтона, являются полиномами (или функциями от полиномов).

Спектром S потенциала $V(x)$ назовем множество целочисленных векторов $k \in \mathbb{Z}^n$ таких, что $v_k \neq 0$. Так как V вещественнозначен, множество S инвариантно при отражении $k \mapsto -k$. Множество $S \subset \mathbb{C}^n$ назовем ключевым (или множеством единственности) для пространства полиномов на $\mathbb{C}^n$, если любой полином, равный нулю в точках S, тождественно обращается в нуль на $\mathbb{C}^n$.

Ясно, что $\mathbb{Z}^n$ – ключевое множество. Укажем достаточное условие того, что множество S является ключевым. Прямую в $\mathbb{C}^n$, содержащую бесконечно много различных точек спектра S и проходящую через начало кординат, назовем опорной. Если совокупность всех опорных прямых образует ключевое множество, то S также ключевое множество. При $n = 2$ это условие означает, что имеется бесконечно много различных опорных прямых.

Т е о р е м а 1. *Если спектр S квантовой системы – ключевое множество для пространства полиномов в $\mathbb{C}^n$, то эта система не допускает полиномиальных по дифференцированиям операторов вида* (5), *независимых от оператора Гамильтона* (2).

Приведем д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы в простейшем нетривиальном случае, когда $n = 2$. Пусть $p = (p_1, p_2)$, $k = (k_1, k_2)$. Резонансное соотношение (13) будет выполнено, если положить

$$p_1 = -\frac{\hbar k_1}{2} + \alpha k_2, \quad p_2 = -\frac{\hbar k_2}{2} - \alpha k_1,$$

где α – комплексный параметр. Следовательно, равенство (14) принимает вид

$$A_0\left(-\frac{\hbar k_1}{2} + \alpha k_2, -\frac{\hbar k_2}{2} - \alpha k_1\right) = \\ = A_0\left(\frac{\hbar k_1}{2} + \alpha k_2, \frac{\hbar k_2}{2} - \alpha k_1\right). \tag{15}$$

Здесь мы положили $A(\cdot) = A_0(-i(\cdot))$.

Сначала заметим, что $p \mapsto A_0(p)$ – четная функция. Действительно, многочлен

$$A_0(p) - A_0(-p) \tag{16}$$

обращается в нуль в точках множества $\frac{S}{2}$. Поскольку спектр S – ключевое множество для пространства полиномов над $\mathbb{C}$, разность (16) – тождественный нуль.

Далее продифференцируем (15) по α и положим затем $\alpha = 0$:

$$\left(\frac{\partial A_0}{\partial p_1}\bigg|_{-\hbar k/2} - \frac{\partial A_0}{\partial p_1}\bigg|_{\hbar k/2}\right)k_2 - \\ -\left(\frac{\partial A_0}{\partial p_2}\bigg|_{-\hbar k/2} - \frac{\partial A_0}{\partial p_2}\bigg|_{\hbar k/2}\right)k_1 = 0.$$

Ввиду четности функции $A_0(p)$ это равенство принимает вид

$$\frac{\partial A_0}{\partial p_1}p_2 - \frac{\partial A_0}{\partial p_2}p_1 = 0 \tag{17}$$

в точках множества $\frac{S}{2}$. Ввиду ключевого свойства спектра S, многочлен в левой части (17) тождественно равен нулю. Но тогда из (17) вытекает, что A_0 есть функция от (p, p). Что и требовалось.

Теорема 1 легко распространяется на более общий случай, когда $A_0(p_1, \ldots, p_n)$ – мероморфная функция в компактифицированном пространстве n комплексных переменных $\overline{\mathbb{C}}^n$. В этом случае (по известной теореме Вейерштрасса–Гурвица) A_0 – рациональная функция от $p_1, \ldots, p_n$ (отношение двух полиномов).

4. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Положим теперь $\varepsilon = 1$ в выражении (2) для оператора Гамильтона и рассмотрим задачу о наличии дифференциального оператора

$$\hat{A} = \sum a_\mu(x)(-i\hbar\partial)^\mu, \quad \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n \le M \tag{18}$$

с периодическими по координатам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ коэффициентами, коммутирующего с оператором Гамильтона. Оператор (18) – полином относительно дифференцирований $\partial_1, \ldots, \partial_n$; M – степень этого полинома. Его можно представить в виде суммы по однородным формам (относительно ∂_j):

$$\hat{A}_M + \hat{A}_{M-1} + \ldots + \hat{A}_0. \tag{19}$$

Здесь k – степень однородного оператора $\hat{A}_k$. Пусть

$$A(x, p) = A_M(x, p) + A_{M-1}(x, p) + \ldots + A_0(x, p) \tag{20}$$

есть символ оператора (18) (19); $A_k(x, p)$ – полином по $p_1, p_2, \ldots, p_n$ степени k с однозначными на $\mathbb{T}^n$ коэффициентами.

Условие $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$ сводится к равенству

$$2\left(p, \frac{\partial}{\partial x}\right)A(x, p) - i\hbar\Delta A(x, p) - \\ - \frac{1}{i\hbar}(A(x, p - i\hbar\partial) - A(x, p))V(x) = 0. \tag{21}$$

Подставляя сумму (20) в это равенство и приравнивая нулю однородные формы по p, получаем цепочку зацепляющихся уравнений для последовательного нахождения $A_M, A_{M-1}, \ldots, A_0$.

Приравнивая нулю члены степени $M + 1$ в (21), получаем уравнение

$$\left(p, \frac{\partial}{\partial x}\right)A_M(x, p) = 0,$$

из которого легко следует, что старшая форма A_M многочлена (20) не зависит от x.

Приравнивая нулю сумму членов степени M в левой части (21), получим

$$2\left(p, \frac{\partial}{\partial x}\right)A_{M-1} - i\hbar\Delta A_M = 0.$$

Так как A_M зависит только от p, то форма A_{M-1} также не зависит от координат x.

Замечание. Для классических уравнений Гамильтона с гамильтонианом (1) (где $\varepsilon = 1$) последнее свойство имеет естественный аналог: суммы однородных форм четных и нечетных степеней полиномиального по импульсам первого интеграла также являются первыми интегралами.

С учетом этих свойств приравнивание нулю суммы слагаемых степени $M - 2$ приводит к уравнению

$$2\left(p, \frac{\partial}{\partial x}\right)A_{M-2} + \left(\frac{\partial A_M}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial x}\right)V = 0.$$

Это уравнение хорошо известно в теории интегрируемости классических гамильтоновых систем (см. [1, 2]). Из него, в частности, вытекает, что в точках обычного резонансного множества $\{(p, k) = 0, v_k \neq 0, k \neq 0\}$ функции A_M и (p, p) зависимы. С помощью этого факта легко доказывается

Теорема 2. *Предположим, что резонансное множество* (4) *является ключевым для пространства полиномов от n переменных.*

Тогда любой оператор вида (18), *коммутирующий с оператором Гамильтона $\hat{H}$, является полиномом от $\hat{H}$ с постоянными коэффициентами.*

В частности, если в разложении потенциальной энергии $V(x)$ присутствуют все гармоники, то квантовая система не допускает нетривиальных дифференциальных полиномиальных операторов, коммутирующих с оператором Гамильтона.

В случае двух степеней свободы условие теоремы 2 заведомо выполняется, если точки спектра S лежат на бесконечном числе различных прямых, проходящих через начало координат.

Будем говорить, что спектр S разделяется, если точки спектра лежат в объединении двух подпространств размерности $<n$, ортогонально пересекающихся в начале координат. Если спектр разделяется, то оператор Гамильтона (2) разлагается в сумму операторов Гамильтона двух подсистем исходной квантовой системы с n степенями свободы. Каждый из этих двух частичных операторов Гамильтона независим от $\hat{H}$ и коммутирует с $\hat{H}$.

Теорема 3. *Предположим, что потенциальная энергия V является тригонометрическим многочленом* (*спектр S конечен*).

Тогда нетривиальный полиномиальный оператор, коммутирующий с оператором Гамильтона, существует тогда и только тогда, когда спектр квантовой системы разделяется.

Эта теорема более сложная по сравнению с теоремой 2. Ее доказательство основано на тщательном анализе полного уравнения (21).

Мы высказываем гипотезу, что теорема 3 справедлива и в самом общем случае, когда спектр S бесконечен. Для классических гамильтоновых систем эта гипотеза обсуждалась в работах [6–8]. К сожалению, в полном объеме она пока не доказана даже для систем с двумя степенями свободы. Как показано в [8], если такая система допускает неприводимый полиномиальный интеграл степени n и ее спектр лежит на n прямых, проходящих через начало координат, то эти прямые отстоят одна от другой на угол $\frac{\pi}{n}$. Этот результат указывает на глубокие связи, существующие между непрерывными и дискретными симметриями уравнений динамики.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (02–01–00400, 02–01–01059), гранта Президента РФ (МД–261.2003.01) и INTAS 00–221.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пуанкаре А.* Избранные труды. М.: Наука, 1972. Т. 1.
2. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во "Удмурт. ун-т", 1995.
3. *Antoniou I.E., Prigogine I.* // Physica A. 1993. V. 192. P. 443–464.
4. *Antoniou I.E., Tusaki S.* // Intern. J. Quant. Chem. 1993. V. 46. P. 425–474.
5. *Козлов В.В.* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1976. № 1. С. 110–115.
6. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* // Мат. сб. 1988. Т. 135(177). № 1. С. 119–138.
7. *Бялый М.Л.* // Функцион. анализ и его прил. 1987. Т. 21. № 4. С. 64–65.
8. *Денисова Н.В., Козлов В.В.* // Мат. сб. 2000. Т. 191. № 2. С. 43–63.