ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2005, том 401, № 5, с. 603–606

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145 + 517.9

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ К СУЩЕСТВОВАНИЮ КВАНТОВЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

© 2005 г. Академик В. В. Козлов

Поступило 18.01.2005 г.

1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ

Вопрос о наличии дифференциальных операторов, коммутирующих с оператором Гамильтона, полезно выяснить в силу ряда причин. При этом предполагается, что дифференциальный оператор определен на всем конфигурационном пространстве и является полиномом относительно дифференцирований. Дело в том, что все известные коммутирующие операторы полиномиально зависят от дифференцирований (или являются функциями от полиномов).

Важность этой задачи подчеркивается тем обстоятельством, что эрмитовы дифференциальные операторы, коммутирующие с оператором Гамильтона, порождают, как известно, законы сохранения для квантовых систем. Кроме того, наличие коммутирующих операторов свидетельствует о регулярном поведении квантовой системы. В частности, условия отсутствия глобально определенных коммутирующих операторов играют существенную роль для строгого обоснования канонического распределения Гиббса в квантовой механике. Обсуждение этих вопросов в классической статистической механике см. в [1].

Мы рассматриваем вопрос о наличии нетривиальных полиномиальных дифференциальных операторов Гамильтона многомерной квантовой системы. Оператор называется нетривиальным, если он не выражается через оператор Гамильтона. Пусть M^n – компактное n-мерное конфигурационное пространство квантовой системы, $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ – локальные координаты, а $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – сопряженные импульсы. Мы исходим из классического гамильтониана

$$H = \frac{1}{2}\sum g^{kj}(x)y_k y_j + V(x), \tag{1}$$

где первое слагаемое – кинетическая энергия, а V – потенциальная энергия. Коэффициенты g^{kj} и потенциал V считаются гладкими (бесконечно дифференцируемыми) функциями. По обычным правилам квантования гамильтонианину (1) ставим в соответствие оператор Гамильтона

$$\hat{H} = \frac{\Delta}{2} + \hat{V}, \tag{2}$$

где

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{g}}\sum \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g}g^{kj}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

есть оператор Лапласа–Бельтрами римановой метрики на M, определяемой кинетической энергией, а $\hat{V}$ – оператор умножения на функцию V. Часто оператор (2) подправляют, добавляя слагаемое, пропорциональное кривизне римановой метрики

$$\sum g_{kj}(x)dx^k dx^j$$

(см., например, [2]). Однако, как будет видно дальше, такое усложнение оператора (2) не имеет никакого принципиального значения. В любом случае это дополнительное слагаемое, не зависящее от дифференцирований, можно отнести к потенциальной энергии.

Положим $\partial = (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$, где $\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial x^k}$, и пусть $\hat{F}(x, \partial)$ – полиномиальный дифференциальный оператор, определенный всюду на M и коммутирующий с оператором Гамильтона. Считается, что $\hat{F}$ гладко зависит от x. Мы не предполагаем, что оператор $\hat{F}$ эрмитов.

Условимся в записи оператора все дифференцирования относить вправо. Тогда полиномиальный дифференциальный оператор имеет следующий вид:

$$\hat{F} = \sum_{|k| \le N} f_{k_1, \ldots, k_n}(x)\partial_1^{k_1}\cdots\partial_n^{k_n},$$

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Москва
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

$k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $k_j \geq 0$ – целые числа, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Число N будем называть степенью полиномиального оператора и обозначать $\deg \hat{F}$. Положим

$$\operatorname{Symb}\hat{F} = \sum_{|k| \leq N} f_{k_1, k_2, \ldots, k_n}(x) p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}.$$

Этот однородный многочлен от n вспомогательных переменных $p_1, p_2, \ldots, p_n$ называется главным символом оператора $\hat{F}$.

Оказывается, наличие нетривиальных коммутирующих операторов накладывает существенные ограничения на топологию конфигурационного многообразия. Мы сначала сформулируем соответствующий результат для систем с двумя степенями свободы. В этом случае M^2 – это двумерная поверхность, которую будем предполагать ориентируемой. Ее топологическое строение, как известно, определяется ее родом (количество ручек, приклеенных к сфере).

Теорема 1. *Если род поверхности M^2 больше единицы, то оператор $\hat{F}$ – многочлен от $\hat{H}$ с постоянными коэффициентами.*

Другими словами, если M негомеоморфна сфере и тору, то квантовая система не допускает нетривиальных полиномиальных дифференциальных операторов, коммутирующих с оператором Гамильтона. Можно привести простые примеры квантовых систем с нетривиальными законами сохранения, у которых конфигурационное пространство гомеоморфно сфере и тору. Если M считать неориентированным, то к сфере и тору следует добавить проективную плоскость и бутылку Клейна. Это легко выводится из хорошо известного факта, что любая неориентируемая поверхность допускает неразветвленное 2-листное накрытие ориентируемой поверхностью. Теорема 1 – это квантовый аналог результата о топологических препятствиях к интегрируемости классических механических систем [3] (см. также [4]).

Теорема 1 допускает обобщение на многомерный случай. Правда, при этом речь идет о существовании $n = \dim N$ независимых полиномиальных операторов, коммутирующих с оператором Гамильтона. Полиномиальные дифференциальные операторы считаются независимыми, если независимы их главные символы как функции от x и p. Чтобы не загромождать изложения, мы будем считать все объекты аналитическими.

Теорема 2. *Предположим, что квантовая система допускает n независимых полиномиальных дифференциальных операторов, коммутирующих с оператором Гамильтона. Тогда*

$$b_k \leq C_n^k, \tag{3}$$

где b_k – k-е число Бетти многообразия M.

Это утверждение – аналог теоремы И.А. Тайманова [5] о топологических препятствиях к полной интегрируемости классических гамильтоновых систем. При $n = 2$ условие (3) совпадает с условием теоремы 1.

Полиномиальный дифференциальный оператор $\hat{F}$ наименьшей степени, коммутирующий с $\hat{H}$ и независимый от $\hat{H}$, назовем неприводимым (степень любого другого такого оператора не меньше $\deg \hat{F}$). Оказывается, что не только факт существования нетривиального коммутирующего оператора, но и степень неприводимого оператора также связана с топологией конфигурационного пространства. Продемонстрируем это на примере систем, у которых конфигурационное пространство – двумерный тор. Как известно, любую метрику на двумерном торе $\mathbb{T}^2$ можно привести к виду

$$\frac{a\,dx^2 + 2b\,dx\,dy + c\,dy^2}{g(x, y)}, \tag{4}$$

где $x, y \bmod 2\pi$ – угловые координаты на $\mathbb{T}^2$, a, b, c – постоянные (причем $a > 0$, $b^2 - ac < 0$), g – гладкая функция на $\mathbb{T}^2$ (2π-периодическая по x и y). Соответствующий оператор Лапласа–Бельтрами в (2) строится по римановой метрике (4).

Теорема 3. *Пусть g – тригонометрический многочлен и соответствующая квантовая система допускает неприводимый полиномиальный дифференциальный оператор $\hat{F}$, коммутирующий с оператором $\hat{F}$.*

Тогда $\deg \hat{F} \leq 2$.

Для классических систем такой результат установлен в работах [6, 7]. По-видимому, теорема 3 справедлива и в общем случае, когда g – произвольная гладкая функция на $\mathbb{T}^2$. По крайней мере неравенство $\deg \hat{F} \leq 2$ справедливо для всюду плотного множества квантовых систем. Не исключено, что в случае, когда конфигурационное пространство гомеоморфно двумерной сфере, степень неприводимого коммутирующего оператора не превосходит четырех.

2. ГЛАВНЫЕ СИМВОЛЫ

Пусть $[\hat{H}, \hat{F}] = \hat{H}\hat{F} - \hat{F}\hat{H}$ – коммутатор полиномиальных дифференциальных операторов, а

$$\{H, F\} = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial x_j} \right)$$

есть скобка Пуассона функций, заданных на кокасательном расслоении конфигурационного многообразия M.

Лемма о главном символе.

$$\mathrm{Symb}[\hat{H}, \hat{F}] = \{\mathrm{Symb}\hat{H}, \mathrm{Symb}\hat{F}\}.$$

Это утверждение проверяется простыми вычислениями.

Следствие. *Если полиномиальный дифференциальный оператор $\hat{F}$ коммутирует с оператором Гамильтона $\hat{H}$, то функция* $\mathrm{Symb}\,\hat{F}$ *– однородный по импульсам p первый интеграл классической системы с функцией Гамильтона*

$$H = \frac{1}{2}\sum g^{ij}(x)p_i p_j. \qquad (5)$$

Система с гамильтонианом (5) описывает движение по геодезическим линиям риманова многообразия (M, ds), где $ds^2 = \sum g_{jk}(x)dx^j dx^k$. Задача о наличии у таких систем нетривиальных интегралов рассматривалась давно, начиная с классических работ Биркгофа, Уиттекера и Дарбу (см. [8]). Однако в этих работах превалировала локальная точка зрения. Современная постановка задачи, восходящая к Пуанкаре, состоит в изучении условий существования интегралов, заданных во всем фазовом пространстве классической системы. Обзор известных результатов можно найти в [9].

Теорема 2 – непосредственное следствие результата работы [5] и леммы о главном символе. Теоремы 1 и 3 доказываются аналогично с использованием [3, 6]. Пусть, например, имеется коммутирующий с оператором Гамильтона полиномиальный дифференциальный оператор $\hat{F}$ квантовой системы на двумерной поверхности рода >1. Тогда его главный символ есть целая степень от кинетической энергии соответствующей классической системы с некоторым постоянным множителем: $\mathrm{Symb}\,\hat{F} = c(\mathrm{Symb}\,\hat{H})^m$, $m \in N$. Но тогда полиномиальный дифференциальный оператор $\hat{\Phi} = \hat{F} - c\hat{H}^m$ будет по-прежнему коммутировать с $\hat{H}$ и его степень меньше $\deg\hat{F}$. Применяя эту процедуру к оператору $\hat{F}$, понизим еще степень $\hat{\Phi}$. В итоге оператор $\hat{F}$ будет многочленом с постоянными коэффициентами от оператора Гамильтона $\hat{H}$.

Метод, основанный на редукции к уравнениям геодезических, позволяет дать общую оценку возможного количества независимых полиномиальных дифференциальных операторов, коммутирующих с оператором Гамильтона. Числом Биркгофа β гамильтоновой системы с гамильтонианом (5) назовем наибольшее количество функционально независимых интегралов этой системы в виде однородных полиномов по импульсам. Эта характеристика введена в работе [10], где, в частности, отмечено, что при добавлении потенциальной энергии число полиномиальных интегралов может только уменьшиться. Число Биркгофа зависит от топологических характеристик многообразия M. В частности, для двумерной ориентированной поверхности M рода g имеем: $\beta = 1$, если $g > 1$; $\beta \le 2$, если $g = 1$, и $\beta \le 3$, если $g = 0$.

Теорема 4. *Количество полиномиальных дифференциальных операторов с независимыми главными символами, коммутирующих с оператором Гамильтона* (2), *не превосходит* β.

Это простое утверждение имеет важные следствия. Укажем одно из них. Если геодезический поток на M эргодичен, то соответствующая квантовая система вообще не допускает нетривиальных полиномиальных дифференциальных операторов, коммутирующих с оператором Гамильтона. Этот вывод справедлив и для квантовых биллиардов.

3. НЕКОТОРЫЕ РОДСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

В связи с теоремами 1–4 возникают задачи, касающиеся полиномиальных законов сохранения уравнений квантовой механики. Классические аналоги некоторых из этих задач уже решены.

а) Верно ли, что если имеется независимый от оператора Гамильтона $\hat{H}$ оператор общего вида, коммутирующий с $\hat{H}$, то обязательно найдется нетривиальный полиномиальный дифференциальный оператор, также коммутирующий с $\hat{H}$?

б) Верно ли, что локально могут существовать неприводимые дифференциальные операторы сколь угодно высокой степени, коммутирующие с оператором Гамильтона? В классическом случае ответ положительный (см. [9]).

в) Рассмотрим классическую гамильтонову систему с торическим конфигурационным пространством $\mathbb{T}^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n \bmod 2\pi\}$ и функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\sum a_{ij}y_i y_j + V(x),$$

где $\|a_{ij}\|$ – положительно-определенная матрица с постоянными элементами, а V – аналитическая функция на $\mathbb{T}^n$. Верно ли, что после обычного квантования степень неприводимого полиномиального дифференциального оператора, коммутирующего с $\hat{H}$, не превосходит двух? Если V – тригонометрический многочлен, то это утверждение доказано в недавней работе [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козлов В.В.* Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. Москва–Ижевск: Ин-т компьют. исследований, 2002.
2. *Харт Н.* Геометрическое квантование в действии. М.: Мир, 1985.
3. *Козлов В.В.* // ДАН. 1979. Т. 249. № 6. С. 1299–1302.
4. *Колокольцов В.Н.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1982. Т. 46. № 5. С. 994–1010.
5. *Тайманов И.А.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1987. Т. 51. № 2. С. 429–435.
6. *Козлов В.В., Денисова Н.В.* / / Мат. сб. 1994. Т. 185. № 12. С. 49–64.
7. *Денисова Н.В.* // Мат. заметки. 1998. Т. 64. В. 1. С. 37–44.
8. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941.
9. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Издат. дом "Удмурт. ун-т", 1995.
10. *Козлов В.В.* // ПММ. 1998. Т. 62. В. 1. С. 3–11.
11. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* / / ТМФ. 2004. Т. 140. № 3. С. 460–479.