

УДК 531.3, 532.5

О ПАДЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ<sup>1</sup>

А. В. Борисов, В. В. Козлов, И. С. Мамаев

В работе рассматривается задача о движении тяжелого твердого тела в бесконечном объеме идеальной безвихревой несжимаемой жидкости. Данная задача обобщает классическую задачу Кирхгофа, описывающую движение твердого тела в жидкости по инерции. Исследованы различные частные постановки задачи: плоское движение и движение осесимметричного тела. В общем случае движения твердого тела исследована устойчивость частных решений и указаны предельные режимы движения при бесконечном возрастании времени. С помощью численных расчетов на плоскости начальных условий построены области, отвечающие различным типам асимптотического поведения. Установлен фрактальный характер границы, разделяющей эти области.

## 1. Уравнения движения и частные случаи

Рассмотрим движение твердого тела в однородном поле тяжести в бесконечном объеме безвихревой идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности. Приведем сначала восходящие к Кирхгофу общие уравнения движения тела в жидкости под действием внешнего силового поля:

$$\dot{M} = M \times \frac{\partial H}{\partial M} + p \times \frac{\partial H}{\partial p} + K, \quad \dot{p} = p \times \frac{\partial H}{\partial M} + F, \quad (1.1)$$

где  $F$  и  $K$  — суммарные сила и момент, приложенные к телу. Если внешние силы имеют потенциальный характер, то уравнения (1.1), дополненные уравнениями для направляющих косинусов и координат фиксированной точки в теле, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{M} &= M \times \frac{\partial H}{\partial M} + p \times \frac{\partial H}{\partial p} + \alpha \times \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \beta \times \frac{\partial H}{\partial \beta} + \gamma \times \frac{\partial H}{\partial \gamma}, \\ \dot{p} &= p \times \frac{\partial H}{\partial M} - \frac{\partial H}{\partial x_1} \alpha - \frac{\partial H}{\partial x_2} \beta - \frac{\partial H}{\partial x_3} \gamma, \\ \dot{\alpha} &= \alpha \times \frac{\partial H}{\partial M}, \quad \dot{\beta} = \beta \times \frac{\partial H}{\partial M}, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \frac{\partial H}{\partial M}, \\ \dot{x}_1 &= \left( \alpha, \frac{\partial H}{\partial p} \right), \quad \dot{x}_2 = \left( \beta, \frac{\partial H}{\partial p} \right), \quad \dot{x}_3 = \left( \gamma, \frac{\partial H}{\partial p} \right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где векторы  $p$ ,  $M$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  представляют собой проекции импульса, момента импульса и неподвижных ортов на связанные с телом оси, а  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  — проекции на неподвижные оси радиуса-вектора начала подвижной системы координат. Гамильтониан системы имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}M, M) + (\mathbf{B}M, p) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}p, p) + U, \\ U &= \mu(x_3 + (\mathbf{r}, \gamma)), \quad \mu = \mu_T - \mu_J, \quad \mathbf{r} = \frac{\mu_T \mathbf{r}_T - \mu_J \mathbf{r}_J}{\mu_T - \mu_J}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (грант НШ-1312.2006.1), при финансовой поддержке CRDF (грант RU-M1-2583-MO-04) и РФФИ (грант 05-01-01058). Работа А. В. Борисова и И. С. Мамаева выполнена также при поддержке РФФИ (грант 04-05-64367) и INTAS (грант 04-80-7297).

здесь  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  — симметричные матрицы, определяемые геометрией тела и его инерционными свойствами,  $\mu_{\text{т}}$ ,  $\mu_{\text{ж}}$  — вес тела и вес вытесненной жидкости, а  $\mathbf{r}_{\text{т}}$ ,  $\mathbf{r}_{\text{ж}}$  — радиусы-векторы центра масс и центра давления в подвижных осях. Случай  $\mu_{\text{т}} = \mu_{\text{ж}}$  (взвешенное тело) будет также разобран далее.

Непосредственно проверяется, что имеются три интеграла движения (один из которых явно содержит время):

$$(\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha}) = P_1, \quad (\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) = P_2, \quad (\mathbf{p}, \boldsymbol{\gamma}) + \mu t = P_3.$$

Это означает, что импульс системы тело+жидкость представляется в форме

$$\mathbf{p} = P_1 \boldsymbol{\alpha} + P_2 \boldsymbol{\beta} + (P_3 - \mu t) \boldsymbol{\gamma}, \quad (1.4)$$

т. е. вектор  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$  представляет собой проекции начального импульса (по Чаплыгину — толчка) на неподвижные оси.

Выбором начала отсчета времени (при  $\mu_{\text{т}} \neq \mu_{\text{ж}}$ ) и поворотом неподвижных осей можно добиться, чтобы  $P_2 = P_3 = 0$ , что в дальнейшем мы полагаем выполненным.

Подставив (1.4) в уравнения движения (1.2), получим замкнутую относительно  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  систему, которая записывается в гамильтоновой форме:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{M}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

с гамильтонианом, явно зависящим от времени:

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + (\mathbf{B}\mathbf{M}, P_1 \boldsymbol{\alpha} - \mu t \boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}(P_1 \boldsymbol{\alpha} - \mu t \boldsymbol{\gamma}), P_1 \boldsymbol{\alpha} - \mu t \boldsymbol{\gamma}) + \mu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (1.6)$$

**З а м е ч а н и е.** Уравнения (1.2) в различных, но эквивалентных формах встречаются в работах В.А. Стеклова [17], Д.Н. Горячева [5], С.А. Чаплыгина [20]. Приведение их к изящной неавтономной форме, использующей представление (1.4), впервые, видимо, выполнено В.В. Козловым [11] (в форме уравнений Пуанкаре).

Укажем некоторые частные случаи, для которых уравнения (1.5) допускают упрощения. Они указаны в работах [11, 19].

### 1.1. Движения без начального толчка [11]

Пусть начальный толчок равен нулю:  $P_1 = 0$ . Уравнения движения для  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  в замкнутой форме представляют собой (неавтономную) гамильтонову систему на  $e(3)$  с гамильтонианом

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) - \mu t(\mathbf{B}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2}\mu^2 t^2(\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) + \mu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}).$$

Если к тому же тело имеет три плоскости симметрии, пересекающиеся в центре масс, то этот гамильтониан еще больше упрощается:  $\mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{r} = 0$ .

### 1.2. Взвешенное тело [19]

В работе [19] С. А. Чаплыгин указал также случай, когда сила тяжести уравновешена силой Архимеда (средняя плотность тела равна плотности жидкости, и, следовательно,  $\mu_{\text{т}} = \mu_{\text{ж}}$ ), но центр масс тела не совпадает с центром масс вытесненного объема жидкости. При этом тело находится под действием пары сил, и его полный импульс в неподвижной системе координат сохраняется, т. е.

$$\mathbf{p} = P_1 \boldsymbol{\alpha} + P_2 \boldsymbol{\beta} + P_3 \boldsymbol{\gamma},$$

где  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3) = \text{const}$ . Как и выше, выбором неподвижных осей можно достичь равенства  $P_2 = 0$ . Таким образом, в этом случае эволюция векторов  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  описывается автономной гамильтоновой системой с функцией Гамильтона

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + (\mathbf{B}\mathbf{M}, P_1\boldsymbol{\alpha} + P_3\boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}(P_1\boldsymbol{\alpha} + P_3\boldsymbol{\gamma}), P_1\boldsymbol{\alpha} + P_3\boldsymbol{\gamma}) + \mu_{\text{T}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}),$$

где  $\mathbf{r}$  — вектор, соединяющий центр масс тела с центром давления.

Если начальный импульс направлен вдоль вертикальной оси:  $\mathbf{p} = P\boldsymbol{\gamma}$ , то эволюция векторов  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  ( $\boldsymbol{\gamma}$  направлен вдоль поля тяжести) описывается системой со скобкой Пуассона, определяемой алгеброй  $\mathfrak{e}(3)$  (т.е.  $\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}M_k$ ,  $\{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k$ ,  $\{\gamma_i, \gamma_j\} = 0$ ), и функцией Гамильтона

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) + P(\mathbf{B}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2}P^2(\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) + \mu_{\text{T}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (1.7)$$

В явном виде имеем уравнения движения

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} \times \mathbf{M} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}.$$

В работе [19] С.А. Чаплыгин указал случай интегрируемости уравнений (1.7), имеющий дополнительный интеграл четвертой степени по компонентам импульсивного момента, вид которого напоминает интеграл Ковалевской.

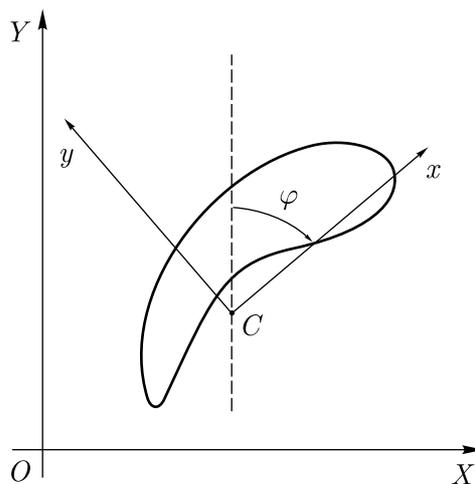


Рис. 1

### 1.3. Плоскопараллельное движение [5, 9, 17, 20]

Плоскопараллельное движение твердого тела задается инвариантными соотношениями  $M_1 = M_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = \gamma_3 = 0$ . Как несложно показать, необходимым условием существования подобных движений является динамическая симметрия тела относительно рассматриваемой (инвариантной) плоскости, что приводит к соотношениям

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{12} = 0, \quad c_{13} = c_{23} = 0.$$

Кроме того, можно показать, что сдвигом и поворотом осей, связанных с телом, в этом случае можно добиться равенства  $\mathbf{B} = 0$ , а матрицу  $\mathbf{C}$  сделать диагональной. Пусть угол поворота подвижных осей относительно неподвижных отсчитывается по часовой стрелке, как показано на рис. 1, тогда для неподвижных ортов имеем

$$\alpha_1 = \sin \varphi, \quad \alpha_2 = -\cos \varphi, \quad \gamma_1 = \cos \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \varphi.$$

Для угла поворота получим неавтономное уравнение второго порядка

$$a_3 \ddot{\varphi} = (c_1 - c_3) (\mu^2 t^2 \sin \varphi \cos \varphi + P_1 \mu t \cos 2\varphi - P_1^2 \sin \varphi \cos \varphi) + \mu(x \sin \varphi - y \cos \varphi), \quad (1.8)$$

где  $c_1, c_3, a_3$  — соответствующие элементы диагональных матриц, а  $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ .

Для уравновешенного тела ( $x = y = 0$ ) без начального толчка ( $P_1 = 0$ ) получим замечательное по своей простоте уравнение

$$\ddot{\varphi} = kt^2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad k = \frac{\mu^2(c_1 - c_3)}{a_3}. \quad (1.9)$$

**З а м е ч а н и е.** Это уравнение называется в работах [9, 10, 15] уравнением Чаплыгина, но будем иметь в виду, что, хотя оно (вместе с другими интересными результатами) и было получено С.А. Чаплыгиным в 1890 г. в студенческом сочинении, он воздержался от его публикации. Это было связано видимо с тем, что он не смог явно проинтегрировать это уравнение. Тем не менее С.А. Чаплыгин опубликовал эту работу в первом прижизненном собрании своих сочинений (1933 г., [20]).

Уравнения (1.9) были также получены независимо Д.Н. Горячевым (1893) [5] и В. А. Стекловым (1894) [16, 17]. Последний отметил также простейшие свойства решений этих уравнений. В частности, В.А. Стеклов показал, что при падении тела амплитуда его колебаний относительно горизонтальной оси убывает, а частота колебаний растет. Этот вывод В.А. Стеклов сделал в дополнении к своей книге [17], в которой при анализе асимптотического поведения тела им был допущен ряд погрешностей. Задача Стеклова об асимптотическом описании поведения решений уравнения [16, 17] была решена В.В. Козловым [9], который показал, что тела при почти всех начальных условиях приближается к равноускоренному падению широкой стороной вверх и колеблется вокруг горизонтальной оси с возрастающей частотой порядка  $t$  и уменьшающейся амплитудой порядка  $\frac{1}{\sqrt{t}}$ . Численный анализ асимптотических движений с различным числом полуоборотов имеется в [23]. Аналитические выражения для асимптотики падения в различной форме получены в работах [15, 23].

В работе [7] описан и изучен эффект выныривания. В условиях безвихревого обтекания предполагается, что в начальный момент широкая сторона тела горизонтальна и телу сообщается скорость в горизонтальном направлении. В последующие моменты тело начинает опускаться вниз. Однако если его присоединенная масса в поперечном направлении достаточно велика, то тело затем резко всплывает узкой стороной вперед, поднимаясь на большую высоту, чем в начальный момент.

#### 1.4. Движение осесимметричного тела (круглого диска)

Имеется важный частный случай, когда система (1.6) имеет дополнительный (автономный) линейный интеграл Лагранжа

$$M_3 = \text{const.}$$

Условием его существования является осевая симметрия тела, при этом можно выбрать подвижные оси таким образом, что

$$\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_1, a_3), \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_1, b_3), \quad \mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_1, c_3), \quad \mathbf{r} = (0, 0, z).$$

В этом случае эволюция проекций момента на неподвижные оси  $\mathbf{N} = ((M, \boldsymbol{\alpha}), (M, \boldsymbol{\beta}), (M, \boldsymbol{\gamma}))$  и вектора оси симметрии  $\mathbf{n} = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$  описывается гамильтоновой системой на  $e(3)$

$$\dot{\mathbf{N}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{N}} \times \mathbf{N} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{n}} \times \mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{n}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{N}} \times \mathbf{n}. \quad (1.10)$$

Гамильтониан (1.6) после исключения несущественных слагаемых может быть записан в форме

$$\bar{H} = \frac{1}{2}a_1\mathbf{N}^2 + b_1(P_1N_1 - \mu tN_3) + M_3(b_3 - b_1)(P_1n_1 - \mu tn_3) + \frac{1}{2}(c_3 - c_1)(P_1n_1 - \mu tn_3)^2 + \mu zn_3. \quad (1.11)$$

Траектория начала подвижной системы координат  $C$  может быть получена из уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= b_1N_1 + (b_3 - b_1)M_3n_1 + P_1(c_1 + (c_3 - c_1)n_1^2) - \mu t(c_3 - c_1)n_1n_3, \\ \dot{x}_2 &= b_1N_2 + (b_3 - b_1)M_3n_2 + P_1(c_3 - c_1)n_1n_2 - \mu t(c_3 - c_1)n_2n_3, \\ \dot{x}_3 &= b_1N_3 + (b_3 - b_1)M_3n_3 + P_1(c_3 - c_1)n_1n_3 - \mu t(c_1 + (c_3 - c_1)n_3^2). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Если сила тяжести уравновешивается силой Архимеда, то гамильтониан не зависит от времени:

$$\bar{H} = \frac{1}{2}a_1\mathbf{N}^2 + b_1P_1N_1 + M_3(b_3 - b_1)P_1n_1 + \frac{1}{2}(c_3 - c_1)P_1^2n_1^2 + \mu_\tau zn_3. \quad (1.13)$$

В случае отсутствия начального (горизонтального) толчка, т. е. если  $P_1 = 0$ , имеется еще один дополнительный интеграл

$$N_3 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = \text{const.}$$

При этом для угла нутации  $\theta$  ( $\gamma_3 = \cos \theta$ ) получим (по аналогии с плоскопараллельным движением) неавтономное уравнение второго порядка [20]

$$a_1^{-1}\ddot{\theta} = \frac{(M_3 \cos \theta - N_3)(M_3 - N_3 \cos \theta)}{\sin^3 \theta} + (c_3 - c_1)\mu^2 t^2 \sin \theta \cos \theta - M_3(b_3 - b_1)\mu t \sin \theta + \mu z \sin \theta. \quad (1.14)$$

Если тело начинает движение из состояния покоя, то  $M_3 = N_3 = 0$ , и мы получим

$$a_1^{-1}\ddot{\theta} = (c_3 - c_1)\mu^2 t^2 \sin \theta \cos \theta + \mu z \sin \theta.$$

### 1.5. Аналог случая Гесса

Кроме рассмотренных выше имеется еще одна ситуация, когда система (1.5), (1.6) допускает инвариантное соотношение, аналогичное случаю Гесса в уравнениях Эйлера — Пуассона. Для его существования необходимо, чтобы поверхность, ограничивающая тело, была осесимметричная, а ось симметрии перпендикулярна круговому сечению гирационного эллипсоида (т. е. поверхности, определяемой уравнением  $(\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}) = 1$ ). Направим одну из осей, связанных с телом, вдоль оси симметрии поверхности тела, а две другие таким образом, что  $a_{23} = 0$ ; тогда в гамильтониане (1.6)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_1 & 0 \\ a_{13} & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_1, b_3), \quad \mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_1, c_3), \quad \mathbf{r} = (0, 0, z).$$

При таком выборе (подвижной) системы координат инвариантное соотношение имеет наиболее простой вид

$$M_3 = 0. \quad (1.15)$$

Уравнение, определяющее угол нутации, совпадает с (1.14) при условии  $M_3 = 0$ , т. е.

$$a_1^{-1}\ddot{\theta} = \frac{N_3^2 \cos^2 \theta}{\sin^3 \theta} + (c_3 - c_1)\mu^2 t^2 \sin \theta \cos \theta + \mu z \sin \theta. \quad (1.16)$$

Отличие от случая Лагранжа, разобранный выше, появляется в уравнениях, определяющих эволюцию углов прецессии и собственного вращения. Аналог случая Гесса для уравнений (1.5), (1.6) был впервые указан в [3].

## 2. Движение изотропного тела

Рассмотрим простейший частный случай, указанный Стекловым [17, 18], когда уравнения интегрируются в квадратурах. При этом

$$\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{B} = b\mathbf{E}, \quad \mathbf{C} = c\mathbf{E}, \quad \mathbf{r} = 0,$$

т. е. тензор присоединенных масс шаровой, однако тело не имеет трех плоскостей симметрии, так как  $\mathbf{B} \neq 0$ . (Если  $\mathbf{B} = 0$ , то движение тривиально — центр масс движется по параболе, а движение апексов  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$  такое же, как в случае Эйлера — Пуансо.)

Уравнения, описывающие эволюцию момента в подвижных осях, отделяются и тождественны случаю Эйлера — Пуансо:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A}\mathbf{M}.$$

Тем не менее, для определения траектории центра масс тела удобнее переписать уравнения движения в неподвижных осях:

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= b\mu t N_2, & \dot{N}_2 &= -b\mu t N_1 - bP_1 N_3, & \dot{N}_3 &= bP_1 N_2, \\ \dot{x}_1 &= bN_1 + cP_1, & \dot{x}_2 &= bN_2, & \dot{x}_3 &= bN_3 - c\mu t, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{N} = ((\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{M}), (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{M}), (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{M}))$  — кинетический момент в неподвижных осях. Очевидно, что квадрат кинетического момента дает интеграл движения:  $\mathbf{M}^2 = \mathbf{N}^2 = \text{const}$ .

Если начальный толчок равен нулю:  $P_1 = 0$ , то первые три уравнения в (2.1) интегрируются в элементарных функциях:

$$N_1 = A \sin(b\mu t^2/2 + \varphi_0), \quad N_2 = A \cos(b\mu t^2/2 + \varphi_0), \quad N_3 = \text{const},$$

где  $A, \varphi_0$  — произвольные постоянные. Вдоль вертикальной оси тело движется равноускоренно:  $x_3 = -\frac{c\mu t^2}{2}$ , а проекция траектории на плоскость  $x_1, x_2$  представляет собой спираль, описываемую интегралами Френеля, сходящуюся к некоторой фиксированной точке на плоскости.

При больших временах справедливо асимптотическое представление вида

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 - \frac{A \cos(b\mu t^2/2 + \varphi_0)}{\mu t} + O(t^{-3}), \\ x_2 &= x_2^0 + \frac{A \sin(b\mu t^2/2 + \varphi_0)}{\mu t} + O(t^{-3}). \end{aligned}$$

Если  $P_1 \neq 0$ , то уравнения для  $\mathbf{N}$  не интегрируются в элементарных функциях, кроме того на плоскости  $x_1, x_2$  появляется дрейф со скоростью  $cP_1$  вдоль оси  $Ox_1$ .

## 3. Качественный анализ плоскопараллельного движения

Выше было показано, что при специальном выборе подвижных осей (при котором кинетическая энергия диагональна) угол поворота тела относительно вертикали (рис. 1) описывается уравнением (1.8), а движение начала подвижной системы  $C$  (рис. 1) описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{C}\mathbf{p}) = P_1(c_1 \sin^2 \varphi + c_2 \cos^2 \varphi) - \mu t(c_1 - c_2) \sin \varphi \cos \varphi, \\ \dot{Y} &= (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{C}\mathbf{p}) = P_1(c_1 - c_2) \sin \varphi \cos \varphi - \mu t(c_1 \cos^2 \varphi + c_2 \sin^2 \varphi). \end{aligned} \quad (3.1)$$

**З а м е ч а н и е.** Уравнение (1.8) соответствует *неавтономной* гамильтоновой системе с одной степенью свободы. Более детально подобные системы изучены в случае, когда гамильтониан является периодической функцией времени. В общем случае они демонстрируют

хаотическое поведение. В то же время, как будет показано ниже, в данной системе зависимость угла  $\varphi$  от времени  $t$  носит асимптотический характер.

Рассмотрим сначала «простейший» случай, когда уравновешенное тело ( $x = y = 0$ ) падает без начального толчка ( $P_1 = 0$ ). Тогда после замены  $2\varphi = \theta$  уравнение (1.8) принимает вид

$$\ddot{\theta} = kt^2 \sin \theta, \quad k = \frac{\mu^2(c_1 - c_2)}{a_3}. \quad (3.2)$$

В дальнейшем будем полагать, что  $c_1 > c_2$ , т. е.  $k > 0$ , а  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

### 3.1. Стационарные (равновесные) решения. Малые колебания. Двойко-асимптотические решения

Уравнение (3.2) имеет простейшие «равновесные» решения типа  $\theta(t) = \text{const}$ :

$$1) \quad \theta = 0, \quad 2) \quad \theta = \pi. \quad (3.3)$$

Первое решение соответствует падению вниз узкой стороной ( $X = X_0, Y = Y_0 - \frac{\mu c_1 t^2}{2}$ ), а второе — широкой ( $X = X_0, Y = Y_0 - \frac{\mu c_2 t^2}{2}$ ). Действительно, поскольку присоединенная масса  $c_1^{-1} < c_2^{-1}$ , то угол  $\varphi = \pi n$ , когда ось  $Ox$  вертикальна, и  $\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , когда вертикальна ось  $Oy$ .

Линеаризуя уравнение (3.2) вблизи неподвижных точек (3.3), получим

$$\begin{aligned} 1) \quad \ddot{\xi} &= kt^2 \xi, & \theta &= \xi, \\ 2) \quad \ddot{\xi} &= -kt^2 \xi, & \theta &= \pi - \xi. \end{aligned}$$

Общее решение этих уравнений выражается через функции Бесселя

$$\begin{aligned} 1) \quad \xi(t) &= \sqrt{t} \left( C_1 I_{1/4} \left( \sqrt{kt^2}/2 \right) + C_2 K_{1/4} \left( \sqrt{kt^2}/2 \right) \right), \\ 2) \quad \xi(t) &= \sqrt{t} \left( C_1 J_{1/4} \left( \sqrt{kt^2}/2 \right) + C_2 Y_{1/4} \left( \sqrt{kt^2}/2 \right) \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $I_\nu(x), K_\nu(x)$  — функции Бесселя второго рода, а  $J_\nu(x), Y_\nu(x)$  — функции Бесселя первого рода. Таким образом, в линейном приближении первое решение является неустойчивым, а второе (асимптотически) устойчивым по отношению к  $\xi$ , но не  $\dot{\xi}$ . Действительно, используя асимптотики функций Бесселя  $J_\nu, Y_\nu$ , при больших значениях аргумента находим

$$\xi(t) = \frac{A \sin \left( \sqrt{kt^2}/2 + \alpha_0 \right)}{\sqrt{t}} + O(t^{-5/2}), \quad A = \text{const}.$$

Следовательно, амплитуда колебаний убывает как  $t^{-1/2}$ , а их частота неограниченно растет как  $t$ . Как уже было сказано, этот факт отмечен в [9].

Как показано в [9], вариационными методами можно доказать, что существуют два решения  $\theta(t), \theta(t_0) = \theta_0$ , асимптотические к неустойчивому положению равновесия ( $\theta = 0$ ), приближающиеся к нему с разных сторон. Кроме того, вследствие инвариантности уравнения (3.2) относительно замены  $t \rightarrow -t$ , имеется решение  $\theta_*(t)$  с начальными данными  $\theta_*(0) = \pi$ , для которого [9]

$$\theta_*(t) + \theta_*(-t) = 2\pi, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \theta_*(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_*(t) = 2\pi.$$

Таким образом, решение  $\theta_*(t)$  — двойкоасимптотическое (имеется также аналогичное двойкоасимптотическое решение, обходящее окружность  $\theta [0, 2\pi]$  в другом направлении). При этом

тело совершает один полуоборот. Его траектория, описываемая уравнениями (3.1), изображена на рис. 2а. Заметим, что верхняя точка траектории является точкой возврата: вблизи нее уравнение кривой имеет вид  $Y = \lambda X^{2/3}$ ,  $\lambda = \text{const}$ . На рис. 2б показано изменение угла  $\varphi$  для данного двоякоасимптотического решения.

Существование двоякоасимптотических траекторий с произвольным количеством полуоборотов доказано в работе [22].

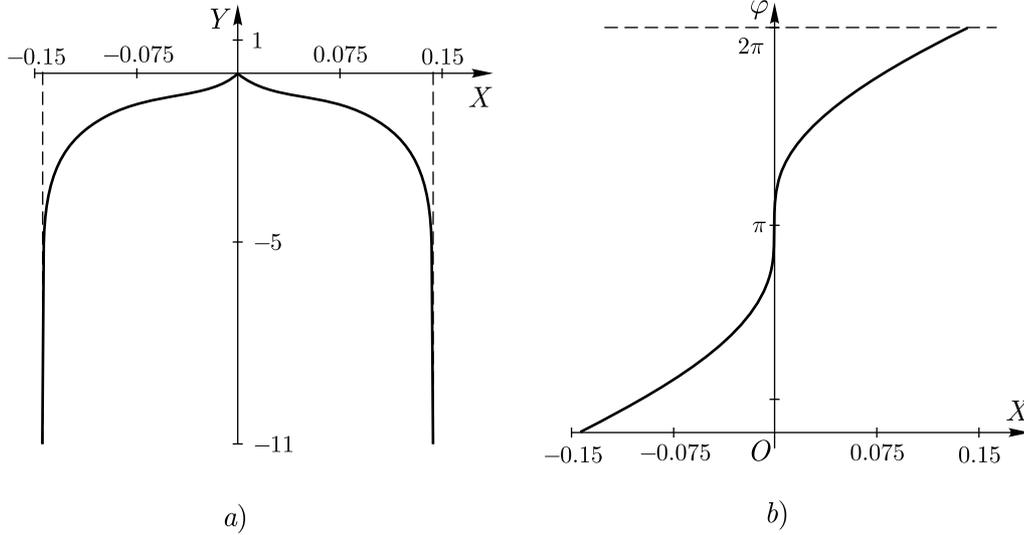


Рис. 2. Траектория тела и угол  $\varphi$  в зависимости от координаты  $X$  для двоякоасимптотического решения при  $k = 1$ ,  $\frac{a_3}{\mu} = 0.1$  ( $P_1 = 0$ ); видна особенность в верхней точке траектории (см. текст).

### 3.2. Асимптотическое поведение решений уравнения Чаплыгина

Как показано в [9] (см. доказательство для более общей ситуации ниже), для всех решений уравнения при  $t \rightarrow \pm\infty$  либо  $\theta \rightarrow 0$ , либо  $\theta \rightarrow \pi$  (т.е. асимптотическое движение тела — это падение широкой или узкой стороной вперед).

Существует гипотеза, высказанная В. В. Козловым [9], что мера траекторий, которые при  $t \rightarrow \pm\infty$  стремятся к неустойчивому равновесному состоянию  $\theta = 0(\text{mod}2\pi)$ , равна нулю, и почти все траектории стремятся к  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \pi(\text{mod}2\pi)$  (т.е. к падению широкой стороной вперед).

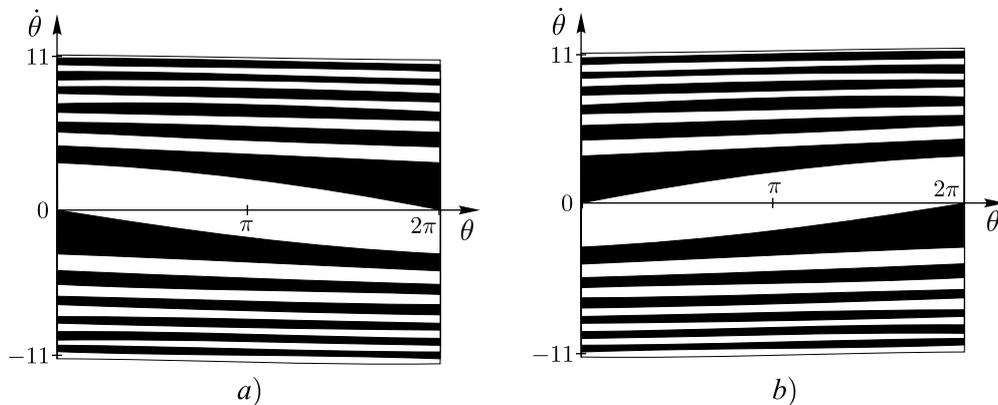


Рис. 3. Области на фазовой плоскости, соответствующие начальным условиям при  $t_0 = 0$ , при которых тело совершает одно и тоже количество полуоборотов при изменении  $t$  от 0 до  $+\infty$  в случае а) и при изменении  $t$  от  $-\infty$  до 0 в случае б) ( $k = 1$ , белый цвет соответствует четному числу полуоборотов, черный — нечетному).

### 3.3. Численный анализ

Опираясь на утверждение об асимптотическом поведении, можно выполнить численный анализ уравнения (3.2) [23]. Для этого на фазовой плоскости  $(\theta, \dot{\theta})$  (точнее, цилиндре  $\theta \times \dot{\theta} \in [0, 2\pi) \times (-\infty, +\infty)$ ) в начальный момент времени  $t = t_0$  построим области, в пределах которых тело совершает одно и то же количество полуоборотов при  $t \rightarrow +\infty$  (либо при  $t \rightarrow -\infty$ ), прежде чем «притянется» к решению  $\theta = \pi$ . Как видно на рис. 3а, эти области располагаются регулярно, причем их ширина уменьшается при увеличении  $|\dot{\theta}|$ , так что при больших начальных  $|\dot{\theta}|$  можно говорить лишь о вероятности того, что тело при  $t \rightarrow +\infty$  будет падать «верхней» или «нижней» стороной. Границы областей заполнены начальными условиями, соответствующими движениям, асимптотически приближающимся к неустойчивым положениям равновесия  $\theta = 0, 2\pi$ . Аналогично можно построить области, соответствующие одинаковому количеству полуоборотов для  $t \rightarrow -\infty$  (рис. 3б), причем области для  $t \rightarrow +\infty$  и для  $t \rightarrow -\infty$  оказываются зеркальным отражением относительно прямой  $\theta = \pi$ . При наложении этих областей их границы пересекаются в точках, расположенных на прямой  $\theta = \pi$ . Им соответствуют двоякоасимптотические решения уравнения (3.2) с различным количеством полуоборотов тела.

**З а м е ч а н и е.** На цилиндре  $\theta \times \dot{\theta} \in [0, 2\pi) \times (-\infty, +\infty)$  все границы областей склеиваются в одну гладкую кривую, аналогичную винтовой линии, шаг которой уменьшается при увеличении  $|\dot{\theta}|$ . По одну сторону от этой линии лежат области с четным числом полуоборотов, а по другую — с нечетным.

Таким образом, численные расчеты подтверждают гипотезу о том, что почти для всех решений  $\theta(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \pi$ , причем в трехмерном пространстве  $t, \theta, \dot{\theta}$ , решения, асимптотически приближающиеся к неустойчивому равновесию  $\theta = \pi$ , заполняют двумерные поверхности. Кроме того, имеется также счетное множество двоякоасимптотических решений, отличающихся количеством полуоборотов, совершаемых при изменении  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

На рис. 4 приведены траектории тела, совершающего двоякоасимптотическое движение с одним и тремя полуоборотами.

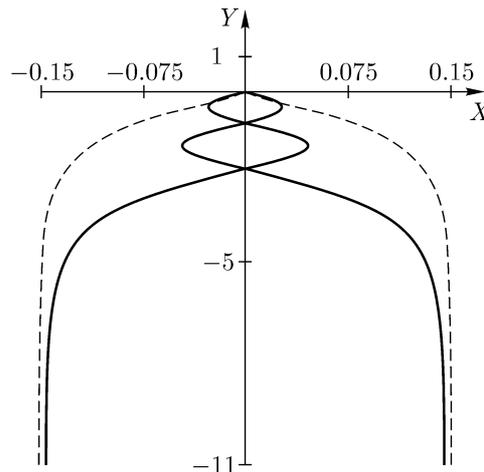


Рис. 4. Траектория тела в случае двоякоасимптотических решений с одним (пунктир) и тремя (сплошная линия) полуоборотами при  $k > 0, a_3/\mu = 0.1$ , в верхней точке траектории имеется особенность.

### 3.4. Траектория тела

Подставляя в уравнения (3.1) асимптотическое разложение для малых колебаний (3.4), после интегрирования получим асимптотическое представление для траектории движения в

форме

$$X(t) = A \frac{\cos(\sqrt{k}t^2/2 + \theta_0)}{\sqrt{t}} + O(t^{-3/2}), \quad Y(t) = -\mu c_2 t^2 + O(t^{-1/2}),$$

где  $A, \theta_0$  — некоторые постоянные. Следовательно, траектория движения при больших временах близка к синусоиде с постоянным шагом  $\Delta y = \frac{\pi \mu c_2}{\sqrt{k}}$  и убывающей амплитудой [9]. (Шаг  $\Delta Y$  вычисляется между двумя последовательными нулями функции  $X(t)$ .) Характерная траектория показана на рис. 5.

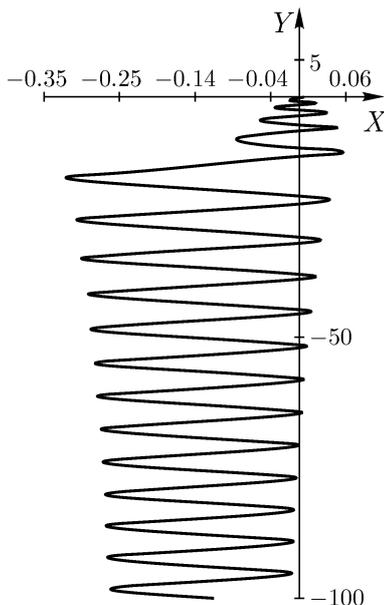


Рис. 5. Характерный вид траектории тела, падающего без начального толчка.

### 3.5. Общий случай ( $P_1 \neq 0$ )

Укажем теперь основные качественные особенности поведения системы (1.8), (3.1) в общем случае. Если  $P_1 \neq 0$ , то стационарных решений, аналогичных (3.3), уже не существует. В этом случае также справедливо утверждение об асимптотическом поведении, согласно которому для любого решения  $\varphi(t)$  уравнения (1.8) выполняется

$$1. \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \pi n \quad \text{либо} \quad 2. \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

По-видимому, также почти все решения уравнения стремятся к одному из решений  $\varphi(t) = \frac{\pi}{2} + \pi n$  (т. е. тело стремится к падению широкой стороной вниз) [9]. Это подтверждается численными экспериментами.

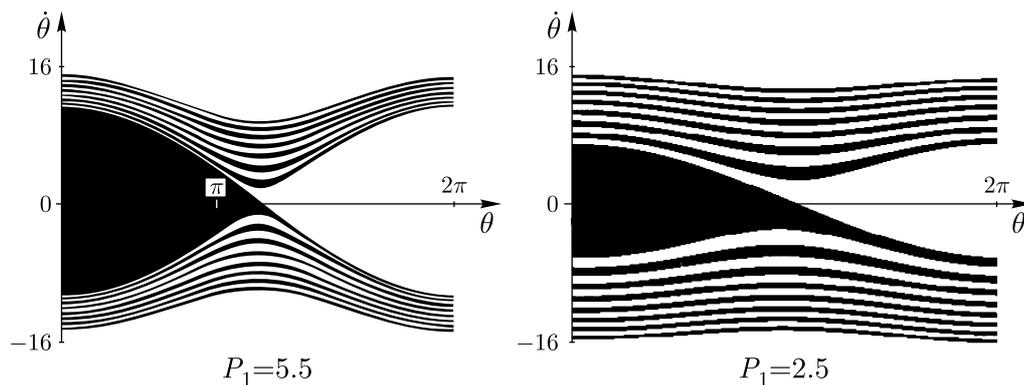


Рис. 6

Аналогично можно выполнить компьютерный анализ, рассматривая в начальный момент времени  $t = t_0$  на фазовой плоскости области, которым соответствуют одинаковые количества полуоборотов, прежде чем траектория притянется к решению  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  при  $t \rightarrow +\infty$  (рис. 6). Границы этих областей заполнены асимптотическими решениями. Как и в случае  $P_1 = 0$ , области, соответствующие различному количеству полуоборотов при  $t_0 = 0$  и  $t \rightarrow -\infty$ , оказываются симметричным отражением областей для  $t_0 = 0$  и  $t \rightarrow +\infty$  относительно прямой  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Точки пересечения границ областей при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$  соответствуют двоякоасимптотическим решениям.

Характерный вид общей траектории тела, брошенного под углом к горизонту, приведен на рис. 7. На рис. 8 приведены траектории в случае двоякоасимптотических движений с одним и тремя полуоборотами тела.

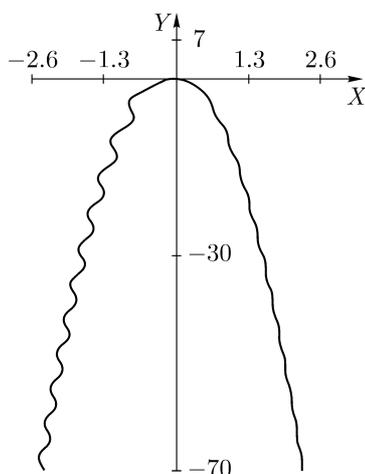


Рис. 7. Характерный вид траектории твердого тела, брошенного под углом к горизонту.

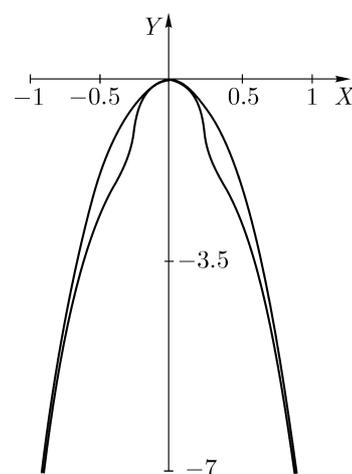


Рис. 8. Траектории тела для двоякоасимптотических движений с одним (верхняя кривая) и тремя полуоборотами.

Как показано в [9], в общем случае асимптотически траектория тела представляет собой параболу:

$$X(t) = -P_1 t + o(t), \quad Y(t) = -\frac{\mu t^2}{2c_3} + o(t^2).$$

#### 4. Тело, обладающее тремя плоскостями симметрии

Как и выше (для плоскопараллельного движения), прежде чем изучать общую систему (1.6), рассмотрим подробно частный случай движения без начального толчка ( $P_1 = 0$ ) при дополнительных ограничениях

$$\mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{r} = 0. \tag{4.1}$$

При этом получается неавтономная гамильтонова система (на  $e(3)$ ) для  $\mathbf{M}, \gamma$  с гамильтонианом

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + \frac{1}{2}\mu^2 t^2(\mathbf{C}\gamma, \gamma). \tag{4.2}$$

(В общем случае можно считать матрицу  $\mathbf{A}$  диагональной, а  $\mathbf{C}$  — произвольной симметричной.)

#### 4.1. Стационарные (равновесные) решения и нормальные колебания

Уравнения движения системы (4.2) имеют вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A}\mathbf{M} + \mu^2 t^2 \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{A}\mathbf{M} \quad (4.3)$$

и допускают простейшие решения вида

$$\mathbf{M} = 0, \quad \boldsymbol{\gamma} = \pm \boldsymbol{\xi}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.4)$$

где  $\boldsymbol{\xi}_i$  — собственные векторы матрицы  $\mathbf{C}$  (для вырожденной  $\mathbf{C}$  собственных векторов  $\boldsymbol{\xi}_i$  бесконечно много).

Линеаризуя систему (4.3) вблизи решения (4.4), линейными преобразованиями координат можно привести уравнения движения к виду «нормальных колебаний»

$$\ddot{x}_k + t^2 \omega_k x_k = 0, \quad k = 1, 2, \quad (4.5)$$

где  $x_k$  — подходящие локальные координаты вблизи неподвижных точек  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\xi}_i$ . Решения системы (4.5) выражаются через функции Бесселя (см. (3.4)). Несложно показать, что если у  $\mathbf{C}$  все собственные числа различны, то локальному минимуму функции  $V(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma})$  соответствует (асимптотически) устойчивое решение системы (4.5), асимптотика которого при больших  $t$  имеет вид (3.4). Локальный минимум определяется некоторым собственным вектором системы. Двум остальным собственным векторам соответствуют неустойчивые (уже в линейном приближении) решения.

#### 4.2. Асимптотическое поведение решений

Оказывается, что, аналогично плоскопараллельному случаю, при произвольных начальных условиях вектор  $\boldsymbol{\gamma}$  стремится к одному из собственных векторов матрицы  $\mathbf{C}$ . Действительно, в работе [11] показано, что для любого решения  $\boldsymbol{\gamma}(t)$  уравнений (4.3)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\boldsymbol{\gamma}(t)) = \mathcal{E}_c,$$

где  $V(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma})$ ,  $\mathcal{E}_c$  — критическое значение функции  $V(\boldsymbol{\gamma})$ .

Доказательство этого утверждения основано на представлении уравнений (4.3) в новом времени и в новых переменных. Выполним замену времени и переменных по формулам

$$\frac{1}{2}t^2 = \tau, \quad t\mathbf{M} = \mathbf{m},$$

в которых уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\mathbf{m}}{d\tau} = -\frac{1}{2\tau}\mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{A}\mathbf{m} + \mu^2 \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}, \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\tau} = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{A}\mathbf{m}. \quad (4.6)$$

Несложно показать, что  $\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{2\tau}$ , т.е. фактически система (4.6) описывает уравнения Кирхгофа с диссипацией, убывающей со временем. Рассмотрим энергию «невозмущенной» системы

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{m}, \mathbf{A}\mathbf{m}) + \frac{1}{2}\mu^2(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}). \quad (4.7)$$

Вычисляя производную  $\mathcal{E}$  вдоль решений (4.6), находим

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = -\frac{(\mathbf{m}, \mathbf{A}\mathbf{m})}{2\tau}.$$

Из этого равенства легко следует, что

- 1)  $\mathcal{E} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{E}_* = \text{const}$ ;
- 2) интеграл  $I = \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{(\mathbf{m}(\tau), \mathbf{A}\mathbf{m}(\tau))}{2\tau} d\tau$  сходится.

С физической точки зрения дальнейшее доказательство сводится к тому, чтобы показать, что  $\mathcal{E}_* = \mathcal{E}_c$  — критическое значение формулы (4.7), а следовательно, и  $V(\gamma)$ . Оказывается, что предположение  $\mathcal{E}_* \neq \mathcal{E}_c$  противоречит сходимости интеграла  $I$ .

Для падения произвольного тела, обладающего тремя плоскостями симметрии, также существует гипотеза [11], что для почти всех решений  $\gamma$  уравнений (4.3)  $\mathcal{E}_* = \mathcal{E}_c^{\min}$ . Таким образом, тело при  $t \rightarrow \infty$  почти всегда стремится занять в пространстве такое положение, что ось, соответствующая максимальной присоединенной массе, становится вертикальной.

### 4.3. Компьютерный анализ

Сформулированное выше утверждение об асимптотическом поведении приводит к естественному вопросу: как в пространстве начальных условий устроены области, соответствующие различным асимптотическим режимам при  $t \rightarrow \pm\infty$  (т. е. бассейны притяжения)? Выберем  $t_0 = 0$ , параметризуем совместный четырехмерный уровень интегралов

$$(\mathbf{M}, \gamma) = c = \text{const}, \quad \gamma^2 = 1 \tag{4.8}$$

переменными Андуайе  $(L, G, l, g)$  и зафиксируем поверхность начальных условий при  $t_0 = 0$  уравнениями

$$g = g_0, \quad E = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) = \text{const}. \tag{4.9}$$

В зависимости от того, какой стороной падает при  $t \rightarrow \infty$  тело, будем окрашивать точку на этой поверхности в соответствующий цвет. Типичная картина приведена на рисунках 9, 10.

Мы видим, что тело падает таким образом, что ось, соответствующая наибольшей присоединенной массе, вертикальна, т. е. либо одной широкой стороной вниз, либо другой, что подтверждает сформулированную выше гипотезу. При этом граница этих областей в общем случае устроена фрактально, т. е. при увеличении разрешения рисунок поверхности повторяется на все более мелких масштабах.

Таким образом, если использовать аналогию с интегрируемыми и неинтегрируемыми (регулярными и хаотическими) системами, можно плоскопараллельный случай назвать интегрируемым, а общий случай системы (4.2), (4.3) неинтегрируемым. Действительно, в плоскопараллельном случае границы областей, соответствующих различным расположениям тела, регулярны, а в системе (4.2), (4.3) — фрактальны. Мы покажем ниже, что если система (4.3) имеет еще один дополнительный интеграл (интеграл Лагранжа), границы областей также становятся регулярными.

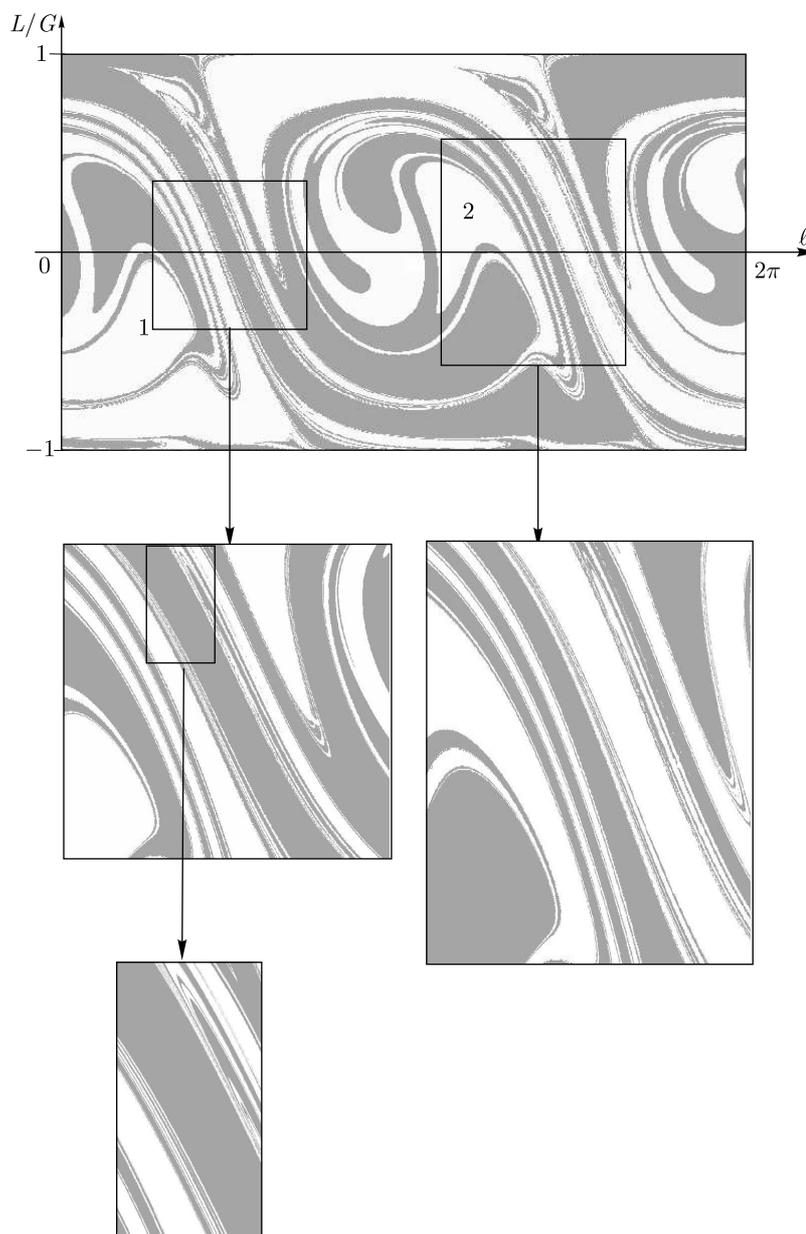


Рис. 9. Типичная картина областей, соответствующих двум различным предельным при  $t \rightarrow +\infty$  положениям тела (в которых собственный вектор, отвечающий наибольшей присоединенной массе, вертикален — два цвета соответствуют двум его возможным направлениям). На четырехмерном уровне первых интегралов приведенная двумерная поверхность определяется уравнениями (4.8), (4.9). Значения параметров системы:  $\mathbf{A} = \text{diag}(1.8, 1.5, 2)$ ,  $\mathbf{C} = \text{diag}(0.5, 2.9, 1.4)$ ,  $\mu = 1$ ,  $(M, \gamma) = 1$ ,  $E_0 = 7$ .

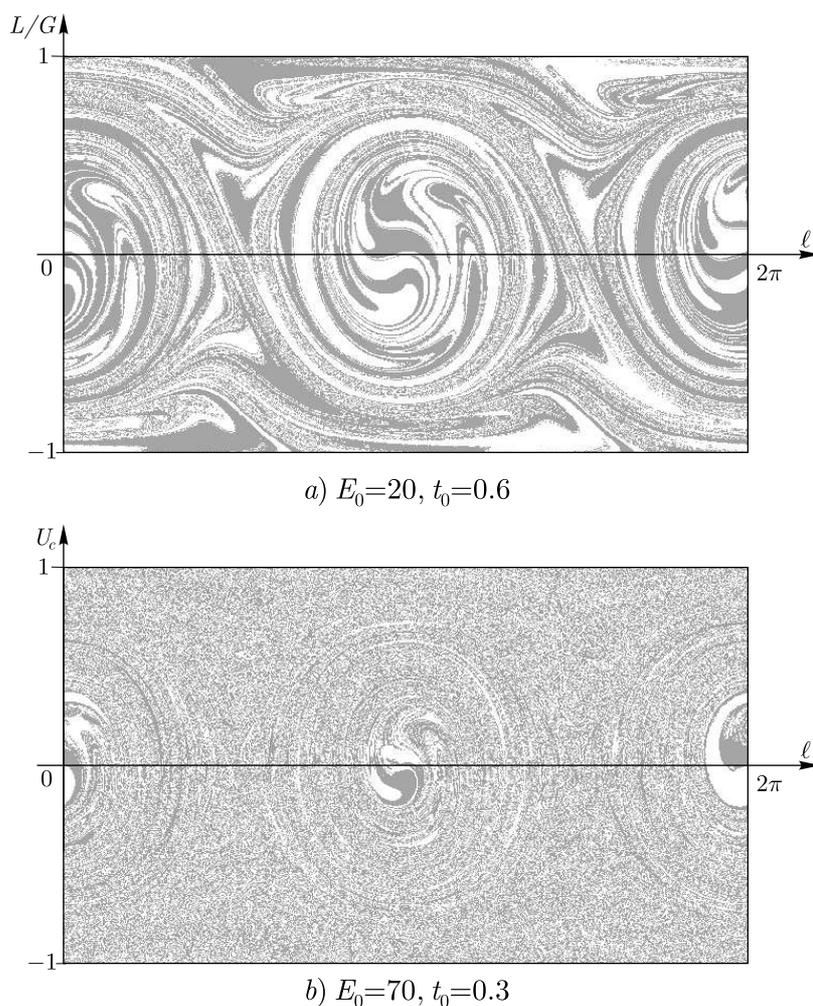


Рис. 10. Характерный вид разбиения поверхности начальных условий в соответствии с поведением системы при  $t \rightarrow \infty$  при увеличении начальной энергии и начального момента  $t_0$ . Значения параметров системы:  $\mathbf{A} = \text{diag}(1.8, 1.5, 2)$ ,  $\mathbf{C} = \text{diag}(0.5, 2.9, 1.4)$ ,  $\mu = 1$ ,  $(\mathbf{M}, \gamma) = 1$ .

Фрактальная структура границ, разделяющих различные типы поведений при  $t \rightarrow \infty$ , тесно связана с вероятностными эффектами, возникающими при описании асимптотических движений. Действительно, при сложном распределении начальных условий, соответствующих различным типам асимптотического поведения, при конкретных (заданных) начальных условиях асимптотическое поведение становится непредсказуемым и можно говорить лишь о вероятностном описании. Это — своего рода вероятностный хаос, порожденный структурой начальных условий. Вероятностное описание было предложено А.И. Нейштадтом при изучении движения вокруг неподвижной точки твердого тела, находящегося под действием постоянного и линейного (по угловым скоростям) диссипативных моментов [14]. Оказалось, что при малых величинах этих моментов динамика системы имеет вероятностный характер, в работе [14] получены явные формулы для вероятностей, осуществляющих эволюцию системы к одному из равномерных вращений. Непосредственное перенесение аналитических результатов [14] на систему (4.3), (4.6) связано с существенными трудностями, обусловленными большей размерностью этой системы и зависимостью «параметра диссипации»  $\varepsilon$  от времени:  $\varepsilon \sim \frac{1}{\tau}$ .

**З а м е ч а н и е.** Поведение тяжелого тела в жидкости существенно отличается от его движения по инерции, описываемого уравнениями Кирхгофа. Последняя система в общем случае является неинтегрируемой [1, 12] и демонстрирует типичное хаотическое поведение (гамильтонов хаос) [2, 21].

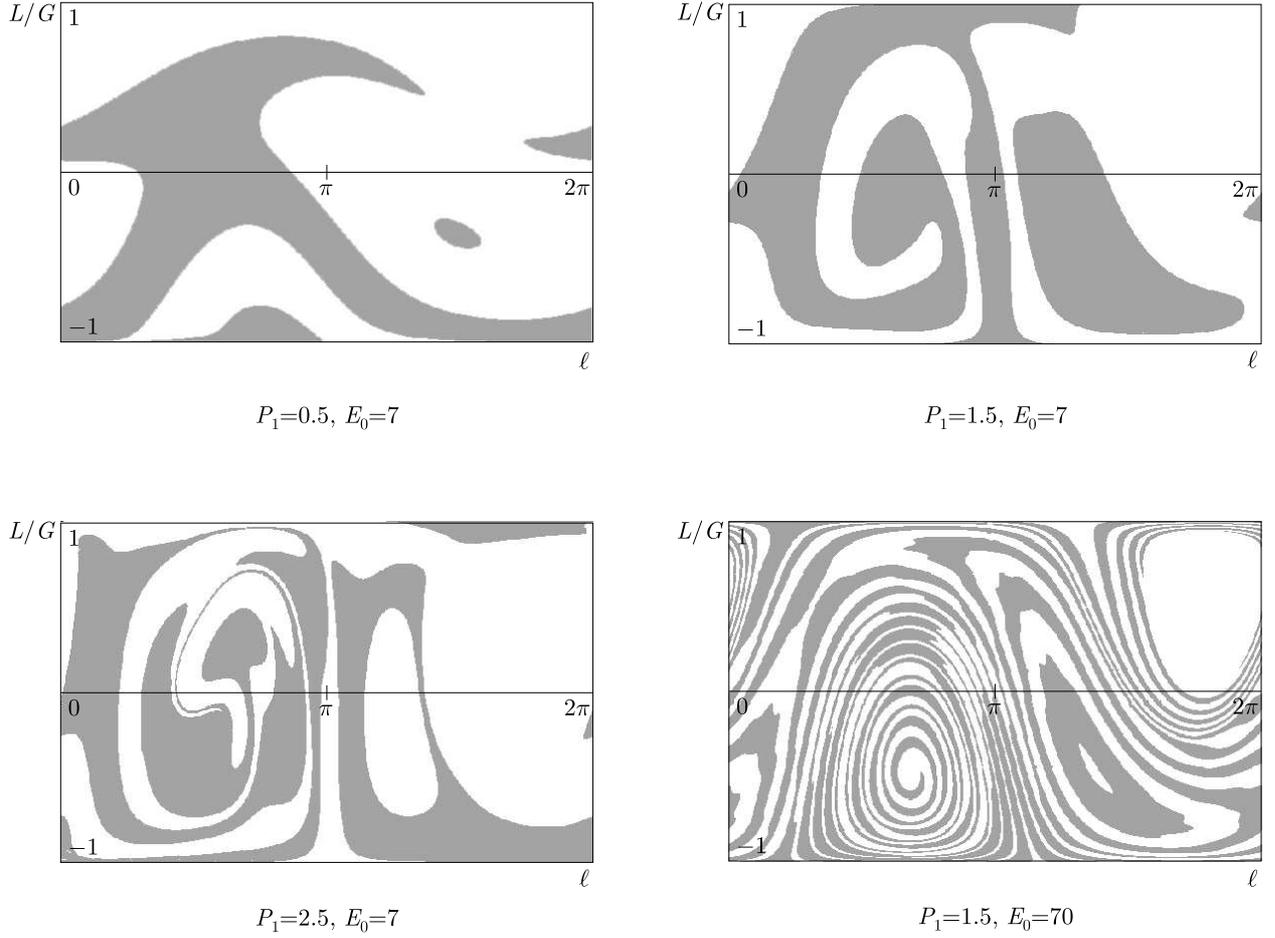


Рис. 11. Аналог случая Лагранжа, т. е. случай существования интеграла  $M_3 = \text{const}$ . Регулярная структура бассейна притяжения ( $b_1 = 0.3$ ,  $b_3 = 1.7$ ,  $c_1 = 2.9$ ,  $c_3 = 1.4$ ,  $\mu = 1$ ).

## 5. Падение тела с винтовой симметрией. Решения Стеклова и их устойчивость

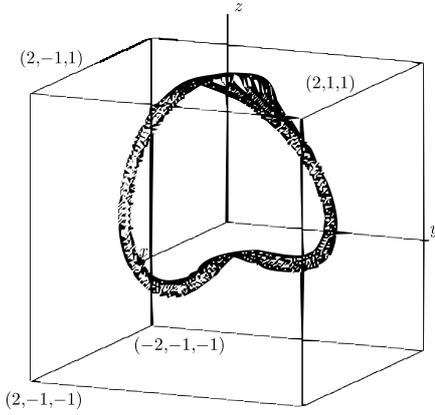
Для общего случая  $P_1 \neq 0$ ,  $\mathbf{V} \neq 0$  системы (1.6) после замен

$$\frac{1}{2}t^2 = \tau, \quad M = tm$$

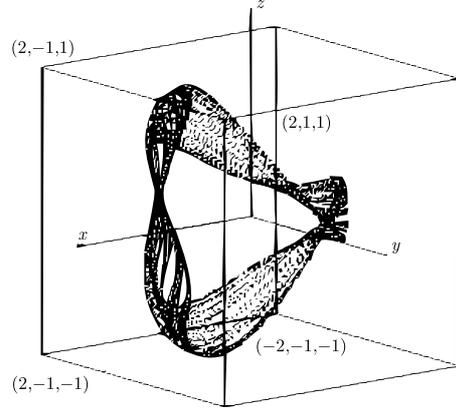
получим уравнения движения в форме

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{m}}{d\tau} &= -\frac{1}{2\tau}\mathbf{m} + \mathbf{m} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{m}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \\ \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{d\tau} &= \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{m}}, \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\tau} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{m}}, \\ H &= H_0 + \frac{1}{\sqrt{2\tau}}H_1 + \frac{1}{2\tau}H_2, \\ H_0 &= \frac{1}{2}(\mathbf{m}, \mathbf{A}\mathbf{m}) - \mu(\mathbf{B}\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma}) + \frac{\mu^2}{2}(\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}), \\ H_1 &= P_1(\mathbf{B}\mathbf{m}, \boldsymbol{\alpha}) - P_1\mu(\mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}), \quad H_2 = \frac{P_1}{2}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}) + \mu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$B_{11}=8, B_{22}=0$$

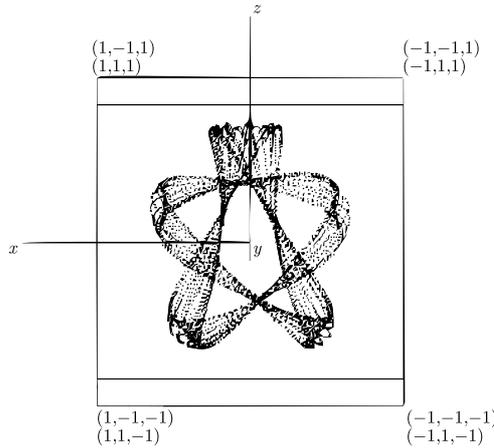


Начальная точка  $g \approx 3.04$ ,  $L/G \approx 0.62$



Начальная точка  $g \approx 3.04$ ,  $L/G \approx 0.62$

$$B_{11}=8, B_{22}=1$$



Начальная точка  $g \approx 3.04$ ,  $L/G \approx 0.62$

Рис. 12. Характерный вид предельных множеств в случае падения тела с винтовой симметрией ( $A_{11} = 1$ ,  $A_{22} = 1.2$ ,  $A_{33} = 2$ ,  $C_{11} = 1.6$ ,  $C_{22} = 0.1$ ,  $C_{33} = 0$ ,  $P_1 = 0$ ,  $\mu = 1$ ,  $x = y = z = 0$ ,  $E_0 = 3$ ,  $g_0 = \frac{\pi}{2}$ ).

Теперь дифференцирование энергии вдоль системы дает

$$\frac{dH}{d\tau} = -\frac{(\mathbf{m}, \mathbf{A}\mathbf{m})}{2\tau} + \frac{1}{2\tau} \left( \mathbf{B}\mathbf{m}, \mu\boldsymbol{\gamma} - \frac{2P_1}{\sqrt{2\tau}}\boldsymbol{\alpha} \right) + \frac{W_1}{(2\tau)^{3/2}} + \frac{W_2}{(2\tau)^2}, \quad (5.2)$$

$$W_1 = -P_1\mu(\mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}), \quad W_2 = P_1^2(\mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) + 2\mu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}).$$

Для этой системы уже не справедливы асимптотические закономерности движения, сформулированные в предыдущих разделах. Более того, существуют сложные притягивающие при  $t \rightarrow \infty$  режимы движения, отличные от поступательных движений. Прежде всего рассмотрим условия устойчивости (при  $\mathbf{B} \neq 0$ ) классических равноускоренных вращений для уравнений (5.1) и найдем области значений параметров, при которых все они теряют устойчивость (и устойчивыми становятся более сложные режимы). В дальнейшем мы рассмотрим также случай нулевого начального толчка:  $P_1 = 0$ .

### 5.1. Линейная устойчивость решений Стеклова

При  $P_1 = 0$  уравнения для  $\mathbf{m}$ ,  $\gamma$  отделяются, а интеграл площадей представляется в форме

$$(\mathbf{m}, \gamma) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\tau}}, \quad \sigma = \text{const}, \quad (5.3)$$

т. е.  $(\mathbf{M}, \gamma) = \sigma$ .

Если, кроме того,  $\mathbf{r} = 0$  и  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  одновременно диагонализированы, то уравнения (5.1) допускают частные решения, аналогичные стационарным решениям (4.4). В базисе собственных векторов матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  имеем

$$\gamma_k = \pm 1, \quad \gamma_i = \gamma_j = 0, \quad m_k = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{2\tau}}, \quad m_i = m_j = 0, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad (5.4)$$

т. е. с учетом номера  $k$  и возможных знаков  $\pm$  имеется шесть частных решений. При этом тело падает таким образом, что его ось  $Oe_k$  остается вертикальной, а угловая скорость вращения вокруг нее определяется соотношением

$$\Omega^{(k)} = -\mu b_k t + \sigma a_k,$$

т. е. тело вращается равноускоренно. Скорость начала подвижной системы координат в подвижных осях определяется выражением  $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}} = (\sigma \mathbf{B} - \mu t \mathbf{C}) \gamma$ , откуда с помощью (1.2) находим

$$x_i = \text{const}, \quad x_j = \text{const}, \quad x_k = -\mu c_k \frac{t^2}{2} + \sigma b_k t + \text{const},$$

т. е. начало координат движется равномерно ускоренно вдоль вертикальной оси, как и при свободном падении тела. Эти равноускоренные движения были указаны В.А. Стекловым [18] (1895) и С.А. Чаплыгиным [20] (1900). В дальнейшем мы будем называть их решениями Стеклова.

По аналогии с решениями (4.4) решения (5.4) всегда неустойчивы во всем фазовом пространстве (по отношению к переменным  $\mathbf{M}$ ,  $\gamma$ ). Эта неустойчивость была указана В.А. Стекловым [18]. В то же время устойчивость по отношению к позиционным переменным  $\gamma$  зависит от параметров системы и требует отдельного рассмотрения.

Для исследования устойчивости решений (5.4) выберем новые переменные

$$v_i = \frac{d\gamma_i}{d\tau}, \quad v_j = \frac{d\gamma_j}{d\tau}, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad (5.5)$$

дополняя эти уравнения интегралом площадей (5.3), выразим переменные  $m_i$ ,  $m_j$ ,  $m_k$  через  $v_i$ ,  $v_j$ ,  $\sigma$ . Воспользовавшись соотношением  $\gamma_k = \pm 1 \mp \frac{1}{2}(\gamma_i^2 + \gamma_j^2)$  вблизи решений (5.4), получим линеаризованные уравнения для новых переменных в форме

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_i}{d\tau} &= v_i, & \frac{d\gamma_j}{d\tau} &= v_j, \\ \frac{dv_i}{d\tau} &= -a_i^{-1} a_j \varkappa_i^{(k)} \gamma_i + a_i^{-1} a_j \mu (b_i - b_k + a_i (b_j - b_k)) v_j \\ &+ \frac{\sigma}{\sqrt{2\tau}} a_i^{-1} (\mu a_j a_k (b_i - b_k) \gamma_i + (a_i a_k + a_j a_k - a_i a_j) v_j) \\ &- \frac{1}{2\tau} (v_i - \sigma^2 a_i^{-1} a_j a_k (a_k - a_i) \gamma_j + \mu (b_j - b_k) \gamma_j), \\ \frac{dv_j}{d\tau} &= \dots, \\ \varkappa_i^{(k)} &= \mu^2 (a_i (c_i - c_k) - (b_i - b_k)^2), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где выражение для  $\frac{dv_j}{d\tau}$  получается сменой индексов  $i \leftrightarrow j$ .

Воспользуемся теоремами из [4] о поведении линейных систем вида  $\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = (\mathbf{A} + \mathbf{V}(\tau))\mathbf{x}$ , где  $\int_{\tau_0}^{\infty} |V'(\tau)|d\tau < \infty$  и  $V(\tau) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Применяя их, получим, что характеристические числа линейной системы (5.6) разлагаются по степеням  $\tau^{-1/2}$

$$\lambda_k(\tau) = \lambda_k^{(0)} + \frac{\lambda_k^{(1)}}{\sqrt{\tau}} + \frac{\lambda_k^{(2)}}{\tau} + \dots,$$

и необходимыми условиями устойчивости системы (5.6) являются  $\text{Re}\lambda_k^{(0)} \leq 0$  (аналогично, достаточными условиями неустойчивости являются  $\text{Re}\lambda_k^{(0)} > 0$ ), где  $\lambda_k^{(0)}$  — характеристические числа системы при  $\tau = \infty$ . Для их определения можно получить (биквадратный) характеристический полином

$$\lambda^4 - \lambda^2(\chi_i^{(k)} + \chi_j^{(k)} - \chi_k^{(k)}) + \chi_i^{(k)}\chi_k^{(k)} = 0. \quad (5.7)$$

Таким образом, необходимым условием устойчивости решений (5.4) является наличие у полинома (5.7) чисто мнимых корней (точнее, это условие отсутствия экспоненциальной по  $\tau$  неустойчивости). Отсюда находим соответствующие ограничения на параметры

$$\begin{aligned} \chi_i^{(k)} \cdot \chi_j^{(k)} > 0, \quad \chi_i^{(k)} + \chi_j^{(k)} - \chi_k^{(k)} < 0, \\ D = (\chi_i^{(k)})^2 + (\chi_j^{(k)})^2 + (\chi_k^{(k)})^2 - 2\chi_i^{(k)}\chi_j^{(k)} - 2\chi_i^{(k)}\chi_k^{(k)} - 2\chi_j^{(k)}\chi_k^{(k)} > 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Исследуем теперь подробно устойчивость каждого из решений в зависимости от параметров. Без ограничения общности положим  $k = 3$  и  $\mu = 1$ ,  $c_3 = 0$ ,  $b_3 = 0$  (выполнения последних двух условий можно достичь с помощью интегралов  $\gamma^2 = 1$  и  $(\mathbf{M}, \gamma) = \text{const}$ ). Зафиксируем  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  и построим на плоскости параметров  $b_1$ ,  $b_2$  области, в которых выполнены неравенства (5.8). В этом случае соотношения (5.8) принимают вид

$$\begin{aligned} (a_1c_1 - b_1^2)(a_2c_2 - b_2^2) > 0, \quad \Phi = a_1c_2 + a_2c_1 + 2b_1b_2 > 0, \\ D = (a_1c_2 - a_2c_1)^2 + 4(a_1b_2 + a_2b_1)(c_2b_1 + c_1b_2) > 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Несложно показать, что имеются три качественно различных случая:

1.  $c_3 = 0 > c_1 > c_2$  (т.е.  $c_1 < 0$  и  $c_2 < 0$ ); в этом случае на плоскости  $b_1$ ,  $b_2$  нет областей, в которых выполнены неравенства (5.8). Можно показать, что решения уравнения (5.7) разбиваются либо на две пары вещественных, либо на четверку комплексных.
2.  $c_1 > c_3 = 0 > c_2$  (т.е.  $c_1 > 0$  и  $c_2 < 0$ ); в этом случае область, определяемая соотношениями (5.9), располагается между прямыми  $b_1 = \pm\sqrt{a_1c_1}$  и ветвями гиперболы, определяемой соотношением  $D = 0$  (см. рис. 13а).
3.  $c_1 > c_2 > c_3 = 0$  (т.е.  $c_1 > 0$  и  $c_2 > 0$ ); в этом случае области, определяемые соотношениями (5.9), располагаются между прямыми  $b_1 = \pm\sqrt{a_1c_1}$ ,  $b_2 = \pm\sqrt{a_2c_2}$  и ветвями гиперболы  $D = 0$  (см. рис. 13б).

**З а м е ч а н и е.** Несложно показать, что кривые  $\Phi = 0$  и  $D = 0$  пересекаются между собой в тех же точках, в которых они пересекают какую-либо из прямых  $b_i = \pm\sqrt{a_i c_i}$ .

Если  $b_1 = b_2 = 0$ , то условия (5.9) приводят к указанным выше [11], а именно: устойчивым оказывается лишь случай 3, т.е. падение, при котором ось, соответствующая максимально присоединенной массе, вертикальна. Таким образом, добавление матрицы  $\mathbf{V}$  позволяет стабилизировать (по крайней мере в линейном смысле) движение, при котором «средняя» ось является вертикальной, и не позволяет стабилизировать движение, при котором вертикальна «малая» ось.

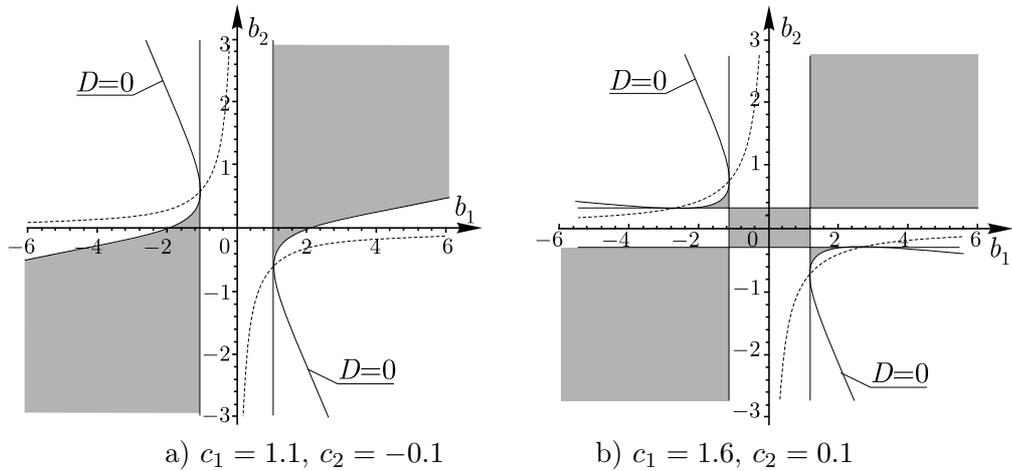


Рис. 13. Характерный вид областей на плоскости параметров  $b_1, b_2$  (отмечены серым цветом), для которых выполнены необходимые условия устойчивости (5.9) решений Стеклова при различных соотношениях параметров матрицы  $\mathbf{C}$ , при этом  $\mathbf{A} = \text{diag}(1, 1.2, 2)$ .

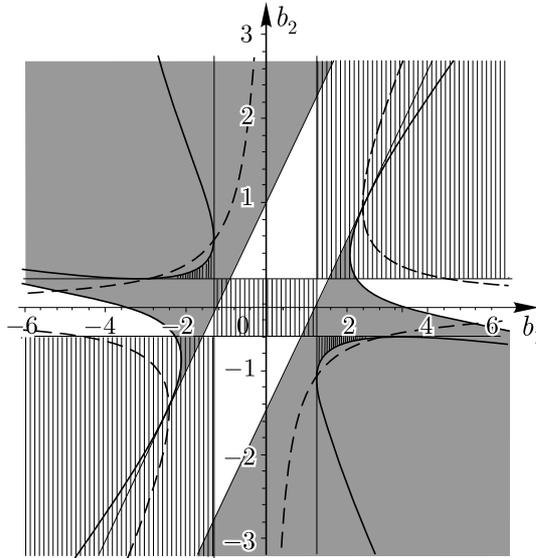


Рис. 14. Характерный вид областей устойчивости на плоскости параметров  $b_1, b_2$  решений Стеклова, соответствующих падению «широкой» (т. е. собственный вектор в направлении максимальной присоединенной массы вертикален) и «средней» стороной вниз.  $\mathbf{A} = \text{diag}(1, 1.2, 2)$ ,  $\mathbf{C} = \text{diag}(1.6, 0.1, 0)$ .

Положим теперь для определенности  $c_1 > c_2 > c_3 = 0$  и нанесем на плоскости параметров  $b_1, b_2$  области (линейной) устойчивости решений Стеклова, соответствующих падению «широкой» и «средней» стороной; см. рис. 14 (падение «узкой» стороной всегда неустойчиво). На рисунке хорошо видно, что имеются области, в которых все три решения Стеклова неустойчивы (отмечены белым цветом).

## 5.2. Об устойчивости по Ляпунову

Для одного из решений Стеклова (5.4), а именно, для случая, когда тело падает «широкой» стороной вниз, можно доказать асимптотическую устойчивость (по Ляпунову).

Согласно сказанному выше, без ограничения общности в (5.4) можно положить  $i = 1, j = 2, k = 3$  и  $b_3 = 0, c_1 > c_2 > c_3 = 0$ . Функцию Ляпунова построим в виде

$$V = H_2 + \frac{1}{\tau}W,$$

где  $H_2$  — квадратичная часть гамильтониана вблизи этого решения в переменных  $\gamma_1, \gamma_2, v_1, v_2$ , имеющая вид

$$H_2 = \frac{1}{2}(a_2^{-1}v_1^2 + a_1^{-1}v_2^2) + \frac{1}{2a_1}\left(a_1c_1 - b_1^2 - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\tau}}a_3b_1 + \frac{\sigma^2}{4\tau^2}a_3(a_1 - a_3)\right)\gamma_1^2 + \frac{1}{2a_2}\left(a_2c_2 - b_2^2 - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\tau}}a_3b_2 + \frac{\sigma^2}{4\tau^2}a_3(a_2 - a_3)\right)\gamma_2^2, \quad (5.10)$$

а функцию  $W$  будем искать в виде однородной квадратичной формы по  $\gamma_1, \gamma_2, v_1, v_2$  с постоянными коэффициентами.

Легко видеть, что при больших  $\tau$  функция  $H_2$ , и, следовательно,  $Vh$ , положительно определена вблизи начала координат при условиях

$$a_1c_1 - b_1^2 > 0, \quad a_2c_2 - b_2^2 > 0. \quad (5.11)$$

Как было показано выше, эти неравенства задают одну из областей устойчивости рассматриваемого решения в линейном приближении (см. рис. 13b). Таким образом, для тех значений параметров, при которых удастся подобрать функцию  $V$ , производная которой вдоль решений линейной системы строго отрицательна (при достаточно больших  $\tau$ ), мы можем показать асимптотическую устойчивость в области, ограниченной неравенствами (5.11).

Производная функции  $V$  вдоль системы (5.6) имеет вид

$$\frac{dV}{d\tau} = -\frac{1}{\tau}G_1 + \frac{1}{\tau^{3/2}}G_2 + \frac{1}{\tau^2}G_3,$$

где  $G_1, G_2, G_3$  — однородные квадратичные формы по переменным  $\gamma_1, \gamma_2, v_1, v_2$ . Таким образом, при больших  $\tau$  знак производной  $\frac{dV}{d\tau}$  определяется квадратичной формой  $G_1$ , которая в случае асимптотической устойчивости должна быть положительно определенной.

Прямым вычислением можно показать, что  $W$  необходимо выбрать в форме

$$W = k_1v_1\gamma_1 + k_2v_2\gamma_2,$$

добавление других слагаемых приводит к появлению заведомо отрицательных слагаемых в функции  $G_1$ . При таком выборе  $W$   $G_2$  и  $G_3$  не зависят от  $v_1, v_2$  и

$$G_1 = 2k_1a_1^{-1}a_2(a_1c_1 - b_1^2)v_1^2 + 2k_2a_2^{-1}a_1(a_2c_2 - b_2^2)v_2^2 + a_2^{-1}(1 - 2a_2k_1)\gamma_1^2 + a_1^{-1}(1 - 2a_1k_2)\gamma_2^2 + \frac{1}{2}a_1^{-1}(b_1 - 2k_1(a_1b_2 + a_2b_1))\gamma_1v_2 - \frac{1}{2}a_2^{-1}(b_2 - 2k_2(a_1b_2 + a_2b_1))\gamma_2v_1. \quad (5.12)$$

Несложно получить условия положительной определенности формы  $G_1$ :

$$0 < k_1 < \frac{1}{2a_2}, \quad 0 < k_2 < \frac{1}{2a_1}, \\ -4(a_1b_2 + a_2b_1)^2k_1^2 - 16a_1a_2(c_1a_1 - b_1^2)k_1k_2 - b_1^2 + 4(2a_1a_2c_1 - a_2b_1^2 + a_1b_1b_2)k_1 > 0, \\ -4(a_1b_2 + a_2b_1)^2k_2^2 - 16a_1a_2(c_2a_2 - b_2^2)k_1k_2 - b_2^2 + 4(2a_1a_2c_2 - a_1b_2^2 + a_2b_1b_2)k_2 > 0. \quad (5.13)$$

Выделяются два случая:

1)  $b_1 \cdot b_2 > 0$ , тогда, выбирая  $k_1 = \frac{1}{2}b_1(a_1b_2 + a_2b_1)^{-1}$ ,  $k_2 = \frac{1}{2}b_2(a_1b_2 + a_2b_1)^{-1}$ , мы получаем диагональную заведомо положительно определенную квадратичную форму (5.12);

2)  $b_1 \cdot b_2 < 0$ , в этом случае достаточные условия разрешимости неравенств (5.13) определяются решениями уравнения четвертой степени (и имеют достаточно громоздкий вид). В то же

время, поскольку в двух последних соотношениях (5.13) лишь одно слагаемое положительно, можно получить необходимые условия разрешимости (5.13) в форме:

$$\begin{aligned} \Phi_1 = 2a_1a_2c_1 - a_2b_1^2 + a_1b_1b_2 > 0, \quad \Phi_2 = 2a_1a_2c_2 - a_1b_2^2 + a_2b_1b_2 > 0, \\ b_1b_2 > \max(-a_1c_2, -a_2c_1). \end{aligned} \quad (5.14)$$

На рис. 15 серым цветом показана область, где рассматриваемое решение заведомо устойчиво, а штриховкой — область, где выполнены необходимые условия (5.14). Как видно из рисунка, при  $b_1b_2 < 0$  область асимптотической устойчивости не совпадает со всей областью знакоопределенности квадратичной формы (5.10).

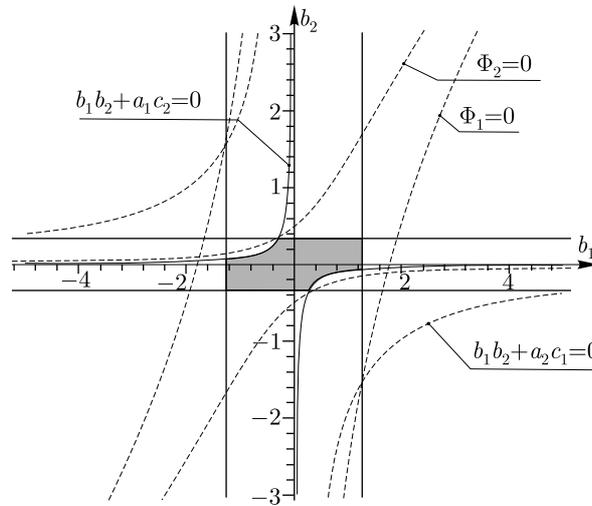


Рис. 15. Область асимптотической устойчивости решения Стеклова, соответствующего падению «широкой» стороной вниз при  $\mathbf{A} = \text{diag}(1, 1.2, 2)$ ,  $\mathbf{C} = \text{diag}(1.6, 0.1, 0)$ .

**З а м е ч а н и е.** Анализ устойчивости для решений Стеклова был выполнен в работах [6, 24] (в линейной и нелинейной постановках). В частности, автор получил условия (5.13) в виде общих неравенств на коэффициенты, не различая шесть (без учета знака — три) типов решений Стеклова, соотношение устойчивости и неустойчивости между которыми может быть различным. Мы провели здесь геометрический анализ значений возможных параметров, при которых выполнены условия устойчивости (5.13), и сделали заключение о существовании области значений параметров, при которых все решения Стеклова являются неустойчивыми. В этом случае в фазовом пространстве существует более сложное инвариантное притягивающее множество типа двумерного тора (см. рис. 12), к которому стремятся траектории системы (5.1) при  $t \rightarrow +\infty$ . Аналитически существование этого инвариантного множества до сих пор не доказано, так как пока вообще не развита теория бифуркаций и качественные методы для систем типа (5.1), для которых линейная «диссипация» убывает во времени от значений параметра  $\varepsilon \sim \frac{1}{\tau}$ . В нашем анализе получены также более простые условия линейной устойчивости и устойчивости по Ляпунову вследствие систематического использования гамильтоновой формы уравнений движения.

Авторы благодарны К. Г. Тронину за проведенные компьютерные вычисления.

Поступила 25.11.05

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Борисов А.В.** Необходимые и достаточные условия интегрируемости уравнений Кирхгофа // *Reg. & Chaot. Dyn.* 1996. V. 1, no 2. P. 61–73.
2. **Борисов А.В., Кирьянов А.И.** Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа. М.: МГУ. 1990. Сб. «Математические методы в механике». С. 16–21.
3. **Борисов А.В., Мамаев И.С.** Случай Гесса в динамике твердого тела // *Прикл. математика и механика.* 2003. Т. 67, № 2. С. 256–265.
4. **Борисов А.В., Мамаев И.С., Холмская А.Г.** Случай С. В. Ковалевской и новые интегрируемые системы динамики // *Вестн. молодых ученых. Прикл. Мат. Мех., СПб.* 2000. № 4. С. 13–25.
5. **Горячев Д.Н.** К вопросу о движении тяжелого тела в жидкости // *Изв. Импер. об-ва любителей естествознания при Моск. Императ. Унив.* 1893. Т. 78, № 2. С. 59–61.
6. **Дерябин М.В.** Об устойчивости равноускоренных вращений тяжелого твердого тела в идеальной жидкости // *Изв. РАН. МТТ.* 2002. № 5. С. 30–34.
7. **Дерябин М.В., Козлов В.В.** Об эффекте «выныривания» тяжелого твердого тела в жидкости // *Изв. РАН. МТТ.* 2002, № 1. С. 68–74.
8. **Коддингтон Э.А., Левинсон Н.** Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ. 1958, 475 с. Пер. с англ.: **Coddington E.A., Levinson N.** *Theory of ordinary differential equations.* McGraw-Hill: New York-Toronto-London, 1955.
9. **Козлов В.В.** О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости // *Изв. АН СССР. Сер. Мех. тв. тела.* 1989. № 5. С. 10–16.
10. **Козлов В.В.** О полиномиальных интегралах динамических систем с полутора степенями свободы // *Мат. заметки.* 1989. Т. 45, № 4. С. 46–52.
11. **Козлов В.В.** Об устойчивости положений равновесия в нестационарном силовом поле // *Прикл. математика и механика.* 1991. Т. 55, № 1. С. 12–19.
12. **Козлов В.В., Онищенко Д.А.** Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // *Докл. АН СССР.* 1982. Т. 266, № 6. С. 1298–1300.
13. **Ламб Г.** *Гидродинамика.* ОГИЗ, Гостехиздат. 1947, 928 с. Пер. с англ.: **Lamb H.** *Hydrodynamics,* ed. 6-th. N. Y. Dover publ., 1945.
14. **Нейштадт А.И.** Об эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов // *Изв. АН СССР. Сер. Мех. тв. тела.* 1980. № 6. С. 30–36.
15. **Рамоданов С.М.** Асимптотика решений уравнений Чаплыгина // *Вестн. МГУ. Сер. Мат. Мех.* 1995. № 3. С. 93–97.
16. **Стеклов В.А.** Дополнения к сочинению «О движении твердого тела в жидкости». Харьков, 1895.
17. **Стеклов В.А.** О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893. 234 с.
18. **Стеклов В.А.** О некоторых возможных движениях твердого тела в жидкости // *Труды отд. физ. наук об-ва любителей естествознания, антропологии и этнографии.* 1895. Т. 7. С. 1–40.
19. **Чаплыгин С.А.** Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости. Собр. соч. // М.-Л.: ГИТТЛ. 1948. Т. 1. С. 337–346. (Изд. 1-е: *Труды отд. физ. наук об-ва любителей естествознания.* 1903. Т. 11, вып. 2. С. 7–10.)
20. **Чаплыгин С.А.** О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости. Полн. собр. соч. // Л.: Изд-во АН СССР. 1933. Т. 1. С. 133–150.
21. **Aref H., Jones S.W.** Chaotic motion of a solid through ideal fluid // *Phys. Fluids A.* 1993. V. 5, no. 12. P. 3026–3028.
22. **Bertolli M.L., Bolotin S.V.** Doubly asymptotic trajectories of Lagrangian systems in homogeneous force fields // *Ann. di Matem. pura ed. applicata.* 1998 (IV). V. CLXXIV. P. 253–275.
23. **Deryabin M.V.** On asymptotics of Chaplygin equation // *Reg. & Chaot. Dyn.* 1998. V. 3, no. 1. P. 93–97.
24. **Deryabin M.V.** On stability of uniformly-accelerated motions of an axially-symmetric rigid body in an ideal fluid // *Z. Angew. Math. Mech.* 2003. V. 83, no. 3. P. 197–203.