

Асимптотическая устойчивость и родственные задачи динамики падающего тяжелого твердого тела*

А.В. Борисов¹, В.В. Козлов², И.С. Мамаев¹

¹ Институт компьютерных исследований,
Удмуртский государственный университет;

Отдел математических методов нелинейной динамики (г. Ижевск)
Институт математики и механики УрО РАН
Россия, 426034, Ижевск, ул. Университетская, 1

² Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, 8

E-mails: borisov@rcd.ru, kozlov@pran.ru, mamaev@rcd.ru

Получено 17 июля 2007 г.

В работе рассматриваются две задачи из динамики твердого тела, к которым применяются новые методы анализа асимптотического поведения и устойчивости. Первая задача связана с движением твердого тела в безграничном объеме идеальной безвихревой жидкости. Вторая задача, имеющая с первой родственное асимптотическое поведение, описывает движение саней по наклонной плоскости. Уравнения движения этой системы являются неголономными и допускают ряд новых эффектов, нетипичных для гамильтоновых систем. Приведен обзор литературы и сформулированы новые постановки задач, связанные с падением твердого тела в идеальной и вязкой жидкости.

Цитата: А.В. Борисов, В.В. Козлов, И.С. Мамаев, Асимптотическая устойчивость и родственные задачи динамики падающего тяжелого твердого тела, *Нелинейная динамика*, 2007, т. 3, № 3, с. 255–296. [Original publication: A.V. Borisov, V.V. Kozlov, I.S. Mamaev, Asymptotic stability and associated problems of dynamics of falling rigid body, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, № 5, pp. 531–565.]

Ключевые слова: неголономная механика, твердое тело, идеальная жидкость, сопротивляющаяся среда

A.V. Borisov, V.V. Kozlov, I.S. Mamaev

Asymptotic stability and associated problems of dynamics of falling rigid body

We consider two problems from the rigid body dynamics and use new methods of stability and asymptotic behavior analysis for their solution. The first problem deals with motion of a rigid body in an unbounded volume of ideal fluid with zero vorticity. The second problem, having similar asymptotic behavior, is concerned with motion of a sleigh on an inclined plane. The equations of motion for the second problem are non-holonomic and exhibit some new features not typical for Hamiltonian systems. A comprehensive survey of references is given and new problems connected with falling motion of heavy bodies in fluid are proposed.

Citation: A.V. Borisov, V.V. Kozlov, I.S. Mamaev, Asymptotic stability and associated problems of dynamics of falling rigid body, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, No. 5, pp. 531–565. [Russian version: *Rus. J. Nonlin. Dynamics*, 2007, Vol. 3, No. 3 pp. 255–296.]

Keywords: nonholonomic mechanics, rigid body, ideal fluid, resisting medium
MSC 2000: 74F10, 93D20

* Впервые опубликовано в специальном выпуске журнала *Regular and Chaotic Dynamics*, посвященном 150-летию со дня рождения А.М. Ляпунова.



1. Введение

Одна из первых работ А. М. Ляпунова по теории устойчивости — это исследование устойчивости постоянных винтовых движений твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости [30]. Общие уравнения движения тела в жидкости незадолго до этого были получены Кирхгофом, а первый нетривиальный случай интегрируемости был найден Клебшем. В дальнейшем Ляпунов неоднократно возвращался к задаче о динамике тела в жидкости. Достаточно упомянуть его заметку о новом случае точной интегрируемости уравнений движения [31]. Этот случай является взаимным к случаю, который нашел В. А. Стеклов, ученик Ляпунова, устранив некоторые неточности в работе Клебша. Заметим кстати, что и Ляпунов обнаружил свой случай интегрируемости после того, как им были отмечены некоторые пробелы в вычислениях В. А. Стеклова [42], готовившего свою магистерскую диссертацию под руководством Ляпунова.

Исторический комментарий. Кроме этих известных работ у Ляпунова имеются еще два неопубликованных исследования, посвященные анализу движения тела в жидкости [34, 35]; эти работы хранятся в рукописном виде в Архиве Российской академии наук в Санкт-Петербурге¹. Рукопись «Об интегрировании дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости» (1893–1895 гг.) представляет собой объемный труд, посвященный применению к уравнениям Кирхгофа общего метода исследования мероморфности общего решения на комплексной плоскости времени (называемого в современной литературе тестом Пенлеве–Ковалевской или иногда методом Ковалевской–Ляпунова). В более ранней и хорошо известной работе [33] Ляпунов применяет свой метод к классической задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. По сравнению с оригинальными работами С. В. Ковалевской метод Ляпунова существенно использует ведение малого параметра и исследования уравнения в вариациях. Именно метод Ляпунова может считаться основой для возникновения современных методов доказательств неинтегрируемости, развитых в работах Зиглина, книге Моралеса и Рамиса [72]. Указанная выше рукопись так и осталась незаконченной, вероятно, в связи со сложностью задачи: полное исследование мероморфности общего решения уравнений Кирхгофа не проведено до сих пор. С некоторыми современными исследованиями этого вопроса можно ознакомиться в работах [1, 63, 62]. Кстати говоря, работа [1] при достаточно общих предположениях содержит решение вопроса, поставленного Ляпуновым (в ней также сформулированы строгие результаты о связи между ветвлением решений и неинтегрируемостью.)

В своей второй, также незавершенной, работе «О движении тяжелого твердого тела в жидкости в двух случаях, указанных Клебшем» (1888–1893 гг.) Ляпунов пытается получить явное решение (в квадратурах) для интегрируемого случая Клебша, возникающего при некоторых ограничениях на параметры в уравнениях Кирхгофа. В этой работе уравнения системы Клебша при помощи эллиптических координат приводятся к решению двух алгебраических уравнений четвертой степени для нахождения разделяющих переменных. Это обстоятельство остановило Ляпунова. Следует иметь в виду, что, хотя и считается, что общее решение для случая Клебша в настоящий момент известно (см., например, работы Кобба [64], Кеттера [65, 66] и ряд современных работ, цитируемых в [7]), общего и явного способа решения такой системы до сих пор нет (здесь мы имеем в виду совершенно явные формулы для разделяющих координат, как, например, в волчке Ковалевской). Все указанные работы обходят трудность, остановившую Ляпунова, с помощью некоторых специальных приемов, делающих получающиеся квадратуры бесполезными для анализа общего решения, а значит, и динамического его поведения. Возможно,

¹ В настоящее время ведется работа по подготовке издания этих и ряда других неопубликованных работ А. М. Ляпунова по движению твердого тела, приуроченного к 150-летию со дня рождения ученого.

что существуют более эффективные и явные методы введения разделяющих координат, но они, к сожалению, пока не разработаны.

Среди неопубликованных трудов Ляпунова, также хранящихся в Архиве Академии наук, отметим также его раннюю работу о движении твердого тела, имеющего (вообще говоря, неодносвязные) полости, наполненные идеальной жидкостью, совершающей потенциальное движение. В определенной степени эта работа предвосхитила ставшую классической магистерскую диссертацию Н. Е. Жуковского [13], но Ляпунов сосредоточился на более конкретных математических расчетах, а Жуковский, как известно, дал движению жидкости гиростатическую интерпретацию [7]. Еще две работы посвящены аналитическому исследованию случая Гесса для обычных уравнений Эйлера—Пуассона и для движения тела на гладкой плоскости. Видимо, последовавшие вскоре после его исследования соответственно публикации Н. А. Некрасова [39] и Г. В. Колосова [28] заставили Ляпунова воздержаться от публикации. Хотя, конечно, указанные работы не обладают той тщательностью и полнотой исследования, которая была типична для всех работ Ляпунова.

Основным исследованием Ляпунова, принесшим ему мировую известность, является его докторская диссертация «Общая задача об устойчивости движения» [32]. Собственно, после этой работы теория устойчивости и оформилась в отдельную область математического исследования. Подробно изложенные в этом труде методы изучения устойчивости особенно просто и успешно применяются для автономных систем дифференциальных уравнений. Неавтономный случай существенно сложнее. Здесь сама постановка задачи об устойчивости может представлять содержательную проблему, а ее исследование, как правило, сопряжено с большими трудностями.

В настоящей работе такой задачей служит изучение устойчивости положения равновесия в потенциальном поле, когда потенциальная энергия умножается на неограниченно растущую функцию времени. Эта задача естественным образом возникает при анализе падения тяжелого твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости (ее постановка восходит к В. А. Стеклому, Д. Н. Горячеву и С. А. Чаплыгину), а также при изучении соскальзывания неголономных саней Чаплыгина с наклонной плоскости. Здесь мы сталкиваемся с любопытным и характерным для этого круга задач явлением: в отсутствие трения состояние равновесия асимптотически устойчиво по отношению к координатам и неустойчиво по отношению к скоростям. Такие задачи являются новыми и для их исследования разрабатываются специальные приемы, связанные с заменами переменных и введением эффективной диссипации.

Предварительные исследования по указанным задачам были изложены в [6, 7].

2. Уравнения движения и частные случаи

Рассмотрим движение твердого тела в однородном поле тяжести в бесконечном объеме безвихревой идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности. Приведем сначала восходящие к Кирхгофу общие уравнения движения тела в жидкости под действием внешнего силового поля:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \mathbf{p} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{K}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \mathbf{F}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{F} и \mathbf{K} — суммарные сила и момент, приложенные к телу. Если внешние силы имеют потенциальный характер, то уравнения (2.1), дополненные уравнениями для направляющих косинусов

и координат фиксированной точки в теле, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \mathbf{p} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{p} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} - \frac{\partial H}{\partial x_1} \boldsymbol{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial x_2} \boldsymbol{\beta} - \frac{\partial H}{\partial x_3} \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \\ \dot{x}_1 &= \left(\boldsymbol{\alpha}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right), \quad \dot{x}_2 = \left(\boldsymbol{\beta}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right), \quad \dot{x}_3 = \left(\boldsymbol{\gamma}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right),\end{aligned}\tag{2.2}$$

где векторы \mathbf{p} , \mathbf{M} , $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ представляют собой проекции импульсивной силы, импульсивного момента и неподвижных ортов на связанные с телом оси, а x_1 , x_2 , x_3 — проекции на неподвижные оси радиуса-вектора начала подвижной системы координат. Гамильтониан системы имеет вид

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + (\mathbf{B}\mathbf{M}, \mathbf{p}) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}\mathbf{p}, \mathbf{p}) + U, \\ U &= \mu(x_3 + (\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma})), \quad \mu = \mu_{\text{т}} - \mu_{\text{ж}}, \quad \mathbf{r} = \frac{\mu_{\text{т}}\mathbf{r}_{\text{т}} - \mu_{\text{ж}}\mathbf{r}_{\text{ж}}}{\mu_{\text{т}} - \mu_{\text{ж}}},\end{aligned}\tag{2.3}$$

здесь \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} — симметричные матрицы, определяемые геометрией тела и его инерционными свойствами, $\mu_{\text{т}}$, $\mu_{\text{ж}}$ — вес тела и вытесненной жидкости, а $\mathbf{r}_{\text{т}}$, $\mathbf{r}_{\text{ж}}$ — радиусы-векторы центра масс и центра давления в подвижных осях. Случай $\mu_{\text{т}} = \mu_{\text{ж}}$ (взвешенное тело) будет также разобран далее.

Непосредственно проверяется, что имеют место три интеграла движения (один из которых явно содержит время):

$$(\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha}) = P_1, \quad (\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) = P_2, \quad (\mathbf{p}, \boldsymbol{\gamma}) + \mu t = P_3.$$

Это означает, что импульс системы тело+жидкость представляется в форме

$$\mathbf{p} = P_1 \boldsymbol{\alpha} + P_2 \boldsymbol{\beta} + (P_3 - \mu t) \boldsymbol{\gamma},\tag{2.4}$$

т. е. вектор $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ представляет собой проекции начального импульса (по Чаплыгину — толчка) на неподвижные оси.

Выбором начала отсчета времени (при $\mu_{\text{т}} \neq \mu_{\text{ж}}$) и поворотом неподвижных осей можно добиться $P_2 = P_3 = 0$, что в дальнейшем мы полагаем выполненным.

Подставив (2.4) в уравнения движения (2.2), получим замкнутую относительно \mathbf{M} , $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ систему, которая записывается в гамильтоновой форме:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{M}}\end{aligned}\tag{2.5}$$

с гамильтонианом, явно зависящим от времени

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + (\mathbf{B}\mathbf{M}, P_1 \boldsymbol{\alpha} - \mu t \boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}(P_1 \boldsymbol{\alpha} - \mu t \boldsymbol{\gamma}), P_1 \boldsymbol{\alpha} - \mu t \boldsymbol{\gamma}) + \mu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}).\tag{2.6}$$

ЗАМЕЧАНИЯ. Уравнения (2.2) в различных, но эквивалентных формах встречаются в работах В. А. Стеклова [42], Д. Н. Горячева [8], С. А. Чаплыгина [45]. Приведение их к изящной неавтономной форме, использующей представление (2.4), впервые, видимо, выполнено в [24] (однако в форме уравнений Пуанкаре).

Укажем некоторые частные случаи, для которых уравнения (2.5) допускают упрощения. Они указаны в работах [24, 46].

2.1. Движения без начального толчка [24]

Пусть начальный толчок равен нулю $P_1 = 0$. Уравнения движения для \mathbf{M} , γ замыкаются и представляют собой (неавтономную) гамильтонову систему на $e(3)$ с гамильтонианом

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) - \mu t(\mathbf{B}\mathbf{M}, \gamma) + \frac{1}{2}\mu^2 t^2(\mathbf{C}\gamma, \gamma) + \mu(\mathbf{r}, \gamma).$$

Если, к тому же, тело имеет три плоскости симметрии, пересекающиеся в центре масс, то этот гамильтониан еще больше упрощается: $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{r} = 0$.

2.2. Взвешенное тело [46]

В работе [46] С. А. Чаплыгин указал также случай, когда сила тяжести уравновешена силой Архимеда (средняя плотность тела равна плотности жидкости, и, следовательно, $\mu_{\tau} = \mu_{\text{ж}}$), но центр масс тела не совпадает с центром масс вытесненного объема жидкости. При этом тело находится под действием пары сил, и его полный импульс в абсолютном пространстве сохраняется, т.е.

$$\mathbf{p} = P_1\boldsymbol{\alpha} + P_2\boldsymbol{\beta} + P_3\boldsymbol{\gamma},$$

где $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3) = \text{const}$. Как и выше, выбором неподвижных осей можно достичь $P_2 = 0$. Таким образом, в этом случае эволюция векторов \mathbf{M} , $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ описывается автономной гамильтоновой системой с функцией Гамильтона

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + (\mathbf{B}\mathbf{M}, P_1\boldsymbol{\alpha} + P_3\boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}(P_1\boldsymbol{\alpha} + P_3\boldsymbol{\gamma}), P_1\boldsymbol{\alpha} + P_3\boldsymbol{\gamma}) + \mu_{\tau}(\mathbf{r}, \gamma),$$

где \mathbf{r} — вектор, соединяющий центр масс тела с центром давления.

Если начальный импульс направлен вдоль вертикальной оси: $\mathbf{p} = P\boldsymbol{\gamma}$, то эволюция векторов \mathbf{M} , $\boldsymbol{\gamma}$ ($\boldsymbol{\gamma}$ направлен вдоль поля тяжести) описывается системой со скобкой Пуассона, определяемых алгеброй $e(3)$: $\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}M_k$, $\{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k$, $\{\gamma_i, \gamma_j\} = 0$ и функцией Гамильтона

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) + P(\mathbf{B}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2}P^2(\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) + \mu_{\tau}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (2.7)$$

В явном виде имеем уравнения движения

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} \times \mathbf{M} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}.$$

В работе [46] С. А. Чаплыгин указал случай интегрируемости уравнений (2.7), имеющий дополнительный интеграл четвертой степени по компонентам импульсивного момента, вид которого напоминает интеграл Ковалевской.

Исследование устойчивости стационарных движений при указанных ограничениях на параметры были выполнены в недавней работе [67]. В этом случае не может быть ухода тела вниз и имеются семейства равномерных вращений и трансляций. Здесь же обсуждается возможность стабилизации вращения.

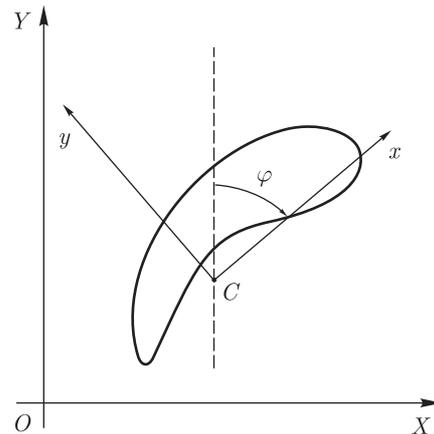


Рис. 1.

2.3. Плоскопараллельное движение [8, 22, 42, 45]

Плоскопараллельное движение твердого тела задается инвариантными соотношениями $M_1 = M_2 = 0$, $\alpha_3 = \gamma_3 = 0$. Как несложно показать, необходимым условием существования подобных движений является динамическая симметрия тела относительно рассматриваемой (инвариантной) плоскости, что приводит к соотношениям

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{12} = 0, \quad c_{13} = c_{23} = 0.$$

Кроме того, можно показать, что сдвигом и поворотом осей, связанных с телом, можно добиться $\mathbf{B} = 0$, а матрицу \mathbf{C} сделать диагональной. Пусть угол поворота подвижных осей относительно неподвижных отсчитывается, как показано на рис. 1, тогда для неподвижных ортов имеем

$$\alpha_1 = \sin \varphi, \quad \alpha_2 = -\cos \varphi, \quad \gamma_1 = \cos \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \varphi.$$

Для угла поворота получим неавтономное уравнение второго порядка

$$a_3 \ddot{\varphi} = (c_1 - c_3) (\mu^2 t^2 \sin \varphi \cos \varphi + P_1 \mu t \cos 2\varphi - P_1^2 \sin \varphi \cos \varphi) + \mu(x \sin \varphi - y \cos \varphi), \quad (2.8)$$

где c_1, c_3, a_3 — соответствующие элементы диагональных матриц, а $\mathbf{r} = (x, y, 0)$.

Для уравновешенного тела ($x = y = 0$) без начального толчка ($P_1 = 0$) получим замечательное по своей простоте уравнение

$$\ddot{\varphi} = k t^2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad k = \frac{\mu^2 (c_1 - c_3)}{a_3}. \quad (2.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Это уравнение называется в работах [22, 23, 41] уравнением Чаплыгина, но будем иметь в виду, что хотя оно (вместе с другими интересными результатами) и было получено С. А. Чаплыгиным в 1890 г. в своем студенческом сочинении, он воздержался от его публикации. Это было связано, видимо, с тем, что он не смог явно проинтегрировать это уравнение. Тем не менее С. А. Чаплыгин опубликовал эту работу в первом прижизненном собрании сочинений (1933 г., [45]).

Уравнения (2.9) были также получены независимо Д. Н. Горячевым (1893) [8] и В. А. Стекловым (1894) [42, 43]. Последний отметил также простейшие свойства решений этих уравнений.

В частности, В. А. Стеклов показал, что при падении тела амплитуда его колебаний относительно горизонтальной оси убывает, а частота колебаний растет. Этот вывод В. А. Стеклов сделал в дополнении к своей книге [42], в которой при анализе асимптотического поведения тела им был допущен ряд погрешностей. Задача Стеклова об асимптотическом описании поведения решений уравнения [42, 43] была решена В. В. Козловым [22], который показал, что тело при почти всех начальных условиях стремится к равноускоренному падению широкой стороной вверх и колеблется вокруг горизонтальной оси с возрастающей частотой порядка t и уменьшающейся амплитудой порядка $1/\sqrt{t}$. Численный анализ асимптотических движений с различным числом полуоборотов имеется в [59]. Аналитические выражения для асимптотики падения в различной форме получены в работах [41, 59].

В работе [10] описан и изучен эффект выныривания. В условиях безвихревого обтекания предполагается, что в начальный момент широкая сторона тела горизонтальна, телу сообщается скорость в горизонтальном направлении. В последующие моменты тело начинает опускаться вниз. Однако если его присоединенная масса в поперечном направлении достаточно велика, то тело затем резко всплывает узкой стороной вперед, поднимаясь на большую высоту, чем в начальный момент.

2.4. Плоскопараллельное движение неодносвязного тела

Рассмотрим также случай, когда тело является неодносвязным (имеются сквозные отверстия). Как известно, в гамильтониане (1.5) при этом появляются дополнительные линейные слагаемые вида

$$\Delta H = (\sigma, p) + (\zeta, M). \quad (2.10)$$

При определенных ограничениях на геометрические и динамические характеристики твердого тела и при соответствующих начальных условиях возможно плоскопараллельное движение тела, аналогичное описанному выше. Ограничимся здесь случаем, разобранным в работе [40], при этом будем полагать $\zeta = 0$ и $x = y = 0$, так что уравнение для угла поворота запишется в виде

$$a_3 \ddot{\varphi} = (c_1 - c_3) (\mu^2 t^2 \sin \varphi \cos \varphi + P_1 \mu t \cos 2\varphi - P_1^2 \sin \varphi \cos \varphi) + \\ + \mu t (c_1 \sigma_1 \sin \varphi - c_3 \sigma_3 \cos \varphi) - P_1 (c_1 \sigma_1 \cos \varphi + c_3 \sigma_3 \sin \varphi). \quad (2.11)$$

3. Движение изотропного тела

Рассмотрим простейший частный случай, указанный Стекловым [42, 44], когда уравнения интегрируются в квадратурах. При этом

$$\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{B} = b\mathbf{E}, \quad \mathbf{C} = c\mathbf{E}, \quad \mathbf{r} = 0,$$

т. е. тензор присоединенных масс шаровой, однако тело не имеет три плоскости симметрии, так как $\mathbf{B} \neq 0$. (Если $\mathbf{B} = 0$, то движение тривиально — центр масс движется по параболе, а движение апексов α, β, γ такое же, как в случае Эйлера—Пуансо.)

Уравнения, описывающие эволюцию момента в подвижных осях, отделяются и тождественны случаю Эйлера—Пуансо:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A}\mathbf{M}.$$

Тем не менее, для определения траектории центра масс тела удобнее переписать уравнения движения в неподвижных осях:

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= b\mu t N_2, & \dot{N}_2 &= -b\mu t N_1 - bP_1 N_3, & \dot{N}_3 &= bP_1 N_2, \\ \dot{x}_1 &= bN_1 + cP_1, & \dot{x}_2 &= bN_2, & \dot{x}_3 &= bN_3 - c\mu t, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\mathbf{N} = ((\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{M}), (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{M}), (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{M}))$ — кинетический момент в неподвижных осях. Очевидно, что квадрат кинетического момента — интеграл движения $\mathbf{M}^2 = \mathbf{N}^2 = \text{const}$.

Если начальный толчок равен нулю $P_1 = 0$, то первые три уравнения в (3.1) интегрируются в элементарных функциях:

$$N_1 = A \sin(b\mu t^2/2 + \varphi_0), \quad N_2 = A \cos(b\mu t^2/2 + \varphi_0), \quad N_3 = \text{const},$$

где A, φ_0 — произвольные постоянные. Вдоль вертикальной оси тело движется равноускоренно $x_3 = -c\mu t^2/2$, а проекция траектории на плоскость x_1, x_2 представляет собой спираль, описываемую интегралами Френеля, сходящуюся к некоторой фиксированной точке на плоскости.

При больших временах справедливо аналитическое представление вида

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 - \frac{A}{\mu} \frac{\cos(b\mu t^2/2 + \varphi_0)}{t} + O(t^3), \\ x_2 &= x_2^0 + \frac{A}{\mu} \frac{\sin(b\mu t^2/2 + \varphi_0)}{t} + O(t^3). \end{aligned}$$

Если $P_1 \neq 0$, то уравнения для \mathbf{N} не интегрируются в элементарных функциях, кроме того, на плоскости x_1, x_2 появляется дрейф со скоростью cP_1 вдоль оси Ox_1 .

4. Качественный анализ плоскопараллельного движения

Выше было показано, что при специальном выборе подвижных осей (при котором кинетическая энергия диагональна) угол поворота тела относительно вертикали (рис. 1) описывается уравнением (2.8), а движение начала подвижной системы C описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{Cp}) = P_1(c_1 \sin^2 \varphi + c_2 \cos^2 \varphi) - \mu t(c_1 - c_2) \sin \varphi \cos \varphi, \\ \dot{Y} &= (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{Cp}) = P_1(c_1 - c_2) \sin \varphi \cos \varphi - \mu t(c_1 \cos^2 \varphi + c_2 \sin^2 \varphi). \end{aligned} \quad (4.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнение (2.8) соответствует неавтономной гамильтоновой системе с одной степенью свободы. Более детально подобные системы изучены в случае, когда гамильтониан является периодической функцией времени. В общем случае они демонстрируют хаотическое поведение. В то же время, как будет показано ниже, в данной системе зависимость угла φ от времени t носит асимптотический характер.

Рассмотрим сначала «простейший» случай, когда уравновешенное тело ($x = y = 0$) падает без начального толчка ($P_1 = 0$). Тогда после замены $2\varphi = \theta$ уравнение (2.8) принимает вид

$$\ddot{\theta} = k t^2 \sin \varphi, \quad k = \frac{\mu^2(c_1 - c_2)}{a_3}. \quad (4.2)$$

В дальнейшем будем полагать, что $c_1 > c_2$, т. е. $k > 0$, а $0 \leq \theta < 2\pi$.



4.1. Стационарные (равновесные) решения. Малые колебания. Двоякоасимптотические решения

Уравнение (4.2) имеет простейшие «равновесные» решения типа $\theta(t) = \text{const}$:

$$1) \quad \theta = 0, \quad 2) \quad \theta = \pi. \quad (4.3)$$

Первое решение соответствует падению узкой стороной вниз ($X = X_0, Y = Y_0 - \mu c_1 t^2/2$), а второе — широкой ($X = X_0, Y = Y_0 - \mu c_2 t^2/2$). Действительно, поскольку присоединенная масса $c_1^{-1} < c_2^{-1}$, то угол $\varphi = \pi n$, когда ось Ox вертикальна, и $\varphi = \pi/2 + \pi n$, когда вертикальна ось Oy .

Линеаризуя уравнение (4.2) вблизи неподвижных точек (4.3), получим

$$\begin{aligned} 1) \quad \ddot{\xi} &= kt^2\xi, & \theta &= \xi, \\ 2) \quad \ddot{\xi} &= -kt^2\xi, & \theta &= \pi - \xi. \end{aligned}$$

Общее решение этих уравнений выражается через функции Бесселя

$$\begin{aligned} 1) \quad \xi(t) &= \sqrt{t} \left(C_1 I_{1/4} \left(\sqrt{kt^2/2} \right) + C_2 K_{1/4} \left(\sqrt{kt^2/2} \right) \right), \\ 2) \quad \xi(t) &= \sqrt{t} \left(C_1 J_{1/4} \left(\sqrt{kt^2/2} \right) + C_2 Y_{1/4} \left(\sqrt{kt^2/2} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $I_\nu(x), K_\nu(x)$ — функции Бесселя второго рода, а $J_\nu(x), Y_\nu(x)$ — функции Бесселя первого рода. Таким образом, в линейном приближении первое решение является неустойчивым, а второе (асимптотически) устойчивым по отношению к ξ , но не $\dot{\xi}$. Действительно, используя асимптотики функций Бесселя J_ν, Y_ν при больших значениях аргумента находим

$$\xi(t) = \frac{A \sin \left(\sqrt{kt^2/2} + \alpha_0 \right)}{\sqrt{t}} + O(t^{-5/2}), \quad A = \text{const}.$$

Следовательно, амплитуда колебаний убывает как $t^{-1/2}$, а их частота неограниченно растет как t . Как уже было сказано, этот факт отмечен в [22].

Как показано в [22], вариационными методами можно доказать, что существуют два решения $\theta(t), \theta(t_0) = \theta_0$, асимптотические к неустойчивому положению равновесия ($\theta = 0$), приближающиеся к нему с разных сторон. Кроме того, вследствие инвариантности уравнения (4.2) относительно замены $t \rightarrow -t$, имеется решение $\theta_*(t)$ с начальными данными $\theta_*(0) = \pi$, для которого [22]

$$\theta_*(t) + \theta_*(-t) = 2\pi, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \theta_*(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_*(t) = 2\pi.$$

Таким образом, решение $\theta_*(t)$ — двоякоасимптотическое (имеется также аналогичное двоякоасимптотическое решение, обходящее окружность $\theta \bmod 2\pi$ в другом направлении). При этом тело совершает один полуоборот. Его траектория, описываемая уравнениями (4.1), изображена на рис. 2а. Заметим, что верхняя точка траектории является точкой возврата: вблизи нее уравнение кривой имеет вид $Y = \lambda X^{2/3}, \lambda = \text{const}$. На рис. 2б показано изменение угла φ для данного двоякоасимптотического решения.

Существование двоякоасимптотических траекторий с произвольным количеством полуоборотов доказано в работе [55].

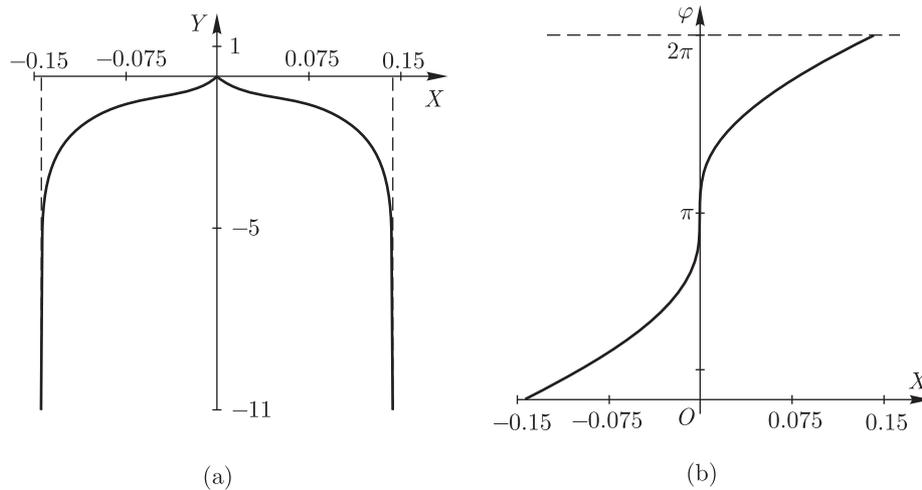


Рис. 2. Траектория тела и угол φ в зависимости от координаты X для двоякоасимптотического решения при $k = 1$, $a_3/\mu = 0.1$ ($P_1 = 0$); видна особенность в верхней точке траектории

4.2. Асимптотическое поведение решений уравнения Чаплыгина

Как показано в [22] (см. доказательство для более общей ситуации ниже), для всех решений уравнения при $t \rightarrow \pm\infty$ либо $\theta \rightarrow 0$, либо $\theta \rightarrow \pi$ (т. е. асимптотическое движение тела — это падение широкой или узкой стороной вперед).

Существует гипотеза, высказанная в [22], что мера траекторий, которые при $t \rightarrow \pm\infty$ стремятся к неустойчивому равновесному состоянию $\theta = 0, 2\pi$, равна нулю, и почти все траектории стремятся к $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 0, \pi$ (т. е. к падению широкой стороной вперед).

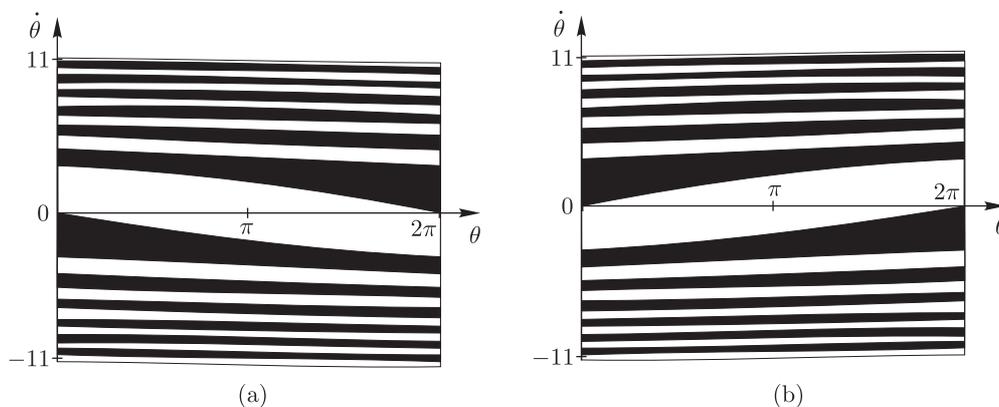


Рис. 3. Области на фазовой плоскости, соответствующие начальным условиям при $t_0 = 0$, при которых тело совершает одно и то же количество полуоборотов при изменении t от 0 до $+\infty$ в случае а) и при изменении t от $-\infty$ до 0 в случае б) ($k = 1$)

4.3. Численный анализ

Опираясь на утверждение об асимптотическом поведении, можно выполнить численный анализ уравнения (2.9) [59]. Для этого на фазовой плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ (точнее, цилиндре $\theta \bmod 2\pi$, $\dot{\theta} \in (-\infty, +\infty)$) в начальный момент времени $t = t_0$ построим области, в пределах которых тело

совершает одно и то же количество полуоборотов при $t \rightarrow +\infty$ (либо при $t \rightarrow -\infty$), прежде чем «притянется» к решению $\theta = \pi$. Как видно на рис. 3а, эти области располагаются регулярно, причем их ширина уменьшается при увеличении $|\dot{\theta}|$, так что при больших начальных $|\dot{\theta}|$ можно говорить лишь о вероятности того, что тело при $t \rightarrow +\infty$ будет падать «верхней» или «нижней» стороной. Границы областей заполнены начальными условиями, соответствующими движениям, асимптотически приближающимся к неустойчивым положениям равновесия $\theta = 0, 2\pi$. Аналогично можно построить области, соответствующие одинаковому количеству полуоборотов для $t \rightarrow -\infty$ (рис. 3б), причем области для $t \rightarrow +\infty$ и для $t \rightarrow -\infty$ оказываются зеркальным отражением относительно прямой $\theta = \pi$. При наложении этих областей их границы пересекаются в точках, расположенных на прямой $\theta = \pi$. Им соответствуют двоякоасимптотические решения уравнения (4.2) с различным количеством полуоборотов тела.

ЗАМЕЧАНИЕ. На цилиндре $\dot{\theta}, \theta \bmod 2\pi$ все границы областей склеиваются в одну гладкую кривую, аналогичную винтовой линии, шаг которой уменьшается при увеличении $|\dot{\theta}|$. По одну сторону от этой линии лежат области с четным числом полуоборотов, а по другую — с нечетным.

Таким образом, численные расчеты подтверждают гипотезу о том, что почти для всех решений $\theta(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \pi$, причем в трехмерном пространстве $t, \theta, \dot{\theta}$ решения, асимптотически приближающиеся к неустойчивому равновесию $\theta = \pi$, заполняют двумерные поверхности. Кроме того, имеется также счетное множество двоякоасимптотических решений, отличающихся количеством полуоборотов, совершаемых при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$.

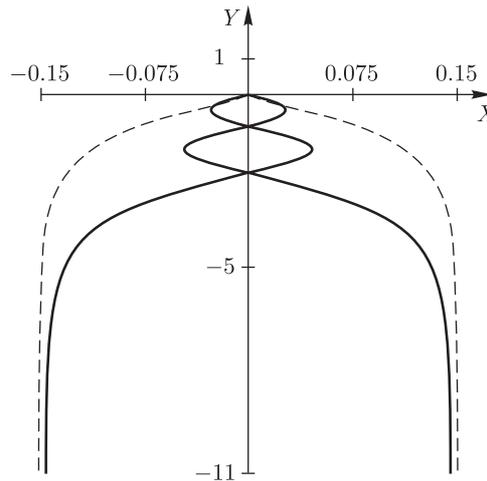


Рис. 4. Траектория тела в случае двоякоасимптотических решений с одним (пунктир) и тремя (сплошная линия) полуоборотами при $k > 0, a_3/\mu = 0.1$, в верхней точке траектории имеется особенность

На рис. 4 приведены траектории тела, совершающего двоякоасимптотическое движение с одним и тремя полуоборотами.

4.4. Траектория тела

Подставляя в уравнения (4.1) асимптотическое разложение для малых колебаний (4.4), после интегрирования получим асимптотическое представление для траектории движения в форме

$$X(t) = A \frac{\cos(\sqrt{k}t^2/2 + \theta_0)}{\sqrt{t}} + O(t^{-3/2}), \quad Y(t) = -\mu c_2 t^2 + O(t^{-1/2}),$$

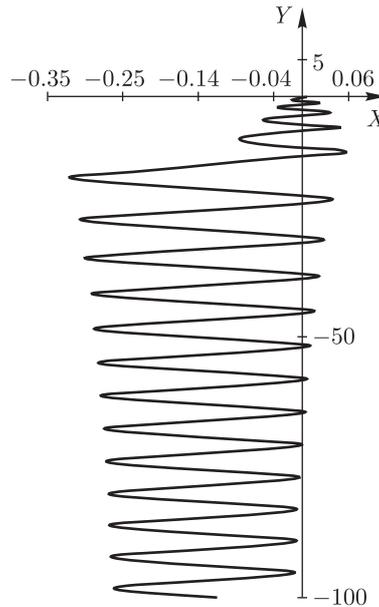


Рис. 5. Характерный вид траектории тела, падающего без начального толчка

где A , θ_0 — некоторые постоянные. Следовательно, траектория движения при больших временах близка к синусоиде с постоянным шагом $\Delta y = \pi \mu c_2 / \sqrt{k}$ и убывающей амплитудой [22]. (Шаг ΔY вычисляется между двумя последовательными нулями функции $X(t)$.) Характерная траектория показана на рис. 5.

4.5. Общий случай ($P_1 \neq 0$)

Укажем теперь основные качественные особенности поведения системы (2.8), (4.1) в общем случае ($P_1 \neq 0$). Если $P_1 \neq 0$, то стационарных решений, аналогичных (4.3), уже не существует. Для $P_1 \neq 0$ также справедливо утверждение об асимптотическом поведении, согласно которому для любого решения $\varphi(t)$ уравнения (2.8) выполняется

$$1. \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \pi n \quad \text{либо} \quad 2. \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

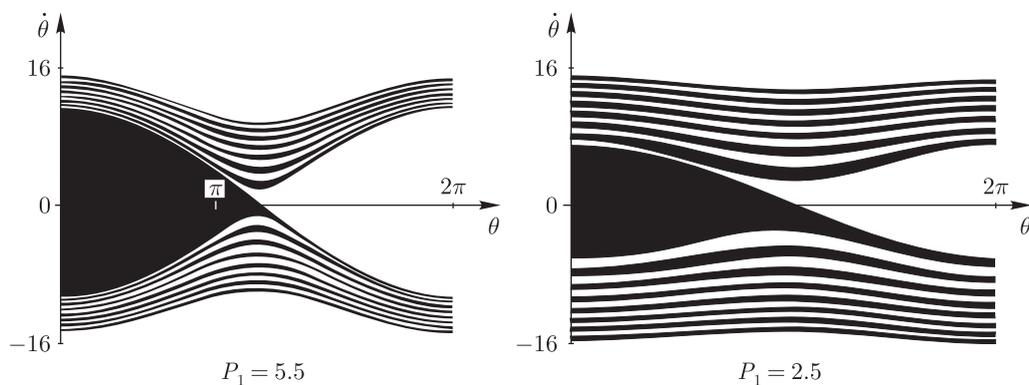


Рис. 6

По-видимому, также почти все решения уравнения стремятся к одному из решений $\varphi(t) = \frac{\pi}{2} + \pi n$ (т. е. тело стремится к падению широкой стороной вниз)[22]. Это подтверждается численными экспериментами.

Аналогично можно выполнить компьютерный анализ, рассматривая в начальный момент времени $t = t_0$ на фазовой плоскости области, которым соответствуют одинаковые количества полуоборотов, прежде чем траектория притянется к решению $\varphi = \frac{\pi}{2}$ при $t \rightarrow +\infty$ (рис. 6). Границы этих областей заполнены асимптотическими решениями. Как и в случае $P_1 = 0$, области, соответствующие различному количеству полуоборотов при $t_0 = 0$ и $t \rightarrow -\infty$, оказываются симметричным отражением областей для $t_0 = 0$ и $t \rightarrow +\infty$ относительно прямой $\varphi = \pi/2$. Точки пересечения границ областей при $t \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow -\infty$ соответствуют двоякоасимптотическим решениям.

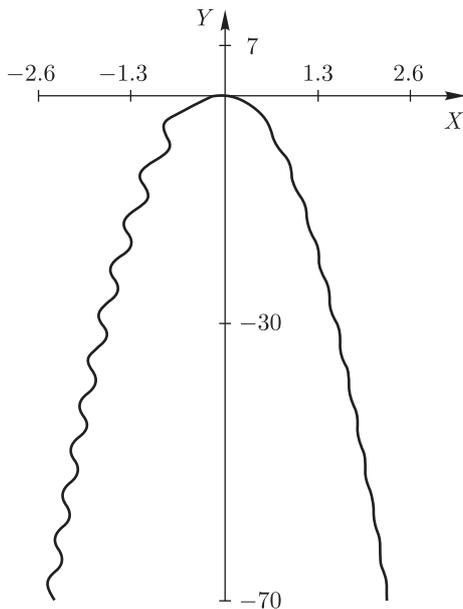


Рис. 7. Характерный вид траектории твердого тела, брошенного под углом к горизонту

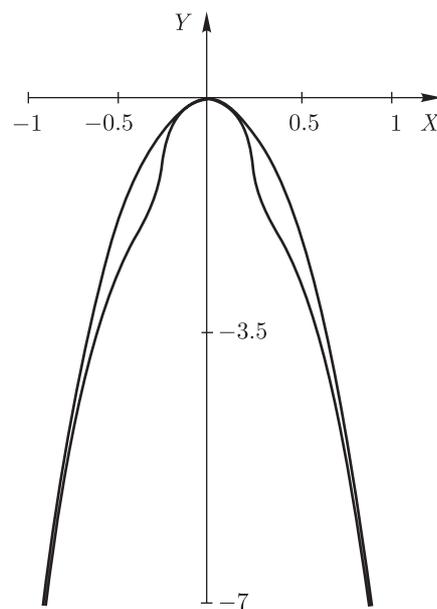


Рис. 8. Траектории тела для двоякоасимптотических движений с одним (верхняя кривая) и тремя полуоборотами

Характерный вид общей траектории тела, брошенного под углом к горизонту, приведен на рис. 7. На рис. 8 приведены траектории в случае двоякоасимптотических движений с одним и тремя полуоборотами тела.

Как показано в [22], в общем случае асимптотически траектория тела представляет собой параболу:

$$X(t) = -P_1 t + o(t), \quad Y(t) = -\frac{\mu t^2}{2c_3} + o(t^2).$$

4.6. Асимптотическое поведение неодносвязного тела

Исследуем асимптотическое поведение (финальные движения) неодносвязного тела для одного особенного случая, когда $c_1 = c_3$ (случай осевой симметрии). При этом уравнение (2.11)

приводится к виду

$$a_3 \ddot{\psi} = k_1 t \sin 2\psi + k_0 \cos 2\psi, \quad \psi = \frac{1}{2} \left(\varphi - \operatorname{arctg} \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1} \right) \right), \quad (4.5)$$

где $k_1 = 2P_1 c_3 \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}$, $k_0 = 2P_1 c_1 \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}$. Как мы видим, принципиальное отличие от уравнения Чаплыгина заключается в том, что в правой части нет слагаемых, квадратичных по t .

Тем не менее практически все методы предыдущего анализа могут быть перенесены на случай уравнения (4.5) [40]. Действительно, после замены времени $t^{3/2} = \tau$ получим

$$\psi'' + \frac{1}{3\tau} \psi' = \frac{4}{9} k_1 \sin \psi + \frac{4}{9} k_0 \frac{1}{\tau^{2/3}} \cos \psi.$$

Переноса дословно рассуждения работы [28], можно показать, что почти для всех начальных данных при $t \rightarrow +\infty$ тело стремится занять положение, соответствующее минимуму функции

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} (\psi')^2 + \frac{2}{9} k_1 \cos^2 \psi.$$

Следовательно, тело стремится занять такое положение, при котором вектор σ стремится занять вертикальное положение.

Кроме того, естественным образом может быть перенесен компьютерный анализ предыдущего пункта. Как и выше, границы областей с различным количеством полуоборотов будут гладкими.

5. Тело, обладающее тремя плоскостями симметрии

Как и в случае плоскопараллельного движения, прежде чем изучать общую систему (2.6), рассмотрим подробно частный случай движения без начального толчка ($P_1 = 0$) при дополнительных ограничениях

$$\mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{r} = 0. \quad (5.1)$$

При этом получается неавтономная гамильтонова система (на $e(3)$) для \mathbf{M} , γ с гамильтонианом

$$\bar{H} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + \frac{1}{2} \mu^2 t^2 (\mathbf{C}\gamma, \gamma). \quad (5.2)$$

В общем случае можно считать \mathbf{A} диагональной, а \mathbf{C} — произвольной симметричной.

5.1. Стационарные (равновесные) решения и нормальные колебания

Уравнения движения системы (5.2) имеют вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A}\mathbf{M} + \mu^2 t^2 \gamma \times \mathbf{C}\gamma, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \mathbf{A}\mathbf{M} \quad (5.3)$$

и допускают простейшие решения вида

$$\mathbf{M} = 0, \quad \gamma = \pm \xi_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.4)$$

где ξ_i — собственные векторы матрицы \mathbf{C} (для вырожденной \mathbf{C} собственных векторов ξ_i бесконечно много).



Линеаризуя систему (5.3) вблизи решения (5.4), линейными преобразованиями координат можно привести уравнения движения к виду «нормальных колебаний»

$$\ddot{x}_k + t^2 \omega_k x_k = 0, \quad k = 1, 2, \tag{5.5}$$

где x_k — подходящие локальные координаты вблизи неподвижных точек $\gamma = \xi_i$. Решения системы (5.5) выражаются через функции Бесселя (см. (4.4)). Несложно показать, что если \mathbf{C} не вырождена (все собственные числа различны), то локальному минимуму функции $V(\gamma) = \frac{1}{2}(\gamma, \mathbf{C}\gamma)$ соответствует (асимптотически) устойчивое решение системы (5.5), асимптотика которого при больших t имеет вид (4.4). Всем остальным собственным векторам соответствуют неустойчивые (уже в линейном приближении) решения.

5.2. Асимптотическое поведение решений

Оказывается, что, аналогично плоскопараллельному случаю, при произвольных начальных условиях вектор γ стремится к одному из собственных векторов матрицы \mathbf{C} . Действительно, в работе [24] показано, что для любого решения $\gamma(t)$ уравнений (5.3)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\gamma(t)) = \mathcal{E}_c,$$

где $V(\gamma) = \frac{1}{2}(\gamma, \mathbf{C}\gamma)$, \mathcal{E}_c — критическое значение функции $V(\gamma)$.

Доказательство этого утверждения основано на представлении уравнений (5.3) в новом времени и в новых переменных. Выполним замену времени и переменных по формулам

$$\frac{1}{2}t^2 = \tau, \quad t\mathbf{M} = \mathbf{m},$$

в которых уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\mathbf{m}}{d\tau} = -\frac{1}{2\tau}\mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{A}\mathbf{m} + \mu^2\gamma \times \mathbf{C}\gamma, \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma \times \mathbf{A}\mathbf{m}. \tag{5.6}$$

Несложно показать, что $\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{2\tau}$, т. е. фактически система (5.6) описывает уравнения Кирхгофа с диссипацией, убывающей со временем. Рассмотрим энергию «невозмущенной» системы

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{m}, \mathbf{A}\mathbf{m}) + \frac{1}{2}\mu^2(\gamma, \mathbf{C}\gamma). \tag{5.7}$$

Вычисляя производную \mathcal{E} вдоль решений (5.6), находим

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = -\frac{(\mathbf{m}, \mathbf{A}\mathbf{m})}{2\tau}.$$

Из этого равенства легко следует, что

- 1° $\mathcal{E} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{E}_* = \text{const}$;
- 2° интеграл $I = \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{(\mathbf{m}(\tau), \mathbf{A}\mathbf{m}(\tau))}{2\tau} d\tau$ сходится.

С физической точки зрения дальнейшее доказательство сводится к тому, чтобы показать, что $\mathcal{E}_* = \mathcal{E}_c$ — критическое значение формулы (5.7), а следовательно и $V(\gamma)$. Оказывается, что предположение $\mathcal{E}_* \neq \mathcal{E}_c$ противоречит сходимости интеграла I .

Для падения произвольного тела, обладающего тремя плоскостями симметрии, также существует гипотеза [24], что для почти всех решений γ уравнений (5.3) $\mathcal{E}_* = \mathcal{E}_c^{\min}$. Таким образом, тело при $t \rightarrow \infty$ почти всегда стремится занять в пространстве такое положение, что ось, соответствующая максимальной присоединенной массе, становится вертикальной.

5.3. Компьютерный анализ

Сформулированное выше утверждение об асимптотическом поведении приводит к естественному вопросу: как в пространстве начальных условий устроены области, соответствующие различным асимптотическим режимам при $t \rightarrow \pm\infty$ (т.е. бассейны притяжения)? Выберем $t_0 = 0$, параметризуем совместно четырехмерный уровень интегралов

$$(M, \gamma) = c = \text{const}, \quad \gamma^2 = 1$$

переменными Андуайе (L, G, l, g) [1, 2, 7] и зафиксируем поверхность начальных условий при $t_0 = 0$ уравнениями

$$g = g_0, \quad E = \frac{1}{2}(M, \mathbf{A}M) = \text{const}.$$

В зависимости от того, какой стороной падает при $t \rightarrow \infty$ тело, будем окрашивать точку на этой поверхности в соответствующий цвет. Типичная картина приведена на рисунках 9, 10.

Мы видим, что тело падает таким образом, что ось, соответствующая наибольшей присоединенной массе, вертикальна, т.е. либо одной широкой стороной вниз, либо другой, что подтверждает сформулированную выше гипотезу. При этом граница этих областей в общем случае устроена фрактально: при увеличении рисунок поверхности повторяется на все более мелких масштабах (т.е. обладает фрактальными свойствами).

Таким образом, если использовать аналогично с интегрируемыми и неинтегрируемыми (регулярными и хаотическими) системами, можно плоскопараллельный случай назвать интегрируемым, а общий случай системы (5.2), (5.3) неинтегрируемым. Действительно, в плоскопараллельном случае границы областей, соответствующих различным расположениям тела, регулярны, а в системе (5.2), (5.3) — фрактальны. Мы покажем ниже, что, если система (5.3) имеет еще один дополнительный интеграл (интеграл Лагранжа), границы областей также становятся регулярными.

Фрактальная структура границ, разделяющих различные типы поведений при $t \rightarrow \infty$, тесно связана с вероятностными эффектами, возникающими при описании асимптотических движений. Действительно, при сложном распределении начальных условий, соответствующих различным типам асимптотического поведения, при конкретных (заданных) начальных условиях асимптотическое поведение становится непредсказуемым и можно говорить лишь о вероятностном описании. Это — своего рода вероятностный хаос, порожденный структурой начальных условий. Вероятностное описание было предложено А. И. Нейштадтом при изучении движения вокруг неподвижной точки твердого тела, находящегося под действием постоянного и линейного (по ω) диссипативных моментов [38]. Оказалось, что при малых величинах этих моментов динамика системы имеет случайный характер, в работе [38] получены явные формулы для вероятностей, осуществляющих эволюцию системы к одному из равномерных вращений. Непосредственное перенесение аналитических результатов [38] на систему (5.3), (5.6) связано с существенными

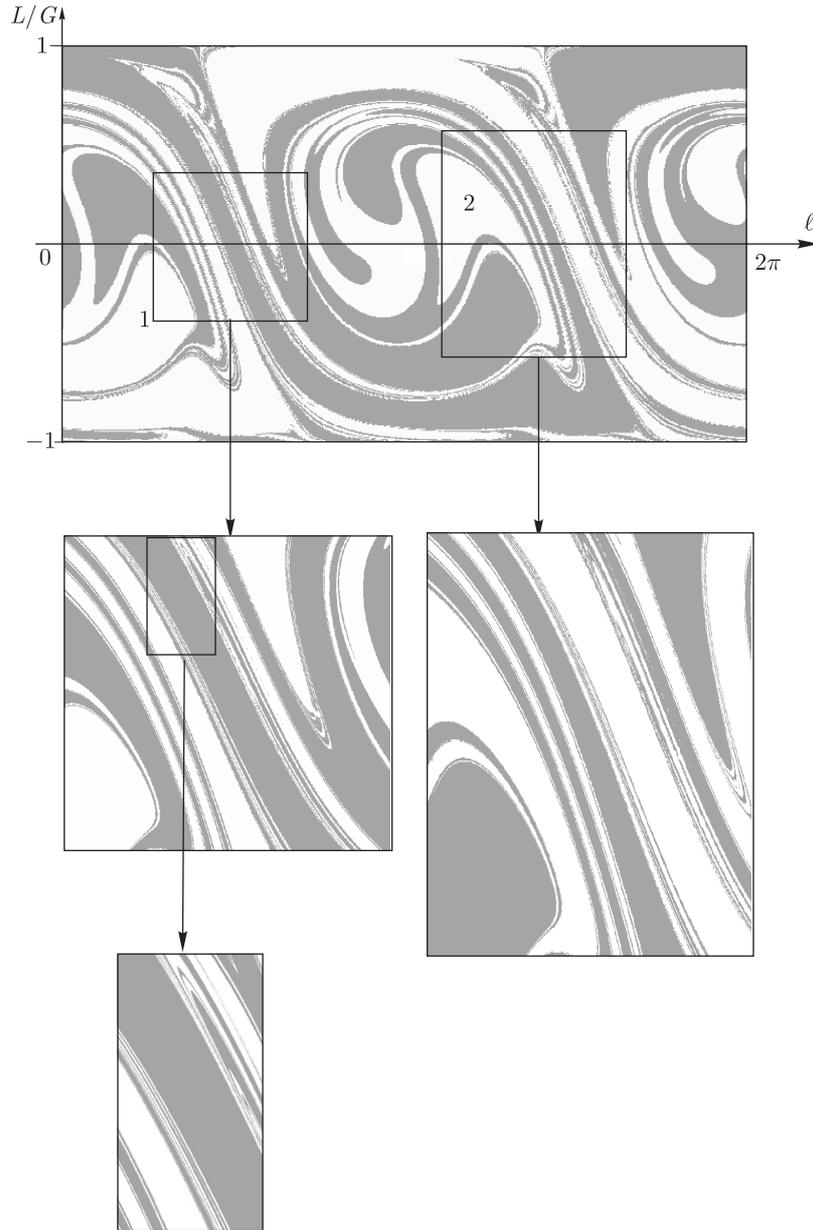


Рис. 9. Типичная картина областей, соответствующих двум различным предельным при $t \rightarrow +\infty$ положениям тела (в которых собственный вектор, отвечающий наибольшей присоединенной массе, вертикален — два цвета соответствуют двум его возможным направлениям). На четырехмерном уровне первых интегралов приведенная двумерная поверхность определяется уравнениями (5.2). Значения параметров системы: $\mathbf{A} = \text{diag}(1.8, 1.5, 2)$, $\mathbf{C} = \text{diag}(0.5, 2.9, 1.4)$, $\mu = 1$, $(\mathbf{M}, \gamma) = 1$, $E_0 = 7$

трудностями, обусловленными бóльшей размерностью этой системы и зависимостью «параметра диссипации» ε от времени: $\varepsilon \sim \frac{1}{\tau}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поведение тяжелого тела в жидкости существенно отличается от его движения по инерции, описываемого уравнениями Кирхгофа. Последняя система в общем случае является неинтегрируемой [27, 1] и демонстрирует типичное хаотическое поведение (гамильтонов хаос) [2, 53].

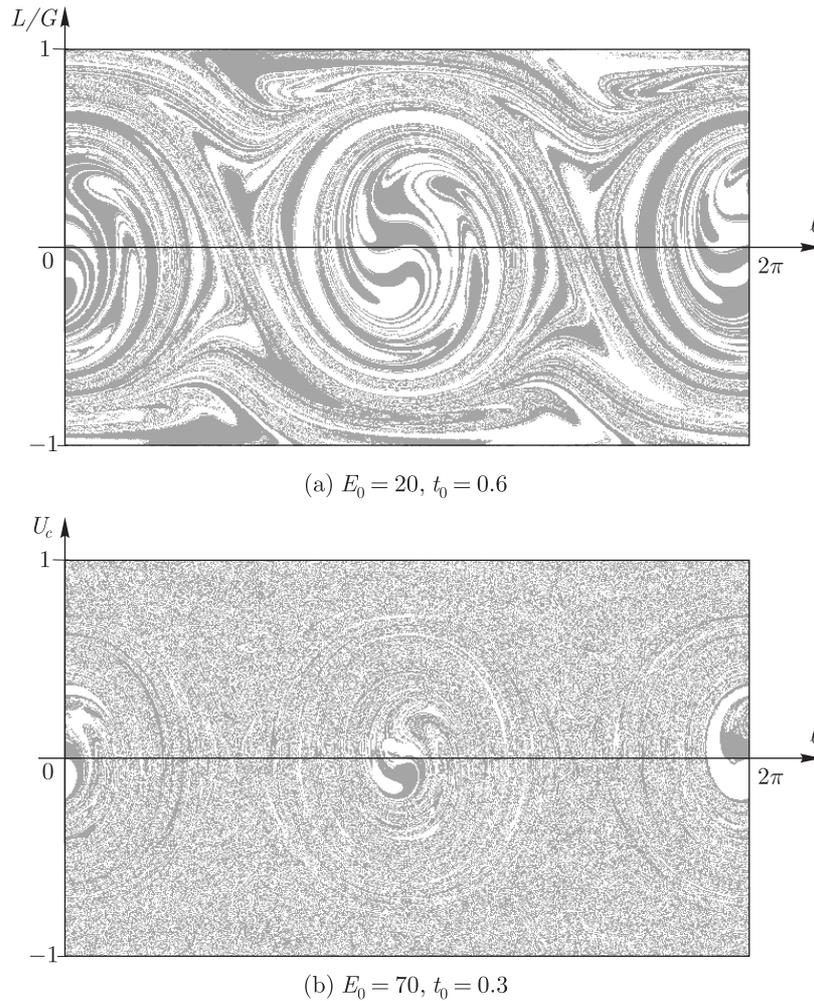


Рис. 10. Характерный вид разбиения поверхности начальных условий в соответствии с поведением системы при $t \rightarrow \infty$ при увеличении начальной энергии и начального момента t_0 . Значения параметров системы: $\mathbf{A} = \text{diag}(1.8, 1.5, 2)$, $\mathbf{C} = \text{diag}(0.5, 2.9, 1.4)$, $\mu = 1$, $(\mathbf{M}, \gamma) = 1$, $E_0 = 1$

6. Падение тела с винтовой симметрией. Решения Стеклова и их устойчивость

Для общего случая $P_1 \neq 0$, $\mathbf{B} \neq 0$ системы (2.6) после замен

$$\frac{1}{2}t^2 = \tau, \quad \mathbf{M} = t\mathbf{m}$$

получим уравнения движения в форме

$$\frac{d\mathbf{m}}{d\tau} = -\frac{1}{2\tau}\mathbf{m} + \mathbf{m} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{m}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \gamma \times \frac{\partial H}{\partial \gamma}, \quad \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{d\tau} = \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{m}}, \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{m}},$$

$$H = H_0 + \frac{1}{\sqrt{2\tau}}H_1 + \frac{1}{2\tau}H_2, \quad H_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{m}, \mathbf{A}\mathbf{m}) - \mu(\mathbf{B}\mathbf{m}, \gamma) + \frac{\mu^2}{2}(\mathbf{C}\gamma, \gamma), \quad (6.1)$$

$$H_1 = P_1(\mathbf{B}\mathbf{m}, \boldsymbol{\alpha}) - P_1\mu(\mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}), \quad H_2 = \frac{P_1}{2}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}) + \mu(\mathbf{r}, \gamma).$$

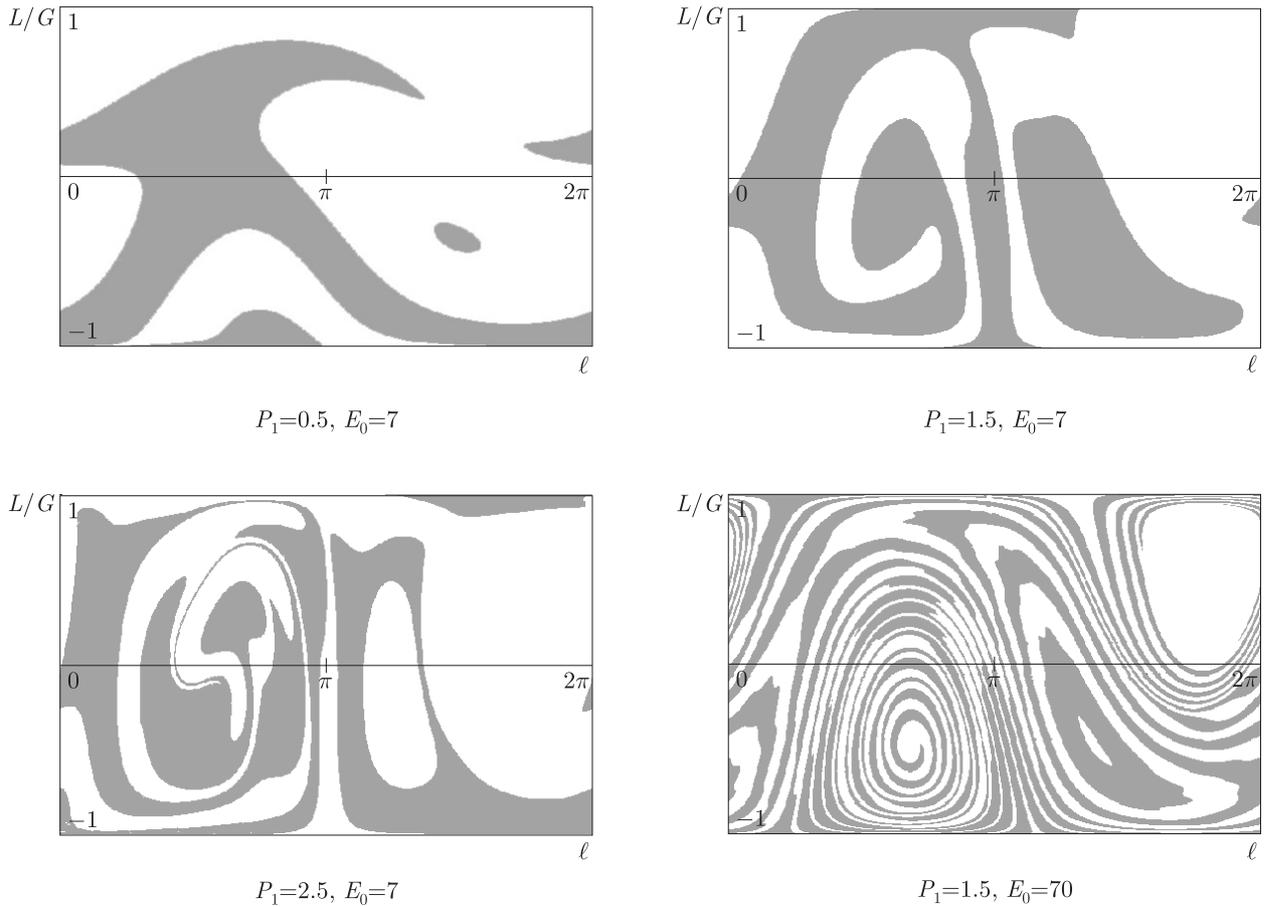


Рис. 11. Аналог случая Лагранжа, т. е. случай существования интеграла $M_3 = \text{const}$. Регулярная структура бассейна притяжения

Теперь дифференцирование энергии вдоль системы дает

$$\frac{dH}{d\tau} = -\frac{(\mathbf{m}, \mathbf{A}\mathbf{m})}{2\tau} + \frac{1}{2\tau} \left(\mathbf{B}\mathbf{m}, \mu\boldsymbol{\gamma} - \frac{2P_1}{\sqrt{2\tau}}\boldsymbol{\alpha} \right) + \frac{W_1}{(2\tau)^{3/2}} + \frac{W_2}{(2\tau)^2}, \tag{6.2}$$

$$W_1 = -P_1\mu(\mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}), \quad W_2 = P_1^2(\mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) + 2\mu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}).$$

Для этой системы уже не справедливы асимптотические закономерности движения, сформулированные в предыдущих разделах. Более того, существуют сложные притягивающие при $t \rightarrow \infty$ режимы движения, отличные от поступательных движений. Прежде всего рассмотрим условия устойчивости (при $\mathbf{B} \neq 0$) классических равноускоренных вращений для уравнений (6.1) и найдем области значений параметров, при которых все они теряют устойчивость (и устойчивыми становятся более сложные режимы). В дальнейшем мы рассмотрим также случай нулевого начального толчка $P_1 = 0$.

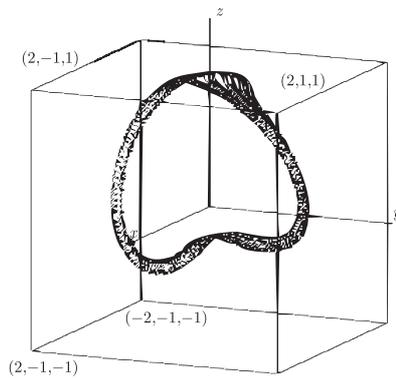
6.1. Линейная устойчивость решений Стеклова

При $P_1 = 0$ уравнения для $\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma}$ отделяются, а интеграл площадей представляется в форме

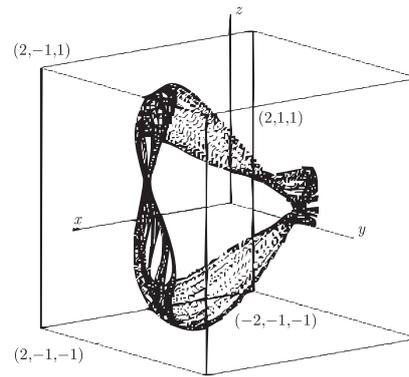
$$(\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma}) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\tau}}, \quad \sigma = \text{const}, \tag{6.3}$$



$$B_{11}=8, B_{22}=0$$

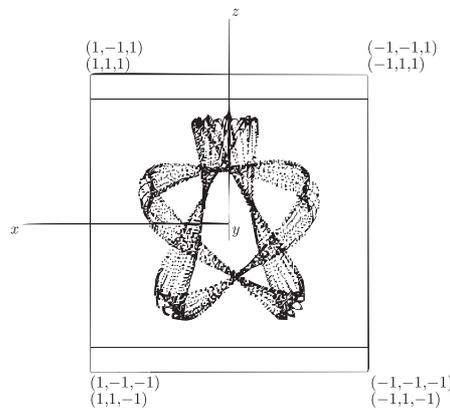


Начальная точка $g \approx 3.04, L/G \approx 0.62$



Начальная точка $g \approx 3.04, L/G \approx 0.62$

$$B_{11}=8, B_{22}=1$$



Начальная точка $g \approx 3.04, L/G \approx 0.62$

Рис. 12.

т. е. $(M, \gamma) = \sigma$.

Если кроме того $r = 0$ и A, B, C одновременно диагонализиремы, то уравнения (6.1) допускают частные решения, аналогичные стационарным решениям (5.4). В базисе собственных векторов матриц A, B, C имеем

$$\gamma_k = \pm 1, \quad \gamma_i = \gamma_j = 0, \quad m_k = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{2\tau}}, \quad m_i = m_j = 0, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad (6.4)$$

т. е. с учетом номера k и возможных знаков \pm имеется шесть частных решений. При этом тело падает таким образом, что его ось Oe_k остается вертикальной, а угловая скорость вращения вокруг нее определяется соотношением

$$\Omega^{(k)} = -\mu b_k t + \sigma a_k,$$

т. е. тело вращается равноускоренно. Скорость начала подвижной системы координат в подвиж-



ных осях определяется выражением $\mathbf{v} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = (\sigma \mathbf{B} - \mu t \mathbf{C}) \boldsymbol{\gamma}$, откуда с помощью (2.2) находим

$$x_i = \text{const}, \quad x_j = \text{const}, \quad x_k = -\mu c_k \frac{t^2}{2} + \sigma b_k t + \text{const},$$

т. е. начало координат движется равномерно ускоренно вдоль вертикальной оси, как и при свободном падении тела. Эти равноускоренные движения были указаны В. А. Стекловым [44] (1895) и С. А. Чаплыгиным [45] (1900). В дальнейшем мы будем называть их *решениями Стеклова*.

По аналогии с решениями (5.4) решения (6.4) всегда неустойчивы во всем фазовом пространстве (по отношению к переменным $\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}$). Эта неустойчивость была указана В. А. Стекловым [44]. В то же время устойчивость по отношению к позиционным переменным $\boldsymbol{\gamma}$ зависит от параметров системы и требует отдельного рассмотрения.

Для исследования устойчивости решений (6.4) выберем новые переменные

$$v_i = \frac{d\gamma_i}{d\tau}, \quad v_j = \frac{d\gamma_j}{d\tau}, \quad i \neq j \neq k \neq i, \tag{6.5}$$

дополняя эти уравнения интегралом площадей (6.3), выразим переменные m_i, m_j, m_k через v_i, v_j, σ . Воспользовавшись соотношением $\gamma_k = \pm 1 \mp \frac{1}{2}(\gamma_i^2 + \gamma_j^2)$ вблизи решений (6.4), получим линеаризованные уравнения для новых переменных в форме

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_i}{d\tau} &= v_i, & \frac{d\gamma_j}{d\tau} &= v_j, \\ \frac{dv_i}{d\tau} &= -a_i^{-1} a_j \varkappa_i^{(k)} \gamma_i + a_i^{-1} a_j \mu (b_i - b_k + a_i (b_j - b_k)) v_j + \\ &+ \frac{\sigma}{\sqrt{2\tau}} a_i^{-1} (\mu a_j a_k (b_i - b_k) \gamma_i + (a_i a_k + a_j a_k - a_i a_j) v_j) - \\ &- \frac{1}{2\tau} (v_i - \sigma^2 a_i^{-1} a_j a_k (a_k - a_i) \gamma_j + \mu (b_j - b_k) \gamma_j), \\ \frac{dv_j}{d\tau} &= \dots, \\ \varkappa_i^{(k)} &= \mu^2 (a_i (c_i - c_k) - (b_i - b_k)^2), \end{aligned} \tag{6.6}$$

где выражение для $\frac{dv_j}{d\tau}$ получается сменой индексов $i \leftrightarrow j$.

Воспользуемся теоремами из [5] о поведении линейных систем вида $\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = (\mathbf{A} + \mathbf{V}(\tau)) \mathbf{x}$, где $\int_{\tau_0}^{\infty} |V'(\tau)| d\tau < \infty$ и $V(\tau) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Применяя их, получим, что характеристические числа линейной системы (6.6) разлагаются по степеням $\tau^{-1/2}$

$$\lambda_k(\tau) = \lambda_k^{(0)} + \frac{\lambda_k^{(1)}}{\sqrt{\tau}} + \frac{\lambda_k^{(2)}}{\tau} + \dots,$$

и необходимыми условиями устойчивости системы (6.6) являются $\text{Re} \lambda_k^{(0)} \leq 0$ (аналогично достаточными условиями неустойчивости являются $\text{Re} \lambda_k^{(0)} > 0$), где $\lambda_k^{(0)}$ — характеристические числа



системы при $\tau = \infty$. Для их определения можно получить (биквадратный) характеристический полином

$$\lambda^4 - \lambda^2(\chi_i^{(k)} + \chi_j^{(k)} - \chi_k^{(k)}) + \chi_i^{(k)}\chi_k^{(k)} = 0. \quad (6.7)$$

Таким образом, необходимым условием устойчивости решений (6.4) является наличие у полинома (6.7) пары чисто мнимых корней (точнее, это условие отсутствия экспоненциальной по τ неустойчивости). Откуда находим соответствующие ограничения на параметры

$$\begin{aligned} \chi_i^{(k)} \cdot \chi_j^{(k)} > 0, \quad \chi_i^{(k)} + \chi_j^{(k)} - \chi_k^{(k)} < 0, \\ D = (\chi_i^{(k)})^2 + (\chi_j^{(k)})^2 + (\chi_k^{(k)})^2 - 2\chi_i^{(k)}\chi_j^{(k)} - 2\chi_i^{(k)}\chi_k^{(k)} - 2\chi_j^{(k)}\chi_k^{(k)} > 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Исследуем теперь подробно устойчивость каждого из решений в зависимости от параметров. Без ограничения общности положим $k = 3$ и $\mu = 1$, $c_3 = 0$, $b_3 = 0$ (выполнения последних двух условий можно достичь с помощью интегралов $\gamma^2 = 1$ и $(M, \gamma) = \text{const}$). Зафиксируем a_1 , a_2 , a_3 , c_1 , c_2 и построим на плоскости параметров b_1 , b_2 области, в которых выполнены неравенства (6.8). В этом случае соотношения (6.8) принимают вид

$$\begin{aligned} (a_1c_1 - b_1^2)(a_2c_2 - b_2^2) > 0, \quad \Phi = a_1c_2 + a_2c_1 + 2b_1b_2 > 0, \\ D = (a_1c_2 - a_2c_1)^2 + 4(a_1b_2 + a_2b_1)(c_2b_1 + c_1b_2) > 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Несложно показать, что имеется три качественно различных случая:

1) $c_3 = 0 > c_1 > c_2$ (т. е. $c_1 < 0$ и $c_2 < 0$); в этом случае на плоскости b_1 , b_2 нет областей, в которых выполнены неравенства (6.8). Можно показать, что решения уравнения (6.7) разбиваются либо на пару вещественных, либо на четверку комплексных.

2) $c_1 > c_3 = 0 > c_2$ (т. е. $c_1 > 0$ и $c_2 < 0$); в этом случае область, определяемая соотношениями (6.9), располагается между прямыми $b_1 = \pm\sqrt{a_1c_1}$ и ветвями гиперболы, определяемой соотношением $D = 0$ (см. рис. 13а).

3) $c_1 > c_2 > c_3 = 0$ (т. е. $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$); в этом случае области, определяемые соотношениями (6.9), располагаются между прямыми $b_1 = \pm\sqrt{a_1c_1}$, $b_2 = \pm\sqrt{a_2c_2}$ и ветвями гиперболы $D = 0$ (см. рис. 13б).

ЗАМЕЧАНИЕ. Несложно показать, что кривые $\Phi = 0$ и $D = 0$ пересекаются между собой в тех же точках, в которых они пересекают какую-либо из прямых $b_i = \pm\sqrt{a_i c_i}$.

Если $b_1 = b_2 = 0$, то условия (6.9) приводят к указанным выше [24], а именно устойчивым оказывается лишь случай 3, т. е. падение, при котором ось, соответствующая максимально присоединенной массе, вертикальна. Таким образом, добавление матрицы \mathbf{B} позволяет стабилизировать (по крайней мере в линейном смысле) движение, при котором «средняя» ось является вертикальной, и не позволяет стабилизировать движение, при котором вертикальна «малая» ось.

Положим теперь для определенности $c_1 > c_2 > c_3 = 0$ и нанесем на плоскости параметров b_1 , b_2 области (линейной) устойчивости решений Стеклова, соответствующих падению «широкой» и «средней» стороной; см. рис. 14 (падение «узкой» стороной всегда неустойчиво). На рисунке хорошо видно, что имеются области, в которых все три решения Стеклова неустойчивы (отмечены белым цветом).

6.2. Об устойчивости по Ляпунову

Для одного из решений Стеклова (6.4), а именно для случая, когда тело падает «широкой» стороной вниз, можно доказать асимптотическую устойчивость (по Ляпунову).



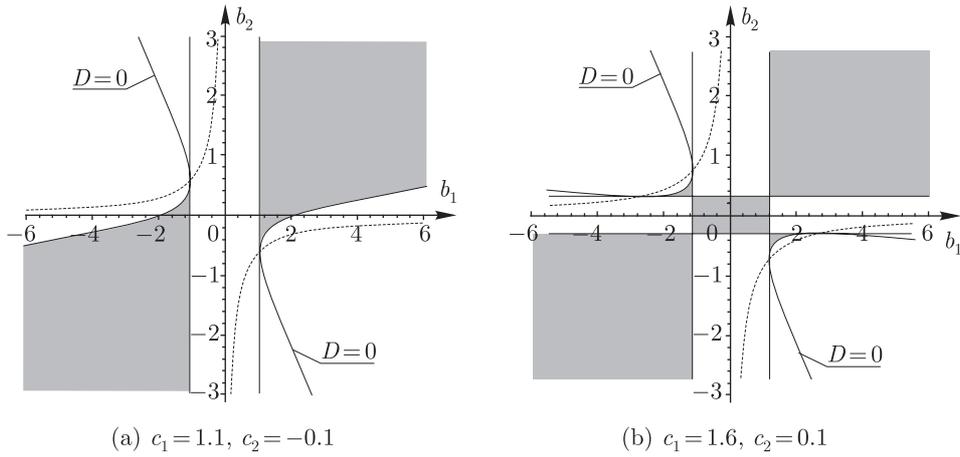


Рис. 13. Характерный вид областей на плоскости параметров b_1, b_2 , для которых выполнены необходимые условия устойчивости (6.9) решений Стеклова при различных соотношениях параметров матрицы \mathbf{C} , при этом $\mathbf{A} = \text{diag}(1, 1.2, 2)$

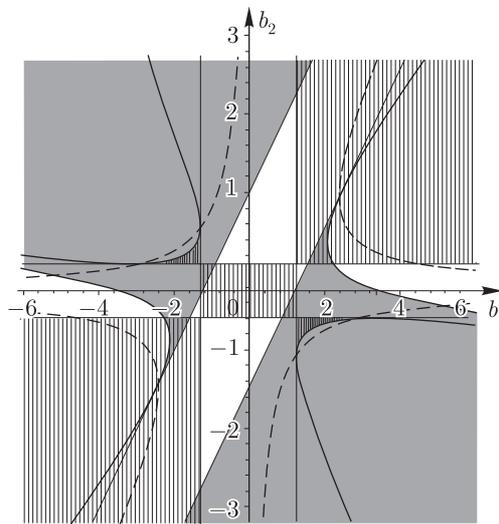


Рис. 14. Характерный вид областей устойчивости на плоскости параметров b_1, b_2 решений Стеклова, соответствующих падению «широкой» (т. е. собственный вектор в направлении максимальной присоединенной массы вертикален) и «средней» стороной вниз. $\mathbf{A} = \text{diag}(1, 1.2, 2)$, $\mathbf{C} = \text{diag}(1.6, 0.1, 0)$

Согласно сказанному выше, без ограничения общности в (6.4) можно положить $i = 1, j = 2, k = 3$ и $b_3 = 0, c_1 > c_2 > c_3 = 0$. Функцию Ляпунова построим в виде

$$V = H_2 + \frac{1}{\tau}W,$$

где H_2 — квадратичная часть гамильтониана вблизи этого решения в переменных $\gamma_1, \gamma_2, v_1, v_2$, имеющая вид

$$H_2 = \frac{1}{2}(a_2^{-1}v_1^2 + a_1^{-1}v_2^2) + \frac{1}{2a_1}\left(a_1c_1 - b_1^2 - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\tau}}a_3b_1 + \frac{\sigma^2}{4\tau^2}a_3(a_1 - a_3)\right)\gamma_1^2 + \frac{1}{2a_2}\left(a_2c_2 - b_2^2 - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\tau}}a_3b_2 + \frac{\sigma^2}{4\tau^2}a_3(a_2 - a_3)\right)\gamma_2^2, \quad (6.10)$$

а функцию W будем искать в виде однородной квадратичной формы по $\gamma_1, \gamma_2, v_1, v_2$ с постоянными коэффициентами.

Легко видеть, что при больших τ функция H_2 и, следовательно, V , положительно определена вблизи начала координат при условиях

$$a_1 c_1 - b_1^2 > 0, \quad a_2 c_2 - b_2^2 > 0. \quad (6.11)$$

Как было показано выше, эти неравенства задают одну из областей устойчивости рассматриваемого решения в линейном приближении (см. рис. 13b). Таким образом, для тех значений параметров, при которых удастся подобрать функцию V , производная которой вдоль решений линейной системы строго отрицательна (при достаточно больших τ), мы можем показать асимптотическую устойчивость в области, ограниченной неравенствами (6.11).

Производная функции V вдоль системы (6.6) имеет вид

$$\frac{dV}{d\tau} = -\frac{1}{\tau}G_1 + \frac{1}{\tau^{3/2}}G_2 + \frac{1}{\tau^2}G_3,$$

где G_1, G_2, G_3 — однородные квадратичные формы по переменным $\gamma_1, \gamma_2, v_1, v_2$. Таким образом, при больших τ знак производной $\frac{dV}{d\tau}$ определяется квадратичной формой G_1 , которая в случае асимптотической устойчивости должна быть положительно определенной.

Прямым вычислением можно показать, что W необходимо выбрать в форме

$$W = k_1 v_1 \gamma_1 + k_2 v_2 \gamma_2,$$

добавление других слагаемых приводит к появлению заведомо отрицательных слагаемых в функции G_1 . При таком выборе W G_2 и G_3 не зависят от v_1, v_2 и

$$\begin{aligned} G_1 = & 2k_1 a_1^{-1} a_2 (a_1 c_1 - b_1^2) v_1^2 + 2k_2 a_2^{-1} a_1 (a_2 c_2 - b_2^2) v_2^2 + \\ & + a_2^{-1} (1 - 2a_2 k_1) \gamma_1^2 + a_1^{-1} (1 - 2a_1 k_2) \gamma_2^2 + \\ & + \frac{1}{2} a_1^{-1} (b_1 - 2k_1 (a_1 b_2 + a_2 b_1)) \gamma_1 v_2 - \frac{1}{2} a_2^{-1} (b_2 - 2k_2 (a_1 b_2 + a_2 b_1)) \gamma_2 v_1. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Несложно получить условия положительной определенности формы G_1 :

$$\begin{aligned} 0 < k_1 < \frac{1}{2a_2}, \quad 0 < k_2 < \frac{1}{2a_1}, \\ -4(a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 k_1^2 - 16a_1 a_2 (c_1 a_1 - b_1^2) k_1 k_2 - b_1^2 + \\ & + 4(2a_1 a_2 c_1 - a_2 b_1^2 + a_1 b_1 b_2) k_1 > 0, \\ -4(a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 k_2^2 - 16a_1 a_2 (c_2 a_2 - b_2^2) k_1 k_2 - b_2^2 + \\ & + 4(2a_1 a_2 c_2 - a_1 b_2^2 + a_2 b_1 b_2) k_2 > 0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Выделяется два случая:

1) $b_1 \cdot b_2 > 0$, тогда, выбирая $k_1 = \frac{1}{2} b_1 (a_1 b_2 + a_2 b_1)^{-1}$, $k_2 = \frac{1}{2} b_2 (a_1 b_2 + a_2 b_1)^{-1}$, мы получаем диагональную заведомо положительно определенную квадратичную форму (6.12);

2) $b_1 \cdot b_2 < 0$, в этом случае достаточные условия разрешимости неравенств (6.13) определяются решениями уравнения четвертой степени (и имеют достаточно громоздкий вид). В то

же время, поскольку в двух последних соотношениях (6.13) лишь одно слагаемое положительно, можно получить необходимые условия разрешимости (6.13) в форме:

$$\begin{aligned} \Phi_1 = 2a_1a_2c_1 - a_2b_1^2 + a_1b_1b_2 > 0, \quad \Phi_2 = 2a_1a_2c_2 - a_1b_2^2 + a_2b_1b_2 > 0, \\ b_1b_2 > \max(-a_1c_2, -a_2c_1). \end{aligned} \quad (6.14)$$

На рис. 15 серым цветом показана область, где рассматриваемое решение заведомо устойчиво, а штриховкой — область, где выполнены необходимые условия (6.14). Как видно из рисунка, при $b_1b_2 < 0$ область асимптотической устойчивости не совпадает со всей областью знакоопределенности квадратичной формы (6.10).

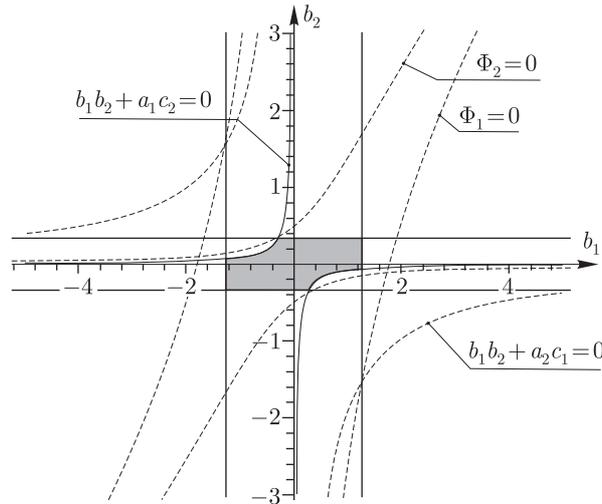


Рис. 15. Область асимптотической устойчивости решения Стеклова, соответствующего падению «широкой» стороной вниз при $\mathbf{A} = \text{diag}(1, 1.2, 2)$, $\mathbf{C} = \text{diag}(1.6, 0.1, 0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Анализ устойчивости для решений Стеклова был выполнен в работах [9, 60] (в линейной и нелинейной постановках). В частности, были получены условия (6.13) в виде общих неравенств на коэффициенты, не различая шесть (без учета знака — три) типов решений Стеклова, соотношение устойчивости и неустойчивости между которыми может быть различным. Мы провели здесь геометрический анализ значений возможных параметров, при которых выполнены условия устойчивости (6.13), и сделали заключение о существовании области значений параметров, при которых все решения Стеклова являются неустойчивыми. В этом случае в фазовом пространстве существует более сложное инвариантное притягивающее множество типа двумерного тора (см. рис. 12), к которому стремятся траектории системы (6.1) при $t \rightarrow +\infty$. Аналитически существование этого инвариантного множества до сих пор не доказано, так как пока вообще не развита теория бифуркаций и качественные методы для систем типа (6.1), для которых линейная «диссипация» убывает во времени от значений параметра $\varepsilon \sim \frac{1}{T}$. В нашем анализе получены также более простые условия линейной устойчивости и устойчивости по Ляпунову вследствие систематического использования гамильтоновой формы уравнений движения.

7. Сани Чаплыгина на наклонной плоскости в поле тяжести

Рассмотрим неголономную задачу о движении тяжелых саней Чаплыгина по наклонной плоскости. Речь идет об изучении плоского движения твердого тела (пластинки) в предположении, что задана некоторая неинтегрируемая связь. Соответствующая неголономная система

называется *санями Чаплыгина*. Предположим, что скорость пластинки в направлении, перпендикулярном ее плоскости равна нулю. Корректной реализацией такой связи, введенной впервые С.А. Чаплыгиным [47], является рассмотрение движения твердого тела, соприкасающегося с абсолютно шероховатой плоскостью посредством лезвия, как раз и запрещающего боковое смещение. При этом предполагается, что лезвие касается плоскости в одной точке, а для большей реалистичности имеются еще две ножки, которые просто скользят по плоскости. Если центр масс совпадает с точкой касания лезвия, то говорят также о движении неголономного конька (skate or knife edge). Эта система независимо изучалась Каратеодори [58] в связи с вопросами реализации связей силами вязкого трения.

Следует иметь в виду, что неголономная модель движения твердого тела также используется для описания движения твердого тела в жидкости, например, в [37] — для изучения падения диска в сопротивляющейся среде (без учета парашютирования), в [76] — для падения пластинки. В [74] неголономная модель падения упомянута в связи с движением в жидкости снарядов с оперением, причем предполагается, что центр масс твердого тела может перемещаться внутри него по заданному закону. Последнее позволяет управлять движением твердого тела. Следует отметить, что все указанные работы используют не совсем корректную модель реализации неголономной связи, если оставаться в рамках идеальной жидкости. В развернутой форме на это обстоятельство было указано в ряде статей [15, 16, 17, 18, 19, 20].

Действительно, если устремить присоединенную массу тела в одном из направлений к бесконечности (не меняя остальных параметров), то в пределе тело будет двигаться в жидкости так, что скорость некоторой выделенной точки тела в этом направлении обратится в нуль. Таким образом, мы получаем неинтегрируемую связь, однако тело будет двигаться отнюдь не по законам неголономной динамики. Ее уравнения движения будут иметь вариационную природу, а соответствующая общая модель движения называется *вакономной* динамикой. С этой точки зрения задачу о соскальзывании тяжелых саней Чаплыгина по наклонной плоскости можно рассматривать как *неголономную* модель падения тела в жидкости. Однако такая модель (вопреки точке зрения, высказанной в [37]) на самом деле не связана с эффектами парашютирования и не отражает правильно физические механизмы взаимодействия твердого тела и жидкости (см. также [74, 76]).

Обратно, вакономную механику нельзя использовать (как это систематически делается, например, в [57]) для описания неголономных задач, которые возникают при другой корректной реализации связей. Для неголономной механики к бесконечности стремится не присоединенная масса, а коэффициент вязкого трения скольжения (предполагается, что до предельного перехода рассматривается «освобожденная» система с вязким трением.) Таким образом, задача о движении саней Чаплыгина имеет совершенно другую механическую интерпретацию, не связанную с падением тел в идеальной жидкости. На возможности такой интерпретации, использующей вязкую жидкость и циркуляцию, мы здесь не останавливаемся, хотя это и может стать темой отдельного исследования с позиций более общих способов выполнения предельного перехода [26]. Однако две эти задачи имеют схожие моменты, связанные с анализом устойчивости равноускоренных движений тела, и поэтому мы их рассматриваем в одной работе.

Выберем две системы координат — неподвижную Oxy и $O'x_1x_2$, жестко связанную с телом, начало отсчета которой расположено в середине пластинки (рис. 15); a — расстояние от точки O' до центра масс (отлично от нуля для неподвижной пластины).

Пусть ω — угловая скорость тела, $(v_1, v_2) = \mathbf{v}$ — проекции скорости точки O' на подвижные оси. Тогда уравнение связи (выражающее условие равенства нулю проекции скорости точки O на ось $O'\eta$) имеет вид

$$v_2 = 0. \quad (7.1)$$

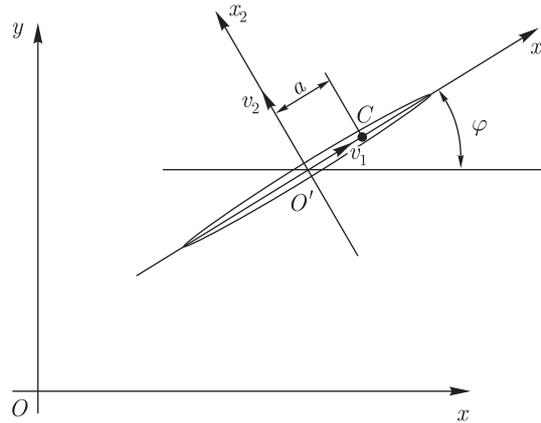


Рис. 15.

Эта связь не является интегрируемой и не приводит к каким-либо ограничениям на положение пластинки на плоскости. Используя принцип Даламбера–Лагранжа для уравнений со связями, после исключения неопределенного множителя получим уравнение движения в форме

$$\begin{aligned}
 m\dot{v}_1 &= m\omega^2 - \frac{\partial U}{\partial x} \cos \varphi, & (I + ma^2)\dot{\omega} &= -ma\omega v_1 - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \\
 \dot{\varphi} &= \omega, & \dot{x} &= v_1 \cos \varphi, & \dot{y} &= v_1 \sin \varphi,
 \end{aligned}
 \tag{7.2}$$

где m, I — присоединенная масса и момент инерции относительно центра масс, $\mathbf{r} = (x, y)$ — координаты точки O' в неподвижной системе координат, φ — угол поворота подвижных осей (рис. 15), U — потенциал поля энергии внешнего поля. Как замечено в [21], для уравнений (7.2) инвариантная мера не существует, исключая случай $a = 0$. Несуществование инвариантной меры является типичным свойством неголономных систем, обуславливающим наличие негамильтонового асимптотического поведения и даже так называемых странных аттракторов в фазовом пространстве [3]. В этом смысле поведение неголономных систем ближе к диссипативным, чем к гамильтоновым, и для них типичен выход на некоторый стационарный режим.

Уравнения (7.2) имеют интеграл энергии

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(mv_1^2 + (I + ma^2)\omega^2) + U(x, y, \varphi).
 \tag{7.3}$$

При движении в поле тяжести, направленном вдоль оси Ox , получим

$$U = \mu t(x + a \cos \varphi),$$

где через μt обозначен вес тела. Так как уравнение движения не меняется при замене $a \rightarrow -a$, $v_1 \rightarrow -v_2$, $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$, без ограничения общности положим $a \geq 0$.

Сделаем обезразмеривающие замены переменных и времени:

$$v_1 = \sqrt{\mu a A} v, \quad \omega = \sqrt{\frac{\mu}{a A}} \omega, \quad x = a A \bar{x}, \quad y = a A \bar{y}, \quad \bar{t} = \sqrt{\frac{\mu}{a A}} t,
 \tag{7.4}$$

где $A^2 = \frac{I + ma^2}{ma^2}$, при этом уравнения движения пластинки представляются в форме

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \varepsilon w^2 - \cos \varphi, & \frac{dw}{dt} &= -\varepsilon v w + \varepsilon \sin \varphi, & \frac{d\varphi}{dt} &= w, \\ \frac{d\bar{x}}{dt} &= v \cos \varphi, & \frac{d\bar{y}}{dt} &= v \sin \varphi, \end{aligned} \quad (7.5)$$

где $A^{-1} = \varepsilon$, при этом $0 \leq \varepsilon < 1$. Заметим, что при $\mu \neq 0$ замена (7.4) несингулярная, причем если $a \rightarrow 0$, то $\varepsilon \rightarrow 0$, но при этом $\lim_{a \rightarrow 0} aA = \sqrt{I/m}$.

Интеграл энергии в новых переменных переписывается в виде

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}(v^2 + w^2) + \bar{x} + \varepsilon \cos \varphi.$$

7.1. Интегрируемые случаи

Имеется два крайних случая $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$, когда система (7.5) интегрируется в квадратурах.

Пусть $\varepsilon = 0$ (поле тяжести отсутствует), тогда решение представляется в элементарных функциях:

$$\begin{aligned} w &= w_0, & \varphi &= \varphi_0 + w_0 \bar{t}, & v &= v_0 - w_0^{-1} \sin \varphi, \\ \bar{x} &= \bar{x}_0 + w_0^{-1} \left(v_0 \sin \varphi - \frac{1}{2} w_0^{-1} \sin^2 \varphi \right), \\ \bar{y} &= \bar{y}_0 - \frac{1}{2} w_0^{-1} \bar{t}^2 - w_0^{-1} \left(v_0 \cos \varphi - \frac{1}{2} w_0^{-1} \cos \varphi \sin \varphi \right), \end{aligned} \quad (7.6)$$

где $v_0, w_0, \varphi_0, \bar{x}_0, \bar{y}_0$ — константы интегрирования. Этот случай был проинтегрирован С.А. Чаплыгиным с помощью метода приводящего множителя [47]. Однако введение им квазиординат (длины дуги вдоль траектории точки лезвия) сильно усложнило сведение к квадратурам, которое выполняется элементарно. Если тело опущено без начального толчка ($v_0 = 0$), то оно движется по циклоиде [37].

Таким образом, при $\varepsilon = 0$ тело не соскальзывает вниз, но испытывает дрейф (со средней скоростью $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{aA}} w_0^{-1}$) в горизонтальном направлении.

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда для величин

$$\alpha = w \sin \varphi - v \cos \varphi, \quad \beta = w \cos \varphi + v \sin \varphi$$

получим простейшие уравнения $\frac{d\alpha}{dt} = 1, \frac{d\beta}{dt} = 0$, следовательно

$$\alpha = \alpha_0 + \bar{t}, \quad \beta = \beta_0,$$

где α_0, β_0 — постоянные интегрирования. Без ограничения общности положим $\alpha_0 = 0$, тогда для величины $\xi = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ получим неавтономное уравнение

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{2} \beta_0 (1 - \xi^2) + \bar{t} \xi. \quad (7.7)$$

Общее решение этого уравнения выражается через специальные функции Уиттекера [50]. Мы не приводим здесь это решение из-за его громоздкости, а рассмотрим лишь асимптотическое поведение при $\bar{t} \rightarrow \pm\infty$. Из уравнения (7.7) находим $\xi(\bar{t}) = \frac{2}{\beta_0}\bar{t} + O(\bar{t}^{-1})$, откуда получаем

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{t}) &= \pi - \frac{\beta_0}{\bar{t}} + O(\bar{t}^{-3}), & v(\bar{t}) &= \bar{t} + O(\bar{t}^{-1}), \\ \bar{x}(\bar{t}) &= -\frac{1}{2}\bar{t}^2 + O(\bar{t}), & \bar{y}(\bar{t}) &= \beta_0\bar{t} + O(1). \end{aligned}$$

То есть асимптотически тело движется по параболе.

Таким образом, при $\varepsilon = 1$ все движения стремятся к равноускоренному падению пластинки.

7.2. Частные решения и их устойчивость

Система (7.5) имеет пару простых частных решений, для которых $\bar{y} = \text{const}$, $w = 0$:

$$\varphi = 0, \quad v = v_0 - \bar{t}, \quad \bar{x} = v_0\bar{t} - \frac{1}{2}\bar{t}^2, \tag{7.8.1}$$

$$\varphi = \pi, \quad v = v_0 + \bar{t}, \quad \bar{x} = -v_0\bar{t} - \frac{1}{2}\bar{t}^2. \tag{7.8.2}$$

Эти решения соответствуют прямолинейному равноускоренному падению пластинки вдоль вертикальной прямой, при этом плоскость пластинки остается параллельным этой прямой, в первом случае ($\varphi = 0$) центр масс находится выше точки контакта, а во втором ($\varphi = \pi$) — ниже.

Для исследования устойчивости (по части переменных) этих частных решений сделаем замену скоростей и времени в первых трех уравнениях системы (7.5)

$$\bar{t} d\bar{t} = d\tau, \quad v = \bar{t}\bar{u}, \quad \omega = \bar{t}\bar{w},$$

получим неавтономную систему вида

$$\frac{d\bar{u}}{d\tau} = \varepsilon\bar{w}^2 - \frac{1}{2\tau}(\bar{u} + \cos \varphi), \quad \frac{d\bar{w}}{d\tau} = -\varepsilon\bar{u}\bar{w} - \frac{1}{2\tau}(\bar{w} - \varepsilon \sin \varphi), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \bar{w}. \tag{7.9}$$

Решению (7.8.1) соответствует частное решение системы (7.9) вида $\varphi = 0, \bar{w} = 0, \bar{u} = -1 + \frac{v_0}{\sqrt{2\tau}}$, т. е. траектория вдоль прямой стремится к неподвижной точке $\bar{u} = -1, \bar{w} = 0, \varphi = 0$.

Решению (7.8.2) в системе (7.9) соответствует: $\varphi = \pi, \bar{w} = 0, \bar{u} = 1 + \frac{v_0}{\sqrt{2\tau}}$, т. е. траектория стремится к неподвижной точке $\bar{u} = 1, \bar{w} = 0, \varphi = \pi$.

Покажем, что справедливы утверждения об асимптотической устойчивости и неустойчивости в точном нелинейном смысле. Справедлива следующая

Теорема 1. *Неподвижная точка $\bar{u} = -1, \bar{w} = 0, \varphi = 0$ (соответствующая скольжению с центром масс выше точки контакта лезвия) неустойчива; неподвижная точка $\bar{u} = 1, \bar{w} = 0, \varphi = \pi$ (центр масс ниже точки контакта лезвия) асимптотически устойчива.*

Доказательство. Перейдем к полярным координатам на плоскости \bar{u}, \bar{w} по формулам

$$\bar{u} = \cos \psi, \quad \bar{w} = \rho \sin \psi,$$



при этом уравнения движения (7.9) представляются в виде

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{d\tau} &= -\frac{1}{2\tau}(\rho + \cos\varphi \cos\psi - \varepsilon \sin\varphi \sin\psi), \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= -\varepsilon\rho \sin\psi + \frac{1}{2\tau} \frac{\cos\varphi \sin\psi + \varepsilon \sin\varphi \cos\psi}{\rho}, \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \rho \sin\psi.\end{aligned}\quad (7.10)$$

Для доказательства неустойчивости первой неподвижной точки (которая для системы (7.10) имеет вид $\rho = 1$, $\psi = \pi$, $\varphi = 0$) положим в окрестности $\rho = 1 + X$, $\psi + \varepsilon\varphi = \pi + Y$, $\varphi = Z$. Построим функцию Четаева [49], которую в данном случае можно выбрать в форме

$$\Phi = (\psi - \pi)(\psi + 2\varepsilon\varphi - \pi) = (Y + \varepsilon Z)(Y - \varepsilon Z), \quad (7.11)$$

и положим, что $-\frac{\varepsilon\pi}{2} < Y < \frac{\varepsilon\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < Z < \frac{\pi}{2}$, так что в указанной области функция Φ однозначно определена. (Заметим, что вследствие того, что функция не является 2π -периодической по φ и ψ , она не определена глобально.)

Дифференцируя (7.11), находим

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{d\tau} &= 2\varepsilon^2(1+X)G_0 + \frac{1}{\tau}(1+X)^{-1}G_1, \\ G_0 &= Z \sin(Y - \varepsilon Z), \quad G_1 = -Y(\sin(Y - \varepsilon Z) \cos Z + \varepsilon \cos(Y - \varepsilon Z) \sin Z).\end{aligned}$$

В рассматриваемом прямоугольнике $(-\frac{\varepsilon\pi}{2} < Y < \frac{\varepsilon\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < Z < \frac{\pi}{2})$ в области, где $\Phi < 0$ заведомо $G_0 < 0$, однако имеются зоны, в которых $G_1 > 0$. В то же время вблизи начала координат функции $G_{0,1}$ представляются в виде

$$G_0 = Z(Y - \varepsilon Z) + O(R^3), \quad G_1 = -Y^2 + O(R^3), \quad R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)},$$

следовательно, всегда можно указать область в окрестности нуля, для которой $\Phi < 0$, и при достаточно больших τ также $\frac{d\Phi}{d\tau} < 0$. Поэтому согласно теореме Четаева [49] рассматриваемая неподвижная точка неустойчива.

Докажем теперь устойчивость второго решения; аналогично положим в его окрестности $\rho = 1 + X$, $\psi + \varepsilon\varphi = \varepsilon\pi + Y$, $\varphi = \pi + Z$. Выберем функцию Ляпунова в окрестности неподвижной точки в виде определено положительной квадратичной формы

$$V = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + (Y + \varepsilon Z)^2 + \frac{\varepsilon}{2\tau}Z^2). \quad (7.12)$$

(Эта функция также однозначно определена лишь в окрестности рассматриваемой точки, так как не является 2π -периодической по φ , ψ .)

Дифференцируя (7.12), получим

$$\begin{aligned}\frac{dV}{d\tau} &= -\varepsilon(1+X)F_0 - \frac{1}{\tau}F_1 - \frac{1}{\tau^2}\frac{\varepsilon}{4}F_2, \\ F_0 &= Y \sin Y, \quad F_2 = Z^2, \quad F_1 = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + (Y + \varepsilon Z)^2) + O(R^3),\end{aligned}\quad (7.13)$$

следовательно, имеется окрестность неподвижной точки, в которой $\frac{dV}{d\tau} < 0$, таким образом согласно теореме Ляпунова неподвижная точка является устойчивой.

Вследствие вырожденности функции G_0 асимптотическая устойчивость требует более детального рассмотрения. Воспользуемся методом работы [22]; согласно (7.12) и (7.13) имеется окрестность неподвижной точки, в которой функции V и F_1 не имеют критических точек кроме начала координат, и $G_1 > 0$ всюду за исключением $\mathbf{R} = 0$. Следовательно, для всех начальных условий (при $\tau = \tau_0$) из этой окрестности $V(\tau)$ — монотонно убывающая функция, и так как V ограничена снизу, имеется предел $V(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} V^*$. Предположим, что $V^* > 0$, используя это и сравнивая (7.12) и (7.13), заключаем, что, начиная с некоторого момента $\tau > \tau_0^* > \tau_0$, функция F_1 будет ограничена снизу $F_1 \geq F_1^* > 0$; интегрируя соотношение (7.13) получим

$$V^* \leq V(\tau_0) - \int_{\tau_0^*}^{\infty} \frac{F_1^*}{\tau} d\tau.$$

Но последний интеграл расходится и, следовательно, предположение, что $V^* > 0$ неверно, т. е. $V^* = 0$. Таким образом, положение равновесия асимптотически устойчиво.

ЗАМЕЧАНИЕ. Существование отличной от нуля функции F_0 в (7.13) приводит к тому, что по некоторым направлениям траектория экспоненциально стремится к началу координат.

Укажем асимптотическое поведение вблизи неподвижных точек.

а) Неустойчивое положение равновесия. Пусть $\rho = 1 + X$, $\psi + \varepsilon\varphi = \pi + Y$, $\varphi = Z$, для линеаризованной системы получим решение

$$X = \frac{C_1}{\sqrt{\tau}}, \quad Y = \frac{C_2}{\sqrt{\tau}}, \quad Z = \left(C_3 - \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} C_2 \operatorname{erf}(\sqrt{\varepsilon\tau}) \right) e^{\varepsilon\tau}.$$

б) Устойчивое положение равновесия. Пусть $\rho = 1 + X$, $\psi + \varepsilon\varphi = \varepsilon\pi + Y$, $\varphi = \pi + Z$, для линеаризованной системы находим

$$X = \frac{C_1}{\sqrt{\tau}}, \quad Y = \frac{C_2}{\sqrt{\tau}}, \quad Z = \left(C_3 + C_2 \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \operatorname{erfi}(\sqrt{\varepsilon\tau}) \right) e^{-\varepsilon\tau},$$

где

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad \operatorname{erfi}(z) = -i \operatorname{erf}(iz) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt,$$

C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования. Можно показать, что справедливо асимптотическое представление $\sqrt{\pi} e^{-z} \operatorname{erfi}(\sqrt{z}) = \frac{1}{\sqrt{z}} \left(1 + \frac{1}{2z} + \frac{3}{4z^2} + o(z^{-2}) \right)$.

Заметим также, что из вида производной $\frac{d\rho}{d\tau}$ можно заключить, что

$$\rho(\tau) \leq 1 + (\rho_0 - 1) \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau}}, \tag{7.14}$$

где $\rho_0 = \rho(\tau_0)$. Для доказательства заметим, что если $0 \leq \varepsilon < 1$, то $\cos \varphi \cos \psi - \varepsilon \sin \varphi \sin \psi \leq 1$, поэтому $\frac{d\rho}{d\tau} \leq -\frac{1}{2\tau}(\rho - 1)$. Интегрируя это соотношение, получим (7.14).

Физический смысл неравенства (7.14) заключается в том, что кинетическая энергия тела при скольжении не может увеличиваться быстрее, чем при падении строго вниз вдоль линии наибольшего ската.

Аналогично можно показать, что

$$\rho(\tau) \geq (1 + \rho_0) \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau}} - 1,$$

что означает, что кинетическая энергия при движении не может уменьшаться быстрее, чем при подъеме тела строго вдоль линии наибольшего ската.

В работе [36] показано, что в первом приближении по углу наклона χ почти все решения стремятся к решениям второго типа (7.8.2).

7.3. Качественные закономерности движения

Оказывается, что для рассмотренного выше частного решения (7.8.2) можно явно указать область, в которой выполнены достаточные условия устойчивости (по части переменных). Рассмотрим для этого функцию

$$h = \frac{1}{2}w^2 + \varepsilon \cos \varphi, \quad (7.15)$$

при этом согласно (7.5):

$$\frac{dh}{d\bar{t}} = -\varepsilon v w^2, \quad \frac{dv}{d\bar{t}} = \left(\varepsilon + \frac{1}{2\varepsilon}\right)w^2 - \frac{1}{\varepsilon}h. \quad (7.16)$$

Отсюда видно, что если в начальный момент времени $\bar{t} = 0$ выполнены неравенства $v > 0$ и $h < 0$, то они остаются выполненными во все последующие моменты времени (так как согласно (7.16) в этом случае $\frac{dv}{d\bar{t}}(\bar{t}) > 0$ и $\frac{dh}{d\bar{t}} < 0 \forall \bar{t}$). Таким образом, справедливо

Предложение 1. Пусть при $\bar{t} = 0$ начальные условия находятся в области $v > 0$, $h < 0$, тогда при всех $\bar{t} \geq 0$ траектория остается в этой области.

При помощи метода, использованного в доказательстве теоремы 1 (основанном на анализе сходимости некоторого несобственного интеграла), можно показать, что для всех начальных условий из указанной области

$$\varphi(\bar{t}) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \pi.$$

То есть центр масс стремится занять наинизшее возможное положение. Покажем теперь, что при $v > 0$ траектория за конечное время покидает область с большими значениями функции h .

Предложение 2. Пусть при $t = 0$: $v = v_0$, $h = h_0 > \varepsilon + \frac{1}{2\varepsilon}$, тогда существует момент времени $t_* \leq v_0^{-1} \left(h_0 - \varepsilon - \frac{1}{2\varepsilon} \right)$, такой что $h(t_*) \leq \varepsilon + \frac{1}{2\varepsilon}$.

Доказательство. Как следует из (7.5), $\frac{dv}{d\bar{t}}$ зависит лишь от w , φ ; при этом область $\frac{dv}{d\bar{t}} \leq 0$ на плоскости φ , w окружает начало координат, а линии уровня функции $h = \text{const}$ касаются этой области при $h = 0$ и $h = \varepsilon + \frac{1}{2\varepsilon}$ (см. рис. 16).

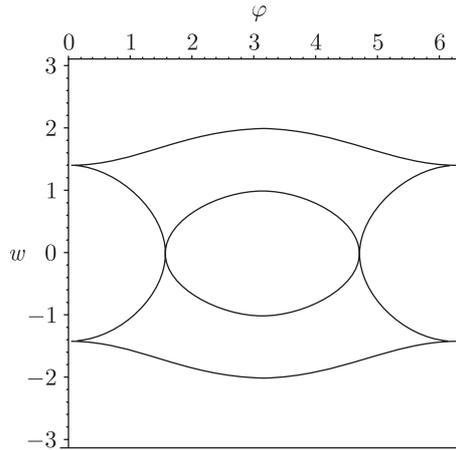


Рис. 16.

Как видно из рисунка, в области $h > \varepsilon + \frac{1}{2\varepsilon}$ выполнено неравенство $\frac{dv}{dt} > 0$, следовательно если в начальный момент $v_0 > 0$, то согласно (7.16) $h(\bar{t})$ — убывающая функция, причем всюду в рассматриваемой области $\frac{dh}{dt} \leq -v_0$. Следовательно, в какой-то момент времени $t_* \leq v_0^{-1} \left(h_0 - \varepsilon - \frac{1}{2\varepsilon} \right)$ функция h станет меньше, чем $\varepsilon + \frac{1}{2\varepsilon}$.

Заметим, что уравнения движения (7.5) инварианты относительно смены знака времени:

$$\bar{t} \rightarrow -\bar{t}, \quad v \rightarrow -v, \quad w \rightarrow -w, \quad \varphi \rightarrow \varphi. \tag{7.17}$$

Как следствие получаем, что устойчивым при $t \rightarrow -\infty$ также является частное решение (7.8.2), в котором нужно поменять знак времени. Этот факт выглядит несколько неочевидным, так как при этом движении центр масс располагается позади центра пластинки (т. е. отстает), и более естественно при $t \rightarrow -\infty$ выглядела бы устойчивость решения (7.8.1), когда центр масс опережает геометрический центр. Таким образом неголономная пластинка при наличии поля тяжести больше напоминают своего рода маятник с «точкой подвеса» в геометрическом центре. Кроме того, как следствие инвариантности уравнений относительно преобразования (7.17) заключаем, что область, в которой выполнены достаточные условия устойчивости (см. предложение 1) решения (7.8.2) при $\bar{t} \rightarrow -\infty$ определена неравенствами

$$h < 0, \quad v < 0.$$

7.4. Компьютерный анализ

Рассмотрим теперь возможные методы компьютерного анализа исследуемой системы. Сначала сосредоточимся на возможном расширении области устойчивости, описываемой предложением 1. Обозначим начальную область (при $t \rightarrow 0$), определяемую неравенствами $v > 0$ и $h < 0$, как S_0 , и рассмотрим ее эволюцию во времени S_t , при $t < 0$. Ясно, что все точки, попавшие внутрь полученной области, определяют начальные условия для траекторий, которые при $t \rightarrow +\infty$ попадут в S_0 и, следовательно, притянутся к устойчивому решению (7.8.2).

На рисунках 17–20 приведен характерный вид (части) границы области S_t при некоторых значениях ε и достаточно малых по абсолютной величине значениях t . Как видно из приведенных численных экспериментов область притяжения устойчивого решения (7.8.2) существенно шире



(см. рис. 17–20), чем это может быть установлено аналитически (см. предложение 1). Более того, численные исследования позволяют высказать следующее предположение.

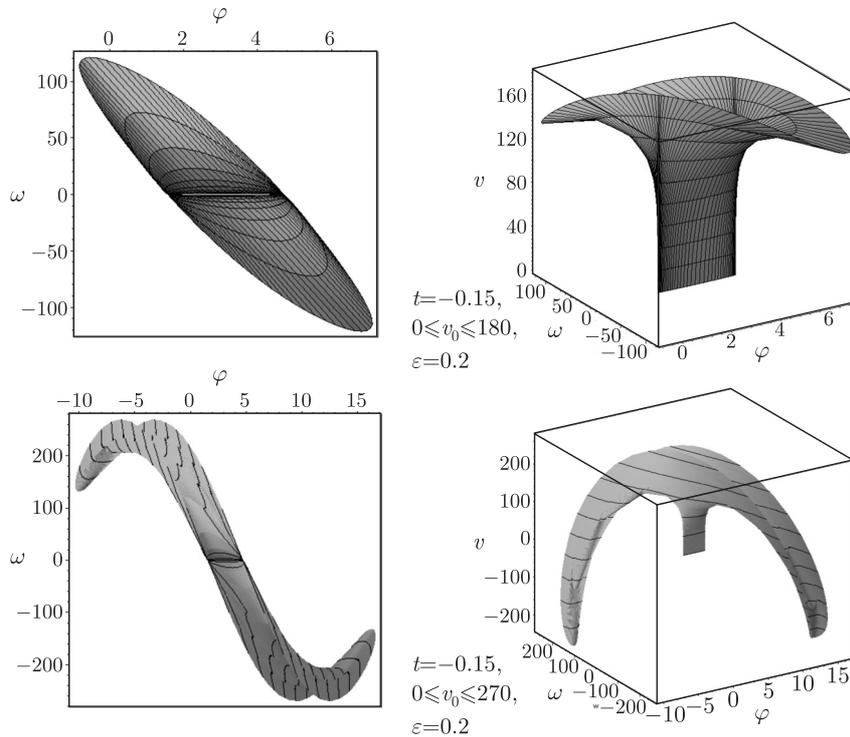


Рис. 17. На рисунке показана эволюция границы области $h < 0$ (т. е. поверхности $h = 0$) при изменении времени от 0 до $t < 0$. В первом случае взят кусок поверхности, заключенный между плоскостями $v = 0$ и $v = 180$, а во втором — между плоскостями $v = 0$ и $v = 270$. (Для удобства мы здесь не выполнили отождествления $\varphi \bmod 2\pi$.)

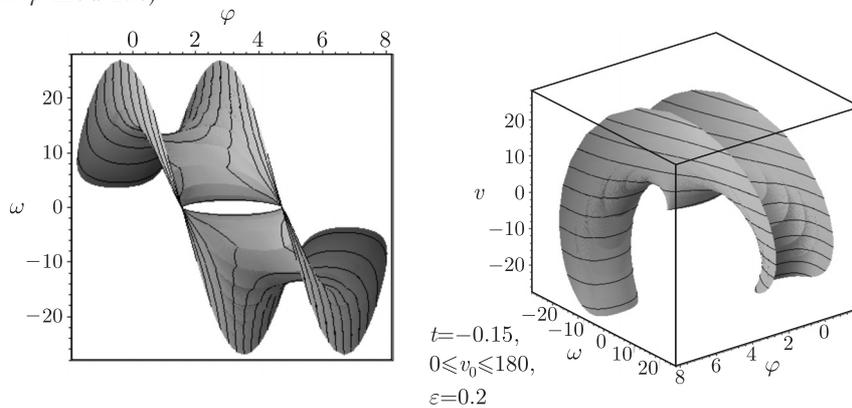


Рис. 18. Характерный вид границы области S_t при достаточно больших ε

Гипотеза. Почти все решения системы (7.5) при $\bar{t} \rightarrow +\infty$ стремятся к решению (7.8.2).

Отметим также любопытную особенность рассматриваемых областей S_t : даже при достаточно малых по абсолютной величине $t < 0$ граница области S_t сколь угодно близко подходит к плоскости $w = 0$, если v — достаточно большое по абсолютной величине отрицательное число

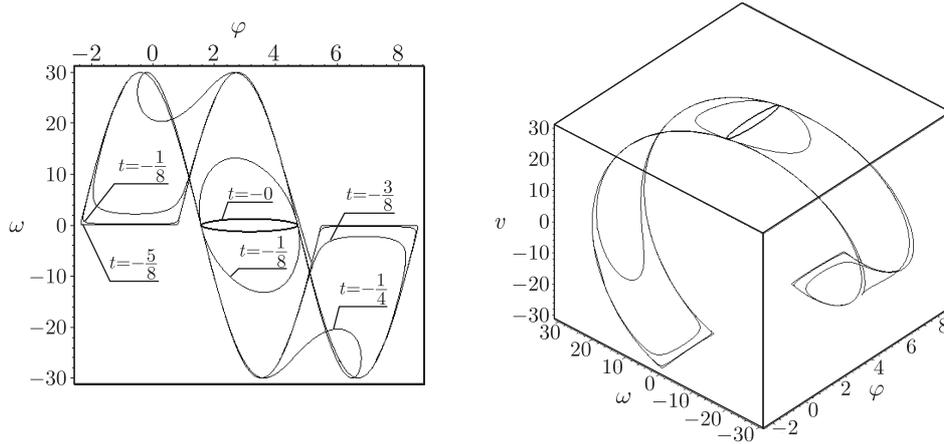


Рис. 19. Деформация границы одного из сечений, определяемого уравнениями $h = 0, v = 30$, при значениях $t = -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}$ ($\varepsilon = 0.8$)

(см. рис. 17–20).

Таким образом, согласно сказанному выше, почти всегда при $t \rightarrow +\infty$ неголономная пластинка стремится к падению вдоль вертикали, при котором ее плоскость также вертикальна, а центр масс опережает геометрический центр. Естественный вопрос, возникающий при этом: сколько оборотов успевают сделать тело в зависимости от начальных условий при $t = 0$?

Для численного исследования этого вопроса при $t = 0$ зафиксируем в пространстве переменных v, w, φ некоторую плоскость $v = v_0 = \text{const}$, и для каждой точки этой плоскости построим соответствующую траекторию, в зависимости от числа оборотов тела при этом окрасим исходную точку в определенный цвет. В результате получим разбиение плоскости начальных условий на области, соответствующие одинаковому количеству оборотов: $D^{(n)}, n = 0, 1, \dots$

Характерный вид разбиения плоскости $v = \text{const}$ при различных значениях v_0 и ε приведен на рисунке 20. На рисунке видно, что область устойчивости, определенная предложением 1, попадает внутрь области $D^{(0)} \cup D^{(1)}$, т. е. тело успевает совершить либо 0, либо 1 оборот.

Неожиданным результатом этих численных экспериментов является то, что в фазовом пространстве имеются зоны, в которых области $D^{(n)}$ чередуются в очень малых по размеру областях плоскости (см. рис. 20). Причем увеличение соответствующих участков плоскости, вплоть до размеров, при которых невозможно исключить погрешности вычислений, не позволяет обнаружить регулярного чередования областей $D^{(n)}$.

В связи с этим возникают два вопроса, ответ на которые, по-видимому, не может быть получен при помощи численных экспериментов.

1. Имеет ли разбиение плоскости начальных условий на области $D^{(n)}$ фрактальный характер (т. е. чередование областей $D^{(n)}$ сохраняется при сколь угодно сильном увеличении соответствующих участков плоскости)?

2. Имеются ли траектории, которым соответствует бесконечное число оборотов, и траектории, для которых тело не испытывает векового ухода вдоль линии наибольшего ската? (Заметим, что согласно вышеприведенной гипотезе такие решения могут образовывать лишь множество меры нуль.)

По аналогии с движением пластинки в жидкости можно также рассмотреть различные модели наклонного движения саней Чаплыгина, учитывающие трение. Здесь имеются две возможности. Для первой из них мы предполагаем, что неголономная связь сохраняется, но вводится



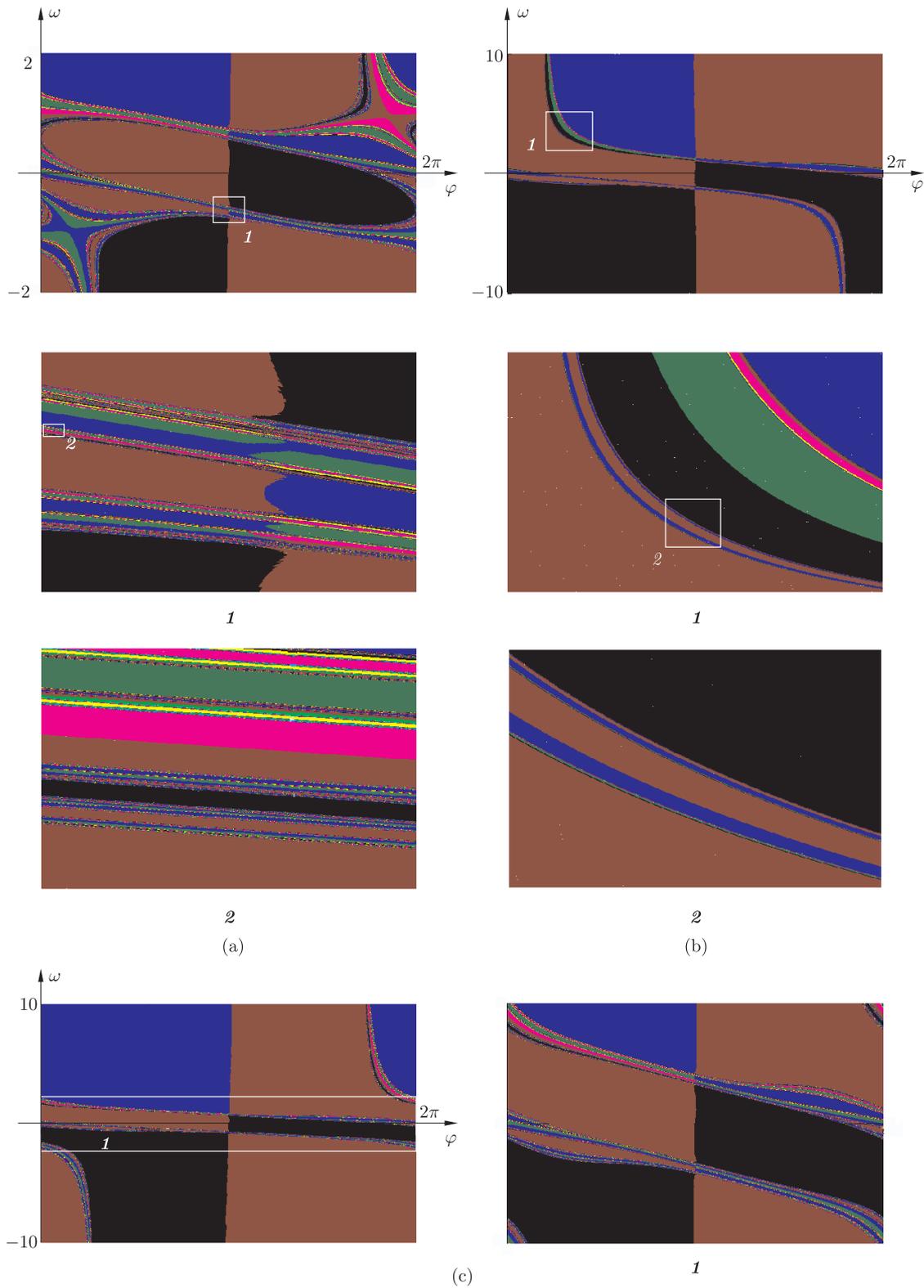


Рис. 20. Характерный вид области $D^{(n)}$ на плоскости начальных условий: (а) $v_o = 0, a = 1, \mu = 1, m = 0.5, I=10$; (б) $v_o = 0, a = 0.5, \mu = 1, m = 1, I=3$; (с) $v_o = 5, a = 1, \mu = 1, m = 0.5, I = 10$. (Полноцветная версия рисунка размещена в электронной версии статьи на сайте журнала: <http://nd.ics.org.ru>.)

диссипация, например, связанная с трением ножек (не лезвия) о плоскость. Для случая вязкого трения движение саней по наклонной плоскости рассмотрено в работе [37], где найдены стационарные режимы и исследована их линейная устойчивость. При реализации второй возможности считается, что тело может проскальзывать (т.е. допускается), а связь заменяется силой трения, коэффициент которой достаточно велик. Для случая сухого трения эта задача рассматривается в книге [14]. Здесь задача об исследовании динамически уравновешенных саней Чаплыгина сведена к анализу точечного плоского отображения. Это отображение имеет сложную структуру и может быть изучено численно. Оказывается, что в зависимости от единственного существенного параметра $\lambda \geq 0$ (определяющего интенсивность трения) тело либо стремится к установившемуся режиму, при котором центр масс в среднем не смещается вниз по наклонной плоскости $\lambda > 2$, либо центр масс уже смещается вдоль наклонной прямой (при $\pi/2 < \lambda < 2$). В последнем случае траектория состоит из одинаковых повторяющихся участков движения без скольжения и со скольжением. К сожалению, более общие постановки задач (например, при наличии смещения центра масс саней или при введении иных законов трения) достаточно сложны и пока совсем не изучены.

В заключение, укажем, что асимптотическое движение динамически несимметричного уравновешенного шара, катящегося без проскальзывания по наклонной плоскости, рассмотрено в [4]. В отличие от саней Чаплыгина эта система обладает инвариантной мерой, и ее асимптотическое поведение в некотором смысле является более простым.

8. Падение пластинки в вязкой жидкости при учете циркуляции

В рассмотренной задаче о падении твердого тела жидкость предполагается идеальной, а обтекание пластинки жидкостью безциркуляционным. При описании реального падения необходимо учитывать также диссипативные эффекты, связанные с наличием вязкости жидкости, а также, следуя классическим идеям Жуковского и Чаплыгина [11, 12, 45], возможность возникновения вокруг тела циркуляции, приводящей к появлению подъемной силы.

Возникновение горизонтального смещения пластинки, брошенной в воздухе, впервые было отмечено Дж. К. Максвеллом [71] и Л. П. Муийаром (Mouillard) [73]. Если продолговатому прямоугольнику из плотной бумаги сообщить начальное вращение вокруг продольной оси, то он во все время падения будет сохранять вращение в заданную сторону и равномерно опускаться по наклонной прямой так, что наблюдатель, от которого он удаляется, видит его верхний край опускающимся сверху вниз. Математическое исследование этой задачи было предпринято Н. Е. Жуковским в двух статьях [11, 12]. В первой статье в рамках теории вихревого обтекания пластинки идеальной жидкостью рассмотрена упрощенная модель взаимодействия твердого тела и сопротивляющейся среды, сводящаяся лишь к одной подъемной силе (при этом угол атаки предполагается постоянным). В предположении о постоянстве циркуляции скорости вдоль контура, охватывающего пластинку, установлено, что ее центр тяжести движется по горизонтально расположенной циклоиде и в среднем вниз не опускается (аналогично уравновешенным саням Чаплыгина [37]). Во второй работе кроме подъемной силы вводится еще сила лобового сопротивления. Предполагается, что эти силы квадратично зависят от скорости центра масс пластинки, причем коэффициенты пропорциональности (являющиеся функциями от угла атаки) заменены их постоянными средними значениями. Эта модель уже допускает движение вниз в среднем по наклонной прямой. В работах [11, 12] вращение пластинки происходит с постоянной угловой скоростью. Однако, как показывают эксперименты, при реальном движении угловая скорость пластинки быстро стремится к некоторому предельному значению, зависящему лишь от физических параметров задачи, а не от начальных данных.

Плоскопараллельное движение твердого тела с произвольным контуром в идеальной жидкости, но с учетом возможности циркуляционного движения вокруг него впервые изучалось Чаплыгиным [48] и Ламбом [29]. В работе [48] С.А. Чаплыгин получил уравнения движения, указал и изучил интегрируемый случай, исследовал частные решения. Современный анализ этих уравнений, доказательство их неинтегрируемости, а также библиографию можно найти в [56]. В отличие от рассмотренной нами выше модели бесциркуляционного обтекания, для падения в поле тяжести при ненулевой циркуляции вокруг тела центр масс тела в среднем вниз не смещается и движется (хотя и хаотически) в некоторой горизонтальной полосе, в среднем не смещаясь вниз. Как уже отмечалось, в простейшей постановке такое нереалистичное движение уже было получено Н. Е. Жуковским [11].

При введении диссипации (например, второго трения, задаваемого функцией Рэлея), тело уже всегда имеет ненулевое среднее вертикальное смещение. Однако в такой общей модели возможны уже самые различные режимы движения, качественно впервые описанные Дж. Максвеллом. Эти режимы обсуждаются с разных точек зрения в ряде работ [51, 52, 53, 54, 69, 70, 75], где приведены результаты аналитического, численного и натурального моделирования задачи. В работах [61, 79] обсуждаются аналогичные режимы для падения круглого диска.

В общем случае при падении диска имеются два равномерных движения, при которых вектор скорости центра масс либо перпендикулярен плоскости пластинки, либо лежит в ее плоскости. Последнее движение всегда неустойчиво. Первое движение может потерять устойчивость через бифуркацию Хопфа, что приведет к возникновению колебательных режимов. Различают два таких режима, связанных между собою через гетероклиническую бифуркацию и являющихся одними из самых замечательных гидродинамических феноменов. В первом случае тело порхает в воздухе, совершая ограниченные колебания вблизи ставшего неустойчивым равномерного падения широкой стороной вниз. Тело в среднем горизонтально не смещается. Для второго режима типичны перевороты (кувыркания) твердого тела относительно указанного равномерного падения. При этом возможно ненулевое среднее горизонтальное смещение пластинки, происходящее так как описал Му́йар. В недавней работе [51] собраны имеющиеся результаты по аналитическому и численному анализу (как с привлечением феноменологических моделей, так и прямого численного моделирования уравнений Навье—Стокса) переходов между описанными режимами движения.

В работе [77] указан хаотический режим, возникающий при падении тела в вязкой жидкости. В фазовом пространстве возникает фазовое множество, напоминающее странный аттрактор. Однако, как справедливо отмечено в [78], авторы [77] не учли в своей модели присоединенных масс и моментов, обусловленных инерцией жидкости. Интересно было бы исследовать такие сложные режимы для уточненной модели взаимодействия тела со средой.

В заключение отметим редко цитируемую работу [25], в которой с использованием метода малого параметра указано устойчивое периодическое решение уравнений движения тела в среде с вязкой диссипацией и допускающее ненулевые средние горизонтальные и вертикальные смещения. Это решение является также асимптотически устойчивым по отношению к части переменных. В работе [25] указан также интегрируемый случай, возникающий при определенных ограничениях на параметры задачи, для которого можно провести полный качественный анализ движения при больших t . В этом случае уравнения движения не допускают никаких автоколебаний, а пластинка стремится (при больших t) к равномерному падению вниз вдоль вертикальной прямой с асимптотически постоянной скоростью.

Благодарности. Авторы благодарны К. Г. Тронину за проведенные компьютерные вычисления. Работа выполнена в рамках программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (грант НШ-1312.2006.1), при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-01058). Работа А. В. Борисова и И. С. Мамаева также выполнена при поддержке ЕНО «Регулярная и хаотическая гидродинамика» (грант РФФИ 07-01-92210) и INTAS (грант 04-80-7297).

Список литературы

- [1] Борисов А.В., Необходимые и достаточные условия интегрируемости уравнений Кирхгофа, *Регул. хаотич. дин.*, 1996, т. 1, № 2, с. 61–73.
- [2] Борисов А.В., Кирьянов А.И., Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа, В Сб. *Математические методы в механике*, М.: МГУ, 1990, с. 13–18.
- [3] Борисов А.В., Мамаев И.С., Странные аттракторы в динамике кельтских камней, *УФН*, 2003, т. 173, №4, с. 407–418.
- [4] А.В. Борисов, И.С. Мамаев, О движении шара Чаплыгина по наклонной плоскости, *Доклады РАН*, 2006, т. 406, №5, с. 620–623.
- [5] Борисов А.В., Мамаев И.С., Холмская А.Г., Случай С.В. Ковалевской и новые интегрируемые системы динамики, *Вестн. молодых ученых. Прикл. Мат. Мех.*, 2000, № 4, с. 13–25.
- [6] Борисов А.В., Козлов В.В., Мамаев И.С., О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости, *Труды Института математики и механики УрО РАН*, 2006, т. 12, № 1, с. 25–47.
- [7] Борисов А.В., Мамаев И.С., *Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*. М.-Ижевск, ИКИ, 2005, 576 с.
- [8] Горячев Д.Н., К вопросу о движении тяжелого тела в жидкости, *Изв. Импер. об-ва любителей естествознания при Моск. Императ. Унив.*, 1893, т. 78, № 2, с. 59–61.
- [9] Дерябин М.В., Об устойчивости равноускоренных вращений тяжелого твердого тела в идеальной жидкости, *Изв. РАН. МТТ*, 2002, № 5, с. 30–34.
- [10] Дерябин М.В., Козлов В.В., Об эффекте «выныривания» тяжелого твердого тела в жидкости, *Изв. РАН. МТТ*, 2002, № 1. с. 68–74.
- [11] Жуковский Н.Е., О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси. Статья первая. *Полн. собр. соч.*, М.-Л., 1937, Т. V, с. 72–80.
- [12] Жуковский Н.Е., О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси. Статья вторая. *Полн. собр. соч.*, М.-Л., 1937, Т. V, с. 100–115.
- [13] Жуковский Н.Е., О движении тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью I, II, III. *Журнал Русского физ.-хим. об-ва*, 1885, т. 17, отд. 1, вып. 6, с. 81–113; вып. 7, с. 145–149; вып. 8, с. 231–280. Собр. соч. т. 1, М., 1949, с. 31–152.
- [14] Журавлев В.Ф., Фуфаев Н.А., *Механические системы с неустойчивыми связями*, М.: Наука, 1993, 240 с.
- [15] Козлов В.В., Реализация неинтегрируемых связей в классической механике, *Доклады АН СССР*, 1983, т. 272, № 3, с. 550–554.
- [16] Козлов В.В., Динамика систем с неинтегрируемыми связями. I., *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика*, 1982, № 3, с. 92–100.
- [17] Козлов В.В., Динамика систем с неинтегрируемыми связями. II., *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика*, 1982, № 4, с. 70–76.

- [18] Козлов В.В., Динамика систем с неинтегрируемыми связями. III., *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика*, 1983, № 3, с. 102–111.
- [19] Козлов В.В., Динамика систем с неинтегрируемыми связями. IV., *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика*, 1987, № 5, с. 76–83.
- [20] Козлов В.В., Динамика систем с неинтегрируемыми связями. V., *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика*, 1988, № 6, с. 51–54.
- [21] Козлов В.В., К теории интегрирования уравнений неголономной механики, *Успехи механики*, 1985, т.8, вып. 3, с. 85–107.
- [22] Козлов В.В., О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости, *Изв. АН СССР. Сер. Мех. тв. тела*, 1989, № 5, с. 10–16.
- [23] Козлов В.В., О полиномиальных интегралах динамических систем с полутора степенями свободы, *Мат. заметки*, 1989, т. 45, № 4, с. 46–52.
- [24] Козлов В.В., Об устойчивости положений равновесия в нестационарном силовом поле, *Прикл. мат. мех.*, 1991, т. 55, № 1, с. 12–19.
- [25] Козлов В.В., К задаче о падении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде, *Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика*, 1990, № 1, с. 79–86.
- [26] Козлов В.В., К вопросу о реализации связей в динамике, *Прикл. мат. мех.*, 1992, т. 56., вып. 4, с. 692–698.
- [27] Козлов В.В., Онищенко Д.А., Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа *Докл. АН СССР*, 1982, т. 266, № 6, с. 1298–1300.
- [28] Колосов Г.В., Об одном случае движения тяжелого твердого тела, опирающегося острием на гладкую плоскость. *Труды Общества любителей естествознания. Отд. физич. наук.*, 1898, т. 10, с. 11–12.
- [29] Ламб Г., *Гидродинамика*, ОГИЗ, Гостехиздат, 1947, 928 с.
- [30] Ляпунов А.М., О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости, *Сообщ. Харьк. мат. об-ва*, 1888, сер. 1, т. 1, № 1–2, с. 7–60.
- [31] Ляпунов А.М., Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости, *Сообщ. Харьк. мат. об-ва*, 1893, сер. 1, т. 4, № 1–2, с. 81–85.
- [32] Ляпунов А.М., *Общая задача об устойчивости движения*, Изд. Харьк. мат. об-ва, Харьков, 1892, 250+XI стр.; доступное издание докторской диссертации А. М. Ляпунова см. в: Ляпунов А.М., *Общая задача об устойчивости движения (диссертация и статьи)*, ОНТИ, Л.-М., 1935. Французский вариант: *Problème Général de la Stabilité de Mouvement*, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, 1907, vol. 9, pp. 203–474.
- [33] Ляпунов А.М., Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, *Сообщ. Харьк. мат. общ-ва*, сер. 2, 1894, т. 4, № 3, с. 123–140; доступное издание: *Собр. соч.*, т. 1. М., 1954, с. 402–417.
- [34] Ляпунов А.М., Об интегрировании дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости, 1893, 145 рукописных страниц. Рукопись хранится в Санкт-Петербургском филиале Архива РАН.
- [35] Ляпунов А.М., О движении тяжелого твердого тела в жидкости в двух случаях, указанных Клебшом, 1888–1893, около 8 рукописных страниц. Рукопись хранится в Санкт-Петербургском филиале Архива РАН.
- [36] Мощук Н.К., О движении саней Чаплыгина, *Прикл. мат. мех.*, 1987, т. 51, вып. 4, с. 546–551.
- [37] Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А., *Динамика неголономных систем*. М.: Наука, 1967, 519 с.

- [38] Нейштадт А.И., Об эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов, *Изв. АН СССР. Сер. Мех. тв. тела*, 1980, № 6, с. 30–36.
- [39] Некрасов П.А., Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. *Мат. сборник Кружка любителей мат. наук*, 1896, т. 18, вып. 2, с. 161–274.
- [40] Рамоданов С.М., О влиянии циркуляции на характер падения тяжелого твердого тела в жидкости, *Изв. АН СССР. Сер. Мех. тв. тела* 1996, № 5. С. 19–24.
- [41] Рамоданов С.М., Асимптотика решений уравнений Чаплыгина, *Вестн. МГУ. Сер. мат. мех*, 1995, № 3, с. 93–97.
- [42] Стеклов В.А., О движении твердого тела в жидкости, Харьков, 1893. 234 с.
- [43] Стеклов В.А., Дополнения к сочинению «О движении твердого тела в жидкости». Харьков, 1895.
- [44] Стеклов В.А., О некоторых возможных движениях твердого тела в жидкости, *Труды отд. физ. наук об-ва любителей естествознания, антропологии и этнографии*, 1895. т. 7. с. 1–40.
- [45] Чаплыгин С.А., О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости, *Полн. собр. соч.*, Л.: Изд-во АН СССР. 1933. т. 1. с. 133–150.
- [46] Чаплыгин С.А., Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости, *Полн. собр. соч.*, М.-Л.: ГИТТЛ. 1948. т. 1. с. 337–346. (Изд. 1-е: *Труды отд. физ. наук об-ва любителей естествознания*, 1903, т. 11, вып. 2. с. 7–10.)
- [47] Чаплыгин С.А., К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе, *Полн. собр. сочинений*, М.-Л.: Гостехиздат, 1948, Т. 1, с. 15–25.
- [48] Чаплыгин С.А., О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло, *Полн. собр. соч.*, Л.: Изд-во АН СССР, 1933. т. 3. с. 3–64.
- [49] Четаев Н.Г., *Устойчивость движения*, М.: Наука, 1990, 176 с.
- [50] Abramowitz M. and Stegun I., *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publications Inc., 1965, 1046 p.
- [51] Andersen A., Pesavento, U. and Jane Wang Z., Analysis of Transitions Between Fluttering, Tumbling and Steady Descent of Falling Cards, *J. Fluid Mech.*, 2005, vol. 541, pp. 91–104.
- [52] Andersen A., Pesavento U. and Jane Wang Z., Unsteady Aerodynamics of Fluttering and Tumbling Plates. *J. Fluid Mech.*, 2005, vol. 541, pp. 65–90.
- [53] Aref H. and Jones S.W., Chaotic Motion of a Solid Through Ideal Fluid, *Phys. Fluids A*, 1993, vol. 5, no. 12, pp. 3026–3028.
- [54] Belmonte A., Eisenberg H., and Moses E., From Flutter to Tumble: Inertial Drag and Froude Similarity in Falling Paper, *Phys. Rev. Lett.*, 1998, vol. 81, pp. 345–348.
- [55] Bertolli M.L. and Bolotin S.V., Doubly asymptotic trajectories of Lagrangian systems in homogeneous force fields, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 1998, vol. 174, pp. 253–275.
- [56] Borisov A.V and Mamaev I.S., On the Motion of a Heavy Rigid Body in an Ideal Fluid with Circulation, *Chaos*, 2006, Vol. 16, no. 1, 013118 (7 pages).
- [57] Bloch A.M., *Nonholonomic Mechanics and Control*, Interdisciplinary Applied Mathematics, 24. Systems and Control. New York: Springer-Verlag, 2003.
- [58] Carathéodory C., Der Schlitten, *Z. Angew. Math. Mech.*, 1933, Bd. 13, S. 71–76.
- [59] Deryabin M.V., On Asymptotics of Chaplygin Equation, *Regul. Chaotic Dyn.*, 1998, vol. 3, no. 1, pp. 93–97.

- [60] Deryabin M.V., On Stability of Uniformly-Accelerated Motions of an Axially-Symmetric Rigid Body in an Ideal Fluid, *Z. Angew. Math. Mech.*, 2003, vol. 83, no. 3, pp. 197–203.
- [61] Field S.B., Klaus M., Moore M.G., and Nori F., Chaotic Dynamics of Falling Disks, *Nature*, 1997, vol. 388, pp. 252–254.
- [62] Hanßmann H. and Holmes P., On the Global Dynamics of Kirchhoff's Equations: Rigid Body Models for Underwater Vehicles. Invited paper at *Workshop in honor of Floris Takens*, Netherlands, June 24–29, 2001. In: Broer, H.W., Krauskopf B., and Vegter, G., Eds., *Global Analysis of Dynamical Systems*, Bristol: IOP, UK, 2001, pp. 353–371.
- [63] Holmes P., Jenkins J.T., and Leonard N.E., Dynamics of the Kirchhoff Equations I: Coincident Centers of Gravity and Buoyancy, *Physica D*, 1998, vol. 118, no. 3–4, pp. 311–342.
- [64] Kobb G., Sur le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1895, t. 23, pp. 210–215.
- [65] Kötter F., Über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit I, *J. reine angew. Math.*, 1892, B. 109, S. 51–81.
- [66] Kötter F., Über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit II, *J. reine angew. Math.*, 1892, B. 109, S. 89–111.
- [67] Leonard N.E., Stability of a Bottom-Heavy Underwater Vehicle, *Automatica*, 1997, vol. 33, no. 3, pp. 33–346.
- [68] Lewis A.D. and Murray R.M., Variational Principles for Constrained Systems: Theory and Experiment. *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 1995, vol. 30, no. 6, pp. 793–815.
- [69] Mahadevan L., Tumbling of a Falling Card, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1996, t. 323, pp. 729–736.
- [70] Mahadevan L., Ryu W.S., and Samuel A.D.T., Tumbling cards, *Phys. Fluids*, 1999, vol. 11, pp. 1–3.
- [71] Maxwell J.C., On a Particular Case of the Descent of a Heavy Rigid Body in a Resisting Medium, *Camb. Dublin Math. J.*, 1853, vol. 9, pp. 115–118.
Maxwell J.C., *The Scientific Letters and Papers of James Clerk Maxwell, Vol. I*, Edited by P.M. Harman, Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1990, p. 115.
- [72] Morales-Ruiz J.J. and Ramis J.P. Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems, *Progress in Mathematics*, Vol. 179, Birkhäuser, 1999.
- [73] Mouillard L.P., *L'empier de l'air*, Paris, 1881, 211 p. English transl.: *The Empire Of The Air*, Smithsonian Institution, 1893.
- [74] Osborne J.M. and Zenkov D.V., Steering the Chaplygin Sleigh by a Moving Mass, *Proc. 44th IEEE Conf. on Decision and Control, and the Europ. Control Conf. 2005, Seville, Spain, Dec. 12–15, 2005*, pp. 1114–1118.
- [75] Pesavento U. and Jane Wang Z., Falling paper: Navier–Stokes Solutions, Model of Fluid Forces, and Center of Mass Elevation, *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, 144501.
- [76] Rand R.H. and Ramani D.V., Relaxing Nonholonomic Constraints, *Proc. 1st Int. Symp. on Impact and Friction of Solids, Structures, and Intelligent Machines*, Singapore: World Sci., 2000, pp. 91–100.
- [77] Tanabe Y. and Kaneko K., Behavior of a Falling Paper, *Phys. Rev. Lett.*, 1994, vol. 73, pp. 1372–1375.
- [78] Aref H., Mahadevan L., and Jones S.W. Comment on “Behavior of a Falling Paper” (Y. Tanabe and K. Kaneko, *Phys. Rev. Lett.*, 1994, vol. 73, 1372–1375), *Phys. Fluids A.*, 1995, vol. 57, pp. 1420–1420.
- [79] Willmarth W.W., Hawk N.E. and Harvey R.L., Steady and unsteady motions and wakes of freely falling disks, *Phys. Fluids*, 1964, vol. 7, pp. 197–208.