

УДК 517.951

О СУММИРУЕМЫХ С КВАДРАТОМ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА НА МНОГООБРАЗИЯХ

© 2006 г. член-корреспондент РАН И. В. Волович, академик В. В. Козлов

Поступило 08.02.2006 г.

Обычно задачи на определение собственных значений и суммируемых с квадратом собственных функций рассматриваются для эллиптических уравнений. Здесь, следуя [1], рассмотрим такую задачу для гиперболического уравнения Клейна–Гордона на псевдоримановом многообразии. Будет построена бесконечная серия суммируемых с квадратом решений уравнения Клейна–Гордона на многообразиях типа Фридмана, в частности на пространстве де Ситтера. Этим решениям соответствуют дискретный спектр масс и конечное действие.

1. УРАВНЕНИЕ КЛЕЙНА–ГОРДОНА НА МНОГООБРАЗИИ

Пусть M – $(n + 1)$ -мерное псевдориманово многообразие сигнатуры $(1, n)$ с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, \dots, n$. Рассмотрим уравнение Клейна–Гордона [2, 3] на M для вещественной функции f

$$\square f + \lambda f = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$\square f = \nabla_\mu \nabla^\mu f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu f),$$

g – определитель матрицы $\|g_{\mu\nu}\|$, вещественный параметр λ соответствует квадрату массы.

Ищем значения λ и решения $f \in C^2(M)$, удовлетворяющие условию [1]

$$\int_M f^2 \sqrt{|g|} dx < \infty. \quad (2)$$

Это условие включает интегрирование не только по пространственным, как в [3], но также и по временной переменной в соответствии с их в определенном смысле равноправием в релятивистской теории.

Условие (2) тесно связано с условием конечности действия. Будет показано, что если решение на пространстве де Ситтера, а также в ряде других случаев удовлетворяет условию (2), то оно имеет конечное действие. Ранее были известны решения с конечным действием для евклидова времени для некоторых нелинейных уравнений эллиптического типа (инстантоны).

Дискретный спектр масс получен для уравнения Клейна–Гордона впервые в [1].

2. РЕШЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИЯХ ТИПА ФРИДМАНА

Рассмотрим многообразие вида $M = I \times N^n$ с метрическим тензором

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) dl^2. \quad (3)$$

Здесь I – интервал на вещественной оси, $I \subset \mathbb{R}$, $a(t)$ – гладкая положительная функция на I , N^n – риманово многообразие и

$$dl^2 = h_{ij}(y) dy^i dy^j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

dl^2 – риманова метрика на многообразии N^n . Такие многообразия $(M, g_{\mu\nu})$ будем называть многообразиями типа Фридмана. Уравнение (1) для метрики (3) принимает вид

$$\ddot{f} + \frac{n}{a} \dot{a} \dot{f} - \frac{1}{a^2} \Delta_h f + \lambda f = 0, \quad (5)$$

где $\Delta_h = h^{-1/2} \partial_i (h^{1/2} h_{ij} \partial_j)$ – оператор Лапласа–Бельтрами для метрики h_{ij} условие (2) приводится к виду

$$\int_{I \times N^n} f^2 a^n dt \sqrt{h} dy < \infty. \quad (6)$$

Пусть $q \geq 0$ – собственное значение оператора $-\Delta_h$ на N^n , $\Phi = \Phi(y)$ – соответствующая собственная функция,

$$-\Delta_h \Phi = q \Phi, \quad \int_{N^n} \Phi^2 \sqrt{h} dy < \infty. \quad (7)$$

Положим

$$f = B(t)a(t)^{-\frac{n}{2}}\Phi(y). \quad (8)$$

Имеем уравнение Штурма–Лиувилля в $L^2(I)$

$$\ddot{B} + [\lambda - v(t)]B = 0, \quad (9)$$

где

$$v(t) = \frac{n\ddot{a}}{2a} + \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right)\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{q}{a^2}. \quad (10)$$

Теорема 1. Пусть $M = \mathbb{R} \times N^n$ – многообразие типа Фрийдмана с метрическим тензором вида (3), (4), такое, что существует решение уравнения (7) на N^n с собственным значением $q \geq 0$. Пусть гладкая функция $a(t)$ на \mathbb{R} такова, что

$$v(t) \rightarrow \infty, \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Тогда при заданных q, Φ (7) задача (1), (2) имеет бесконечное множество суммируемых с квадратом решений с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, причем $\lambda_j \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty$.

Пример 1.

$$a(t) = C \exp(\alpha t^{2k}), \quad C > 0, \quad \alpha > 0, \quad k > 1. \quad (12)$$

Тогда

$$v = \frac{n}{2} \left[\alpha \cdot 2k(2k-1)t^{2k-2} + \frac{n}{2}(\alpha \cdot 2k)^2 t^{4k-2} \right] - qC^{-2} \exp(-\alpha t^{2k}).$$

Условие (11) выполнено, имеется дискретный спектр $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, причем $\lambda_j \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty$.

3. РЕШЕНИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕ ДЕ СИТТЕРА

Для пространства де Ситтера имеем $M = \mathbb{R} \times S^3$,

$$ds^2 = dt^2 - \text{ch}^2 t \cdot h_{ij}(y) dy^i dy^j, \quad (13)$$

h_{ij} – стандартная метрика на трехмерной евклидовой сфере S^3 , собственные значения оператора $-\Delta_h$ равны $q = j(j+2), j = 0, 1, 2, \dots$,

$$v(t) = \frac{9}{4} - \left[\frac{3}{4} + j(j+2) \right] \frac{1}{\text{ch}^2 t}. \quad (14)$$

Положим

$$\alpha = \frac{3}{4} + j(j+2), \quad v^2 = \frac{9}{4} - \lambda, \quad (15)$$

Тогда уравнение (9) приобретает вид

$$\ddot{B} + \left[\frac{\alpha}{\text{ch}^2 t} - v^2 \right] B = 0. \quad (16)$$

Теория уравнения (16) хорошо известна [4, 5] и была использована в [1] для построения суммируемых с квадратом решений уравнения Клейна–Гордона на пространстве де Ситтера. Спектр положительных значений v^2 дискретен, а отрицательных непрерывен; рассматриваем первый, $v^2 > 0$.

Уравнение (16) при $\alpha > 0$ имеет решение из $L^2(\mathbb{R})$ только в том случае, если

$$0 < v = \frac{1}{2}(\sqrt{1+4\alpha} - 1) - n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

В нашем случае, с учетом (15)

$$0 < v = j + \frac{1}{2} - n, \quad j, n = 0, 1, 2, \dots$$

Имеется серия квадратично-суммируемых решений уравнения (9) с собственными значениями λ вида

$$\lambda_{jn} = \frac{9}{4} - \left(j + \frac{1}{2} - n \right)^2, \quad (18)$$

$$\left(j, n = 0, 1, 2, \dots, j + \frac{1}{2} - n > 0 \right).$$

Если $\lambda_{jn} > 0$, то мы должны иметь

$$0 < j + \frac{1}{2} - n \leq \frac{3}{2}, \quad j, n = 0, 1, 2, \dots$$

откуда либо $j = n$ и $\lambda_{jn} = 2$, либо $j = n + 1$ и $\lambda_{jn} = 0$.

В случае $j = n, v = \frac{1}{2}$ для каждого значения $j = 0, 1, 2, \dots$ уравнение (16) имеет решение в $L^2(\mathbb{R})$ вида

$$B_j(t) = \frac{1}{(\text{ch} t)^{1/2}} \sum_{s=0}^j \frac{(-j)_s (j+2)_s}{\left(\frac{3}{2}\right)_s!} \frac{1}{(e^{2t} + 1)^s}, \quad (19)$$

$$k_0 = 1, \quad (k)_s = k(k+1)\dots(k+s-1).$$

В случае $j = n + 1, v = \frac{3}{2}$ для каждого значения $j = 1, 2, \dots$ уравнение (16) имеет решение в $L^2(\mathbb{R})$ вида

$$B_j(t) = \frac{1}{(\text{ch} t)^{3/2}} \sum_{s=0}^{j-1} \frac{(1-j)_s (j+3)_s}{\left(\frac{5}{2}\right)_s!} \frac{1}{(e^{2t} + 1)^s}. \quad (20)$$

Обозначим H_λ подпространство в $L^2(M)$, образованное квадратично-суммируемыми решениями уравнения (1).

Теорема 2 (см. [1]). Пусть $M = \mathbb{R} \times S^3$ – пространство де Ситтера с метрическим тензором

$$ds^2 = st^2 - ch^2 t \cdot h_{ij}(y) dy^i dy^j.$$

Тогда, $\dim H_\lambda = \infty$ при всех $\lambda = \lambda_{jn}$ (18). При этом если $\lambda = \lambda_{jn} \geq 0$, то либо $\lambda = 0$, либо $\lambda = 2$.

Пример 2. Принятая в космологии форма метрики Фридмана–де Ситтера, описывающая инфляционный период расширения Вселенной:

$$ds^2 = dt^2 - e^{2Ht} h_{ij}(y) dy^i dy^j, \quad (21)$$

где h_{ij} – риманова метрика на трехмерном многообразии, $0 < t < \infty$, $0 < H$ – постоянная Хаббла. Получаем

$$v(t) = \frac{9}{4} H^2 - q e^{-2Ht}. \quad (22)$$

Уравнение (9) на полуоси, с граничными условиями $B(0) = B(\infty) = 0$ имеет в этом случае собственное значение. Если параметр t интерпретировать как длину в полярных координатах, то мы получаем известную модель дейтрона [5, с. 205]. Решение имеет вид

$$B(t) = J_\nu(c e^{-Ht}),$$

где

$$c = \frac{\sqrt{q}}{H} > 0, \quad \nu = \frac{\sqrt{9H^2 - 4\lambda}}{2H} > 0,$$

J_ν – функция Бесселя. Собственное значение λ находится из соотношения $J_\nu(c) = 0$.

Пример 3. Метрика Фридмана имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 h_{ij}(y) dy^i dy^j, \quad (23)$$

где h_{ij} – риманова метрика на трехмерном многообразии постоянной положительной, отрицательной или нулевой кривизны. Функция $a(t)$ определяется из уравнений Эйнштейна–Фридмана

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\rho - \frac{3k}{a^2}, \quad \frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3p), \quad (24)$$

где $k = 1, -1, 0$ для многообразий постоянной положительной, отрицательной или нулевой кривизны соответственно. Давление p и плотность материи ρ связаны некоторым уравнением состояния $p = f(\rho)$.

В частности, для излучения ($p = \frac{\rho}{3}$) в 3-х мерном торе ($k = 0$) имеем

$$a(t) = c\sqrt{t}, \quad c > 0, \quad 0 < t < \infty. \quad (25)$$

В этом случае

$$v(t) = -\frac{3}{16t^2} - \frac{q}{c^2 t}, \quad q > 0, \quad (26)$$

и уравнение Штурма–Лиувилля (9) имеет дискретный спектр при отрицательных λ :

$$\lambda_n = -\frac{4q^2}{c^4(4n+1)^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (27)$$

Для компактного 3-х мерного многообразия постоянной отрицательной кривизны ($k = -1$) функция $a(t)$ имеет вид

$$a(t) = \sqrt{t^2 - c^2}, \quad 0 < c < t < \infty, \quad (28)$$

и соответствующая сингулярная задача Штурма–Лиувилля также имеет дискретный спектр при отрицательных λ .

4. ОБСУЖДЕНИЕ

1. Действие для уравнения Клейна–Гордона имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \int_M [(\nabla f, \nabla f) - \lambda f^2] \sqrt{|g|} dx. \quad (29)$$

Здесь

$$(\nabla f, \nabla f) = g^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu f.$$

Для решений вида (8) на многообразиях типа Фридмана действие принимает вид

$$S = \frac{1}{2} \int_{I \times N^m} \left[\left(\dot{\Phi} - \frac{n\dot{a}}{2a} \Phi \right)^2 - a^{-2} B^2 h^{ij} \partial_i \Phi \partial_j \Phi - \lambda B^2 \Phi^2 \right] dt \sqrt{h} dy. \quad (30)$$

На решениях на пространстве де Ситтера вида (19), (20) интеграл (30) сходится, т.е. действие конечно.

2. Сделаем в уравнении (5) замену

$$f = u(y, t) a(t)^{\frac{n}{2}}.$$

Тогда получим уравнение

$$\ddot{u} - a(t)^{-2} \Delta_h u + [\lambda - w(t)] u = 0, \quad (31)$$

где

$$w(t) = \frac{n\ddot{a}}{2a} + \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \frac{\dot{a}^2}{a^2}.$$

Ищутся решения, удовлетворяющие условию

$$\int_{\mathbb{R} \times N^m} u(y, t)^2 dt \sqrt{h} dy < \infty.$$

Имеется детально разработанная спектральная теория для эллиптических дифференциальных операторов (см., например, [4]). Представляет интерес исследование спектральной теории для гиперболических уравнений.

Например, рассмотрим на пространстве Шварца $S(\mathbb{R}^2)$ функций $u = u(x, t)$ на плоскости гиперболический дифференциальный оператор вида

$$Au = \frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \phi(x, t)u, \quad (32)$$

где гладкая вещественная функция $\phi(x, t)$ имеет на бесконечности рост по x, t не выше степенного. Оператор A может быть расширен с пространства Шварца до самосопряженного оператора в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$. Если функция ϕ имеет вид $\phi = x^2 - t^2$, то оператор A есть разность операторов Шредингера для двух гармонических осцилляторов. Поэтому A имеет в $L^2(\mathbb{R}^2)$ полную систему собственных функций вида

$$u_{jn} = H_j(t)H_n(x) \exp\left\{-\frac{1}{2}(t^2 + x^2)\right\}, \quad (33)$$

$$Au_{jn} = \lambda_{jn}u_{jn}, \quad j, n = 0, 1, 2, \dots,$$

с соответствующими собственными значениями $\lambda_{jn} = 2(n - j)$. Здесь H_j – полиномы Эрмита.

Действие

$$S = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\dot{u}^2 - u_x^2 - \phi u^2 + \lambda u^2) dt dx$$

конечно на решениях (33).

3. Отметим, что наряду с (1) рассматривается также так называемое уравнение с конформной связью

$$\square f + \xi Rf + \lambda f = 0, \quad (34)$$

где R – скалярная кривизна многообразия M , $\xi = \frac{n-1}{4n}$. Для пространства де Ситтера $R = 12$, $\xi = \frac{1}{6}$.

В этом случае уравнение (34) $\square f + (2 + \lambda)f = 0$ имеет при $2 + \lambda = \lambda_{jn}$ (18) и, в частности, при $\lambda = 0$ суммируемые с квадратом решения.

Здесь были рассмотрены суммируемые с квадратом решения уравнения Клейна–Гордона для скалярного поля на многообразиях типа Фридмана. Было бы интересно провести аналогичное исследование на многообразиях более общего вида, а также для полей с высшими спинами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов В.В. // УМН. 1987. Т. 42. В. 4. С. 171.
2. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
3. Биррелл Н., Девис П. Квантованные поля в искривленном пространстве–времени. М.: Мир, 1984.
4. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М.: Из-во иностр. лит., 1960. Т. 112.
5. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. М.: Мир, 1974. Т. 1.